Mémoire

présenté à l'Université Pierre et Marie Curie

pour obtenir

l'Habilitation à Diriger des Recherches

Modélisation physique d'instruments de musique et de la voix :

Systèmes dynamiques, problèmes directs et inverses

Thomas HELIE

Equipe Analyse/Synthèse, Ircam - CNRS UMR 9912 - UPMC
Laboratoire des Sciences et Technologies de la Musique et du Son
1, place Igor Stravinsky - 75004 Paris - France

Habilitation soutenue le 23 janvier 2013 devant le jury composé de :

M.	Philippe Depalle	Professeur , CIRMMT, Université de McGill	Rapporteur
M.	Joël Gilbert	Directeur de recherche , LAUM, CNRS	Rapporteur
Mme	Françoise Lamnabhi-Lagarrigue	Directrice de recherche , L2S, CNRS	Rapporteur
M.	Benoît Fabre	Professeur , LAM-IJLRA, Université Paris 6	Examinateur
M.	Jean Kergomard	Directeur de recherche , LMA, CNRS	Examinateur
M.	Bernhard Maschke	Professeur , LAGEP, Université Lyon 1	Examinateur
M.	Xavier Pelorson	Directeur de recherche , GIPSA-Lab, CNRS	Examinateur
M.	Pierre Rouchon	Professeur , CAS, Mines-ParisTech	Examinateur

Résumé

Les travaux et le programme de recherche présentés dans ce mémoire s'intéressent à la modélisation physique, aux systèmes dynamiques entrée-sortie et à la recherche et au développement de certains outils technologiques dédiés aux instruments de musique, à la production de la voix et aux systèmes audio. Le chapitre 1 est consacré à l'acoustique des tubes à section variable. Nous y proposons un modèle mono-dimensionnel fondé sur 4 ingrédients. Ce modèle permet d'approcher des profils réguliers par jonction de portions de tubes à évasement constant. Il restitue un formalisme en matrices de transfert pour le calcul analytique d'immittances et un formalisme en guides d'ondes numériques, efficace pour la synthèse sonore en temps réel. Une validation est présentée par comparaison avec des mesures effectuées sur un trombone. Le chapitre 2 développe des outils de systèmes entrée-sortie. Le premier traite de la réduction d'ordre de systèmes linéaires dits "à mémoire longue" (opérateurs délicats à simuler car non compacts) par une approche en représentations *diffusives* et *intégrales*. Cette méthode permet notamment de traiter les dérivées temporelles d'ordre non-entier mises en jeu par les pertes visco-thermiques dans les tubes et d'aboutir à des simulations temporelles réalistes. Le second outil traite de "l'évolution régulière du timbre du son avec la nuance" en introduisant des méthodes fondées sur les séries de Volterra et des extensions à perturbations régulières. Plusieurs cas sont traités : sons cuivrés, corde, filtre de synthétiseur Moog. De nouveaux résultats, théoriques et pratiques, sont donnés sur la convergence de ces séries. Puis, de premiers résultats sur l'inversion entrée-sortie et l'observation d'état d'un système simplifié complet d'instrument à vent sont proposés. Le chapitre 3 présente des outils technologiques pour la mesure et la visualisation de données expérimentales, la validation de modèles, et la simulation de systèmes producteurs de sons. Plusieurs domaines sont abordés : les amplificateurs guitare à lampe, une bouche artificielle robotisée dédiée au jeu des cuivres, un dispositif de tomographie et d'impédancemétrie multi-canal pour le conduit laryngé, un analyseur de spectre à alignement chromatique. Enfin, le chapitre 4 enchaîne avec les perspectives et le projet de recherche.

Abstract

This dissertation is devoted to the study of physical modelling, input-to-output dynamical systems and to the research and development of some technological tools dedicated to musical instruments, voice production and audio systems. Chapter 1 is devoted to acoustic pipes with a varying cross-section. We propose a one-dimensional model based on 4 ingredients. It allows to approximate smooth profiles by connecting segments with constant flare. It restores a transfer matrix formalism for the analytic calculation of immittances and a digital waveguide formalism which proves relevant for real-time sound synthesis. A validation is made by comparison with measurements on a trombone. Chapter 2 develops tools for input-to-output systems. The first one deals with the reduction of order of the so-called " long memory" linear systems (operators difficult to simulate because non-compact) by based on "diffusive" and "integral" representations. In particular, this method can handle time derivatives of non-integer order, involved by visco-thermal losses tubes and lead to realistic time simulations. The second tool deals with " the regular evolution of timbre with the musical dynamics" by introducing methods based on Volterra series and regular perturbation methods. Several cases are treated : brassy sounds, string, Moog filter synthesizer. New theoretical and practical results are given on the convergence of these series. Then, first results on the input-to-output inversion and on state observers of a simplified system of complete wind instrument are proposed. Chapter 3 presents technological tools for the measurement of experimental data, for the validation of models and the simulation of sound generators. Several topics are addressed : tube guitar amplifiers, a robotized artificial mouth dedicated to the playing of brass instruments, and a tomography and multi-chanel impedance device for the larynx study, a spectrum analyzer with a chromatic alignment. Finally, chapter 4 connects with prospects and the research project.

Remerciements

Je tiens à remercier vivement les rapporteurs, Philippe Depalle, Joël Gilbert, Françoise Lamnabhi-Lagarrigue, et les examinateurs Benoît Fabre, Jean Kergomard, Bernhard Maschke, Xavier Pelorson et Pierre Rouchon, qui me font l'honneur de mettre leur expertise au service de l'évaluation de ce document.

Ma recherche doit beaucoup à mon employeur, le CNRS, qui offre une liberté d'esprit appréciable et une confiance tangible. Plus en amont, elle doit aussi beaucoup à P. Bertrand (DEA ATS, Univ. Paris-Sud), à l'équipe du DEA ATIAM (UPMC), au département scientifique et UMR de l'IRCAM qui, sous la direction d'H. Vinet, a vu cette recherche germer, à l'équipe Analyse/Synthèse et ses chefs d'équipe X. Rodet qui m'a accueilli dans son équipe et a dirigé ma thèse puis A. Roebel, au Laboratoire des Signaux et Systèmes et E. Walter (qui m'a accueilli dans le cadre d'un poste d'ATER), et au Laboratoire des Systèmes Non Linéaires (Univ. Paris-Sud, CNRS, Supélec) et M. Hasler qui m'a fait découvrir les séries de Volterra et qui, avec P. Vandergheynst, m'a accueilli en post-doctorat à l'EPFL.

Plusieurs travaux de recherche sont issus de collaborations avec (par ordre de rencontre) C. Vergez, D. Matignon, B. Laroche, B. d'Andréa-Novel avec J.-M. Coron, puis plus récemment, F. Dubois, I. Greff et, pour les travaux sur la voix, B. Doval, N. Henrich, M. Kob, A. Lagier et T. Legou. Plusieurs travaux de développement ont été réalisés grâce à T. Carpentier, R. Muller et C. Picasso. Je remercie les membres des équipes *Analyse/Synthèse* et *Acoustique instrumentale* de l'IRCAM avec qui j'ai pu travailler ainsi que les participants et responsables des projets ANR auxquels j'ai été ou suis rattaché : CONSONNES (J. Kergomard), CAGIMA (P. Guillemain), HamecMopSys (Y. Le Gorrec). Je remercie également tous les membres (équipe enseignante, tuteurs, élèves ingénieurs et de BTS) des projets de mécatronique de l'Ecole des Mines-ParisTech, qui ont travaillé à cinq reprises sur des sujets parfois ardus. Merci à vous tous, pour le passé, le présent et le futur !

Pour la place de choix que leurs travaux tiennent dans ma recherche, pour leur confiance et leur sympathie, je remercie vivement les doctorants, R. Mignot, D. Roze, I. Cohen, T. Hézard et, aujourd'hui, A. Falaize-Skrzek et N. Lopes, co-encadrés avec (par ordre alphabétique) J. Bensoam, R. Caussé, D. Matignon, X. Merlhiot, A. Micaelli et G. Pille. Que soient également remerciés ici l'ensemble de mes stagiaires, toujours confiants et sympathiques : chaque pierre qu'ils ont amenée a porté ses fruits.

Je profite aussi de cette page pour remercier mes collègues d'enseignement : B. d'Andréa-Novel, X. Boutillon, J. Senpauroca et B. Steux avec leur "équipe électronicienne", et l'équipe enseignante du Master 2R ATIAM. Je remercie également la *Société Française d'Acoustique* et en particulier mes collègues du *Groupe Spécialisé en Acoustique Musicale.*

Il est des personnes dont les compétences élargissent considérablement le champ des possibles : merci à A. Terrier pour ses réalisations de mécanique, à E. Flety pour la maîtrise de constructions électroniques folles, et G. Bertrand pour son implication sur le robot. Il m'est impossible d'oublier, D. Perini et M. Grospiron pour leur précieuse assistance administrative avec le CNRS, C. Tan et S. Benoit avec l'Ircam, toute l'équipe système chapeautée par l'inimitable L. Ghys, avec une pensée vive et chaleureuse pour Y. Bensaïd.

Je remercie aussi les nombreuses personnes que j'ai croisées dans tous ces lieux scientifiques et avec qui moult discussions passionnantes, scientifiques ou non, sont nées. Parfois, il s'est agi d'observer des dérives de "politiques générales de la recherche" qui dispersent le temps de l'esprit inventif sur des tâches comptables ou de gestion. Parfois, il s'est agit d'enthousiasmes animés par des découvertes, des résultats inattendus, et bien sûr des discussions sur le son, la musique, l'art, etc. Il y aura aussi quelques probables oublis involontaires dans ma liste : j'adresse donc par avance mes remerciements accompagnés d'excuses à ces personnes que j'aurais dû mentionner.

Je termine avec une pensée particulière pour mes proches, amis, famille et parents, et bien sûr, Valérie, Savine et Tristan, qui illuminent ma vie au quotidien.

Thomas Hélie, le 1er novembre 2012, Ircam - CNRS UMR 9912 - UPMC, Paris.

Table des matières

Liste des notations

Constantes physiques

Quantité	Description	Précision	Valeur (pour $T = 298.66\,\mathrm{K}$)	Unité
$c \;\; = 331.5\sqrt{T/T_0}$	célérité du son	$\pm 0.015\%$	346.63	$\mathrm{m.s^{-1}}$
$\rho \;\; = 1.2929\, T_0/T$	masse volumique de l'air	$\pm 0.01\%$	1.18	$\mathrm{Kg.m^{-3}}$
$\mu \;\; = 1.708 \times 10^{-5}\big(1 + 0.0029(T - T_0)\big)$	viscosité	$\pm 2\%$	1.834×10^{-5}	$\mathrm{Kg.m^{-1}.s^{-1}}$
$\kappa \;\; = 0.0241\big(1 + 0.0033(T - T_0)\big)$	conductivité thermique†	$\pm 9\%$	0.0261	$\mathrm{J.m^{-1}.s^{-1}.K^{-1}}$
$C_P = 0.24$	capacité calorifique spécifique à pression constante	$\pm 0.1\%$	0.24	$\mathrm{Cal.g^{-1}.^{\circ}C^{-1}}$
$\gamma \;\; = 1.402$	ratio de capacités calorifiques	$\pm 0.1\%$	1.402	adim.
$C_V = C_P/\gamma$	capacité calorifique spécifique à volume constant	$\pm 0.1\%$	0.1712	$\mathrm{Cal.g^{-1}.^{\circ}C^{-1}}$
$\ell_v \;\; = \mu/(\rho c)$ (cf. [29, (5.133) p.210])	épaisseur caractéristique de la couche visqueuse	$\pm 2\%$	4.4751×10^{-8}	m
$P_r = 0.71$	nombre de Prandtl	$\times$	0.71	adim.
$\ell_t \;\; = \ell_v/P_r$	épaisseur caractéristique de la couche thermique	$\times$	6.303×10^{-8}	m

TAB. 1 – Constantes physiques caractéristiques de l'air extraites de [29, p.212]. Les valeurs numériques sont obtenues pour la température absolue $T = 298.66\,\mathrm{K}$ ($25.6^{\circ}\mathrm{C}$) déduite de la calibration du banc d'impédance par P. Eveno (cf. [58]), lors de mesures que nous exploitons dans le chapitre 1.

† La conductivité thermique $\kappa = 5.77 \times 10^{-5}\big(1 + 0.0033(T - T_0)\big)$ $\mathrm{Cal.cm^{-1}.s^{-1}.^{\circ}C^{-1}}$ donnée dans [29] a été convertie en $\mathrm{J.m^{-1}.s^{-1}.K^{-1}}$ en prenant pour référence la calorie thermochimique $1\,\mathrm{Cal}_{th} \approx 4.184$ J.

Objets mathématiques

Ensembles de nombres

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$	:	ensemble des entiers naturels, privé de 0 pour $\mathbb{N}^*$
$\mathbb{R}$	:	ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_+^*$	:	ensemble des nombres réels positifs ou nuls, privé de 0 pour $\mathbb{R}_+^*$
$\mathbb{R}_-$ et $\mathbb{R}_-^*$	:	ensemble des nombres réels négatifs ou nuls, privé de 0 pour $\mathbb{R}_+^*$
$\mathbb{C}$	:	ensemble des nombres complexes
$\mathbb{C}_\alpha^+$	:	ensemble des nombres complexes à partie réelle strictement supérieure à $\alpha \in \mathbb{R}$: $\mathbb{C}_\alpha^+ = \{z \in \mathbb{C} \,\vert\, \Re e(z) > \alpha\}$

Fonctions

J_n	:	fonction de Bessel de première espèce d'ordre n
$\mathbb{P}_n$	:	polynôme de Legendre de degré n
$\mathfrak{h}_n$	:	fonction de Hankel sphérique divergente d'ordre n

Espaces fonctionnels *($\mathbb{T}$ désigne un intervalle temporel $[0, T]$ avec $T > 0$, ou bien $\mathbb{R}_+$ ou bien $\mathbb{R}$)*

$\mathbb{U}$ et $\mathbb{X}$: espaces de Banach définis sur le corps $\mathbb{R}$

$\mathcal{U}$ et $\mathcal{X}$: espaces de Lebesgues $\mathcal{U} = L^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{U})$ et $\mathcal{X} = L^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{X})$

$\mathcal{V}_{\mathbb{X}}^n$ $(n \geq 1)$: espace des fonctions $f : \mathbb{T} \times \mathbb{T}^n \to \mathbb{X}$ telles que

$$t \mapsto (\tau \mapsto f(t, \tau)) \in L^\infty\big(\mathbb{T}, L^1(\mathbb{T}^n, \mathbb{X})\big),$$

muni de la norme $\|f\|_{\mathcal{V}_{\mathbb{X}}^n} = \sup_{t \in \mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}^n} \|f(t, \tau)\|_{\mathbb{X}} \, \mathrm{d}\tau$ où $\mathrm{d}\tau$ est la mesure de Lebesgue $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}\tau_1 \dots \mathrm{d}\tau_n$.

$\mathcal{L}(\mathbb{U}, \mathbb{X})$: ensemble des opérateurs linéaires bornés de $\mathbb{U}$ vers $\mathbb{X}$

$\mathcal{L}(\mathbb{X})$: ensemble des opérateurs linéaires bornés de $\mathbb{X}$ vers $\mathbb{X}$

$\mathcal{ML}_j(\mathbb{U}, \mathbb{X})$ $(j \geq 2)$: ensemble des opérateurs multi-linéaires bornés de $\underbrace{\mathbb{U} \times \cdots \times \mathbb{U}}_{j}$ vers $\mathbb{X}$, muni de la norme

$$\|f\| = \sup_{\substack{(u_1, \dots, u_j) \in \mathbb{U}^j \\ \|u_1\| = \cdots = \|u_j\| = 1}} \|f(u_1, \dots, u_j)\|_{\mathbb{X}}$$

$\mathcal{ML}_j(\mathbb{X})$ $(j \geq 2)$: ensemble des opérateurs multi-linéaires bornés de $\underbrace{\mathbb{X} \times \cdots \times \mathbb{X}}_{j}$ vers $\mathbb{X}$, muni de la norme

$$\|f\| = \sup_{\substack{(x_1, \dots, x_j) \in \mathbb{X}^j \\ \|x_1\| = \cdots = \|x_j\| = 1}} \|f(x_1, \dots, x_j)\|_{\mathbb{X}}$$

$\mathcal{ML}_{j,k}(\mathbb{X}, \mathbb{U}, \mathbb{X})$ $(j \geq 1,\ k \geq 1)$: ensemble des opérateurs multi-linéaires bornés de $\underbrace{\mathbb{X} \times \cdots \times \mathbb{X}}_{j} \times \underbrace{\mathbb{U} \times \cdots \times \mathbb{U}}_{k}$ vers $\mathbb{X}$, muni de la norme $\|f\| = \sup_{\substack{(x_1, \dots, x_j) \in \mathbb{X}^j \\ (u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{U}^k \\ \|x_1\| = \cdots = \|u_k\| = 1}} \|f(x_1, \dots, x_j, u_1, \dots, u_k)\|_{\mathbb{X}}$

Première partie

Synthèse de travaux de recherche et projet à 4 ans

Introduction

Mon projet de recherche s'intitule "Modélisation physique d'instruments de musique et de la voix : systèmes dynamiques, problèmes directs et inverses". Il s'organise autour de trois objectifs : (1) la **modélisation vibro-acoustique** réaliste pour la **synthèse sonore** en temps réel, (2) la **prédiction** et l'**optimisation** du fonctionnement des instruments via les paramètres de géométrie et de matériau, (3) l'**inversion** de système dynamique, i.e. trouver le pilotage du modèle qui va permettre de générer un son cible. L'intérêt de l'objectif (1) (plutôt que la synthèse par modèle de signaux) est de fournir des instruments virtuels qui reproduisent les **comportements naturels** de l'instrument original (attaques, transitoires, etc). L'objectif (2) peut fournir des outils d'aide à la lutherie (assistée par ordinateur), et l'objectif (3) permettre la capture de l'interprétation musicale avec de bons gestes de pilotage.

Mais, ce sujet est à l'origine de problèmes scientifiques délicats et le réalisme des sons de synthèse requiert souvent d'avoir des modèles physiques fins, non triviaux. Donnons quelques exemples illustratifs :

Ex1 : Dans un tube, les pertes visco-thermiques aux parois mettent en jeu des dérivations fractionnaires et les tubes évasés des opérateurs pseudo-différentiels encore plus complexes qui engendrent tous de la “mémoire longue”[1]. Négliger ces phénomènes conduit à des sons immédiatement identifiés comme “synthétiques” par l'oreille.

Ex2 : Pour les résonateurs de vents et le conduit vocal, les représentations en guides d'ondes numériques (sous l'hypothèse d'ondes planes conservatives) ont fait le succès des premières synthèses en temps-réel. Comparés aux décompositions modales, elles fournissent des structures modulaires connectables et permettent une importante factorisation des calculs. L'extension de cette dernière propriété à des modèles de propagation acoustique plus réalistes n'est pas évidente. Un autre problème ouvert, bien identifié et parfois qualifié de paradoxal (voir e.g. [48, 8]), est l'obtention de simulations instables lorsqu'on tente d'utiliser ces représentations sur l'équation des pavillons (pourtant conservative) dans le cas de tubes à “chambre convexe” (comme pour l'extrémité finale du cor anglais ou la tête d'une flûte traversière).

Ex3 : Aux nuances fortissimo, les sons de cuivres deviennent très brillants et ceux des cordes font entendre un enrichissement de leur timbre. Ceci vient du fait que la vibro-acoustique des résonateurs devient non linéaire. Si ces phénomènes sont déjà connus et étudiés, les prendre en compte dans des simulations en temps réel, à faible coût de calcul, reste encore délicat.

Ex4 : Jouer d'un instrument (souvent capable d'une variété impressionnante de régimes) ne correspond pas à un pilotage simple. Retrouver un tel pilotage à partir d'un son cible pose de nombreux problèmes. En particulier, le son mesuré n'est qu'une information très partielle de l'état vibro-acoustique de l'instrument. Cette donnée manquante rend ce problème inverse encore plus difficile.

Ex5 : Le couplage vibro-aéro-acoustique dans les instruments à vent et la production de la voix est à la fois complexe et critique : il introduit des non-linéarités responsables de l'auto-oscillation et de la diversité des régimes de ces systèmes. Les modèles actuels en donnent des versions simplifiées et proposer des raffinements pertinents et exploitables en pratique n'est pas immédiat. Il en est de même de la modélisation de certains composants électroniques, encore prisés aujourd'hui dans le domaine de l'audio, tels que les triodes à vide. Afin d'explorer, modéliser les phénomènes dominants et de les valider, des plate-formes expérimentales apparaissent nécessaires.

Ces cinq exemples posent des questions scientifiques et technologiques que nous avons explorées. Certaines sont résolues, d'autres sont encore à l'étude. Nos avancées reposent sur : (i) la mise au point et l'étude d'outils théoriques (mathématiques, de la théorie des systèmes et du traitement du signal), (ii) leur application aux problèmes d'acoustique et de vibrations des instruments, (iii) des réalisations (électroniques ou mécatroniques) de bancs de mesure et leur asservissement.

[1] c'est-à-dire avec une réponse amortie plus lente que toute exponentielle décroissante (par exemple, en $1/\sqrt{t}$).

Ce document présente une synthèse des travaux scientifiques que nous avons déjà menés, des perspectives à court terme et un programme de recherche à moyen terme (quatre ans). Comme il l'est mentionné au cours du document, ces travaux ont été menés en collaboration, dans le cadre de thèses (et de stages), dans le cadre de projets (projets de l'Agence Nationale de la Recherche (ANR), projets annuels en école d'ingénieur, projets de développements informatiques internes à l'Ircam), ou de façon autonome. Ces travaux scientifiques sont allés de pair avec plusieurs activités administratives, d'enseignement, de valorisation et des publications qui sont également consignées dans ce document. Ce document dresse donc un bilan large, même s'il est difficile de le rendre exhaustif, de cette trajectoire, dix ans après ma soutenance de thèse.

Organisation du document. La première partie du document synthétise mes travaux de recherche et mon projet de recherche à quatre ans.

Le chapitre 1 rassemble des travaux sur les tubes acoustiques, en vue de modéliser et simuler des résonateurs d'instruments à vent. Dans la section 1.1, un modèle mono-dimensionnel de tube dissipatif à section variable avec son rayonnement est proposé, ainsi qu'une description en tronçons de tubes courbes élémentaires. Sa pertinence est testée pour un profil évasé (typiquement, un pavillon) par comparaison à des mesures. La seconde section (§ 1.2) s'intéresse à sa simulation en *guides d'ondes numériques*. Elle inclut des résultats de thèse de Rémi Mignot et de stages postérieurs. En s'appuyant sur des décompositions en ondes progressives découplées que nous proposons, des *structures* économiques pour la simulation (dites *"de Kelly-Lochbaum"*) sont retrouvées. Leur stabilité et leur passivité sont prouvées dans le cas des tubes sans "chambre convexe". Une simulation (temps réel) obtenue pour un résonateur de trombone est présentée. Le cas problématique et faussement paradoxal des tubes à chambre convexe [72, 48, 8] est examiné : des interprétations de théorie des systèmes, des interprétations physiques et des solutions pour rétablir la stabilité sont données. Enfin, dans la section 1.3, un travail différent s'intéresse à la simulation d'un modèle de propagation non linéaire amortie simple, capable d'approcher le "timbre cuivré" que peut présenter un trombone ou une trompette aux nuances "fortissimo". Une méthode de résolution compatible avec le temps réel est construite à partir de : (1) l'application de la méthode des caractéristiques combinée à un changement de variables, et (2) une extension de la méthode originale proposée par Hayes [86] pour construire un sélecteur de la solution entropique à faible coût lorsque des chocs sont formés.

Le chapitre 2 rassemble des travaux sur les systèmes dynamiques entrée-sortie. Dans la section 2.1, nous nous intéressons à des systèmes linéaires à opérateurs pseudo-différentiels qui présentent des dynamiques à mémoire longue. Ceux-ci incluent les systèmes à dérivation fractionnaire et ceux qui apparaissent dans les guides d'ondes établis dans le chapitre 1 (à cause des pertes visco-thermiques et de la courbure des profils). Après avoir présentés quelques spécimens types et traité le cas académique d'un intégrateur d'ordre 1/2, un cadre formel bien posé est proposé pour représenter les noyaux de convolution, les fonctions de transfert et des réalisations d'état de tels systèmes. Deux méthodes d'approximation pour la réduction d'ordre sont présentées, qui permettent de construire des simulations à faible coût et qui restituent une bonne précision sur toute la plage des fréquences audibles. La section 2.2 rassemble nos résultats sur les séries de Volterra, qui permettent de capturer et simuler les distorsions introduites par des systèmes audio (électroniques, mécaniques, acoustiques) sur le timbre du son. Après avoir rappelé les définitions et propriétés générales puis introduit une méthode de calcul pratique fondée sur "un système annulateur", nous présentons les résultats obtenus pour trois applications (dont deux sur des équations aux dérivées partielles) : (1) la simulation de sons cuivrés pour un modèle de propagation non linéaire réaliste (qui ne peut plus être résolu par la méthode présentée en § 1.3) ; (2) la simulation de cordes en forte déformation (qui inclut des résultats de thèse de David Roze) ; (3) un filtre électronique de synthétiseur Moog. Dans le cas (2), pour traiter le cas d'une force d'excitation quelconque, nous introduisons une généralisation à noyaux spatio-temporels qui permet de réunir les formalismes des *fonctions de Green* et des *séries de Volterra*. Nous terminons notre présentation sur cet outil par des résultats théoriques et pratiques, fournissant des bornes *calculables* de convergence de séries de Volterra (domaine de convergence et erreur de troncature) pour plusieurs classes de systèmes. La dernière section (§ 2.3) présente de premiers résultats d'inversion entrée-sortie et d'observation d'état pour un instrument à vent simplifié complet, c'est-à-dire incluant l'excitateur, qui peut être mis sous la forme d'un système non linéaire différentiel à retard de type dit "neutre".

Le chapitre 3 décrit des travaux sur des outils technologiques (informatiques, électroniques ou mécatroniques). Ces outils sont destinés à l'exploration, la mesure et la validation de modèles de systèmes réels (électroniques ou biophysiques) en vue leur simulation réaliste. La section 3.1 donne une description sommaire des résultats obtenus dans la thèse CIFRE d'Ivan Cohen (en partenariat avec la société Orosys) sur la mesure, la modélisation et la simulation d'amplificateurs guitare à lampes. La section 3.2 décrit la mise au point et les premiers résultats obtenus d'une bouche artificielle robotisée destinée au jeu des cuivres (projet BrassTronics). La section 3.3 présente de premiers travaux sur la voix : (i) la thèse (en cours) de Thomas Hézard qui porte sur l'analyse/synthèse de la voix pour des modèles de signaux intégrant des considérations physiques (telles qu'un couplage aéro-acoustique simplifié glotte/conduit vocal) ; (ii) les premières constructions issues du projet VoiceTronics dont certaines en lien avec la thèse. Ces constructions sont : (1) un capteur multi-canal à impédancemétrie pour analyser les mouvements des cordes vocales ; (2) une maquette à l'échelle 1 :1 et pilotable d'un larynx à géométrie simplifiée en matériau conducteur pour tester le dispositif (1) *in vitro* ; (3) une maquette agrandie et pilotable, composée de reproductions morpho-réalistes des principaux cartilages et tissus du larynx pour explorer, *in vitro*, les (principales) cinématiques complexes impliquées dans la phonation. Enfin, la section 3.4 termine par une courte présentation d'une application didactique d'analyse spectrale que j'ai commencé à mettre au point récemment.

Le chapitre 4 conclut la partie scientifique en présentant, en plus des perspectives décrites dans les chapitres qui précédent, les grandes lignes de recherche que je compte suivre dans le cadre de mon projet de recherche à quatre ans.

Le document se poursuit par la partie administrative. Celle-ci comprend un curriculum vitae détaillé (chapitre 5) incluant une liste des travaux que j'ai dirigés ou encadrés, mes activités d'enseignement, les responsabilités dans des instances scientifiques, les activités de relecture d'articles (etc), puis (chapitre 6) la liste des publications personnelles avec une copie d'article. En tout dernier lieu vient la bibliographie générale.

Quelques commentaires et informations pratiques sur le document. Dans l'ensemble de ce document, mes publications sont référencées par une lettre suivie d'un nombre (exemple : [A2]). Elles sont listées en chapitre 6 du document, page 107.

Les stages et thèses j'ai (co-/)encadrés sont listés dans mon *curriculum vitae*, en page 102. Afin de ne pas alourdir le document, les nombreuses contributions des stagiaires ne sont pas systématiquement citées, mais il suffit de se reporter à cette liste pour en prendre connaissance.

Les publications qui ne correspondent pas à des travaux personnels sont référencées par un nombre seul (exemple : [12]). Elles sont rassemblées dans la *bibliographie générale*, page 144.

Enfin, ce document a été organisé de sorte que les résultats d'*acoustique* soient majoritairement rassemblés dans le chapitre 1, ceux de *théorie des systèmes* dans le chapitre 2. Il ne s'agit bien sûr pas d'une paroi étanche, ni même avec le chapitre 3 sur les outils pour l'expérimentation, tant ces aspects peuvent être intriqués. Mais les déroulements des différentes sections ont été rédigés afin de faire ressortir, au moins localement, des *démarches scientifiques délibérées et argumentées.* Aussi, pour faciliter sa compréhension et donner une certaine autonomie au document, quelques éléments techniques ont été insérés et parfois préférés à des descriptions qualitatives. On trouvera notamment en début du document (page xi), les notations et constantes physiques utilisées principalement dans les chapitres 1 et 2. Avec le choix de cette forme et pour ne pas alourdir la synthèse des travaux déjà longue, je me suis limité à joindre un seul article en annexe (qui évite de répéter un contenu majoritairement technique) : il s'agit du travail sur l'observation d'état [A11], traité en (§ 2.3). Toutefois, beaucoup de mes articles sont accessibles en ligne et je peux bien sûr tous les fournir sur demande.

En espérant que ce document vous sera agréable et vous satisfera, je vous souhaite une bonne lecture.

Chapitre 1

Acoustique des tubes à section variable

1.1 Modèle acoustique mono-dimensionnel

Le modèle que nous avons introduit repose sur 4 ingrédients : (1) une équation des pavillons fondée sur le redressement de la carte des isobares ; (2) la connexion régulière ($\mathcal{C}^1$) de profils à évasements constants ; (3) un modèle de rayonnement compatible avec (1) ; (4) l'effet des pertes visco-thermiques aux parois. Nous les rappelons en restituant la démarche ci-dessous.

1.1.1 Ingrédient 1 : équation des pavillons à abscisse curviligne

Le premier modèle 1D de propagation acoustique sans perte dans des tubes à symétrie axiale est dû à Lagrange et Bernoulli [113, 9]. Il est souvent nommé *"équation des pavillons"* ou *"équation de Webster"* [219]. Il a été beaucoup étudié comme en témoigne e.g. [56]. Dans sa version originale, ce modèle revient à considérer un continuum de tubes infinitésimaux localement droits dans lesquels se propagent des ondes planes. Mais cette hypothèse a été régulièrement révisée. Ainsi, pour garantir l'orthogonalité entre les isobares et la paroi, Lambert [114] et Weibel [220] ont contesté l'hypothèse d'ondes planes et postulé des ondes sphériques [7]. Plus tard, Putland [171] a montré que *toute propagation 1D conservative obéit à une équation des pavillons*, c'est-à-dire,

$$\Big(\frac{1}{A(s)}\,\partial_s\big(A(s)\,\partial_s\big) - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\Big)p(s,t) = 0 \quad \text{où } A \text{ représente l'aire d'une section transverse locale,} \tag{1.1}$$

repérée par une variable spatiale s. Il a aussi établi que seules les ondes planes, cylindriques et sphériques pouvaient correspondre à des modèles exacts. Nous avons établi un résultat similaire dans [A2, II.D] : les seules cartes isobares statiques qui peuvent être le siège d'une propagation correspondent à ces ondes et à des cartes modales dont on connaît un invariant géométrique. Malgré ces limitations, des modèles 1D non exacts mais plus fins ont encore été recherchés, pour bénéficier de leur simplicité (cf. e.g. [3, 138]) : ils simplifient le calcul d'immittances, et la plage fréquentielle non perturbée par des modes transverses (cas plus complexe traité dans e.g. [163]) est suffisamment intéressante pour étudier bon nombre d'instruments. Dans cette lignée, nous avons cherché un modèle 1D compatible avec les propriétés suivantes.

Propriété 1 (Isobares dans les tubes à symétrie axiale) *Dans le cas d'une propagation conservative dans un tube à parois rigides idéales, quelques propriétés basiques des isobares sont :*

- *(i) les ondes planes se propagent dans un tube droit et sont gouvernées par (1.1) avec $s = z$ (abscisse axiale) et $A(z) = \pi R_0^2$, soit $(\partial_z^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2)p = 0$;*
- *(ii) les ondes sphériques se propagent dans les tubes coniques et sont gouvernées par (1.1) avec $s=r$ (abscisse sphérique) et $A(r)=2\pi r^2(1-\cos\theta_0)$ (aire de calotte sphérique), soit $(\partial_r^2+\frac{2}{r}\partial_r-\frac{1}{c^2}\partial_t^2)p=0$;*
- *(iii) les isobares sont orthogonales à la paroi* (excepté pour un gradient de pression nul, cf. [G4, p.33]) *;*
- *(iv) dans un pavillon typique, expérimentalement et d'après [7], les isobares ont une allure quasi-sphérique en basse fréquence ;*
- *(v) la géométrie des isobares varie nécessairement dans le temps, exception faite des cas (i), (ii), des isobares cylindriques co-axiales et de modes propres (preuve dans [A1, II.D.3]).*

Ainsi, le modèle original [113, 9, 219] ($s = z$, $A(z) = \pi R(z)^2$) correspond à une hypothèse d'ondes planes et ne rétablit que la propriété (i). Les modèles à ondes sphériques [114, 220] ou ellipsoïdales [3] rétablissent (i-iv) mais restent incompatibles avec (v).

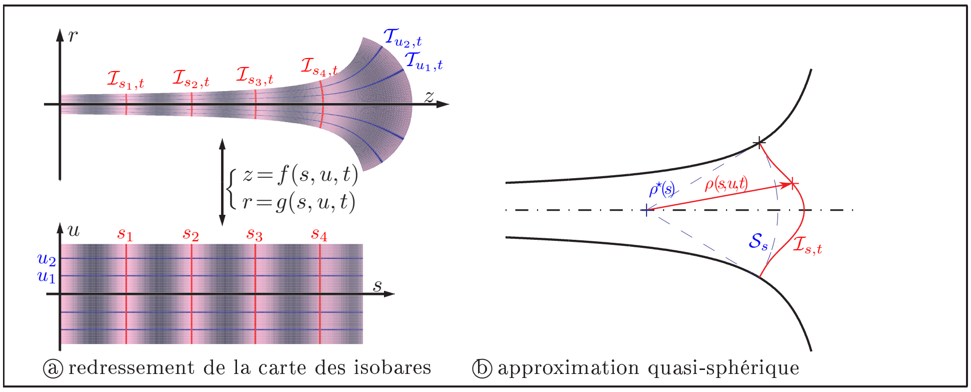


FIG. 1.1 – Redressement de la carte des isobares et approximation locale au voisinage de la paroi.

Pour améliorer ces modèles 1D, nous avons cherché en premier lieu une forme exacte de l'équation des ondes $\left[\partial_r^2 - \frac{1}{r}\partial_r + \partial_z^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right] P(z,r,t) = 0$, pour laquelle la pression a une ***dépendance mono-spatiale***, c'est-à-dire, dans une carte redressant les isobares. Formellement, ceci est obtenu grâce à un changement de coordonnées $z = f(s,u,t)$, $r = g(s,u,t)$ tel que $P(f(s,u,t), g(s,u,t), t) = p(s,t)$ ne dépend pas de u et s indexe les isobares $\mathcal{I}_{s,t}$ (cf. figure 1.1ⓐ). Ceci conduit à

$$\left[\alpha\, \partial_s^2 + \beta\, \partial_s + \gamma\, \partial_s \partial_t - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right] p(s,t) = 0, \tag{1.2}$$

où les coefficients α, β, γ sont des fonctions de (s,u,t) et dépendent formellement de f, g et leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 [A2, (20-21)]. Établir un modèle 1D revient alors à déterminer ces coefficients pour une description paramétrique $\big(z = F(s), r = G(s)\big)$ d'un profil statique obtenue pour un u décrivant la paroi (ici, $u = w$). Ceci pose la question : *A profil donné, est-il possible de résoudre séparément les problèmes de "carte isobare" et de "propagation des valeurs de pression" sur cette carte ?*

Les calculs montrent qu'en choisissant des coordonnées (s,u) orthogonales, on a sans perte de généralité et pour $u = w$: $\alpha(s,w,t) = \big(F'(s)^2 + G'(s)^2\big)^{-1}$, $\gamma(s,w,t) = 0$ et $\frac{\beta(s,w,t)}{\alpha(s,w,t)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\ln\left|\frac{G(s)}{F'(s)}\right|\right) + \partial_s \ln\left|\partial_u g(s,u=w,t)\right|$. Parce qu'il met en jeu l'opérateur ∂_u, seul le dernier terme de β/α pose un problème. Il dépend d'une variation première des lignes de champ $\mathcal{T}_{w,t}$ (cf. figure 1.1) au voisinage la paroi. Pour obtenir une expression explicite fournissant une équation des ondes 1D, une approximation géométrique d'ordre minimale et compatible avec les propriétés 1(i-v) est proposée.

Hypothèse 1 (Isobare quasi-sphérique à l'ordre 2) *Soit $\rho^\star(s)$ le rayon de la sphère $\mathcal{S}_s$ inscrite dans le cône tangent à la paroi au point $(s, u = w)$ (cf. figure 1.1ⓑ). L'écart relatif $\varsigma = \rho/\rho^\star - 1$ est tel que $\partial_u^k \varsigma(s, u = w, t) = 0$ pour $k = 0$ (contact) et $k = 1$ (tangence de $\mathcal{S}_s$ et $\mathcal{I}_{s,t}$). L'approximation consiste à supposer cette relation encore valable pour $k = 2$ (déviation de ς plus lente qu'une parabole).*

Cette hypothèse conduit à $\frac{\beta(s,w,t)}{\alpha(s,w,t)} = 2\frac{G'(s)}{G(s)}$. Une version exacte de l'équation d'Euler est aussi obtenue, ce qui conduit au modèle complet donné ci-dessous [A2, (19) et (53)].

Résultat 1 (Modèle de pavillon à abscisse curviligne ℓ) *L'hypothèse 1 conduit au même modèle que celui fondé sur les ondes planes, si la variable spatiale $s = z$ est remplacée par l'*abscisse curviligne *$s = \ell$ qui mesure la longueur du profil. Les descriptions d'une perce $z \mapsto R(z)$ et $\ell \mapsto \mathcal{R}(\ell)$ sont liées par*

$$\mathcal{R}(\ell) = R\big(L^{-1}(\ell)\big) \quad \textit{avec } \ell = L(z) = \int_0^z \sqrt{1 + \big[R'(z)\big]^2}\,\mathrm{d}z. \tag{1.3}$$

L'équation des pavillons et l'équation d'Euler sont données par, respectivement,

$$\left(\partial_\ell^2 - \Upsilon(\ell) - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\big[\mathcal{R}(\ell)\, p(\ell,t)\big] = 0 \quad \textit{et} \quad \rho\, \partial_t v(\ell,t) + \partial_\ell p(\ell,t) = 0, \quad \textit{et où } \Upsilon = \frac{\mathcal{R}''}{\mathcal{R}}. \tag{1.4}$$

Remarque 1 (Interprétation géométrique et modèles exacts) ⓐ *Contrairement à ce qu'on aurait pu présumer, l'hypothèse de quasi-sphéricité locale n'a pas pour effet de remplacer l'aire de la section de tube par celle d'une calotte sphérique (cf. figure 1.1ⓑ). Elle revient dans (1.1) à définir la variable spatiale s comme l'abscisse curviligne ℓ et à préserver l'aire A de la section droite locale. Pour les ondes sphériques dans les cônes, ceci correspond aux calottes sphériques redressées. Ainsi, on est amené à considérer le débit acoustique à travers l'isobare redressée $u = \pi\mathcal{R}^2\, v$, qui ne tient pas compte de la conicité.* ⓑ *Pour autant, le modèle (1.3-1.4) est cohérent avec les propriétés (i-v) et il regénère bien des modèles 1D exacts pour les tubes droits ($\ell = z$, $R(z) = \mathcal{R}(\ell) = R_0$) mais aussi pour les tubes coniques ($\ell = z/\cos\theta \equiv r$ dans la propriété 1(ii), $R(z) = z\tan\theta$, $\mathcal{R}(\ell) = \ell\sin\theta$). Ces deux cas correspondent à $\Upsilon_\ell = 0$. Rappelons encore que le modèle en z est exact uniquement pour les tubes droits : sa validité est confinée aux basses fréquences telles que $f \ll \frac{c}{\pi}\Big(\int_0^Z \big[R'(z)\big]^2\,\mathrm{d}z\Big)^{-1}$ (cf. [29, (7.159), p. 311]).*

Propriété 2 (Modèle "en z" versus modèle "en ℓ") *Comparé à l'équation des pavillons originale ($s = z$), celle à abscisse curviligne ($s = \ell$) apporte plusieurs modifications caractéristiques (cf. figure 1.2) :*

(i) la longueur équivalente du tube augmente ($L(z) \geq z$) comme toute distance locale de parcours ($L(z+\delta) - L(z) \geq \delta$ si $\delta \geq 0$) ;

(ii) la pente du profil est atténuée au sens où $|\mathcal{R}'(L(z))| = \frac{|R'(z)|}{\sqrt{1+R'(z)^2}} \leq |R'(z)|$, et on a $|\mathcal{R}'(\ell)| \leq 1$ ($|R'(\ell)| = 1$ correspond à une pente verticale) ;

(iii) si une perce se termine de façon localement conique ($\Upsilon_\ell = 0$ en $\ell = L$), le modèle "en ℓ" opère comme un raccord idéal avec des ondes sphériques (pour $\ell \geq L$) ;

(iv) la valeur de Υ et sa forme sont modifiées (on note $\Upsilon_z = \frac{R''}{R}$ pour $s = z$ et $\Upsilon_\ell = \frac{\mathcal{R}''}{\mathcal{R}}$ pour $s = \ell$) ;

(vi) les positions des pics des immittances sont modifiées de façon non triviale (à cause de (i-iv)).

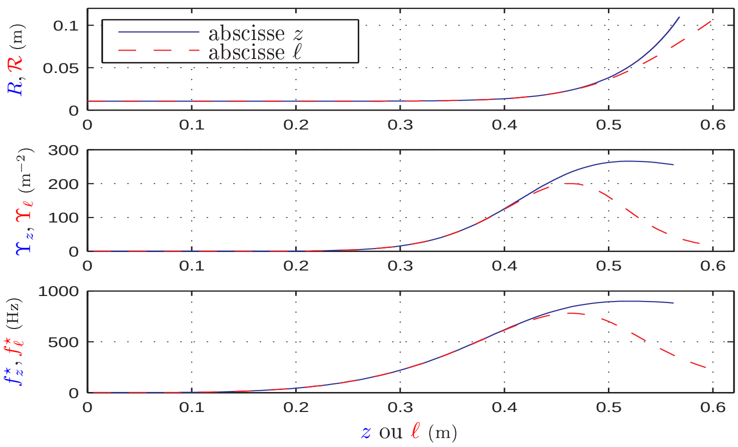


FIG. 1.2 – Comparaison entre les modèles "en z" (-) et "en ℓ" (--) : rayon, Υ et fréquence de coupure (cf. rq. 2) pour un profil test $R^\dagger : z \in [0, z^\star] \mapsto R_0 + \big(R^\star - R_0\big)\,\big(z/z^\star\big)^{10}$, proche du pavillon de trombone décrit en § 1.1.5 ($R_0 = 10.4 \times 10^{-3}$m, $z^\star = 568 \times 10^{-3}$m, $R^\star = 110 \times 10^{-3}$m).

Ceci a aussi l'impact acoustique suivant, directement interprétable.

Remarque 2 (fréquence de coupure locale) *Pour Υ positif, $f^\star = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\Upsilon}$ correspond à une fréquence de coupure (locale en espace) en dessous de laquelle les ondes progressives deviennent évanescentes [7].*

En pratique, la validité de l'équation des pavillons est réduite aux fréquences pour lesquelles aucun mode transverse n'est excité. Un ordre de grandeur est, pour un tube droit de rayon $\max_{\ell\in[0,L]}\mathcal{R}(\ell)$,

$$f < f^+ \quad \text{avec } f^+ = \frac{K^+}{\max\limits_{\ell\in[0,L]}\mathcal{R}(\ell)} \quad \text{et } K^+ = \frac{1.84\,c}{2\pi} \approx 100\,\text{m.s}^{-1}. \tag{1.5}$$

Une autre condition qualitative est que $|\Upsilon|$ reste suffisamment petit pour perturber faiblement le modèle exact ($\Upsilon_\ell = 0$). L'hypothèse 1 ne donne pas d'estimation simple de ce domaine de validité mais des comparaisons avec des mesures sur un pavillon de trombone sont fournies en § 1.1.5.

1.1.2 Ingrédient 2 : jonction C1-régulière de tronçons à évasement constant

Dans cette partie, s ne représente plus une variable spatiale mais la variable complexe de Laplace.

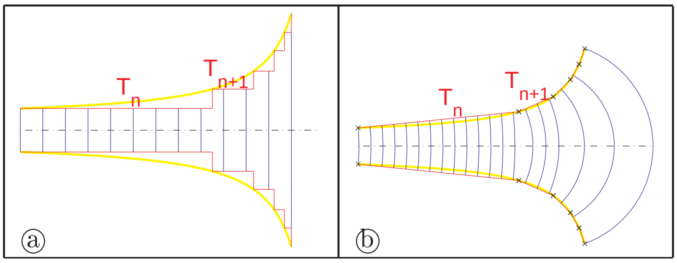


FIG. 1.3 – Approximations standard de tubes acoustiques par ⓐ des tubes droits ⓑ des tronçons de cônes.

Les premières approximations de tubes à section variable en tronçons élémentaires concaténés ont été obtenues avec des tubes droits conservatifs et le raccord d'ondes planes aux jonctions (figure 1.3ⓐ). Ce cas conduit à des matrices de transfert simples. Et une décomposition en ondes progressives (cf. § 1.2) fait apparaître une structure en guides d'ondes numériques [194]. Celle-ci met en jeu (cf. figure 1.4ⓐ) une paire de *propagateurs* W_n pour chaque tronçon n (ici, des retards purs), et à chaque jonction, un quadripôle C_n représentant les réflexions et transmissions (ici, instantanées). On montre qu'on peut réaliser chaque quadripôle C_n à l'aide d'une seule fonction de réflexion et des sommes : on parle alors de structure de Kelly-Lochbaum [103] (cf. figure 1.4ⓑ, avec ici $\beta = -1$ et $|K_n| < 1$). Pour des impédances de rayonnement idéalisées, on obtient au final des *filtres numériques auto-régressifs* (AR), abondamment utilisés pour la synthèse sonore en temps réel, spécialement pour simuler le conduit vocal [135, 31].

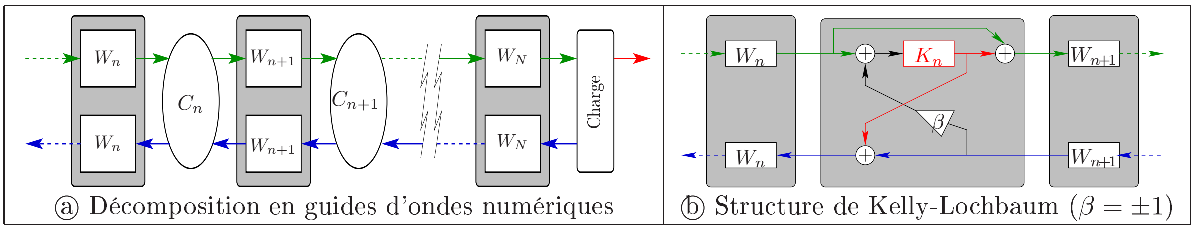


FIG. 1.4 – ⓐ Guide d'ondes numérique et ⓑ Structure de Kelly-Lochbaum. Les opérateurs W_n traitent la propagation d'ondes progressives découplées à l'intérieur du n-ième tronçon. Le quadripôle C_n traite les ondes transmises et réfléchies aux jonctions. Une factorisation des calculs conduit à la structure de Kelly-Lochbaum ⓑ qui n'implique qu'une occurrence de la fonction de réflexion (K_n).

Mais ce modèle repose sur des approximations fortes : (1) profil rendu discontinu (2) rayonnement caricatural indépendant de la fréquence, (3) pertes visco-thermiques négligées. La première est à l'origine de réflexions locales instantanées. Ceci rend les réponses impulsionnelles (RI) d'immittances non régulières mais composées de *trains de Dirac*. Sans être supprimé, cet artefact est masqué par régularisation dès que l'on améliore les points (2) ou (3) (cf. §1.1.3-1.1.4) En pratique, il est souvent masqué par le choix d'un pas de discrétisation spatiale qui synchronise les impulsions sur la période d'échantillonnage T_e.

Pour accroître la régularité, une alternative est d'utiliser des tronçons de cônes (figure 1.3ⓑ). Ceci améliore les résultats acoustiques [27, 217, 185, 218, 57], significativement si l'erreur commise sur le rayon et si la variation de pente aux jonctions sont faibles. On aboutit encore à une structure de Kelly-Lochbaum pour des jonctions continues, si la discontinuité des aires des calottes sphériques de raccord est négligée [217, p.52]. D'autres profils réguliers ont aussi été étudiés (pavillon de Bessel [7], pavillon exponentiel [96], voir aussi [20]).

Afin d'améliorer le réalisme et réduire le nombre de tronçons, nous proposons des jonctions à régularité $\mathcal{C}^1$ de tronçons à paramètre Υ constant[1]. En particulier, la question à laquelle on s'intéresse ici est :

Quel degré de régularité peut-on atteindre sur les réponses impulsionnelles acoustiques avec ce modèle ?

[1] Ceci correspond à la même régularité que celle des *splines* cubiques, mais on choisit ici des tronçons à Υ constant plutôt que polynomiaux à cause du modèle acoustique.

Formalisme en matrices de transfert (Υ constant de signe quelconque). Considérons un tronçon acoustique décrit sur $\ell \in (a,b)$ par le modèle (1.4) pour un paramètre constant $\Upsilon < 0$ (chambre convexe), $\Upsilon = 0$ (tube droit ou conique) ou $\Upsilon > 0$ (profil évasé). Une résolution de ce problème dans le domaine de Laplace $\mathbb{C}_0^+$ (ensemble défini p. xii) conduit au résultat suivant (cf. e.g. [G4, p. 63]).

Résultat 2 (Matrice de transfert $\mathbf{T}_{b,a}$ d'un tronçon à Υ constant) *On introduit l'état acoustique $X_\ell(s) = \big[\, P(\ell,s)\,,\, U(\ell,s)\,\big]^T$ dans le domaine de Laplace, où P et U sont les transformées de Laplace respectives de $t \mapsto p(\ell,t)$ et $t \mapsto \pi\mathcal{R}(\ell)^2 v(\ell,t)$ (signaux supposés nuls pour $t<0$). Alors,*

$$X_b(s) = \mathbf{T}_{b,a}(s)\, X_a(s), \quad \textit{où} \quad \det \mathbf{T}_{b,a}(s) = 1 \quad \textit{et où} \tag{1.6}$$

$$\mathbf{T}_{b,a}(s) = \Lambda_{b^-}(s)\, \mathbf{M}_{b,a}(s)\, \Lambda_{a^+}(s)^{-1}, \quad \Lambda_\ell(s) = \mathit{diag}\Big(\frac{1}{\mathcal{R}(\ell)}, \frac{\pi\mathcal{R}(\ell)}{\rho s}\Big), \quad [\mathbf{M}_{b,a}(s)]_{i,j} = \big(V_{i,j}(s)\big)^T\, \Phi\big((b-a)\Gamma(s)\big),$$

$$\textit{avec } V_{11} = [1\,,\,\sigma(a^+)]^T, \qquad V_{12} = [0\,,\,-(b-a)]^T,$$

$$V_{21} = \Big[\frac{\sigma(b^-) - \sigma(a^+)}{b-a}\,,\, \frac{\sigma(a^+)\sigma(b^-) - (b-a)^2\Gamma^2}{b-a}\Big]^T, \qquad V_{22} = [1\,,\,-\sigma(b^-)]^T,$$

$\Phi(z) = [\cosh z\,,\, \frac{\sinh z}{z}]^T$ *et* $\sigma = \frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{R}/(b-a)}$ *(ratio de pentes, sans dimension). La fonction Γ est la racine carrée de (plus précisément sa détermination principale, rappelée en (2.3)-§ 2.1)*

$$\Gamma(s)^2 = \Big(\frac{s}{c}\Big)^2 + \Upsilon. \tag{1.7}$$

On montre que si le profil est positif, c'est-à-dire (cf. p. 26) si $\mathcal{R}(a^+)>0$, $\mathcal{R}(b^-)>0$ et $(b-a)^2\Upsilon > -\pi$, alors la matrice $T_{b,a}$ est analytique sur $\mathbb{C}_0^+$ et elle définit un opérateur causal stable.

Remarque 3 (Nombre d'onde) *Le nombre d'onde k est tel que $i\,k = \Gamma(i\omega)$ où ω représente la* fréquence angulaire *(ou* pulsation*). Pour des tubes droits ou coniques ($\Upsilon = 0$), il vaut $k = \omega/c$.*

Le raccord de N tronçons (délimités par $\ell_0 < \ell_1 < \ldots < \ell_N$) s'obtient en imposant la continuité de "l'état de Kirchhoff" X_ℓ aux jonctions. Ceci conduit au formalisme standard de matrices de transfert

$$X_{\ell_N}(s) = \mathbf{T}_{\ell_N,\ell_0}(s)\, X_{\ell_0}(s), \quad \text{où} \quad \mathbf{T}_{\ell_N,\ell_0} = \mathbf{T}_{\ell_N,\ell_{N-1}}\, \mathbf{T}_{\ell_{N-1},\ell_{N-2}}\, \ldots\, \mathbf{T}_{\ell_1,\ell_0}. \tag{1.8}$$

Ceci restitue les résultats connus (cf. e.g. [31, 29]) pour les tronçons de tubes droits, et aussi pour les tronçons de cônes, si le débit est celui pris à travers la section droite[2], (cf. rq. 1).

Remarque 4 (Profils continus) *Pour un profil continu, (1.8) s'écrit aussi sous la forme simplifiée* $\mathbf{T}_{\ell_N,\ell_0} = \mathit{diag}\big(\frac{L_N}{\mathcal{R}(\ell_N)}, \frac{\pi\mathcal{R}(\ell_N)}{\rho s}\big)\, \mathbf{M}_{\ell_N,\ell_0}\, \mathit{diag}\big(\frac{\mathcal{R}(\ell_0)}{L_1}, \frac{\rho s}{\pi\mathcal{R}(\ell_0)}\big)$, $\quad \mathbf{M}_{\ell_N,\ell_0} = \mathbf{M}_{\ell_N,\ell_{N-1}}\, \mathbf{M}_{\ell_{N-1},\ell_{N-2}}\, \ldots\, \mathbf{M}_{\ell_1,\ell_0}$.

Structure de Kelly-Lochbaum ($\Upsilon \geq 0$). Les descriptions en tronçons de cylindres ⓐ, cônes ⓑ admettent des représentations en guides d'ondes numériques. Comme nous le présentons plus loin en § 1.2.1, c'est aussi le cas pour les tronçons à Υ constant ⓒ. Ces représentations sont composées d'une paire d'opérateurs de propagation (ou *"propagateurs"*), de fonction de transfert $W_n(s) = \exp\big[-\Gamma(s)(\ell_n - \ell_{n-1})\big]$, inter-connectés par des opérateurs de jonction C_n et connectés à des impédances de charge aux extrémités [103, 195, 217], [A5, C13, A15] (cf. figure 1.4ⓐ).

Dans les cas ⓐ-ⓑ ($\Upsilon_n = 0$), les propagateurs sont de simples retards $D_n(s) = \exp(-\tau_n s)$ où $\tau_n = \frac{\ell_n - \ell_{n-1}}{c}$. Dans le cas ⓒ, la fonction de dispersion $G_n(s) = \frac{W_n(s)}{D_n(s)} = \exp\big(\tau_n(s - c\Gamma_n(s)\big)$ correspond à un opérateur causal stable (sans latence), seulement si $\Upsilon \geq 0$ [A5] (le cas $\Upsilon < 0$ est traité en § 1.2.2). Le calcul de sa réponse impulsionnelle donne [152, p.498]

$$\text{pour tout } \Upsilon \geq 0, \qquad g_n(t) = \delta(t) - 1_{t>0}(t)\, c\tau_n \sqrt{\Upsilon_n} \frac{J_1\big(c\sqrt{\Upsilon_n}\sqrt{t(t+2\tau_n)}\big)}{\sqrt{t(t+2\tau_n)}}, \tag{1.9}$$

où J_1 est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 1.

[2] L'hypothèse d'ondes sphériques idéales pose le problème suivant : aux jonctions de cônes, les sphères de contact ne coïncident pas (cf. e.g. [29, fig. 7.13]). Mais, par cohérence avec cette hypothèse et le principe de conservation de la masse, le débit choisi dans la littérature sur le sujet est le "débit sphérique" (cf. e.g. [72]). Pour rétablir dans (1.8) la continuité de ce débit, il suffit d'insérer des matrices $\mathrm{diag}(1, \varpi_{n+1}/\varpi_n)$ entre chaque facteur, qui introduisent le rapport des angles solides. Lorsqu'elle devient petite, cette discontinuité est parfois négligée à des fins de simplification algorithmique [217, § 2.4.3]. C'est qu'il se produit ici pour des raccords $\mathcal{C}^0$, via la définition de u. Et, cette discontinuité disparaît ($\varpi_{n+1}/\varpi_n \to 1$) pour des maillages de plus en plus fins d'un profil régulier. C'est ce qu'il se produit pour les raccords de type $\mathcal{C}^1$ proposés ici.

De plus, pour des profils suffisamment réguliers, le quadripôle C_n acquiert la propriété suivante (cf. § 1.2 pour plus de détails techniques et [103, 217], [C13], [A15, § 4]).

Propriété 3 (factorisation de Kelly-Lochbaum) *Si la régularité géométrique permise par une approximation de type ⓐ-ⓒ est maximale, c'est-à-dire, discontinue pour ⓐ, continue pour ⓑ et à régularité $\mathcal{C}^1$ pour ⓒ, alors les quadripôles C_n associés à (1.8) peuvent être réalisées avec une seule fonction de réflexion K_n et trois sommes. Ceci conduit à la "structure de Kelly-Lochbaum" rappelée en figure 1.4ⓑ.*

Outre la réduction de la charge de calcul qu'elle permet pour la synthèse en temps réel, cette propriété simplifie l'étude de la régularité des réponses impulsionnelles acoustiques, menée ci-dessous.

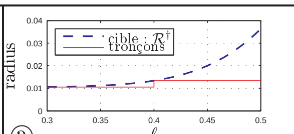
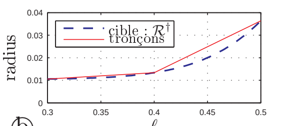
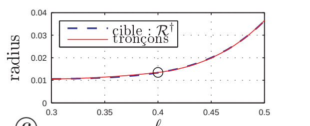
Trains d'impulsions et régularité ($\Upsilon \geq 0$). On considère un tube acoustique défini comme en propriété 3 et de dernier tronçon infiniment long. On a alors la propriété suivante :

Propriété 4 *La régularité des réponses impulsionnelles des immittances de ⓐ-ⓒ est fixée par celle des fonctions de réflexion K_n.*

Dans les cas ⓐ-ⓑ, ce résultat bien connu est immédiat car les propagateurs sont des retards purs $W_n = D_n$. Le cas ⓒ est similaire car $G_n = \frac{W_n}{D_n}$ contient un gain direct (δ dans (1.9)) de sorte qu'il n'augmente pas l'ordre de régularité. Le tableau 1.1 illustre des approximations caricaturales d'un profil par deux tronçons et rappelle les formules des fonctions de réflexion. Leur analyse conduit au résultat suivant.

Résultat 3 (Régularité des réponses impulsionnelles) *Pour un profil évasé régulier, les jonctions $\mathcal{C}^1$ de tronçons à Υ constant fournissent l'approximation par morceaux la plus simple qui préserve la continuité des réponses impulsionnelles d'immittances, indépendamment du nombre de tronçons et de l'impédance de charge.*

Preuve : La RI de réflexion du cas ⓐ est une impulsion de Dirac et celle de ⓑ est une exponentielle décroissante causale (filtre à un pôle) discontinue en $t = 0$. La discontinuité des RI d'immittances est donc immédiate pour ⓐ-ⓑ. Pour le cas ⓒ, $K_1^{ⓒ}(s) = \frac{\Gamma_1(s)-\Gamma_2(s)}{\Gamma_1(s)+\Gamma_2(s)} = \frac{\Upsilon_1-\Upsilon_2}{(\Gamma_1(s)+\Gamma_2(s))^2} = \frac{\Upsilon_1-\Upsilon_2}{4(s/c)^2} + \mathcal{O}(\frac{1}{s^4})$ lorsque $s \to +\infty$. Donc, d'après le théorème de la valeur initiale, $k_1(0^+) = \lim_{x\to+\infty} xK_1(x) = 0$ et $k_1'(0^+) = \lim_{x\to+\infty} x^2 K_1(x) = \frac{\Upsilon_1-\Upsilon_2}{2}$. Puisque $k_1(t)$ ne présente pas de saut en $t = 0$ et que k_1' en présente un, la régularité de la RI est (exactement) $\mathcal{C}^0$, ce qui avec la propriété 4 conclut la preuve.

Approximation de $\mathcal{R}^\dagger$ par deux tronçons ($\ell_0 = 0.3$, $\ell_1 = 0.4$, $\ell_2 = 0.5$)	 ⓐ	 ⓑ	 ⓒ
Régularité de profil	discontinu (tubes droits)	continu ($\mathcal{C}^0$) (tubes coniques)	doux ($\mathcal{C}^1$) (Υ constant)
$K_1(s)$ et β	$\frac{A_1-A_2}{A_1+A_2}$ (et $\beta = -1$)	$\frac{\alpha_1}{s-\alpha_1}$ (et $\beta = +1$)	$\frac{\Gamma_1(s)-\Gamma_2(s)}{\Gamma_1(s)+\Gamma_2(s)}$ (et $\beta = -1$)
$k_1(t)$	$\frac{A_1-A_2}{A_1+A_2}\,\delta(t)$	$\alpha_1 \exp(\alpha_1 t)\, 1_{t\geq 0}$	pas d'expression analytique
Saut en $t = 0$	infini	$\alpha_1 = \frac{c}{2}\left(\frac{\mathcal{R}'(\ell_1^-)-\mathcal{R}'(\ell_1^+)}{\mathcal{R}(\ell_1)}\right)$	0
Régularité de la RI	de type Dirac	discontinu	continu ($\mathcal{C}^0$)

Tab. 1.1 – Régularité des réponses impulsionnelles des réflexions mises en jeu dans les structures de Kelly-Lochbaum en fonction de la régularité de la géométrie.

Remarque 5 (Approximation en tronçons de cônes) *Il est possible d'atténuer les sauts des réponses impulsionnelles calculées pour des raccords continus de tronçons de cônes en raffinant le maillage spatial de sorte que les coefficients $\alpha_n = c\big(\mathcal{R}'(\ell_n^-) - \mathcal{R}'(\ell_n^+)\big)/\big(2\mathcal{R}(\ell_n)\big)$ s'approchent de 0.*

Remarquons par ailleurs que, dans les cas ⓐ-ⓑ, le découpage d'un profil en N tronçons s'obtient simplement en évaluant $\mathcal{R}$ à des abscisses choisies $\ell_{n=0,\dots,N}$. Au contraire, déterminer une description en tronçons à paramètre Υ constant par morceaux n'est pas directe. Pour cette raison, pendant le premier stage de T. Hézard, nous avons construit un outil dédié à l'estimation des paramètres du cas ⓒ. Cet outil décrit dans [C31] mais non détaillé ici est utilisé dans la suite.

1.1.3 Ingrédient 3 : impédance de rayonnement d'une portion de sphère pulsante

L'impédance de rayonnement répartit l'énergie confinée dans le tube (a) et la partie rayonnée (b). Dans la plage fréquentielle où le phénomène (a) est dominant, la qualité des résonances est grande (favorisant l'auto-oscillation et l'établissement de notes). Pour équilibrer la qualité des résonances et la puissance du son rayonné (spécialement pour les instruments modernes), l'étude de cette impédance est cruciale.

Les premiers modèles de rayonnement utilisés pour les instruments à vent sont fondés sur des pistons plans ou des tubes droits, encastrés ou non dans des écrans (comparés aux tubes droits, les modèles fondés sur des pistons plans négligent les modes évanescents). Les modèles les plus utilisés (cf. [193] pour des comparaisons, [155] pour des pistons inscrits dans des écrans finis et [228, 37] pour d'autres généralisations) sont souvent présentés sous la forme (V est la vitesse orientée vers l'espace extérieur)

$$P/V = Z_{rad}^{\text{spécifiq.}} = \rho c\, Z \quad \text{en fonction de } ka = (2\pi f/c)\, a \quad (a \text{ est le rayon du tube, } k \text{ est le nombre d'onde}),$$

où la fonction de transfert adimensionnée Z peut correspondre au cas de (cf. figure 1.5) :

(Z_1) un piston circulaire inscrit dans un écran rigide $Z_1 = 1 - \frac{2J_1(2ka)}{2ka} + i\frac{2H_1(2ka)}{2ka}$ (J_1 et H_1 sont ici respectivement les fonctions de Bessel et de Struve du premier ordre [152]). Le signe de la partie imaginaire correspond au choix d'une décomposition sur des signaux mono-chromatiques pour la convention $\exp(2i\pi f t)$ qui est cohérente avec les transformées de Fourier (/Laplace avec $s = 2i\pi f$),

(Z_2) un piston circulaire [193, (9)], [158],

(Z_3) un tube droit sans écran [118, (V.16)].

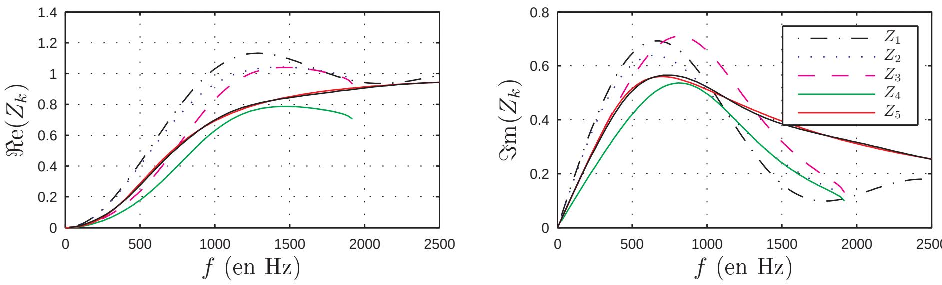


FIG. 1.5 – Comparaisons d'impédances de rayonnement pour $R^\dagger$ en $z = z^\star$ (cf. figure 1.2).

Cependant, ces modèles sont mal adaptés aux pavillons, spécialement lorsque l'angle θ_0 du cône tangent à l'extrémité du pavillon est assez ouvert (cf. figure 1.6ⓐ : pour le profil $R^\dagger$, on a $\theta_0 \approx 59.2^\circ$). Pour tenir compte de fronts d'ondes sphériques, une correction de Z_3 par le facteur $\frac{A_p}{A_s}$ (A_p et A_s sont les aires rayonnantes respectives du piston plan et de la calotte sphérique [27]) conduit au modèle

$$Z_4 = \frac{A_p}{A_s} Z_3 \quad \text{où } A_p = \pi\mathcal{R}^2 = \pi(r_0 \sin\theta_0)^2 \text{ et } A_s = 2\pi r_0^2(1-\cos\theta) = \frac{2\pi\mathcal{R}^2}{1+\cos\theta_0} \text{ de sorte que } \frac{A_p}{A_s} = \frac{1+\cos\theta_0}{2}. \quad (1.10)$$

Au premier ordre à la limite des basses fréquences, ce facteur apporte sur $\Re e(Z_4)$ la correction qui est en accord avec les lois de conservation d'énergie et de masse [A1, cf. étude dans § 4.4 proposée par J. Kergomard]. Le modèle Z_4 a été souvent utilisé pour modéliser les pavillons (cf. e.g. [185]).

Pour raffiner l'effet de la sphéricité, nous proposons un modèle Z_5 fondé sur une portion de sphère pulsante [A1] et indiquons ses principales propriétés. D'après les comparaisons récentes dans [58], ces raffinements sont significatifs dans le cas des pavillons, spécialement au dessus de la fréquence de coupure.

Modèle Z_5 et propriétés. On considère une sphère de rayon r_0, dont une partie $\mathcal{S}_0$ ($\theta \leq \theta_0$, cf. figure 1.6ⓐ) est animée d'une vitesse $V_0(f)$ et dont l'autre partie est immobile.

Sous les hypothèses de l'acoustique linéaire conservative et en utilisant une décomposition sur les harmoniques sphériques, la fonction de transfert (domaine de Fourier) entre $V_0(f)$ et le champ de pression externe $P_{r_0,\theta_0}(f,r,\theta)$ vaut $\frac{P_{r_0,\theta_0}(r_0,\theta,f)}{V_{\theta_0}(\theta,f)} = \rho c\, H_{\theta_0}(\frac{r}{r_0}, \theta, \frac{r_0 f}{c})$ où $H_{\theta_0}(\xi,\theta,\nu) = -i\sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n(\theta_0)\mathbb{P}_n(\cos\theta)\frac{\mathfrak{h}_n(2\pi\xi\nu)}{\mathfrak{h}_n'(2\pi\nu)}$, $\mu_n(\theta_0) = \big(\mathbb{P}_{n-1}(\cos\theta_0) - \mathbb{P}_{n-1}(\cos\theta_0)\big)/2$, $\mathbb{P}_{-1}(X) = 1$ et, pour $n \geq 0$, $\mathbb{P}_n$ et $\mathfrak{h}_n$ représentent respectivement le polynôme de Legendre et la fonction de Hankel sphérique divergente d'ordre n. Sur $\mathcal{S}_0$, l'impédance adimensionnée est alors caractérisée par $H_{\theta_0}(\xi,\theta,\nu)$ avec $\xi = 1$.

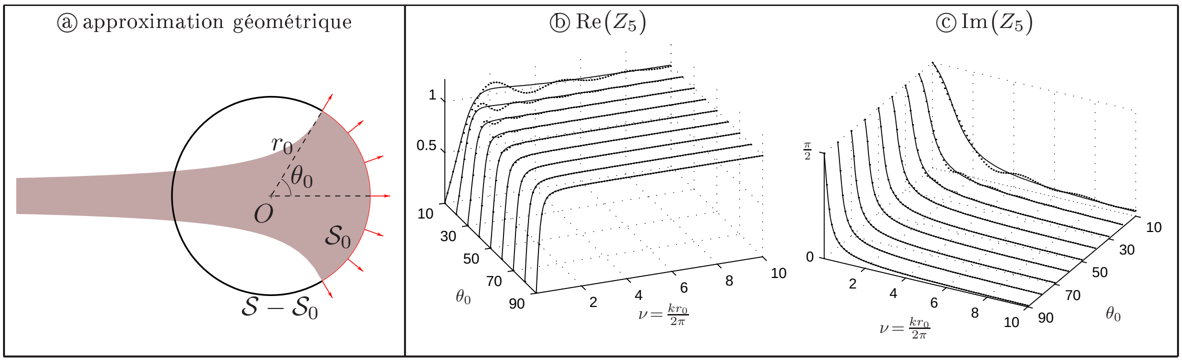


FIG. 1.6 – Approximation du rayonnement d'un pavillon ⓐ : impédance moyennée sur $\mathcal{S}_0$ (pointillés) et modèle passe-haut du second ordre Z_5 (traits pleins) ⓑ-ⓒ.

Remarque 6 (fréquence réduite) *Dans H_{θ_0}, nous avons introduit la fréquence réduite $\nu=\frac{f\,r_0}{c}=\frac{k\,r_0}{2\pi}$, qui est proportionnelle au rayon r_0 de la sphère (et non pas au rayon a du tube comme dans $Z_{1,2,3,4}$).*

Pour rendre ce modèle compatible avec le modèle 1D à isobares quasi-sphériques, sa dépendance en θ doit être supprimée. La moyenne sur $\mathcal{S}_0$ fournit l'approximation $\mathcal{Z}_{\theta_0}(\nu)=-\frac{2i}{1-\cos\theta_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\mu_n(\theta_0)\right)^2}{2n+1}\frac{\mathfrak{h}_n(2\pi\nu)}{\mathfrak{h}_n'(2\pi\nu)}$, qui minimise l'erreur quadratique moyenne $\mathcal{E}_{\mathcal{S}_0}$ sur $\mathcal{S}_0$. Nous avons pu vérifier [A1, (24), fig. 3c] que l'erreur commise est négligeable en basse fréquence ($\nu\ll 1$). Sa valeur maximale selon ν décroît avec θ_0 de sorte que l'approximation $\mathcal{Z}_{\theta_0}$ est meilleure pour les angles larges que pour les angles étroits. De plus, $\mathcal{Z}_{\theta_0}$ peut être approchée par des modèles plus simples (notés (M1-3) dans [A1, § 4]) à paramètres optimaux pour $\mathcal{E}_{\mathcal{S}_0}$. Le modèle (M2) décrit ci-dessous est tracé en figure 1.6ⓑ-ⓒ. Il fournit un bon compromis entre complexité et précision pour la plupart des pavillons de cuivres.

Résultat 4 (Impédance de rayonnement Z_5) *Pour les petits θ_0, $\mathcal{Z}_{\theta_0}$ est proche de Z_1 (piston "bafflé") qui comporte quelques ondulations caractéristiques au-dessus de la fréquence de coupure. Pour les angles plus grands que 55°, ces ondulations disparaissent et $\mathcal{Z}_{\theta_0}$ est correctement approchée par le modèle d'ordre 2 suivant (au sens où l'erreur introduite est négligeable devant celle due à la moyenne de H_{θ_0} sur $\mathcal{S}_0$)*

$$Z_5:\nu=\frac{kr_0}{2\pi}\longmapsto\frac{i\alpha\frac{\nu}{\nu_c}-\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^2}{1+2i\xi\frac{\nu}{\nu_c}-\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^2},\quad \textit{à paramètres positifs pour } 0\le\theta_0\le\tfrac{\pi}{2} \textit{ (en radians)}, \tag{1.11}$$

$\xi(\theta_0)=0.0207\theta_0^4-0.144\theta_0^3+0.221\theta_0^2+0.0799\theta_0+0.72$, $\alpha(\theta_0)=\left[0.1113\theta_0^5-0.6360\theta_0^4+1.162\theta_0^3-1.242\theta_0^2+1.083\theta_0+0.8788\right]^{-1}$, et $\nu_c(\theta_0)=\left[-0.198\theta_0^5+0.2607\theta_0^4-0.424\theta_0^3-0.07946\theta_0^2+4.704\theta_0+0.022\right]^{-1}$.

Cette impédance a les propriétés suivantes (dont certaines non énoncées dans [A1]).

Propriété 5 *Le modèle Z_5 est physiquement pertinent au sens où : (i) il définit un "système impédance" causal stable passif ; (ii) il a les bons comportements acoustiques asymptotiques, $\lim_{\nu\to0^+}Z_5(i\nu)=0$ et $\lim_{\nu\to+\infty}Z_5(i\nu)=1$. De plus, sa fréquence de coupure (définie pour $|Z_5|^2=\frac{1}{2}$) est :*
(iii) $f_c^{ray}=\frac{c}{r_0}\nu_c\left[[1+\beta^2]^{\frac{1}{2}}-\beta\right]^{\frac{1}{2}}$ où $\beta=1+\alpha^2-2\xi^2$.

Preuve : (1.11) est définie aussi (en remplaçant $2i\pi\nu$ par s) dans le domaine de Laplace $\Re e(s)>0$. Pour tous les angles $\theta_0\in[0,\frac{\pi}{2}]$, ses pôles $s=2\pi\nu_c(-\xi\pm i\sqrt{1-\xi^2})$ ont une partie réelle positive, dont la stabilité se déduit. Le calcul de $\Re e(Z_5)$ donne $\frac{X^2(2\alpha\xi-1+X^2)}{(1-X^2)^2+(2\xi X)^2}$ avec $X=\frac{\nu}{\nu_c}$ qui est négative pour tout X si et seulement si $2\alpha\xi-1\ge0$. Or, $\min_{\theta_0}\left(2\alpha(\theta_0)\xi(\theta_0)-1\right)\ge0.2$, ce qui prouve la passivité. (ii) est immédiat. Finalement, on montre aisément que $|Z_5|^2-\frac{1}{2}$ est nul si et seulement si $X^4+2\beta X^2-1=0$. L'unique racine positive est $X=\left[[1+\beta^2]^{\frac{1}{2}}-\beta\right]^{\frac{1}{2}}$ de laquelle on déduit (iii). Ceci conclut la preuve.
De plus, Z_5 respecte les principes de conservation de la masse et de l'énergie (comme Z_4) au sens où, numériquement (cf. [A1, § 4.4]), $\lim_{\nu\to0}[\Re e(Z_5(i\nu))]/(2\pi\nu)^2\approx(1-\cos\theta_0)/2$.

En conclusion, le modèle d'impédance de rayonnement Z_5 définit une impédance passive physiquement sensée et aux comportements asymptotiques réalistes. Pour les constantes physiques et les paramètres du trombone mesuré (cf. p. xi et tab. 1.2), (iii) conduit à $f_c^{ray}\approx848$ Hz.

1.1.4 Ingrédient 4 : pertes visco-thermiques

Kirchhoff fut le premier à introduire l'effet de conduction thermique, à étendre la théorie de Stokes et à fournir des solutions simples dans l'espace libre et dans un tube. Il a aussi donné la formule de dispersion générale exacte pour un cylindre lorsque le problème est à symétrie de révolution [107] (cf. [18, éq. (56)] pour des versions non symétriques). Des modèles simplifiés ont aussi été proposés : découplage des couches visqueuses et thermiques (théorie de Zwikker et Kosten [29, p.210], cf. [104, 105] pour les conditions de validité), admittance équivalente de Cremer [33] d'un écran plan sur lequel se réfléchissent des ondes planes pour un angle d'incidence donné [33]. Ce dernier modèle coïncide avec celui de Kirchhoff pour un guide à section rectangulaire large (couches limites peu épaisses devant les longueurs du rectangle). Des équations de propagation fondées sur une approximation en ondes planes et cette admittance ont été développées : elles incluent un terme impliquant une dérivée temporelle fractionnaire (cf. éq. de Lokshin [124, 125] et [170]). Des solutions exactes de l'équation de Lokshin ont été données dans [139, 140].

Le modèle que nous proposons ici [A2, cf. § IV, (82)] est une extension du résultat 1. Il fournit une version perturbée du modèle (1.4) en adaptant l'hypothèse 1 au cas d'une paroi à admittance de Cremer.

Résultat 5 (Modèle de Webster-Lokshin à abscisse curviligne) *Le modèle dissipatif qui régit l'état acoustique hors des couches limites est donné par*

$$\Big(\partial_\ell^2 - \Upsilon(\ell) - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \frac{2\varepsilon(\ell)}{c^{\frac{3}{2}}}\partial_t^{\frac{3}{2}}\Big)\big[\mathcal{R}(\ell)\,p(\ell,t)\big] = 0 \quad et \quad \rho\,\partial_t v(\ell,t) + \partial_\ell p(\ell,t) = 0, \tag{1.12}$$

avec $\Upsilon = \frac{\mathcal{R}''}{\mathcal{R}}$ *et où* $\varepsilon = \varepsilon^\star \frac{\sqrt{1-(\mathcal{R}')^2}}{\mathcal{R}}$ *quantifie les effets de pertes* ($\varepsilon^\star = \sqrt{l_v} + (\gamma-1)\sqrt{l_t} \approx 3.125\times10^{-4}\ m^{\frac{1}{2}}$, *pour les constantes physiques données page xi). Dans le terme des pertes,* $\partial_t^{\frac{3}{2}}$ *représente une dérivée temporelle d'ordre fractionnaire (cf. e.g. [139]). Une définition pour les systèmes causaux et une représentation bien posée de ce type particulier d'opérateur sont développées plus loin, en partie 2.1. Indiquons ici que* $\partial_t^{\frac{3}{2}}$ *représente l'opérateur causal associé dans le domaine de Laplace à la fonction de transfert analytique donnée par la détermination principale (cf. (2.3)-§ 2.1) de* $s \in \mathbb{C}_0^+ \mapsto s^{\frac{3}{2}}$.
Nous appelons ces équations "modèle de Webster (cas $\varepsilon = 0$)*-Lokshin* (cas $R' = 0$)*".*

Remarque 7 (Approximation en ondes planes) *Une version de type "ondes planes" a été établie dans [170] : dans (1.12),* ℓ, $\mathcal{R}(\ell)$ *et* $\varepsilon(\ell)$ *sont remplacés par* z, $R(z)$ *et le coefficient de pertes* $\varepsilon(z) = \frac{\varepsilon^\star}{R(z)}$ *qui ne dépend que du rayon du profil mais plus de sa pente.*

Propriété 6 (Matrice de transfert de tronçons à paramètres Υ et ε constants) *Pour des tronçons* ($n=1,\dots,N$) *à* Υ_n *constants sur lesquels* ε *est approché par sa valeur moyenne*[3] $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon^\star} = \frac{1}{\ell_n - \ell_{n-1}} \int_{\ell_{n-1}}^{\ell_n} \frac{\sqrt{1-\mathcal{R}'(\ell)^2}}{\mathcal{R}(\ell)}\,\mathrm{d}\ell$, *on obtient la même matrice de transfert que dans le résultat 2 en remplaçant (1.7) par*

$$\Gamma_n(s)^2 = \left(\frac{s}{c}\right)^2 + 2\varepsilon_n\left(\frac{s}{c}\right)^{\frac{3}{2}} + \Upsilon_n. \tag{1.13}$$

L'effet des pertes est le suivant (cf. [139, fig. 6.7b], [140] pour les tubes droits et [A5, fig. 10] pour le cas présent).

Résultat 6 (Effet régularisant et de mémoire longue) *Dans (1.12), le terme en dérivée fractionnaire régularise la réponse impulsionnelle des immittances et introduit un effet de "mémoire longue" :*
(i) les impulsions de Dirac deviennent des fonctions régulières de classe $\mathcal{C}^\infty$,
(ii) les fonctions décroissent plus lentement que toute exponentielle décroissante (mémoire longue),
(iii) les modes propres de tels systèmes dits "à amortissement fractionnaire" ne se réduisent pas à filtres Q-résonants standard.

Remarque 8 *Dans (iii), la dynamique des modes n'est plus de type exponentiel mais de type Mittag-Leffler à décroissance lente [148]. Leur réponse impulsionnelle se décompose en une somme finie (/dénombrable) et une somme infinie continue (intégrale sur des chemins) de systèmes d'ordre 1 [38, 140, A6, A5].*

Une étude plus détaillée de cet effet ainsi que le développement d'outils de représentation et d'approximation spécifiques de ce type d'opérateurs sont présentés en partie 2.1 de ce document.

[3] D'après la remarque 7, on a $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon^\star} = \frac{1}{z_n - z_{n-1}} \int_{z_{n-1}}^{z_n} \frac{1}{R(z)}\,\mathrm{d}z$ sous l'approximation "onde plane".

1.1.5 Validation sur un pavillon de trombone mesuré

L'impédance d'entrée d'un pavillon de trombone (marque Courtois, modèle 155R dont la perce a été relevée et est tracée en figure 1.7ⓐ) a été mesurée par P. Eveno [58] à l'aide du dispositif présenté dans [132]. Le calibrage du dispositif a conduit à une estimation de température de $T = 25.6^{\circ}C$ et les constantes physiques ont été calculées en conséquence (cf. page xi). L'abscisse curviligne calculée ($\ell_0 = 0$ et $\ell_n = \ell_{n-1} + \sqrt{(z_n - z_{n-1})^2 + (R_n - R_{n-1})^2}$ pour $n \geq 1$) correspond à (1.3) pour l'interpolation affine par morceaux du relevé de points original. Enfin, des approximations C^1-régulières avec 5 tronçons à Υ constant ont été estimées par la méthode décrite dans [C31] dont les résultats sont donnés dans tab. 1.2 (pour z et ℓ) et tracés (pour ℓ) en figure 1.7ⓑ. Enfin, à la sortie du pavillon, la calotte sphérique pulsante équivalente a pour paramètres $r_0 = 0.1154\,\text{m}$, $\theta_0 = 72.4^{\circ}$ de sorte que d'après la propriété 5, $f_c^{ray} = 848\,\text{Hz}$ qui est inférieure à la fréquence $f^+ \approx 923\,\text{Hz}$ donnée par le critère de validité (1.5).

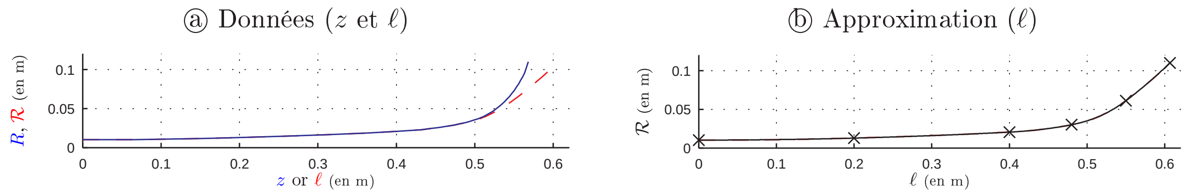


FIG. 1.7 – Profil de la perce du pavillon de trombone : ⓐ profil mesuré (-) et profil tracé en fonction de l'abscisse curviligne ℓ (- -) ; ⓑ profil en ℓ et son approximation par 5 tronçons à Υ constant estimé par la méthode [C31].

En utilisant simultanément les 4 ingrédients proposés ci-dessus (1. abscisse ℓ, 2. cinq tronçons à Υ_n constant avec raccord $\mathcal{C}^1$, 3. impédance de rayonnement Z_5, 4. $\varepsilon_n \neq 0$), nous obtenons le modèle noté $M_\star$. Son impédance d'entrée normalisée $Z_{in} = \frac{1}{\rho c}\frac{P_{input}}{V_{input}}$ et le module de l'erreur $|R_{in}^{measure} - R_{in}^{model}|$ de la fonction de réflexion d'entrée $R_{in} = \frac{Z_{in}-1}{Z_{in}+1}$ sont tracées en figure 1.8. Il est à noter qu'aucun paramètre n'a été ajusté.

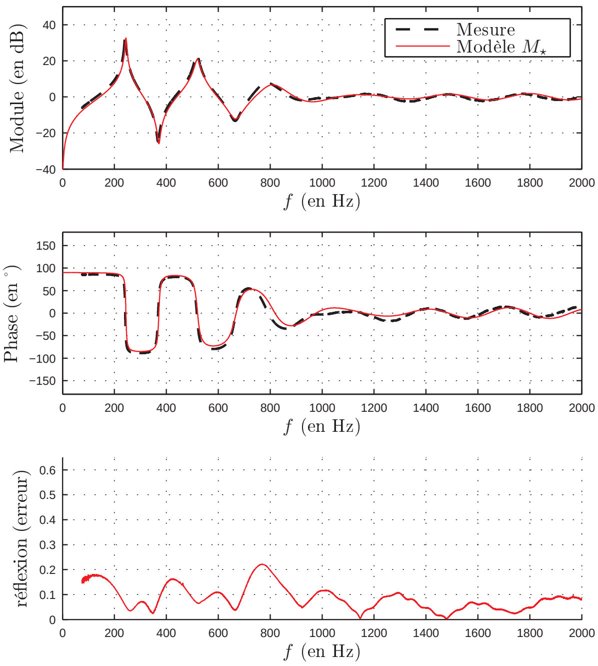


FIG. 1.8 – Impédance d'entrée normalisée (module en dB ($20\log_{10}$) et phase en degrés) et erreur de la fonction de réflexion (module, sans dimension, échelle linéaire) : mesure (- -) et modèle $M_\star$ (-).

abscisse z

n	z_n (m)	R_n (m)	Υ_n (m^{-1})	ε_n (m$^{-\frac{3}{2}}$)	$f_c = \frac{c\sqrt{\Upsilon_n}}{2\pi}$ (Hz)
0	0	0.0104	$\times$	$\times$	$\times$
1	0.2000	0.0129	11.7	0.0279	188.6
2	0.3998	0.0208	8.7	0.0194	163.0
3	0.4792	0.0298	63.8	0.0129	440.5
4	0.5404	0.0611	298.7	0.0079	953.5
5	0.5680	0.1082	758.0	0.0040	1518.9

abscisse ℓ

n	ℓ_n (m)	R_n (m)	Υ_n (m^{-1})	ε_n (m$^{-\frac{3}{2}}$)	$f_c = \frac{c\sqrt{\Upsilon_n}}{2\pi}$ (Hz)
0	0	0.0104	$\times$	$\times$	$\times$
1	0.2000	0.0130	11.8	0.0279	189.8
2	0.4000	0.0207	7.9	0.0194	155.2
3	0.4800	0.0302	72.3	0.0128	469.1
4	0.5500	0.0613	191.3	0.0069	763.1
5	0.6065	0.1100	45.8	0.0019	373.5

TAB. 1.2 – Description du pavillon mesuré par des raccords à régularité C^1 de 5 tronçons à Υ constant pour z (en haut) et ℓ (en bas).

En retirant un seul ingrédient, le résultat est dégradé comme le montre la figure 1.9. Plus précisément, on observe sur la sous-figure ① que l'abscisse curviligne ℓ a une influence majeure sur les fréquences, amplitudes et qualité des pics (max. et min.) de l'impédance. La sous-figure ② montre qu'à nombre identique de tronçons, la suppression des raccords doux et de la courbure dégrade aussi la qualité. Cette dégradation est moins sévère qu'en ① mais le comportement fin au dessus de la fréquence de coupure est perdu. On sait par ailleurs d'après le résultat 3 que la régularité des réponses impulsionnelles est moins bonne. En sous-figure ③, la perte du comportement fin en haute fréquence est aussi l'effet principal des impédances de rayonnement $Z_{1,3,4}$. Enfin, en sous-figure ④, l'absence de pertes visco-thermiques détériore l'amplitude et la qualité des pics mais peu leur fréquence.

Le calcul précis des fréquences des pics (max./min.), ou les valeurs voisines mais plus robustes des phases nulles (décroissantes/croissantes), confirment ces résultats.

1.1.6 Conclusion partielle et perspectives

Les quatre ingrédients que nous avons proposés sont pertinents pour les tubes évasés à profils doux. Une première perspective serait d'insérer ces résultats dans des outils d'aide à la lutherie (projet ANR PAFI, dirigé par J. Gilbert) et à l'optimisation de perce (projet ANR CAGIMA, dirigé par P. Guillemain).

Une autre perspective vient de la remarque suivante. Il est peu évident que l'hypothèse de quasi-sphéricité (et donc que l'abscisse curviligne) soit bien adaptée au cas de chambres convexes ($\Upsilon < 0$), tout comme les approximations en tronçons de cônes. En effet, dans ce cas, les distances locales entre isobares (ou sphères) sont plus courtes que la longueur de la paroi. Pour construire un modèle 1D amélioré à partir de (1.2), l'hypothèse de quasi-sphéricité pourrait être relâchée. Il serait même intéressant de regarder si l'ensemble des équations $\partial_u^k(1.2)$ avec $k = 0, 1, 2$, c'est-à-dire,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \partial_u\alpha & \partial_u\beta & \partial_u\gamma \\ \partial_u^2\alpha & \partial_u^2\beta & \partial_u^2\gamma \end{bmatrix}}_{M(s,u,t)} \underbrace{\begin{bmatrix} \partial_s^2\widetilde{p} \\ \partial_s\widetilde{p} \\ \partial_s\partial_t\widetilde{p} \end{bmatrix}}_{X(s,t)} = \underbrace{\frac{1}{c^2}\begin{bmatrix} \partial_t^2\widetilde{p} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{Y(s,t)}$$

permettent ou non de construire un modèle 1D exact, en augmentant l'état par un faible nombre d'indicateurs de la géométrie des isobares. En effet, puisque $[\partial_u M(s,u,t)]X(s,t) = 0_{3\times1}$, la question est de savoir si l'invariant décrit par $\det(\partial_u M(s,u,t))=0$ combiné avec une augmentation appropriée de l'état (par exemple, cf. page 8, $\partial_u^k\partial_s^2 \ln|\partial_u g|$ évalué en $u = w$) peut conduire à un système fermé bien posé. Cette idée permettrait alors d'atteindre le but initialement visé, lorsque nous avons établi l'équation (1.2) : transformer un problème 2D en un problème 1D exact. Celle-ci n'a pas encore été investiguée.

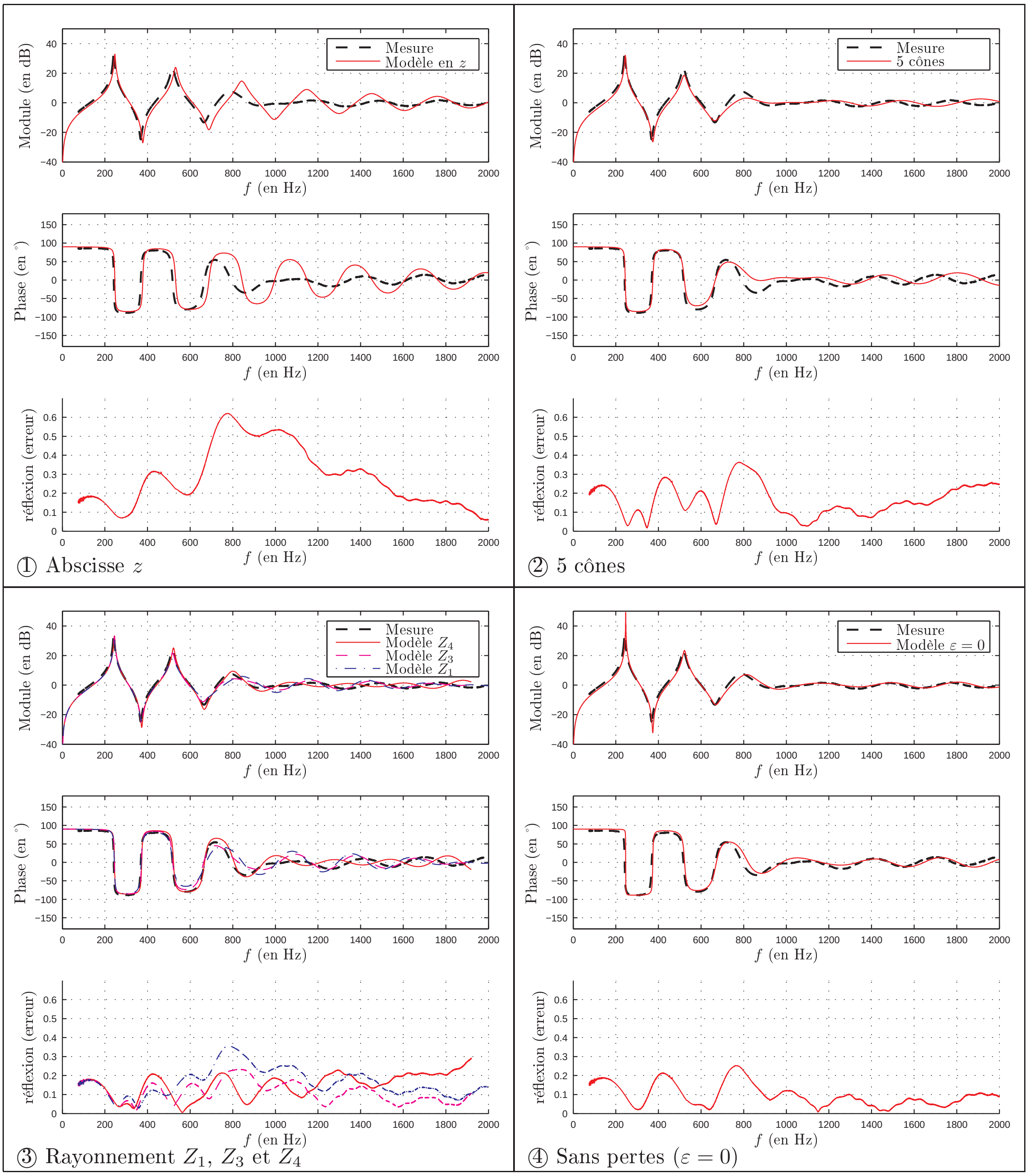


FIG. 1.9 – Comparaisons similaires à la figure 1.8 : mesure (–) et modèles incluant tous les ingrédients sauf un (l'ingrédient manquant dans la sous-figure ⓚ est le k-ième).

1.2 Guides d'ondes numériques (thèse de Rémi Mignot)

Cette partie présente dans § 1.2.1-1.2.2 des résultats de thèse de Rémi Mignot [147] et, dans § 1.2.3, des pistes ouvertes lors des stages de M2R ATIAM de Thomas Hézard et Louis Délebecque.

Comme il l'a déjà été mentionné en § 1.1.2, les guides d'ondes numériques et leur version factorisée en structure de Kelly-Lochbaum (cf. figure 1.4) ont été largement utilisées pour la synthèse sonore en temps réel. Cette solution repose sur des décompositions en ondes aller/retour découplées, valables pour les cas bien connus des tubes conservatifs droits ou coniques.

Dans cette partie, on présente un changement d'état qui permet d'étendre cette décomposition au cas de profils à $\Upsilon = \mathcal{R}''/\mathcal{R}$ constant. Ce résultat conduit aux jonctions données en tab. 1.1 ⓒ et reste valable en présence de pertes visco-thermiques pour les tronçons caractérisés par la propriété 6. L'étude de la stabilité des systèmes obtenus exhibe deux catégories : celle stable des tubes (à chambres) concaves et celle curieusement instable des tubes à chambre convexe. Une étude des fonctions de transfert de tubes finis et infinis lèvent ce faux paradoxe. Une approche énergétique et une analyse de passivité en fournissent une interprétation supplémentaire. Ceci suggère une nouvelle forme de définition d'ondes, à découplage global plutôt que local. Cette définition permet de rétablir la stabilité et fait apparaître une nouvelle catégorisation des profils.

1.2.1 Ondes progressives à découplage local et structure de Kelly-Lochbaum

L'état acoustique d'un champ 1D est caractérisé par deux quantités. Traditionnellement, ce sont les variables de Kirchhoff qui sont utilisées pour le représenter : $X_K = [p, u]^T$ avec la pression acoustique p et le débit acoustique $u = A\,v$. Pour le modèle de Webster-Lokshin à abscisse curviligne (1.12) considéré ici, cet état est gouverné par le système[4]

$$\partial_t X_K + \underbrace{c\begin{bmatrix} 0 & Z_c \\ Z_c^{-1} & 0 \end{bmatrix}}_{M_K(\ell)} \partial_\ell X_K = \underbrace{-2\varepsilon\sqrt{c}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{P_K(\ell)} \partial_t^{\frac{1}{2}} X_K \text{ avec } Z_c = \frac{\rho c}{A} \text{ et } A = \pi\mathcal{R}^2 \text{ (cf. rq. 1ⓐ).} \quad (1.14)$$

La matrice M est inversible à valeurs propres réelles $\pm c$ de sorte qu'en absence de pertes (P_K nul), il définit un système hyperbolique conservatif.

Ondes progressives de type "ondes planes" et "ondes sphériques"

Afin de mettre en oeuvre des simulations peu coûteuses et compatibles avec le temps réel, on peut mettre à profit des changements d'états qui apportent des propriétés remarquables telles que le découplage et le transport (causal) des nouvelles quantités[5]. Pour les tubes sans pertes, droits ou coniques, le modèle (1) est exact. Il prend la forme commune $\left(\partial_\ell^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\left[\mathcal{R}(\ell)p(\ell,t)\right] = 0$, avec (cf. rq. 1ⓑ) $\ell = z$ et $\mathcal{R}(\ell) = \mathcal{R}(0)$ (tubes droits, ondes planes) et $\ell = r$ et $\mathcal{R}(\ell) = \ell\sin\theta$ (tubes coniques, ondes sphériques). La factorisation (commutative) en deux opérateurs de transport $\partial_\ell^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 = (\partial_\ell + \frac{1}{c}\partial_t)(\partial_\ell - \frac{1}{c}\partial_t)$ montre que les solutions sont la somme de deux ondes progressives $\mathcal{R}(\ell)p(\ell,t) = f^+(t-\ell/c) + f^-(t+\ell/c)$.

Dans le cas des tubes droits, l'état homogène à la pression $p^\pm = f^\pm/\mathcal{R}(0)$ ou sa version normalisée $\phi^\pm = f^\pm$ définissent tous les deux des ondes aller/retour. Dans le cas des tubes coniques, seule la version normalisée $\psi^\pm = f^\pm$ a cette propriété. Les changements d'états sont détaillés pour chacun de ces trois cas dans la deuxième colonne du tableau 1.3 (voir aussi [C11]) : ils se déduisent de l'écriture de la pression et de l'équation d'Euler.

Qu'en est-il du découplage de ces ondes en présence de pertes et pour des profils $\mathcal{R}$ courbes ?

[4] L'équation d'Euler est donnée par la deuxième ligne du système et l'équation des ondes se déduit en appliquant l'opérateur $[-\frac{1}{c^2}\partial_t\,, \frac{Z_c}{c}\partial_\ell]$ à gauche.

[5] Dans le cas d'équations hyperboliques pour lesquelles ces quantités sont conservées, on parle d'invariant de Riemann (cf. [174] pour le texte original). Les courbes $(\ell,t) \in \mathcal{C}$ sur lesquelles une quantité reste constante sont appelées *caractéristiques*. Ceci sera exploité pour le cas d'un transport non linéaire en § 1.3.

Etat	Changement d'état	M	N	P
$X_K = \begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix}$	$= I_2\, X_K$	$c \begin{bmatrix} 0 & Z_c \\ Z_c^{-1} & 0 \end{bmatrix}$	$0_{2\times 2}$	$-2\varepsilon\,\sqrt{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
$X_p = \begin{bmatrix} p^+ \\ p^- \end{bmatrix}$	$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & Z_c \\ 1 & -Z_c \end{bmatrix} X_K$	$c \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$c\,\zeta \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	$-\varepsilon\,\sqrt{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
$X_\phi = \begin{bmatrix} \phi^+ \\ \phi^- \end{bmatrix}$	$= \frac{\mathcal{R}}{2} \begin{bmatrix} 1 & Z_c \\ 1 & -Z_c \end{bmatrix} X_K$	$c \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$c\zeta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	$-\varepsilon\,\sqrt{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
$X_\psi = \begin{bmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{bmatrix}$	$= \frac{\mathcal{R}}{2} \begin{bmatrix} 1-\zeta\, c\partial_t^{-1} & Z_c \\ 1+\zeta\, c\partial_t^{-1} & -Z_c \end{bmatrix} X_K$	$c \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$-\frac{c^2\Upsilon}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \partial_t^{-1}$	$-\varepsilon\,\sqrt{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

TAB. 1.3 – Définition des états X_K, X_P, X_ϕ et X_ψ et expressions associées du modèle de Webster-Lokshin sous la forme $\partial_t X + M\partial_\ell X = NX + P\partial_t^{\frac{1}{2}} X$ pour un profil quelconque $\mathcal{R}$ de régularité $\mathcal{C}^1$ ($\mathcal{C}^2$ pour X_ψ). L'opérateur ∂_t^{-1} représente l'intégrateur temporel (depuis $t = 0$ pour un fluide initialement au repos) et on rappelle que $Z_c = \rho c/(\pi\mathcal{R}^2)$, $\varepsilon = \varepsilon^\star \frac{\sqrt{1-(\mathcal{R}')^2}}{\mathcal{R}}$, $\zeta = \mathcal{R}'/\mathcal{R}$ et $\Upsilon = \mathcal{R}''/\mathcal{R}$ sont des fonctions de ℓ.

En appliquant ces changements d'état (localement en ℓ) au modèle de Webster-Lokshin pour un profil régulier, on obtient un système de la forme $\partial_t X + M\partial_\ell X = NX + P\partial_t^{\frac{1}{2}} X$ où M, N et P sont donnés en tab. 1.3. Pour les 3 états X_p, X_ϕ et X_ψ, les matrices M et P sont identiques : l'opérateur $\partial_t + M\partial_\ell$ est diagonal et isole les deux transports ; l'opérateur de pertes $P\partial_t^{\frac{1}{2}}$ couple les ondes dès que $\varepsilon > 0$. Enfin, dans le cas sans pertes, on retrouve que le découplage des ondes est équivalent à $\zeta = 0$ (tube droit) pour X_p, X_ϕ, et à $\Upsilon = 0$ (tube conique) pour X_ψ. Ces changements d'état définissent donc des ondes progressives mais qui restent localement couplées par l'effet des pertes et par les perturbations géométriques (relativement aux "profils droits" pour X_p et X_ϕ et aux "profils coniques" pour X_ψ).

Ondes localement découplées pour les tronçons à Υ et ϵ constants

Pour exhiber des ondes localement découplées pour le modèle de Webster-Lokshin, on peut chercher à reprendre la même démarche : factoriser l'opérateur dans l'équation des ondes du modèle (1.12). Pour le cas d'un tronçon n à paramètres Υ_n et ε_n constants (cf. propriété 6), cet opérateur est $\partial_\ell^2 - \Upsilon_n - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \frac{2\varepsilon_n}{c^{\frac{3}{2}}}\partial_t^{\frac{3}{2}}$. Dans le domaine de Laplace[6], il admet la factorisation commutative

$$\partial_\ell^2 - \Gamma_n(s)^2 = \Big(\partial_\ell + \Gamma_n(s)\Big)\Big(\partial_\ell - \Gamma_n(s)\Big),$$

où Γ_n^2 est donnée par (1.13) et où Γ_n est la détermination principale de sa racine carrée. Ainsi, la solution $\mathcal{R}p$ exprimée dans le domaine de Laplace s'écrit encore comme la somme de deux contributions $F_n^+(s)\,\mathrm{e}^{-\Gamma(s)\ell} + F_n^-(s)\,\mathrm{e}^{+\Gamma(s)\,\ell}$. On note $X_q = [q^+, q^-]$ l'état formé par ces deux contributions dans le domaine temporel et X_Q dans le domaine de Laplace. A partir du modèle (1.12), on trouve le changement d'état suivant et le système qui le régit :

$$X_Q(s,\ell) = \frac{\mathcal{R}}{2}\begin{bmatrix} 1 - \frac{\zeta(\ell)}{\Gamma_n(s)} & \frac{s/c}{\Gamma_n(s)} Z_c \\ 1 + \frac{\zeta(\ell)}{\Gamma_n(s)} & -\frac{s/c}{\Gamma_n(s)} Z_c \end{bmatrix} X_K(s,\ell), \qquad \Gamma_n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} X_Q + \partial_\ell X_Q = 0_{2\times 1}. \tag{1.15}$$

Remarque 9 *Ce résultat fournit bien une généralisation des cas précédents. En effet, pour Υ_n et ε_n nuls, on retrouve que $\Gamma_n(s)$ vaut s/c ($s \in \mathbb{C}_0^+$), ce qui correspond bien à l'opérateur $\frac{1}{c}\partial_t$ dans le domaine temporel. L'opérateur de propagation $\mathrm{e}^{-\Gamma_n(s)\ell}$ associé à F_n^+ vaut alors $\mathrm{e}^{-s\frac{\ell}{c}}$ qui exprime bien le retard $\tau = \ell/c$ dû au transport de l'onde dans le sens "aller". La définition de X_q coïncide avec celle de X_ψ pour les cônes et avec X_ψ et X_ϕ pour les tubes droits.*

[6] Le domaine d'analyticité du système causal associé est étudié plus loin.

Séparation des effets de discontinuité et structure de Kelly-Lochbaum

Lorsque l'on raccorde $n = 1, \dots, N$ tronçons[7] à l'intérieur desquels l'état acoustique est représenté par X_q, on obtient la structure donnée en figure 1.4ⓐ composée de N paires de "propagateurs" W_n et de $N-1$ quadripôles de jonction $C_{n=1,\dots,N-1}$. Dans le cas des tubes conservatifs droits ($X_q \equiv X_\psi \equiv X_\phi$) et coniques à raccord continu ($X_q \equiv X_\psi$), les 4 fonctions de transferts de chaque jonction ont une forme remarquable qui permet de construire l'ensemble à partir d'une seule fonction de réflexion K_n et trois sommes, comme indiqué en figure 1.4ⓑ. Dans le cas de tubes coniques à raccord discontinu, cette forme se complexifie et met en jeu 2 fonctions de réflexion distinctes et 2 sommes (cf. e.g. [217, (2.73) et fig. 2.13]). En choisissant l'état X_q, des calculs directs montrent que ce type de résultat se généralise au cas de tronçons à Υ_n (et ϵ_n) constants, comme indiqué dans la propriété 3.

Mais pour comprendre plus finement l'effet des ordres de discontinuité aux raccords, il est intéressant de considérer une progression d'états qui les introduit de façon isolée. Ainsi, à l'interface gauche d'un tronçon n ($\ell = \ell_{n-1}^+$), la progression $X_K \to (X_p \text{ ou } X_\phi) \to X_\psi \to X_q$ part de l'état sur lequel on impose la continuité au raccord, puis introduit l'effet (isolé) de discontinuité de section (via $\mathcal{R}$), puis celui de pente (via ζ), et enfin de courbure Υ_n et de pertes ε_n (via Γ_n). Une autre progression, mieux adaptée aux guides d'ondes parce qu'elle évite de recourir à l'état "non progressif" de Kirchhoff, a été proposée par R. Mignot. Celle-ci peut se réinterpréter comme suit : on introduit un *tronçon référence "abstrait"*, choisi ici comme un tube droit sans pertes de rayon arbitraire $\mathcal{R}^\dagger$ ($\zeta^\dagger = 0$, $\Upsilon^\dagger = 0$ et $\varepsilon^\dagger = 0$) et on remplace l'état X_K par celui du *tube référence* $X_p^\dagger$, qui est lui aussi continu aux jonctions. La progression

$$X_p^\dagger \longrightarrow (X_p \to) X_\phi \longrightarrow X_\psi \longrightarrow X_q, \quad \text{à gauche } (\ell = \ell_{n-1}^+), \tag{1.16}$$

et sa version réciproque à *droite* ($\ell = \ell_n^-$) séparent donc les ordres de discontinuité comme précédemment. Mais, une propriété supplémentaire est que, puisque $X_p^\dagger$ est associé à une géométrie, la structure qui en découle met déjà en jeu des fonctions de réflexion (abstraites mais) interprétables. Cette structure remarquable est représentée en figure 1.10 (version réinterprétée de [147, fig. 2.11] et [A12, fig. 4-5] et adaptée aux notations et conventions du tableau 1.1). Sur cette figure, les indices g (pour *gauche*) et d

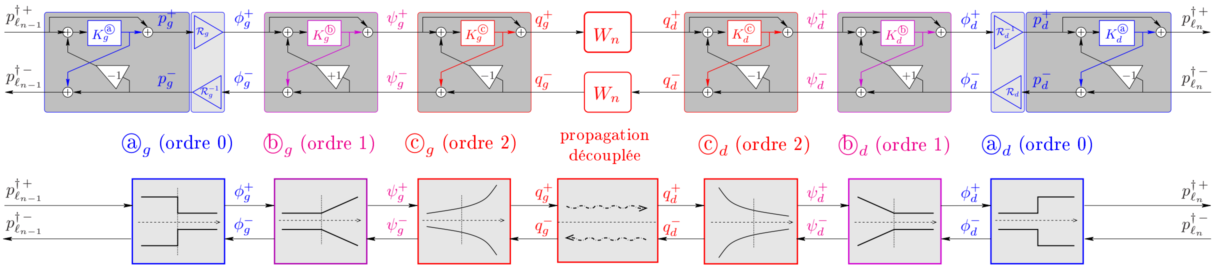


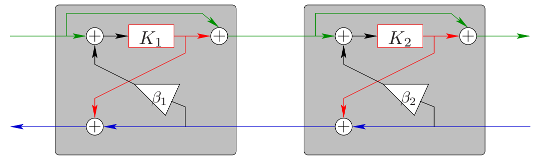
FIG. 1.10 – Décomposition des effets acoustiques dus aux différents ordres de discontinuité de jonctions pour un tronçon n ($\ell \in]\ell_{n-1}, \ell_n[$ à Υ_n et ε_n constants : les fonctions $K^{ⓐ}$ isolent l'effet de la discontinuité de section (ordre 0) entre le tronçon et le tube référence, $K^{ⓑ}$ celui de $\zeta = \mathcal{R}'/\mathcal{R}$ (ordre 1), $K^{ⓒ}$ de celui de la courbure $\Upsilon = \mathcal{R}''/\mathcal{R}$ (ordre 2) et des pertes.

(pour *droit*) symbolisent des évaluations en $\ell = \ell_{n-1}^+$ et $\ell = \ell_n^-$, respectivement. Les fonctions de réflexions de type ⓐ-ⓒ sont données par les formules du tableau 1.1 en prenant les paramètres caractéristiques du tube référence cascadé avec le tronçon n à gauche, et du tronçon n cascadé avec le tube référence à droite.

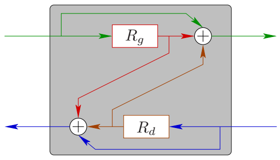
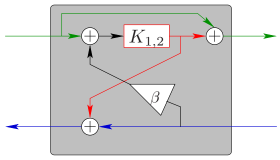
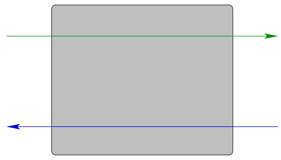
A la jonction de deux tronçons n et $n+1$, un raccord continu implique que $[K_d^{ⓐ}]_n = -[K_g^{ⓐ}]_{n+1} = \frac{A_n - A^\star}{A_n + A^\star}$, et celui de régularité $\mathcal{C}^1$ que $[K_d^{ⓑ}]_n = \frac{\alpha_n}{s-\alpha_n}$ et $[K_g^{ⓑ}]_{n+1} = \frac{-\alpha_n}{s+\alpha_n}$ avec $\alpha_n = \frac{c}{2}\,\frac{\mathcal{R}'(\ell_n)}{\mathcal{R}(\ell_n)}$. La propriété 3 devient alors une conséquence directe[8] des identités remarquables obtenues pour la concaténation de deux jonctions de Kelly-Lochbaum, résumées dans le tableau 1.4. En effet, dans le cas de tubes droits sans pertes, les fonctions de réflexion $K^{ⓑ}$ et $K^{ⓒ}$ sont nulles et il ne reste que la cascade des cellules $[ⓐ_d]_n$ et

[7] On rappelle que le raccord est exprimé par la continuité de l'état X_K à chaque jonction.

[8] Nous n'avons pas trouvé ce type d'explication et interprétation dans la littérature, y compris pour les tronçons de tubes coniques.



$$\equiv$$

Ⓐ cas général	Ⓑ $\beta_1 = \beta_2 = \beta$	Ⓒ $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ et $\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + 1 + \beta = 0$
 $R_g = \frac{K_1+K_2+(1+\beta_1)K_1K_2}{1-\beta_1K_1K_2}$ $R_d = \frac{\beta_1\left[K_1(1+\beta_2)K_1K_2\right]+\beta_2K_2}{1-\beta_1K_1K_2}$	 $K_{1,2} = \frac{K_1+K_2+(1+\beta)K_1K_2}{1-\beta K_1K_2}$	

TAB. 1.4 – Cascade de 2 jonctions de Kelly-Lochbaum et formes remarquables.

$[ⓐ_g]_{n+1}$ fusionnent (tab. 1.4Ⓑ) pour conduire au résultat en tab. 1.1ⓐ. Dans le cas des tubes coniques sans pertes à raccord continu, les fonctions de réflexion $K^{©}$ sont nulles, les cellules $[ⓐ_d]_n$ et $[ⓐ_g]_{n+1}$ se simplifient (tab. 1.4Ⓒ, $\beta = -1$) et il ne reste que les cellules $[ⓑ_d]_n$ et $[ⓑ_g]_{n+1}$ qui fusionnent (tab. 1.4Ⓑ). Dans le cas d'un raccord $\mathcal{C}^1$ de tronçons à Υ et ϵ constants, les cellules ⓐ se simplifient encore, les cellules ⓑ se simplifient aussi (tab. 1.4Ⓒ, $\beta = +1$) et il ne reste que les cellules ⓑ qui fusionnent (tab. 1.4Ⓑ).

On obtient ainsi des structures calculables dont la réalisation repose sur celle (cf. § 1.1.2) : (1) des fonctions de réflexion ($K_n(s)$), et pour les propagateurs, (2) de lignes à retard ($D_n(s) = \mathrm{e}^{+\frac{s}{c}(\ell_n - \ell_{n-1})}$), et (3) des fonctions de dispersion associées ($G_n(s) = W_n(s)/D_n(s)$).

1.2.2 Analyse de stabilité, passivité et simulations

La stabilité et la passivité d'un réseau de tubes droits conservatifs connecté à une charge passive sont bien connues. Elles reposent sur le fait que la valeur absolue des coefficients de réflexions est inférieure à 1. Ce type de résultat est encore connu en présence de pertes [139] et dans le cas de tubes coniques [72, 217, 48]. Une étude approfondie de la stabilité qui reprend ces résultats et les étend au cas de raccords $\mathcal{C}^1$ de tronçons à Υ et ϵ constants a été menée dans [147, chap. 3]. Elle repose sur l'étude de la passivité d'un tronçon connecté à une charge passive et s'étend à l'ensemble d'un réseau par récurrence. Deux cas se distinguent : celui passif stable des profils non convexes ($\Upsilon_n \geq 0$) et celui problématique des profils à chambre convexe ($\Upsilon_n < 0$ ou raccord convexe de cônes).

Cas des tubes à chambre non convexe ($\Upsilon \geq 0$) et exemple d'un trombone virtuel

Dans ce cas, une analyse complexe montre que [147, § 3.2-3.3] : (i) la fonction Γ_n est analytique dans $\mathbb{C}_0^+$, (ii) les fonctions de transfert de réflexion $K_n^{©}$ et de dispersion $G_n(s) = \mathrm{e}^{-(\Gamma_n(s) - s/c)(\ell_n - \ell_{n-1})}$ sont analytiques de module strictement inférieur à 1 sur $\mathbb{C}_0^+$ (et de module inférieur ou égal à 1 sur son adhérence), (iii) la fonction de réflexion $R_{\psi_{n-1}}(s) = \Psi^-(\ell_{n-1}, s)/\Psi^+(\ell_{n-1}, s)$ pour un tronçon n chargé à droite par une charge passive vérifie la même propriété. Ceci permet de conclure à la causalité, la passivité et la stabilité d'un réseau complet.

Des réalisations en structure de Kelly-Lochbaum, simulables, peuvent ainsi être implantées et utilisées : elles sont construites à l'aide de lignes à retards (registres circulaires) et de versions à temps discret d'approximations de dimension finie des fonctions de transfert de type K et G. Une méthode conduisant à des approximations de ces fonctions de transferts irrationnelles, fidèles sur la plage de fréquence audio, est développée en partie 2.1. En pratique, par soucis d'efficacité pour le temps réel, c'est une réalisation minimale de la structure qui est construite dans le domaine à temps discret (cf. [A12]).

Un résonateur du trombone Courtois complet (155R) a été reconstruit en cascadant sept éléments (cf. figure 1.11) : une embouchure modélisée par un système de type masse-résistance-compliance [66], cinq tronçons de tubes à raccord $\mathcal{C}^1$ (1 droit et 4 évasés) et une impédance de rayonnement de type (1.11). La figure 1.11 montre la réponse impulsionnelle de la fonction de réflexion de l'instrument (entre p_0^+ et p_0^-) et de la fonction de transmission (entre p_0^+ et p_{ray}), simulées dans le domaine temporel (cf. § 2.1.5 pour le schéma numérique et [A12] pour plus de détails). Elle compare également l'impédance mesurée sur le trombone réel à celle calculée à partir de la réponse impulsionnelle de la réflexion.

Contrairement à § 1.1.5, ces résultats publiés dans [A15, fig. 16-18] ne sont pas destinés à valider quantitativement le modèle présenté en partie 1.1. En effet, les discontinuités de section localisées aux raccords avec la coulisse ont été omises. De plus, plusieurs paramètres non mesurés au moment de la publication (longueur de tube, paramètres de l'embouchure, température, etc) ont été réglés de façon heuristique physiquement acceptable (cf. [A15, Anx. B] pour les paramètres). Ils montrent toutefois que la modélisation conduit à des résultats qualitativement intéressants. Une librairie en C/C++ qui permet de générer des codes de simulation de ce type de structures a été développée par R. Mignot pendant sa thèse. Ces codes ont pu être exploités, en particulier, sous Pure Data.

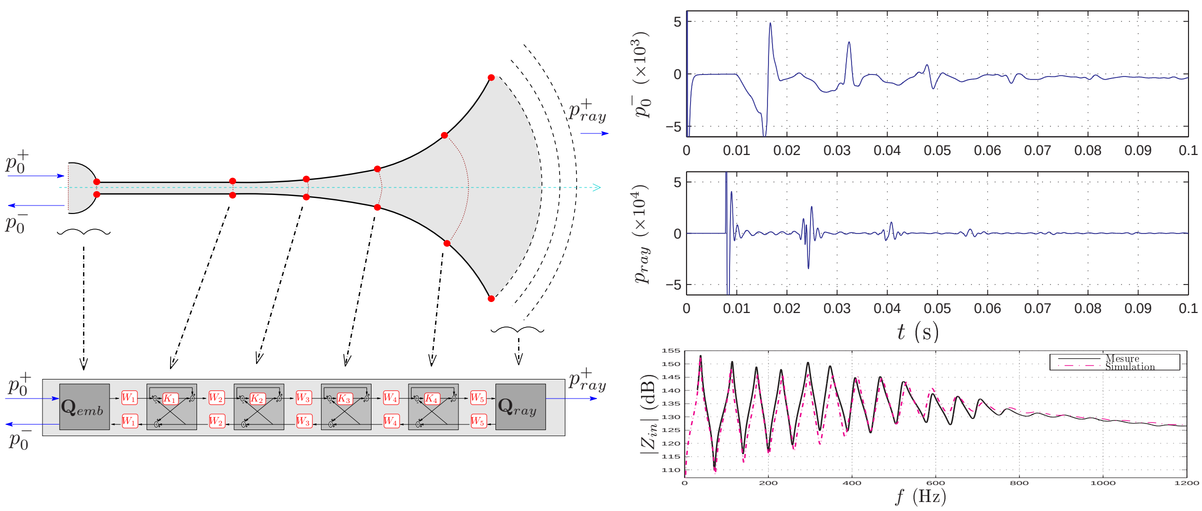


FIG. 1.11 – Exemple de simulation d'un trombone : impédance d'entrée Z_{in} obtenue pour la simulation numérique (- -) comparée à la mesure sur le trombone réel (-), réponses impulsionnelles simulées de la fonction de réflexion d'entrée (embouchure) et de la fonction de transmission.

Cas problématiques des tubes à chambre convexe et de leur simulation à stabilité garantie

L'état X_q correspond à des ondes découplées localement à l'intérieur d'un tronçon, et donc, indépendamment des conditions aux frontières. De ce fait, le propagateur $W_n = \mathrm{e}^{-\Gamma_n(s)\ell}$ correspond à une propagation incluant les effets de pertes et de dispersion due à la géométrie sur une distance ℓ, qui est aussi valable dans un tube non borné. Dans le cas $\Upsilon < 0$, un tel tube n'a pas de sens physique puisque le profil est de la forme $\mathcal{R}(\ell) = \mathcal{R}_{max} \sin(\sqrt{\Upsilon}\ell - \ell^\star)$ et alterne une infinité de parties positives et négatives. Ceci est bien illustré par le calcul de la matrice de transfert (1.6) d'un tronçon de longueur L finie : lorsque $\Upsilon_n L^2 < \pi/2$, la longueur L est plus petite que celle d'une demi arche de sinusoïde et la matrice correspond bien à un système stable. Pour une longueur L juste supérieure à $L^\star = \sqrt{\pi/(2\Upsilon_n)}$, un pôle instable apparaît et chaque ajout d'une période spatiale $\delta L = \sqrt{2\pi/\Upsilon_n}$ amène un nouveau pôle instable. A la limite $L \to +\infty$, les pôles instables se densifient pour former finalement une courbe[9]. En fait, il viennent épouser la coupure de W_n, qui est précisément la fonction limite de la fonction de transmission. Ce phénomène de densification a été étudié dans [A10, A16].

[9]Dans ce cas, on ne parle plus de pôles mais de coupure. Ceci sera justement le "moteur" de la méthode présentée en partie 2.1.

Cette interprétation vaut aussi pour le cas plus étudié des ondes sphériques et de jonctions convexes de cônes. Dans [72], il est proposé de développer la fonction de réflexion de la jonction en une série d'exponentielles divergentes. Dans [48, p.38], il est fait remarquer que les instabilités disparaissent dans les fonctions de transfert globales. Dans [C17] (voir aussi [A16, § 2.3]), nous avons pu montrer, avec une représentation d'état en systèmes différentiels à retard, que les parties divergentes appartiennent au sous-espace non observable du système [98]. Ainsi, en extrayant une réalisation minimale du système, on résout le problème intrinsèque : une formulation en système à retard stable est retrouvée avec une réduction d'état.

Pour le cas plus compliqué des tubes à $\Upsilon < 0$, une solution spécifique encore fondée sur des outils d'automatique et traitement du signal a pu aussi être proposée (cf. [A16, § 4]). Si elle apporte bien un résultat utilisable en pratique, elle laisse toutefois le problème partiellement ouvert au sens où elle n'a pas d'interprétation physique évidente et où elle dépend d'une infinité de degrés de liberté qui ne privilégient aucun choix.

Enfin, un second problème restant est que, même dans le cas $\Upsilon \geq 0$, les procédures d'approximations de dimension finie des fonctions de transfert garantissent bien la stabilité des sous-systèmes correspondants mais pas celle du réseau, dans le domaine à temps discret. Là encore, si cette méthode est utilisable en pratique au cas par cas, elle laisse ouvert le problème de stabilité garantie pour le réseau simulé en temps discret. Il est donc nécessaire de récupérer la propriété de passivité sur les systèmes à temps discret.

1.2.3 Approche énergétique de la passivité et considérations sur le découplage global

Ces deux problèmes ont motivé de nouvelles recherches (stages de M2R ATIAM de T. Hézard et L. Delebecque) qui ont conduit à de premiers résultats publiés dans [C38] et résumés ci-dessous.

Passivité

En vue de se rapprocher de la théorie des *Systèmes à Hamiltoniens à Ports* [52] dont il est question dans le programme de recherche (§ 4), nous avons repris l'étude de la passivité du point de vue énergétique, d'abord dans le cas conservatif ($\varepsilon = 0$). Cette approche permet aussi de traiter le cas de systèmes non linéaires (cf. p. 55 et [C37]).

La passivité d'un système de dimension finie est définie comme suit [106, Déf. 6.3].

Définition 1 (Passivité) *Un système dynamique d'entrée U, de sortie Y (avec* $\dim U = \dim Y$*) et d'état Z est* passif, *s'il existe une* fonction de stockage *différentiable $\mathcal{V}$ telle que*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{V}(Z) \leq Y^T U, \quad \textit{où } \mathcal{V} \textit{ est semi-définie positive,} \tag{1.17}$$

c'est-à-dire, telle que $\mathcal{V}(Z) \geq 0$ pour tout Z et $\mathcal{V}(0)=0$. De plus, il est dit sans perte *si $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{V}(Z) = Y^T U$.*

Pour un tube décrit sur $\Omega =]0, L[$, le système est caractérisé par l'état acoustique de dimension infinie $Z : t \mapsto Z(t) = \big(\ell \in]0, L[\mapsto X(\ell, t)\big)$ et $\mathcal{V}$ devient une fonctionnelle qui, ici, construit l'énergie. Pour l'état de Kirchhoff, l'énergie acoustique est[10]

$$E(t) = \mathcal{V}\big(X_K(\cdot, t)\big) = \frac{1}{2}\int_0^L X_K(\ell, t)^T \mathcal{W}(\ell)\, X_K(\ell, t)\,\mathrm{d}\ell, \text{ avec } \mathcal{W} = \mathcal{W}^T = \operatorname{diag}\left(\frac{A}{\rho c^2}, \frac{\rho}{A}\right). \tag{1.18}$$

Puisque la matrice $\mathcal{W}$ est partout positive, $\mathcal{V}$ est définie positive. En notant $Q = \mathcal{W}(\ell)\, M(\ell) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = Q^T$ et d'après (1.14) avec $\varepsilon = 0$, on trouve le bilan de puissance

$$E'(t) = -\int_0^L X_K(\ell, t)^T Q\, \partial_\ell X_K(\ell, t)\,\mathrm{d}x = -\Big[\frac{1}{2} X_K(\ell, t)^T Q\, X_K(\ell, t)\Big]_{x=0}^{x=L} = Y(t)^T\, U(t). \tag{1.19}$$

[10] Cette définition fournit exactement l'énergie acoustique pour les tubes droits. Cela est encore le cas pour l'équation des pavillons sous l'hypothèse d'ondes planes (abscisse z). Mais pour l'abscisse curviligne ℓ et un profil non droit, à cause de la définition de u (cf. remarque 1), elle définit seulement une quantité homogène à l'énergie. Par exemple, pour les tubes coniques, l'énergie correspond à $\frac{A_s}{A_p} E$ où A_s et A_p sont ceux définis en (1.10). Il reste qu'à profil donné $\sqrt{E}$ définit une norme L^2 équivalente à celle produite par l'énergie acoustique et $\mathcal{V}$ est bien exploitable pour l'étude de la passivité.

avec, par exemple, $U(t) = [u(0,t), -u(L,t)]^T$ (débits entrants) et $Y(t) = [p(0,t), p(L,t)]^T$ (pressions aux frontières). On retrouve bien un système passif sans perte.

Le bilan (1.19) traduit la *physique* : la variation d'énergie dans un tube conservatif correspond à la somme des puissance entrantes. Le fait que $\mathcal{V}$ soit définie positive implique quant à lui que si $E = \mathcal{V}(Z)$ est bornée, alors X_K l'est également : $\mathcal{V}$ agit *mathématiquement* comme (le carré d') une norme type L^2 (ici, espace des fonctions d'énergies finies sur Ω pour la pondération W). Ainsi, la *passivité* permet d'assurer que l'état ne diverge pas si l'alimentation U est coupée (stabilité de Lyapunov, cf. e.g. [106]).

Quel que soit le changement d'état sur X, le bilan de puissance traduira toujours la même physique et restera identique si l'on conserve les mêmes entrées et sorties. En revanche, le caractère semi-défini positif de $\mathcal{V}$ n'a aucune raison d'être assuré, de sorte que la stabilité peut être perdue pour un autre état.

En utilisant cette approche classique de l'automatique, on peut donc analyser la passivité (et la stabilité) pour les états X_p, X_ϕ et X_ψ sans difficulté[11]. Le calcul de l'énergie pour les deux premiers états conduit à deux fonctionnelles définies positives simples : (i) $\mathcal{V}_p$ définie avec $\mathcal{W}_p = \frac{A}{\rho c^2} I_2$, (ii) $\mathcal{V}_\phi$ définie avec $\mathcal{W}_\phi = \frac{1}{\rho c^2} I_2$. Ces états sont donc garantis passifs et stables. Ceci combiné à la structure de Kelly-Lochaum dans le cas des tubes droits concaténés est à l'origine du succès rencontré par ces états de type "onde planes".

Le calcul de l'énergie pour l'état X_ψ conduit à, en omettant les variables ℓ et t par soucis de concision,

$$E = \frac{\pi}{\rho c^2} \int_0^L \left[{\psi^+}^2 + {\psi^-}^2 + \frac{c^2 \Upsilon}{2} \left(\partial_t^{-1} (\psi^+ + \psi^-) \right)^2 \right] \mathrm{d}\ell - \frac{c^2}{2\rho} \left[\zeta \, \left(\partial_t^{-1} (\psi^+ + \psi^-) \right)^2 \right]_{\ell=0}^{\ell=L}. \qquad (1.20)$$

Nous n'avons pas rencontré cette expression dans la littérature mais seulement des versions simplifiées correspondant au cas d'une onde isolée ($\psi^- = 0$ ou $\psi^+ = 0$) dans un cône ($\Upsilon = 0$). Or, cette expression complète montre que, même pour un cône : (i) l'énergie n'est pas une fonctionnelle de X_ψ seul mais de X_ψ et $\partial_t^{-1}(\psi^+ + \psi^-)$; (ii) la fonctionnelle de l'état complété contient des termes de volume (intégraux) mais aussi de frontières ; (iii) elle n'est pas définie positive si Υ a une partie négative ou $\zeta(0) < 0$ ou $\zeta(L) > 0$. Elle l'est (et ces complications disparaissent) dans le cas des tubes droits ($\Upsilon = 0$ et $\zeta = 0$).

On retrouve ici le problème des tubes à chambre convexe pour $\Upsilon < 0$. Pour un raccord continu en 0 de deux tronçons définis sur $]-L_A, 0[$ et $]0, L_B[$, l'expression de l'énergie totale donnée par[12]

$$E_A(t) + E_B(t) = E_{\{A+B\}}(t) + \frac{c^2}{2\rho} \big[-\zeta(0^-) + \zeta(0^+) \big] \left[\partial_t^{-1} (\psi^+(0,t) + \psi^-(0,t)) \right]^2$$

conduit aussi à une nouvelle interprétation de l'instabilité introduite par une jonction lorsque $\zeta(0^+) < \zeta(0^-)$ (i.e. $\mathcal{R}'(0^+) < \mathcal{R}'(0^-)$) : la positivité de $\mathcal{V}$ est perdue car le terme de la jonction est négatif. Cette condition donnée par l'énergie coïncide avec celle donnée par l'analyse du pôle de $K^{ⓑ}$ (tab. 1.1).

La poursuite de cette étude pour l'état X_q et en présence de pertes devrait reconduire aux résultats exposés en § 1.2.2. Cette formulation et la recherche d'approximations discrètes satisfaisant les mêmes bilans énergétiques seront explorées dans mon programme de recherche et des travaux de thèse que j'encadrerai (cf. § 4).

Découplage global

Pour rejeter le problème d'instabilité dont une des sources provient de la négativité du rayon $\mathcal{R}$ au-delà du tronçon. Une première étape consiste à définir un modèle de $\mathcal{R}$ avec le domaine paramétrique qui isole sa classe positive. La seconde étape consiste à rechercher des ondes découplées, physiquement sensées, qui conduisent à des propagateurs stables pour cette classe.

Modèle paramétrique des profils à Υ constant et classe des profils positifs. Considérons un tronçon à Υ constant défini sur $\ell \in]0, L[$. Puisque $\mathcal{R}''(\ell) - \Upsilon \mathcal{R}(\ell) = 0$, il est de la forme $A \cosh(\sqrt{\Upsilon}\ell) +$

[11] L'étude pour X_q est plus délicate à cause des opérateurs pseudo-différentiels en Γ. Elle n'est pas présentée ici.

[12] $E_{\{A+B\}} = \frac{\pi}{\rho c^2} \int_{-L_A}^{L_B} \left[{\psi^+}^2 + {\psi^-}^2 + \frac{c^2 \{\Upsilon\}}{2} \left(\partial_t^{-1} (\psi^+ + \psi^-) \right)^2 \right] \mathrm{d}\ell - \frac{c^2}{2\rho} \left[\zeta \, \left(\partial_t^{-1} (\psi^+ + \psi^-) \right)^2 \right]_{\ell=-L_A}^{\ell=L_B}$ représente l'énergie calculée pour la partie "fonctionnelle" de Υ et non la distribution [187].

$B\sinh(\sqrt{\Upsilon}\ell)$ si $\Upsilon > 0$, $A + B\ell$ si $\Upsilon = 0$ et $A\cos(\sqrt{-\Upsilon}\ell) + B\sin(\sqrt{-\Upsilon}\ell)$ si $\Upsilon < 0$. Ces trois expressions peuvent être unifiées sous la forme

$$\mathcal{R}(\ell) = \mathcal{R}(0) S_{L^2\Upsilon}\Big(1 - \frac{\ell}{L}\Big) + \mathcal{R}(L) S_{L^2\Upsilon}\Big(\frac{\ell}{L}\Big) \text{ où } S_\nu(\xi) = \frac{\sinh(\sqrt{\nu}\xi)}{\sinh\sqrt{\nu}} \text{ si } \nu \neq 0, \text{et } S_\nu(\xi) = \xi \text{ sinon.}$$

Pour cette famille de fonctions paramétrées par ν, la régularité est $\mathcal{C}^\infty$ et la positivité est satisfaite sur $(\nu, \xi) \in]-\pi^2, +\infty[\times[0,1]$. Cette propriété a été exploitée dans l'algorithme d'estimation des paramètres d'un profil géométrique, et en particulier, la régularité en ν (cf. stage ENSEA de T. Hézard et [C31]).

Ainsi, le profil $\mathcal{R}$ de paramètre $\mathcal{R}(0)$, $\mathcal{R}(L)$, Υ défini sur $]0, L[$ est positif , si et seulement si

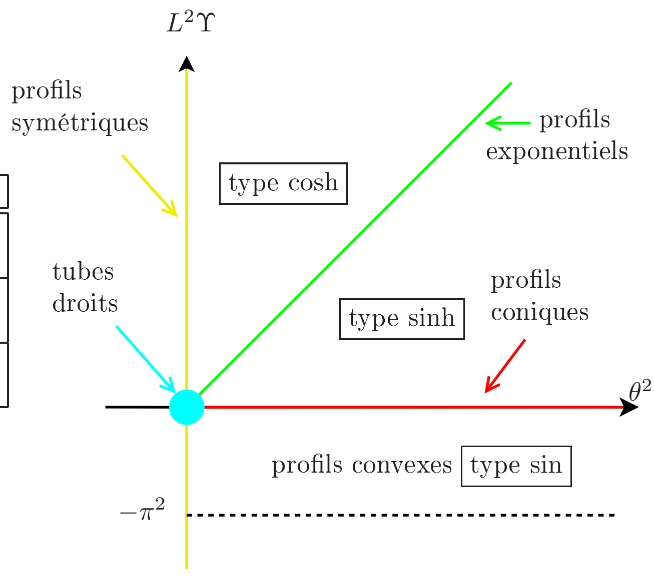
$$L^2\Upsilon > -\pi^2 \text{ et } \mathcal{R}(0), \mathcal{R}(L) \text{ sont positifs.} \tag{1.21}$$

Pour cette classe de profils, une seconde paramétrisation qui fait apparaître plus simplement l'invariance par symétrie $\{\ell \mapsto L - \ell\ ,\ \mathcal{R}(0) \leftrightarrow \mathcal{R}(L)\}$. On remplace $\mathcal{R}(0)$, $\mathcal{R}(L)$ par les paramètres d'asymétrie θ et de moyenne géométrique ρ définis par

$$\theta = \ln\frac{\mathcal{R}(L)}{\mathcal{R}(0)} \text{ et } \rho = \sqrt{\mathcal{R}(0)\mathcal{R}(L)}, \quad \text{de sorte que } \mathcal{R}(0) = \rho e^{-\theta/2} \text{ et } \mathcal{R}(L) = \rho e^{+\theta/2}.$$

L'invariance par symétrie correspond alors à $\{\ell \mapsto L - \ell\ ,\ \theta \leftrightarrow -\theta\}$. La catégorisation des profils positifs, indépendamment du sens de l'orientation, peut donc s'effectuer en fonction de θ^2 et $L^2\Upsilon$ (ρ n'étant qu'un facteur de dilatation du rayon). Cette étude fait apparaître les six catégories résumées en tableau 1.5 et la figure associée. Il s'agit de profils qui sont une portion sur $[0, L]$ de versions proportionnelles et translatées en ℓ de : (1) cosinus hyperboliques, (2) exponentielles, (3) sinus hyperboliques, (4) cônes, (5) tubes droits, (6) sinus (/cosinus). Les profils de type *exponentiel* forment la frontière (c'est-à-dire

$L^2\Upsilon$	$-\pi^2$	0	$+\infty$
$\theta^2 < L^2\Upsilon$	$\times$	$\times$	type cosh
$\theta^2 = L^2\Upsilon$	$\times$	tubes droits	type exp
$\theta^2 > L^2\Upsilon$	profils convexes	tubes coniques	type sinh



TAB. 1.5 – Catégorisation des types de profils en fonction de θ^2 et $L^2\Upsilon$: tableau et figure associée.

qu'ils sont des versions dégénérées) des types cosh et sinh. Le type *conique* forme la frontière entre les types sinh et sin. Les tubes droits sont une version dégénérée de tous les types à la fois.

Ondes globalement découplées. Puisque pour $\Upsilon < 0$, le découplage local présenté en § 1.2.1 conduit à des propagateurs pour des tubes à géométrie non sensée, l'idée est d'exploiter la finitude du tronçon sous les conditions de positivité du rayon (1.21) et de rechercher un découplage acoustique global pour le tronçon. Il s'agit donc d'exprimer des relations entre les états aux frontières sans y imposer de conditions aux frontières spécifiques.

Mathématiquement, ceci correspond à diagonaliser la matrice de transfert du tronçon $\mathbf{T}_{0,L}$ définie dans le résultat 2 (avec la définition (1.13) en présence de pertes). On trouve que les valeurs propres de cette matrice sont les racines $\big(\lambda(s), \lambda(s)^{-1}\big)$ du polynôme caractéristique

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\, b'\, \lambda + 1 \quad \text{avec} \quad b' = \phi_1\big((L\Gamma)^2\big) + F(\theta, L^2\Upsilon)\, \phi_2\big((L\Gamma)^2\big), \quad F(\theta, L^2\Upsilon) = \frac{\phi_1(\theta^2) - \phi_1(L^2\Upsilon)}{\phi_2(L^2\Upsilon)}, \tag{1.22}$$

et $\phi_1(z) = \cosh\sqrt{z}$ et $\phi_2(z) = \frac{\sinh\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$. Une analyse complexe de la solution $\lambda = b'\left(1 - \sqrt{\frac{b'^2-1}{b'^2}}\right)$ en la variable de Laplace s révèle que, pour la classe des profils positifs, λ n'a aucune singularité et est de module inférieur à 1 dans $\mathbb{C}_0^+$. Il correspond à un opérateur causal stable à retard qui peut se décomposer en $\lambda(s) = \mathrm{e}^{-sL/c} G_\lambda(s)$. Ainsi, λ joue un rôle très similaire au propagateur $W(s) = \mathrm{e}^{-\Gamma(s)L}$ tout en récupérant les propriétés de causalité, passivité, stabilité pour la classe complète des profils à rayon positif sur $]0, L[$.

Il est remarquable que ce propagateur ne dépend pas du signe de θ, c'est-à-dire du sens de la dissymétrie du tronçon, tout comme W. Il en fournit d'ailleurs une extension au sens où $\lambda = W$ pour les profils de type exponentiel et leurs versions dégénérées en tubes droits (ces cas correspondent à ceux qui annulent la fonction F puisque $\theta^2 = L^2\Upsilon$). En revanche cette coïncidence entre découplage local et découplage global est perdue dans tous les autres cas, y compris celui des cônes (non dégénérés en tubes droits).

Une série de représentations des fonctions de transfert λ (module et phase) est fournie en figure 1.12 en fonction de $L^2\Upsilon$, pour des tubes symétriques ($\theta = 0$) sans pertes ($\varepsilon = 0$). A la référence $L^2\Upsilon = \theta^2 = 0$

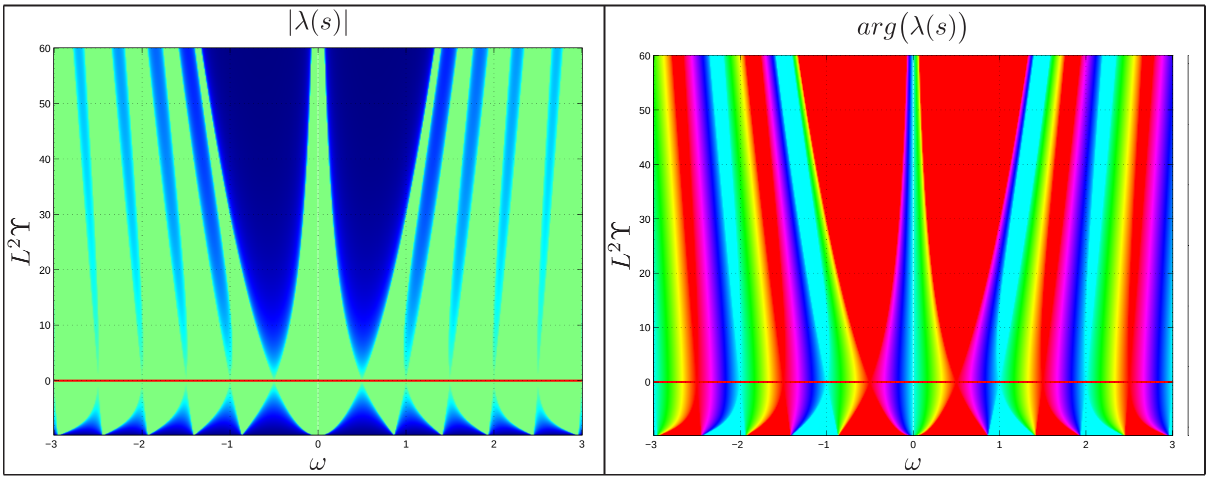


FIG. 1.12 – Fonctions de transfert $\omega \mapsto \lambda(i\omega)$ en fonction de ω et $L^2\Upsilon$, pour les profils symétriques ($\theta = 0$). A gauche : module (vert :1, bleu foncé :0). A droite : phase (palette de couleur circulaire modulo 2π). La ligne rouge marque la référence $L^2\Upsilon = \theta^2$ pour laquelle λ et W coïncident.

(tubes droits), $\lambda(s) = \mathrm{e}^{-sL/c}$ défini un retard idéal. Sur la figure, on retrouve un module constant 1 et un déroulement régulier de la phase. Lorsque $L^2\Upsilon$ s'éloigne de 0, le propagateur λ retient de l'énergie sur un ensemble de fréquences (partie en bleu foncé pour le module) et n'amplifie aucune région. Cette observation s'applique pour les géométries concaves et convexes.

1.2.4 Perspectives

La définition et l'étude approfondie d'ondes construites à partir d'un changement d'état diagonalisant, la génération de structures de Kelly-Lochbaum associées et l'approximation à temps discret à passivité garantie seront conduites dans mon programme de recherche. Elle constituent les dernières étapes pour aboutir à un outil de simulation efficace et robuste du modèle acoustique proposé en partie 1.1.

1.3 Ondes de chocs : simulation temps réel de solutions entropiques pour un modèle simple de transport non linéaire amorti

Ce travail a été mené en collaboration avec C. Vergez (CR, CNRS). Il résume les travaux présentés dans [C32].

Comme en témoigne [134, 82], il existe une vaste littérature sur les modèles de propagation non linéaire dans les guides acoustiques. Cette non-linéarité est responsable de la distorsion (pouvant aller jusqu'à la formation d'une onde de choc) qui rend les sons des cuivres brillants aux nuances fortissimo : on parle du “cuivrage” du son. Ce phénomène apparaît en particulier à l'intérieur du tube droit de trombone, dans lequel le niveau acoustique peut atteindre typiquement 160 dB_{SPL} aux nuances fortissimo [90].

On considère le modèle de transport d'une onde de pression, non linéaire, avec un amortissement indépendant de la fréquence, décrit par, tout $t \geq 0$, $x \geq 0$,

$$\partial_x p(x,t) + \frac{1}{c\big(x, p(x,t)\big)} \partial_t p(x,t) + \alpha(x)\, p(x,t) = 0, \quad \text{excité par} \quad p(x{=}0,t) = p_0(t), \tag{1.23}$$

où l'on considère un milieu initialement au repos et des cas de figure à célérité positive, c'est-à-dire,

$$\exists c^\star > 0 \quad \big| \quad c\big(x, p(x,t)\big) \geq c^\star.$$

1.3.1 Solution forte (régularité $\mathcal{C}^1$) avant la formation de choc

Le changement de variable $p(x,t) = a(x) q(x,t)$ avec $a(x) = \mathrm{e}^{-\int_0^x \alpha(\xi)\,\mathrm{d}\xi}$ permet de se ramener à une version conservative ($\alpha = 0$) de (1.23) en q et d'appliquer la méthode des caractéristiques. Ainsi, on introduit

$$T(x,t) \;=\; t + \int_0^x \Big[c\big(\,\xi\,,\, a(\xi)\, p_0(\xi)\,\big) \Big]^{-1} \mathrm{d}\xi, \quad \text{qui dépend de de l'effet d'amortissement introduit via } a.$$

A x fixé, si $\partial_t T > 0$, il y a bijection $\theta_x : t \mapsto T(x,t)$ entre le temps t auquel un signal $p_0(t)$ se trouvait en $x = 0$ et le temps $T(x,t)$ auquel il arrive en x : $q\big(x, \theta_x(t)\big) = p_0(t)$. Pour ce cas [C32, Thm. 2], nous obtenons la *solution forte* (de régularité $\mathcal{C}^1$) de l'onde amortie, donnée par

$$p(x,t) = a(x)\, p_0\big(\theta_x^{-1}(t)\big) \quad \text{avec} \quad a(x) = \mathrm{e}^{-\int_0^x \alpha(\xi)\,\mathrm{d}\xi} \quad \text{et} \quad \theta_x : t \mapsto T(x,t).$$

L'application de ce résultat au cas (version adimensionnée) $\alpha(x) = \alpha$ et $c(x,p) = 1/(1-p)$ conduit aux résultats donnés en figure 1.13ⓐ pour lesquels $T(x,t) = t + x - E_\alpha(x) p_0(t)$ avec $E_\alpha(x) = \frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha x}}{\alpha}$.

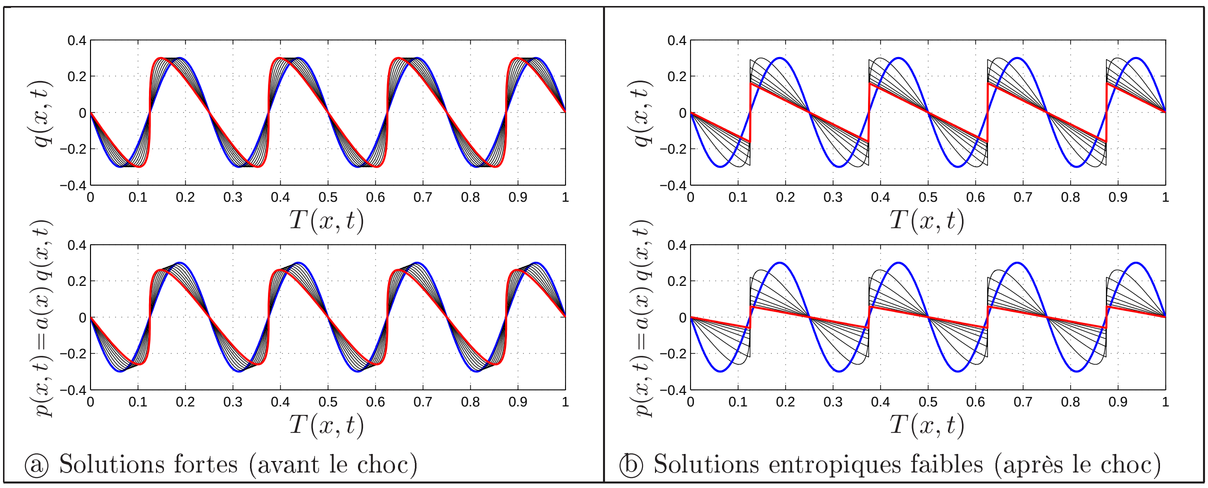


FIG. 1.13 – Solutions fortes calculées en $x_n = \frac{n}{N} x^\star$ ⓐ et faibles calculées en $x_n = n x^\star$ ⓑ avec $n = 0$ (bleu), $1 \leq n \leq N-1$ (noir) et $n = N = 7$ (rouge), où $x^\star \approx 0.1414$ est la distance critique de formation du choc. En haut : la quantité conservée $q(x,t)$. En bas : l'onde amortie $p(x,t) = a(x) q(x,t)$.

1.3.2 Solution faible et méthode de Hayes généralisée

Dans le cas où la positivité de $\partial_t T$ n'est pas assurée, la solution n'est plus unique (la bijection est perdue) et devient *faible*. Il y a formation d'une discontinuité (choc) qui garde un sens bien posé [74] au sens des distributions [187] : le saut satisfait la condition dite de Rankine-Hugoniot, et une seule solution satisfait le principe entropique. La limite de formation du choc correspond à $0=\partial_t T=1+E_\alpha(x)p_0'$. La distance critique $x^\star$ dépend donc de la dérivée temporelle de l'excitation p_0'.

Pour effectuer la *sélection entropique*, Hayes [86] a introduit une méthode astucieuse pour le cas $\alpha=0$, $T(x,t)=t+x-p_0(t)$, récemment reprise et reformulée par F. Coulouvrat [32]. Cette méthode est fondée sur une fonctionnelle qui construit une quantité $\phi(x,t)$ que Hayes nomme *potentiel*. Les propriétés exploitées sont que (cf. figure 1.14) : (i) $\phi(x,t)$ est simple à calculer ; (ii) sur le tracé de la courbe paramétrée $t \mapsto \big(T(x,t),\phi(x,t)\big)$, la solution entropique correspond à la valeur maximale du potentiel ; (iii) la fonction $\theta \mapsto \Phi_x^+(\theta)=\max_{t\,\text{t.q.}\,T(x,t)=\theta}\phi(x,t)$ est continue. Les propriétés de maximalité et continuité permettent de construire un algorithme simple, compatible avec le temps réel dans lequel on calcule le potentiel à la volée, on le compare au potentiel maximal (seule quantité stockée et mise à jour).

Pour adapter cette méthode au modèle amorti, nous avons dû introduire une définition plus générale de ϕ, construite formellement à partir de T, et donnée par

$$\phi(x,t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{T_0(x,\tau)-T(x,\tau)}{x}\partial_\tau T(x,\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad \text{où} \quad T_0(x,t)=T(x,t)\big|_{p_0=0}.$$

Nous avons prouvé la continuité de Φ_x^+ construit pour cette définition de ϕ [C32, Déf. 2, Prop. 2, Thm. 3]. Actuellement, le lien avec le critère entropique n'est établi que pour l'application ci-dessus ($\alpha(x)=\alpha$ et $c(x,p)=1/(1-p)$). Ceci a déjà permis de construire des simulations qui étendent les algorithmes proposés dans [153, 212] à un cadre : : (i) incluant un amortissement et (ii) non limité aux chocs symétriques.

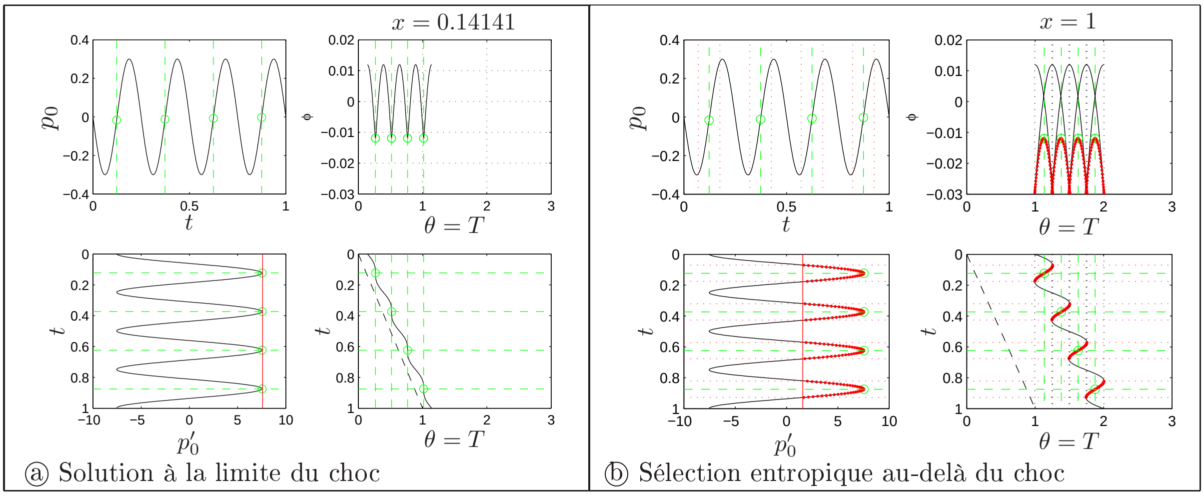


FIG. 1.14 – Illustration de l'algorithme de simulation avec sélection entropique à la distance critique de formation du choc ⓐ et au-delà de la distance critique (les points tels que $\partial_t T<0$ sont marqués en rouge) ⓑ . En haut à gauche : signal d'entrée $p_0(t)$. En haut à droite : ϕ. En bas à gauche : dérivée temporelle p_0' et seuil de formation de choc (ligne rouge verticale). En bas à droite : correspondance entre t et T (le guide pointillé correspond à $t=T$). Sélectionner la solution entropique (cf. figure 1.13ⓑ) revient à sélectionner la courbe continue définie par Φ_x^+, formée par les valeurs maximales sur les figures en haut à droite.

Ce procédé a l'intérêt d'être compatible avec le temps réel et de fournir des solutions entropiques exactes y compris dans le cas de la formation d'ondes de chocs (simples ou multiples), cf. figure 1.13ⓑ. Néanmoins, si le modèle simple d'amortissement considéré ici permet d'utiliser la méthode des caractéristiques, il limite aussi le réalisme sonore : les discontinuités engendrées par les chocs conduisent à des spectres "sur-enrichis". Dans § 2.2.4, un modèle plus réaliste de pertes visco-thermiques est considéré. La méthode des caractéristiques ne s'applique alors plus de façon immédiate mais une résolution en série de Volterra est proposée. Elle conduit aussi à un résultat compatible avec le temps réel.

1.3.3 Perspectives

Une alternative pourrait consister à considérer un modèle de pertes à la fois suffisamment réaliste, et compatible avec la méthode des caractéristiques via un changement de variables. Cela est par exemple le cas pour l'équation de Burgers, avec la transformation de Hopf-Cole. Une seconde alternative serait d'utiliser des méthodes mixtes "méthode des caractéristiques/séries de Volterra".

Chapitre 2

Systèmes dynamiques entrée-sortie

De nombreux outils sont disponibles pour traiter les systèmes dynamiques linéaires contrôlés. Des résultats d'analyse fonctionnelle [226] et de théorie des semi-groupes donnent des cadres bien posés pour de larges classes de problèmes de dimension finie et infinie (voir e.g. [36] pour les systèmes stationnaires et [165, chap. 5] pour les systèmes évolutifs). Des outils algébriques et de représentations [98] ont également été développés pour traiter les problèmes de commandabilité, observabilité, réalisation, bouclage. Enfin, beaucoup d'applications de physique, traitement du signal et automatique ont pu être traitées explicitement grâce au développement de la théorie des distributions [187] et des *opérateurs à noyaux* (cf. e.g. [111]) pour lesquels la fonctionnelle linéaire L qui fournit la trajectoire y en fonction de l'entrée u, c'est-à-dire $y = L[u]$, s'écrit formellement[1]

$$y(a)=\int_{\mathbb{A}} k(a,\alpha)u(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha,\ \text{ où } k(a,\alpha)=k(a-\alpha,0)=k(0,\alpha-a) \text{ pour un problème invariant par translation.} \quad (2.1)$$

Ce formalisme permet de traiter des problèmes d'évolution ($a=t$) et, par exemple, des problèmes spatio-temporels ($a = (x,t)$) où k est alors une fonction de Green. Un résultat standard pour un système stationnaire ($a=t$ et invariance par translation), causal, initialement au repos, de représentation d'état

$$\partial_t x = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du, \text{ pour } t \in \mathbb{R}_+, \text{ avec } x(0) = 0, \quad (2.2)$$

est que la relation entrée-sortie se ramène au cas classique d'une *convolution* par la *réponse impulsionnelle* $h(t)=k(t,0) = C\mathrm{e}^{At}B\,1_{\mathbb{R}_+}(t) + D\,\delta(t)$, et qu'il peut être caractérisé par la *matrice de transfert* $H(s) = C(s\,I - A)^{-1}B + D$ dans un demi-plan droit de Laplace. Cette classe de systèmes couvre une part importante des applications d'ingéniérie. Ainsi, les outils adaptés (filtrage, fonctions de transfert dans les domaines de Fourier ou Laplace, leur analyse, schéma de discrétisation, etc) sont couramment employés dans les applications audio (cf. [116, 229, 230]) mais aussi la simulation de résonateurs physiques [10, 207, 26].

Toutefois, la validité de la modélisation physique en systèmes linéaires est souvent limitée à un point d'équilibre et son voisinage. Si l'on s'en éloigne, des *distorsions* peuvent à apparaître : on parle alors de *non-linéarité faible*. C'est ce qu'il se produit en audio lorsque le timbre du son évolue de façon progressive avec l'amplitude de l'excitation. Dans ce cas où l'entrée agit comme une perturbation régulière de la linéarité du système, l'application de méthodes à perturbations (cf. e.g. [154]) montre qu'il est encore possible de traiter le problème avec des (développements en série d') opérateurs à noyaux : les séries de Volterra en sont un exemple [215]. Dans le cas de *non-linéarités fortes*, l'amplitude de l'excitation peut provoquer des changements brusques sur la dynamique : hystérésis, auto-oscillation, chaos, changement de périodicité et de régimes (on parle de bifurcation), etc. Tous ces cas se retrouvent dans les instruments de musique. L'auto-oscillation est précisément ce qui caractérise les instruments auto-entretenus (vents, cordes, barres ou plaques frottées, mais aussi la voix, ou certains instruments électroniques). L'étude de leurs bifurcations, qui correspondent souvent à des changements de notes, est un champ de recherche déjà bien développé (cf. e.g. [30, 102]). Des régimes chaotiques peuvent être retrouvés chez les vents (notes instables

[1] Un problème est dit *invariant par translation* $T_b : x \mapsto \big(a \mapsto x(a-b)\big)$, si pour tout b, $L[T_b u] = T_b L[u]$.

ou certaines multiphoniques par exemple, cf. [210]). Mais les instruments-phares de ce type de régimes sont les plaques et coques fortement excitées (crash de cymbales, gong, tam-tam) qui sollicitent à eux-seuls d'abondants travaux de recherche et l'utilisation d'outils tels que les *modes non linéaires* (cf. e.g. [206] et l'ensemble des travaux de ces auteurs). La complexité et la richesse des régimes des instruments auto-entretenus rendent leur pilotage important et délicat. Dans un but d'analyse/synthèse sonore, il devient donc important de joindre à leur étude celle des problèmes inverses associés : cartographie des régimes, observation d'état et inversion entrée/sortie pour obtenir un son cible.

Dans ce chapitre, nous présentons d'abord des résultats sur les *systèmes à noyaux*. La section 2.1 porte sur une classe de systèmes linéaires dits *à mémoire longue* (cf. p. 15), qui ne correspondent pas à des opérateurs compacts. Ces systèmes incluent des systèmes à dérivation fractionnaire et à fonction de transfert irrationnelle (telle que $K_n^{\copyright}$ ou W_n dans § 1.1-1.2). Leur noyau de convolution peut être représenté par une agrégation continue d'exponentielles causales amorties, oscillantes ou non, pour une condition bien posée. La section 2.2 porte sur les *séries de Volterra* pour répresenter les dynamiques de systèmes *faiblement non linéaires*, avec une méthode de calcul des noyaux qui permet de traiter le cas d'équations aux dérivées partielles. Nous présentons aussi des résultats de bornes garanties *calculables* de convergence et d'erreur de troncature de ces séries pour plusieurs classes de systèmes. La dernière section (§ 2.3) s'intéresse à un système à *non-linéarité forte*. Nous présentons de premiers résultats sur l'inversion entrée-sortie et l'observation d'état pour un instrument à vent simplifié incluant l'excitateur, qui peut être mis sous la forme d'un système non linéaire différentiel à retard de type dit "neutre".

2.1 Représentations diffusives et intégrales de systèmes fractionnaires et à fonction de transfert irrationnelle

Les travaux et résultats exposés dans cette section ont été menés en collaboration avec Denis Matignon (Professeur, ISAE-Sup'Aéro.) et durant la thèse de Rémi Mignot (cf. e.g. [A5, A6, A10, A12]).

Les systèmes linéaires différentiels fractionnaires ont des dynamiques à mémoire longue, c'est-à-dire, plus lente que toute exponentielle décroissante. Cette classe de systèmes de dimension infinie correspond à des opérateurs non compacts de sorte que proposer des réductions d'ordre efficaces n'est pas immédiat. En ce sens, de tels systèmes sont délicats à simuler. Nous nous y sommes intéressés pour traiter le cas des pertes visco-thermiques, présenté en § 1.1.4. Du point de vue fréquentiel, ce phénomène n'est pas anodin. En effet, outre les modifications apportées sur la phase, les intégrations et dérivations standard agissent sur l'amplitude comme des gains de pentes multiples de 6 décibels par octave. Pour la même famille d'ordre α, fractionnaire ou irrationnel, ces pentes deviennent multiples de 6α ce qui a un impact identifié par l'oreille. L'effet de ces opérateurs a donc une double interprétation : mémoire longue dans le domaine temporel, modifications spectrales non standard dans le domaine fréquentiel.

Les outils présentés ci-dessous s'appuient sur la théorie spectrale des opérateurs, la transformation de Laplace et leur reconstruction. Pour les opérateurs non compacts considérés ici, les fonctions de transfert associées possèdent des *continuums* non bornés de singularités en plus d'éventuels pôles simples ou multiples : ces chemins correspondent à des coupures $\mathcal{C}$ des fonctions de transfert dans le plan de Laplace. Ces coupures ne sont pas définies de façon unique mais elles joignent des *points de branchements* fixés. La méthode proposée ici consiste à recomposer dans un cadre bien posé, la fonction de transfert, le noyau de convolution ou la réalisation du système associé, en agrégeant les contributions apportées par chaque point de ce continuum. Cette agrégation fait donc apparaître des sommes continues, que nous qualifions de *représentations intégrales*. Les représentations intégrales des systèmes fractionnaires peuvent être définies pour la coupure $\mathcal{C}=\mathbb{R}^-$. On trouve plusieurs travaux sur les représentations de cette espèce, appelées *représentations diffusives* (cf. e.g. [141, 87, 38, 150, 22, 23] et [A5]). Mais, elles permettent de traiter aussi des cas plus généraux, à fonctions de transfert irrationnelles qui possèdent des coupures différentes ($\mathcal{C}\neq\mathbb{R}^-$), cf. e.g. [51].

Nous commençons par présenter quelques spécimens introductifs et illustrons le principe en traitant l'exemple de l'intégrateur d'ordre fractionnaire 1/2. Puis, nous introduisons le cadre formel général, proposons deux méthodes d'approximation et les appliquons sur quelques exemples (résultats extraits de [A6]).

2.1.1 Quelques spécimens

Plusieurs exemplaires de systèmes fractionnaires et à fonction de transfert irrationnelle sont décrits dans la tableau 2.1. Pour l'exemple ①, on remarque que $I_{1/2}$ appliqué deux fois conduit à la fonction de

Exemples	fct. de transfert	Exemples (suite)	fct. de transfert
Intégrateur $I_{1/2}$	$H_1(s) = \dfrac{1}{\sqrt{s}}$	EDP frac. : $(\partial_z + \partial_t^{1/2})x = 0$ $y(t)=x(z>0,t)$, $-\partial_z x(0,t)=u(t)$	$H_4(s) = \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{s}z}}{\sqrt{s}}$
Dérivée $\partial_t^{1/2}$	$H_2(s) = \sqrt{s}$	Bessel : $y(t) = \big[J_0 \star u\big](t)$	$H_5(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$
Eq. diff. frac. $P[\partial_t^\alpha]\,y = Q[\partial_t^\alpha]\,u$ avec $0 < \alpha < 1$ et $\deg(Q) < \deg(P)$	$H_3(s) = \dfrac{Q(s^\alpha)}{P(s^\alpha)}$	Une fonction impliquée dans la modélisation d'un pavillon acoustique avec pertes (cf. [A5, (19)])	$H_6(s)=\dfrac{2\Gamma(s)\mathrm{e}^{s-\Gamma(s)}}{s+\Gamma(s)}$ $\Gamma(s)=\sqrt{s^2+\varepsilon s^{\frac{3}{2}}+1}$ avec $\varepsilon > 0$

TAB. 2.1 – Exemples de systèmes fractionnaires et à fonction de transfert irrationnelle (entrée u, sortie y).

transfert $H_1(s)^2 = 1/s$ $(s \in \mathbb{C}_0^+)$, c'est-à-dire à un intégrateur, de sorte que $I_{1/2}$ représente un intégrateur fractionnaire d'ordre 1/2. De même, $\partial_t^{1/2} \circ \partial_t^{1/2}$ conduit à $H_2(s)^2 = s$, c'est-à-dire à une dérivation d'ordre 1, de sorte que $\partial_t^{1/2}$ représente une dérivée fractionnaire[2]. Il existe plusieurs définitions de ces opérateurs[3] : les différences résident notamment dans le traitement des aspects de causalité et des conditions initiales. Nous les considérons ici dans le cadre des systèmes linéaires causaux initialement au repos [162, 144] : la transformée de Laplace est mono-latérale et les fonctions de transfert sont analytiques dans un demi-plan complexe droit $s \in \mathbb{C}_a^+$ ($a \leq 0$ pour les systèmes stables). En particulier, on peut noter que pour les exemples ①, ④ et ⑤ définis sur $\mathbb{C}_0^+$, les noyaux de convolution sont donnés par [1, (299.3.4), (29.3.84), (29.3.92)], pour $t > 0$, $h_1(t) = 1/\sqrt{\pi t}$, $h_4(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4t}} \sim h_1(t)$ et $h_5(t) = J_0(t) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos(t - \frac{\pi}{4})$ pour $t \to +\infty$. Ils ont le même type de décroissance asymptotique lente. Pour l'exemple de systèmes fractionnaires ③, une formulation analytique est aussi disponible [38, § 2.2] : lorsque les racines du polynôme P sont simples, le noyau s'écrit comme une somme finie de fonctions propres (fonctions de Mittag-Leffler [148]). Ce cas conduit là encore à des décroissances lentes pour les cas stables (cf. [143, 183] pour les conditions de stabilité). L'exemple ⑥, plus compliqué, a une fonction de transfert analytique sur $\mathbb{C}_0^+$, son noyau de convolution est d'énergie finie et est encore à décroissance lente (cf. [A5, fig. 10, tab. 2 et anx. B]).

2.1.2 Exemple introductif : intégrateur fractionnaire causal d'ordre 1/2

Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées distinctes de signes opposés. Nous considérons ici la détermination principale de la racine carrée définie par

$$\text{pour tout } s = \rho \mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C} \text{ avec } \rho \geq 0 \text{ et } \theta \in]-\pi, \pi], \text{ on définit } \sqrt{s} = \sqrt{\rho}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}, \tag{2.3}$$

c'est-à-dire le prolongement analytique de la racine carrée positive sur $\mathbb{R}_+$, coupé sur $\mathcal{C} = \mathbb{R}_-$. Pour ce choix, H_1 est analytique sur $\mathcal{D} = \mathbb{C} \backslash \mathcal{C}$ et son saut à la traversée de la coupure en $-\xi \in \mathcal{C}$ est caractérisé par $\eta(-\xi) = H_1(-\xi + i0^-) - H_1(-\xi + i0^+) = \frac{i}{\sqrt{\xi}} - \frac{-i}{\sqrt{\xi}} = \frac{2i}{\sqrt{\xi}}$. L'idée est ici de déterminer la réponse impulsionnelle h_1 par transformée de Laplace inverse, calculée à l'aide du théorème des résidus.

Pour cela, on considère le contour fermé orienté de Bromwich $\mathcal{C}_B = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2^+ \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_2^-$ décrit en figure 2.1, paramétré par $R > \epsilon_x > \epsilon_y > 0$. On note $I = I_1 + I_2^+ + I_3 + I_2^-$ l'intégrale de $G : s \mapsto \frac{1}{2i\pi} H_1(s) \mathrm{e}^{st}$ sur ce contour, avec $t > 0$. D'après le théorème des résidus, cette intégrale vaut $I = 0$, puisque G est analytique à l'intérieur de $\mathcal{C}_B$. De plus, lorsque $R \to +\infty$ et $0 < \epsilon_y < \epsilon_x \to 0^+$, on trouve que chaque intégrale converge absolument, avec pour limite $I_1 \to h_1(t)$, $I_2^\pm \to 0$ (lemme de Jordan) et $I_3 \to \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{R}_-} [-\eta(\sigma)]\, \mathrm{e}^{\sigma t}\, \mathrm{d}\sigma$ et donc

$$\forall t > 0, \quad h_1(t) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\xi t}\, \mu(-\xi)\, \mathrm{d}\xi \quad \text{avec} \quad \mu(-\xi) = \frac{H_1(-\xi + i0^-) - H_1(-\xi + i0^+)}{2i\pi} = \frac{1}{\pi\sqrt{\xi}}. \tag{2.4}$$

L'équation (2.4) définit le noyau causal h_1 comme l'agrégation de noyaux $\mathrm{e}^{-\xi t}\, 1_{\mathbb{R}_+}(t)$ de systèmes amortis d'ordre 1, pour la mesure à densité $\mu(-\xi)\, \mathrm{d}\xi$ avec $-\xi \in \mathcal{C}$. On la nomme *représentation diffusive* de h_1.

[2] La première allusion à une dérivation fractionnaire apparaît en 1695 dans une réponse de G. de L'Hospital à Leibniz [176].

[3] Indiquons en particulier celles de Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov, Caputo (cf. e.g. [161]).

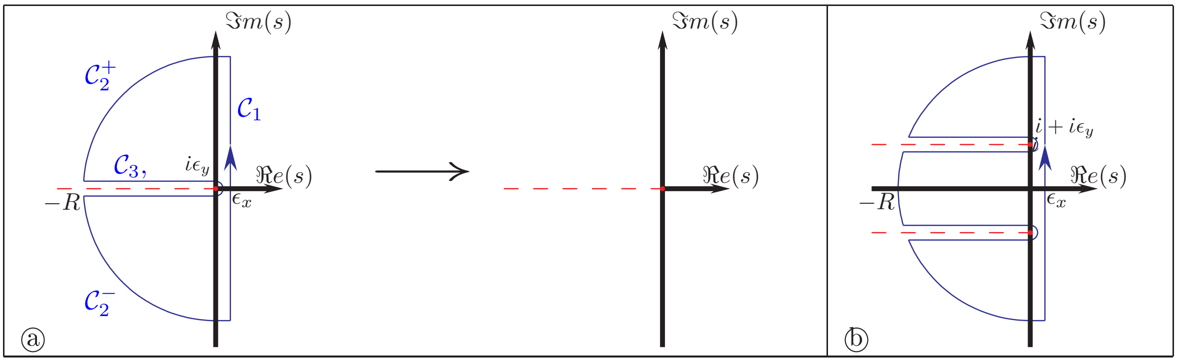


FIG. 2.1 – Contours de Bromwich adaptés à : ⓐ une fonction de transfert coupée sur $\mathcal{C} = \mathbb{R}_-$; ⓑ la fonction H_5 avec une coupure double à symétrie hermitienne décrite par $\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$, où les demi-droites $\mathcal{C}^\pm = \pm i + \mathbb{R}_-$ sont attachées aux points de branchement $\pm i$.

Remarque 10 *Dans (2.4), la mesure $\mu(-\xi)\,\mathrm{d}\xi$ joue pour l'agrégation continue un rôle similaire à celui du résidu pour l'agrégation discrète dans le cas de pôles simples.*

Le paragraphe suivant introduit un formalisme avec un cadre bien posé pour traiter ce type d'objet.

2.1.3 Formalisme bien posé

Une première classe de systèmes

On considère la classe des systèmes linéaires causaux stationnaires initialement au repos, qui peuvent être décrits par des fonctions de transfert de la forme suivante, dans un demi-plan droit de Laplace

$$\forall s \in \mathbb{C}_a^+, \quad H(s) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{L_k} r_{k,l}\, E_{s_k}^l(s) + \int_{\mathcal{C}} E_\sigma^1(s)\, M(\mathrm{d}\sigma) \quad \text{avec} \quad E_\sigma^l(s) = \frac{1}{(s-\sigma)^l} \quad \text{et} \quad a \in \mathbb{R}, \tag{2.5}$$

où E_σ^l est la fonction de transfert d'un système causal élémentaire à un pôle de multiplicité l, et où $\mathcal{C}$ est une courbe régulière ou un ensemble fini de telles courbes qui appartient au complémentaire de $\mathbb{C}_a^+$. Dans le domaine temporel, ceci correspond au système de réponse impulsionnelle donnée par

$$h(t) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{L_k} r_{k,l} e_{s_k}^l(t) \; + \; \int_{\mathcal{C}} e_\sigma^1(t)\, M(\mathrm{d}\sigma) \quad \text{avec} \quad e_\sigma^l(t) = \frac{1}{l!}\, t^{l-1}\, \mathrm{e}^{\sigma t}\, 1_{\mathbb{R}_+}(t), \tag{2.6}$$

où e_σ^l est la réponse impulsionnelle associée à E_σ^l (fonction exponentielle causale pour $l = 1$). La simulation de la partie de dimension finie de taille $\sum_{k=1}^{K} L_k$ est standard et n'est pas détaillée dans la suite. Celle de dimension infinie peut être construite avec la famille de systèmes différentiels d'ordre 1 suivante

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \; \forall \sigma \in \mathcal{C}, \quad \partial_t x(\sigma, t) = \sigma\, x(\sigma, t) + u(t), \quad x(\sigma, 0) = 0, \quad \text{et} \quad y(t) = \int_{\mathcal{C}} x(\sigma, t)\, M(\mathrm{d}\sigma)\,, \tag{2.7}$$

c'est-à-dire, une représentation d'entrée u, d'état x (de dimension infinie, paramétré par $\sigma \in \mathcal{C}$), et de sortie y. Dans les intégrales ci-dessus, $|M|$ est une mesure sur $\mathcal{C}$ telle que

$$\int_{\mathcal{C}} \left| \frac{M(\mathrm{d}\sigma)}{a + 1 - \sigma} \right| < +\infty\,, \tag{2.8}$$

décomposable en deux parties : une partie purement discrète (mesures de Dirac sur un ensemble dénombrable de points) et une partie à densité μ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $\mathrm{d}\sigma$. Des études théoriques générales de la condition bien posée (2.8) sont données dans [197, § 5 et § 6] et [149, 150, 142]. Lorsque la courbe $\mathcal{C}$ (ou chaque sous-courbe) admet une paramétrisation $\xi \mapsto \sigma(\xi)$ de régularité $\mathcal{C}^1$ non dégénérée ($\sigma'(\xi) \neq 0$), la densité est donnée (hors des points de la mesure discrète) par

$$\mu(\sigma) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{H(\sigma + i\sigma'\,\epsilon) - H(\sigma - i\sigma'\,\epsilon)}{2i\pi}. \tag{2.9}$$

Remarque 11 (Systèmes réels et symétrie hermitienne) *Les systèmes à entrée-sortie réelles ont une fonction de transfert à symétrie hermitienne, c'est-à-dire que* $\forall s \in \mathbb{C}_a$, $H(s) = \overline{H(\overline{s})}$ *(on note* $\overline{s}$ *le complexe conjugué de* s*). Dans ce cas, la même symétrie peut être choisie pour tout prolongement anlytique de* $\big(H(s)+\overline{H(\overline{s})}\big)/2$ *de sorte que* $\mathcal{C}=\overline{\mathcal{C}}$ *et que* $\overline{M(\mathrm{d}\overline{\sigma})} = M(\mathrm{d}\sigma)$*. En exploitant cette propriété et en partitionant la coupure en trois (partie imaginaire strictement positive, nulle et strictement négative), c'est-à-dire* $\mathcal{C}=\mathcal{C}_+\cup\mathcal{C}_\mathbb{R}\cup\overline{\mathcal{C}_+}$ *avec* $\mathcal{C}_+=\{\sigma\in\mathcal{C}\mid \Im m(\sigma)>0\}$ *et* $\mathcal{C}_\mathbb{R}=\mathcal{C}\cap\mathbb{R}$*, on trouve que les parties à densité de (2.5-2.7) prennent les formes respectives : (i)* $H(s)=\int_{\mathcal{C}_\mathbb{R}} E^1_\sigma(s)\,M(\mathrm{d}\sigma) + \int_{\mathcal{C}_+}\Big[E^1_\sigma(s)\,M(\mathrm{d}\sigma) + E^1_{\overline{\sigma}}(s)\overline{M(\mathrm{d}\sigma)}\Big]$ *; (ii)* $h(t)=\int_{\mathcal{C}_\mathbb{R}} e^1_\sigma(t)M(\mathrm{d}\sigma) + 2\Re e\int_{\mathcal{C}_+} e^1_\sigma(t)M(\mathrm{d}\sigma)$ *; (iii)* $y(t)=\int_{\mathcal{C}_\mathbb{R}} x(\sigma,t)M(\mathrm{d}\sigma) + 2\Re e\int_{\mathcal{C}_+} x(\sigma,t)M(\mathrm{d}\sigma)$*. Ceci se récrit aussi de façon encore plus concise*

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}^\dagger}\Big[E^1_\sigma(s)\,M^\dagger(\mathrm{d}\sigma) + E^1_{\overline{\sigma}}(s)\overline{M^\dagger(\mathrm{d}\sigma)}\Big] \quad \textit{avec } \mathcal{C}^\dagger=\mathcal{C}_\mathbb{R}\cup\mathcal{C}_+ \textit{ et } M^\dagger(\mathrm{d}\sigma)=\begin{cases} M(\mathrm{d}\sigma), & \textit{si } \sigma\in\mathcal{C}_\mathbb{R},\\ 2M(\mathrm{d}\sigma), & \textit{si } \sigma\in\mathcal{C}_+,\end{cases}\\ h(t) &= \Re e\int_{\mathcal{C}^\dagger} e^1_\sigma(t)M^\dagger(\mathrm{d}\sigma) \quad \textit{et}\quad y(t)=\Re e\int_{\mathcal{C}^\dagger} x(\sigma,t)M^\dagger(\mathrm{d}\sigma). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Pour les exemples ⓚ ($k=1,\ldots,4$ et cas où ③ est stable), on a $\mathcal{C}=\mathbb{R}^-$, $a=0$ et les mesures à densité $M_k(\mathrm{d}\xi) = \mu_k(-\xi)\,\mathrm{d}\xi$ avec pour tout $-\xi\in\mathcal{C}$, $\mu_1(-\xi)=\frac{1}{\pi\sqrt{\xi}}$, $\mu_2(-\xi)=-\xi\mu_1(-\xi)$, $\mu_4(-\xi)=\frac{\cos\sqrt{\xi}}{\pi\sqrt{\xi}}$. La densité μ_3 s'écrit comme une combinaison linéaire des densités obtenues pour les fonctions de Mittag-Leffler (cf. [A6, (20-21)]). Ces mesures satisfont la condition (2.8) excepté celle du cas ② : l'opérateur de dérivation fractionnaire $\partial_t^{1/2}$ ne peut pas être représenté par les formes (2.5-2.6) et il faut recourir à une forme extendue bien posée, introduite ci-dessous. Pour le cas ⑤, une représentation intégrale à symétrie hermitienne est obtenue, par exemple, pour la double coupure $\mathcal{C}=\mathcal{C}_+\cup\overline{\mathcal{C}_+}$ avec $\mathcal{C}_+=i+\mathbb{R}_-$, attachée aux points de branchement $\pm i$ (cf. figure 2.1 ⓑ) : pour $\sigma^\pm(-\xi)=\pm i-\xi$, on obtient les densités $\mu_5(\pm i-\xi)=\frac{1}{\pi\sqrt{\xi}}\frac{1}{\sqrt{\pm i-\xi}}$. Le cas ⑥ est aussi bien posé. Une étude des singularités montre que H_6 met en jeu trois points de branchement : 0 et deux complexes conjugués s_1, $\overline{s_1}$ à partie réelle strictement négative. Deux choix de coupures à symétrie hermitienne (parmi une infinité possible) sont examinés dans [A5, A6] : $\mathcal{C}=\mathbb{R}_-\cup(s_1+\mathbb{R}_-)\cup(\overline{s_1}+\mathbb{R}_-)$ et $\mathcal{C}=\mathbb{R}_-\cup[s_1,\overline{s_1}]$. Les deux conduisent à des représentations bien posées mais en pratique, les approximations construites pour le premier choix sont meilleures.

Une seconde classe de systèmes, étendue par dérivation

On peut encore construire une représentation intégrale bien posée pour les cas suivants. Si la mesure $M^e(\mathrm{d}\sigma)$ associée à $H^e(s)=\dfrac{H(s)-H(0)}{s}$ vérifie (2.8), alors $H(s)=s\displaystyle\int_\mathcal{C} E^1_\sigma(s)\,M^e(\mathrm{d}\sigma)+H(0)$, et

$$\forall t\in\mathbb{R}_+,\ \forall\sigma\in\mathcal{C},\ \partial_t x(\sigma,t)=\sigma\,x(\sigma,t)+u(t),\quad x(\sigma,0)=0,\ y(t)=\partial_t\int_\mathcal{C} x(\sigma,t)\,M^e(\mathrm{d}\sigma)+H(0)\,u(t). \tag{2.11}$$

Cette *extension par dérivation* est précisément adaptée au cas ② puisque $\mu_2^e=\mu_1$.

2.1.4 Réduction d'ordre

Pour obtenir des simulations temporelles (cas de systèmes stables, $a\le 0$), il est d'abord nécessaire de construire des approximations de dimension finie de ces systèmes. Une solution naturelle consiste à réduire le continuum de singularités à un ensemble fini de pôles.

Méthode 1 : discrétisation des coupures et interpolation de l'état

Une première méthode consiste à approcher l'état $x(\sigma,t)$, $\sigma\in\mathcal{C}$ par $\widetilde{x}(\sigma,t)=\sum_{p=1}^P x_p(t)\,\Lambda_p(\sigma)$, où $x_p(t)=x(\sigma_p,t)$ et les pôles $(\sigma_p)_{0\le p\le P+1}$ sur $\mathcal{C}$ sont classés selon l'orientation de la coupure *(cas d'une coupure simple)*, et où $\{\Lambda_p\}_{1\le p\le P}$ sont des *fonctions d'interpolation affines par morceaux* de support $\mathcal{C}_p=]\sigma_{p-1},\sigma_{p+1}[_c\subset\mathcal{C}$ telles que $\Lambda_p(\sigma_p)=1$. La réalisation (2.7) conduit au système linéaire du premier ordre de dimension P décrit par

$$\forall t\in\mathbb{R}_+,\ 1\le p\le P,\ \ \partial_t x_p(t)=\sigma_p\,x_p(t)+u(t),\quad x_p(0)=0\ \text{ et }\ \widetilde{y}(t)=\sum_{p=1}^P\widetilde{\mu}_p\,x_p(t)\ \text{ où }\ \widetilde{\mu}_p=\int_{\mathcal{C}_p}\Lambda_p(\sigma)\,M(\mathrm{d}\sigma). \tag{2.12}$$

Si la coupure est multiple, on procède de la même manière pour chacune de ses composantes connexes. De plus, dans la suite, l'ensemble des pôles d'un système réel est choisi de sorte que la symétrie hermitienne soit préservée. Ainsi, en classant convenablement les pôles appartenant à $\mathcal{C}^\dagger$ (cf. rq. 11), par exemple, en construisant le vecteur $\boldsymbol{\sigma} = [-\xi_1, \dots, -\xi_J \;,\; \gamma_1, \dots, \gamma_K]^T$ qui contient d'abord les $J\,(\geq 0)$ pôles réels $\sigma_j = -\xi_j$ $(1 \leq j \leq J)$, puis les $K\,(\geq 0)$ pôles à partie imaginaire strictement positive $\sigma_{J+k} = \gamma_k$ $(1 \leq k \leq K)$ des paires de complexes conjugués restants $(K = (P-J)/2)$, on obtient des résultats de la forme

$$\widetilde{H}(s) = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{J+K}\Big[E^1_{\sigma_l}(s)\,\widetilde{\mu}_l + E^1_{\overline{\sigma_l}}(s)\,\overline{\widetilde{\mu}_l}\Big] \quad \text{et} \quad \partial_t x_l(t) = \sigma_l\, x_l(t) + u(t), \quad \widetilde{y}(t) = \Re e\Big(\sum_{l=1}^{J+K}\widetilde{\mu}_l\, x_l(t)\Big), \tag{2.13}$$

où, pour $1 \leq l \leq J+K$, $\widetilde{\mu}_l = \int_{\mathcal{C}_l}\Lambda_l(\sigma)\,M^\dagger(\mathrm{d}\sigma)$ est calculé pour la mesure $M^\dagger$ définie en (2.10).

Remarque 12 (Ecriture matricielle à paramètres réels) *En utilisant le vecteur $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{C}^J_{\mathbb{R}} \times \mathbb{C}^K_+ \subset (\mathcal{C}^\dagger)^{J+K}$ défini ci-dessus, la fonction $\widetilde{H}$ se récrit sous la forme*

$$\widetilde{H}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\mu}}(s) = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\sigma}}(s)^T\boldsymbol{\mu} \quad \text{où } \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\sigma}} = \Big[E^1_{-\xi_1}, \dots, E^1_{-\xi_J}\;,\; \frac{E^1_{\gamma_1}+E^1_{\overline{\gamma_1}}}{2}, \dots, \frac{E^1_{\gamma_K}+E^1_{\overline{\gamma_K}}}{2}\;,\; i\frac{E^1_{\gamma_1}-E^1_{\overline{\gamma_1}}}{2}, \dots, i\frac{E^1_{\gamma_K}-E^1_{\overline{\gamma_K}}}{2}\Big]^T, \tag{2.14}$$

et où on a introduit le vecteur $\boldsymbol{\mu} = [\widetilde{\mu}_1, \dots, \widetilde{\mu}_J \;,\; \Re e(\widetilde{\mu}_{J+1}), \dots, \Re e(\widetilde{\mu}_{J+K}) \;,\; \Im m(\widetilde{\mu}_{J+1}), \dots, \Im m(\widetilde{\mu}_{J+K})]^T \in \mathbb{R}^{J+2K}$.

Pour les versions étendues par dérivation, on calcule $\widetilde{\mu}^e_l$ à partir de la mesure $M^\dagger$ associée à H^e (cf. (2.11)) et on déduit

$$\widetilde{H}(s) = s\widetilde{H^e}(s) + H(0) \quad \text{et} \quad \widetilde{y}(t) = \Re e\Big(\sum_{l=1}^{J+K}\sigma_l\widetilde{\mu}^e_l\, x_l(t)\Big) + \lambda^e u(t) \quad \text{où} \quad \lambda^e = H(0) + \Re e\Big(\sum_{l=1}^{J+K}\widetilde{\mu}^e_l\Big). \tag{2.15}$$

Remarque 13 (Lien avec les Γ-représentations et leurs approximations [54]) *Des versions de cette méthode d'approximation ont été proposées dans [54] pour des représentations où $\mathcal{C}$ n'est pas une coupure mais la frontière d'un domaine ouvert connexe (appelé Γ-contour) de $\mathbb{C}^-_0$ qui inclut toutes les singularités (pôles et coupures). Notre démarche a été guidée par l'observation pratique suivante : en prélevant et approchant les contributions singulières sur les singularités mêmes plutôt que “à distance” via un contour Γ, nous avons pu aboutir à de meilleurs compromis dimension/qualité dans bon nombre de cas.*

Des preuves de convergence de cette méthode sont données dans e.g. [87] pour les représentations diffusives. Cependant, pour obtenir des approximations de qualité à faible dimension, une méthode par optimisation s'avère bien plus efficace.

Méthode 2 : optimisation d'un critère pondéré

Plutôt que d'estimer $\boldsymbol{\mu}$, une autre méthode consiste à l'optimiser en minimisant un critère de type *moindres carrés*, de la forme $\int_{\mathbb{R}_+}\big|\widetilde{H}(i\omega) - H(i\omega)\big|^2 w(\omega)^2\, L_\Omega(\mathrm{d}\omega)$ (w et L_Ω sont des poids et mesures positifs). Notons que puisque les singularités de $\widetilde{H}$ et H sont à partie réelle négative, l'erreur quadratique calculée ici sur l'axe de Fourier $i\mathbb{R}$ majore[4] celle calculée sur tout autre axe dans $\mathbb{C}^+_0$.

Nous avons proposé dans [A5, A6] des pondérations w et mesures L bien adaptées aux diagrammes de Bode et plages et échelles caractéristiques de l'audio : (i) les fréquences sont perçues par l'oreille humaine entre $\frac{\omega_-}{2\pi} = 20\,\mathrm{Hz}$ et $\frac{\omega_+}{2\pi} = 20\,\mathrm{kHz}$ selon une échelle logarithmique de sorte qu'on choisit $L_\Omega(\mathrm{d}\omega) = 1_\Omega(\omega)\mathrm{d}\ln\omega$ où $\Omega =]\omega_-, \omega_+[$; (ii) l'erreur commise sur $\widetilde{H}$ est mesurée relativement à la fonction exacte H, c'est-à-dire pour le poids $w_H(\omega) := 1/|H(i\omega)|$; (iii) cette pondération relative est considérée sur une dynamique maximale (typiquement $-20\log_{10}T_r = 80\,\mathrm{dB}$ pour l'audio), au-delà de laquelle on la fait saturer, de sorte qu'on utilise $w_H(i\omega) = 1/\mathrm{Sat}_{H,T_r}(i\omega)$ où $\mathrm{Sat}_{H,T_r}(i\omega)$ vaut $|H(i\omega)|$ si $|H(i\omega)| \geq T_H$ et vaut $T_H = T_r \sup_{\omega\in\Omega}|H(i\omega)|$ sinon ; (iv) dans le cas d'une *extension par dérivation*, l'optimisation est réalisée sur la fonction intermédiaire bien posée H^e et le poids est construit de sorte d'optimiser la fonction cible H, c'est-à-dire que $w^e_H(i\omega) = \omega/\mathrm{Sat}_{H,T_r}(i\omega)$.

[4] Ce résultat se déduit du principe du maximum des fonctions holomorphes (cf. [147, p.127]).

En pratique, on calcule une version discrétisée du critère pour une partition $\{\omega_n\}_{1\leq n\leq N+1}$ de l'intervalle Ω et on ajoute un terme de régularisation de Tikhonov [205], nécessaire lorsque la dimension $P=J+2K$ devient grande (typiquement de l'ordre de 20 ou plus). A $\boldsymbol{\sigma}$ fixé, ce critère est donné par

$$\begin{aligned}\underline{\mathcal{C}}:\boldsymbol{\mu}\in\mathbb{R}^{J+2K} \quad &\longmapsto \quad \sum_{n=1}^{N}\left|\Big(\widetilde{H}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\mu}}(i\omega_n)-H(i\omega_n)\Big)\,w_H(\omega_n)\right|^2\big[\ln\omega_{n+1}-\ln\omega_n\big] \;+\; \epsilon\boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\mu}\\ &\qquad = (\boldsymbol{M\mu}-\boldsymbol{H})^*\,\boldsymbol{W}^*\boldsymbol{W}\,(\boldsymbol{M\mu}-\boldsymbol{H})+\epsilon\boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\mu},\end{aligned} \tag{2.16}$$

où $\boldsymbol{M}_{n,*}=\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\sigma}}(i\omega_n)^T$ (cf. (2.14), $\boldsymbol{H}_n=H(i\omega_n)$ et $\boldsymbol{W}$ est diagonale avec $\boldsymbol{W}_{n,n}=w_H(\omega_n)\sqrt{\ln\omega_{n+1}-\ln\omega_n}$ pour $1\leq n\leq N$. Sa minimisation sur $\mathbb{R}^{J+2K}$ conduit à

$$\boldsymbol{\mu}=\left[\Re e\left(\boldsymbol{M^*W^*WM}+\boldsymbol{\epsilon I_{J+2K}}\right)\right]^{-1}\left[\mathcal{R}e\left(\boldsymbol{M^*W^*WH}\right)\right]. \tag{2.17}$$

Le paramètre de régularisation $\epsilon\geq 0$ est réglé pour que le conditionnement de la matrice inverse soit supérieur à la résolution des flottants. Dans le cas *étendu par dérivation*, la fonction de transfert approchée est donnée par $\widetilde{H}(s)=\mathrm{diag}(\boldsymbol{\sigma})\,\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\sigma}}(s)^T\boldsymbol{\mu}^{\boldsymbol{e}}+\lambda^e$ où $\boldsymbol{\mu}^{\boldsymbol{e}}$ est calculé à partir de H^e et λ^e comme en (2.15).

2.1.5 Simulations temporelles et résultats

Discrétisation temporelle. Des simulations temporelles sont construites à partir des approximations d'ordre finie pour des *bloqueurs d'ordre 0 ou 1* sur l'entrée échantillonnée à la période $T_e=1/f_e$. Nous rappelons brièvement l'intérêt de ce choix et donnons les conditions sous lesquelles nous l'utilisons.

Les équations dynamiques $\partial_t x(t)=Ax(t)+Bu(t)$ ont pour solution $x(t)=\int_0^t \mathrm{e}^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,\mathrm{d}\tau+\mathrm{e}^{At}x(0)$ de sorte que $x(t_{n+1})=\mathrm{e}^{AT_e}x(t_n)+v_{n+1}$ où $v(t_{n+1})=\int_0^{T_e}\mathrm{e}^{A(T_e-\tau)}B\,u(n\,T_e+\tau)\,\mathrm{d}\tau$. Les réalisations de type (2.12-2.13) correspondent à $A=\mathrm{diag}(\boldsymbol{\sigma})$ et $B=[1,\ldots,1]^T$ de sorte que e^{AT_e} est diagonale. Pour une entrée à bande limitée par la fréquence de Shannon-Nyquist $f_s=f_e/2$, la reconstruction exacte est donnée par $u(t)=\sum_{n\in\mathbb{N}}u(t_n)h^\star(t/T_e-n)$ où $h^\star(x)=\mathrm{sinc}(x)=\sin(\pi x)/(\pi x)$ est non causal de support infini. Le *bloqueur d'ordre 0* (B0) approche u par une interpolation constante par morceaux avec le noyau de reconstruction $h_0(x)=1_{[0,1]}(x)$. Le *bloqueur d'ordre 1* (B1) approche u par interpolation affine avec le noyau de reconstruction $h_1(x)=(1-|x|)1_{[-1,1]}(x)$. Ceci conduit aux systèmes à temps discret suivants

$$\begin{aligned}(B0):\quad x(t_{n+1}) \;&=\; \mathrm{e}^{AT_e}\,x(t_n)+b_0\,u(t_n),\quad \text{où on introduit }\; b_\alpha=\left[\int_0^1\theta^\alpha\,\mathrm{e}^{AT_e\,\theta}\,\mathrm{d}\theta\right]T_eB,\\ (B1):\quad x(t_{n+1}) \;&=\; \mathrm{e}^{AT_e}\,x(t_n)+(b_0-b_1)\,u(t_{n+1})+b_1\,u(t_n).\end{aligned}$$

Avec cette famille de méthodes, les pôles et le régime libre sont exacts et seule l'entrée est approximée. La transformation subie est caractérisée dans le domaine de Fourier par la fonction de transfert $G_k(f)=H_k(f/f_e)/H_\star(f/f_e)$, définie sur $-f_s<f<f_s$ par $G_0(f)=\mathrm{e}^{-i\pi T_e}\mathrm{sinc}(f/f_e)$ et $G_1(f)=[\mathrm{sinc}(f/f_e)]^2$. Ceci correspond à un gain d'atténuation qui décroît de 1 en $f=0$ jusqu'à $|G_k(f_{max})|$ en $f_{max}\leq f_s$, combiné à un retard d'un demi-échantillon pour le cas (B0), et sans retard ni déphasage pour le cas (B1). Pour des sur-échantillonnages de facteur κ, ceci conduit aux performances résumées dans le tableau 2.2.

facteur de sur-échantillonnage κ		1	2	3	4
$G_1(f_s/\kappa)$	(lin.)	0.405	0.811	0.912	0.95
$20\log_{10}G(f_s/\kappa)$	(dB)	-7.8	-1.8	-0.8	-0.45
$\epsilon(f_s/\kappa)$	(lin.)	0.5947	0.1894	0.0881	0.0504
$20\log_{10}\epsilon(f_s/\kappa)$	(dB)	-4.5	-14.5	-21.1	-26

TAB. 2.2 – Atténuation maximale due à la discrétisation temporelle : gain $G_1(f_{max})$ pour le bloqueur d'ordre 1 et erreur $\epsilon_1(f_{max})=1-G_1(f_{max})$ correspondante. Pour le bloqueur d'ordre 0, l'atténuation en dB donnée sur la deuxième ligne est divisée par 2.

Les résultats présentés sur le trombone virtuel, en § 1.2.2 et figure 1.11, sont obtenus pour un *bloqueur d'ordre 1* (pour ne pas introduire de retard artificiel) et la fréquence d'échantillonnage[5] $f_e=44100\,\mathrm{Hz}$ (sans sur-échantillonnage). Les simulations temporelles présentées ci-dessous pour les exemples H_4 et H_5 (cf. tableau 2.1) sont obtenues avec un *bloqueur d'ordre 0* et $f_e=(10^4/\pi)\,\mathrm{Hz}$ (sans sur-échantillonnage).

[5]La longueur du tube et la célérité ont été réglées pour de sorte que les retards à simuler correspondent à des nombres entiers d'échantillons. Dans le cas contraire, on peut recourir à des retards fractionnaires (cf. e.g. [217, 202].

Résultats. Nous illustrons les résultats d'approximation des fonctions de transfert H_1 et H_2 en figure 2.2, H_4 pour $z=1$ en figure 2.3 et H_5 en figure 2.4 (cf. [A5, A6], [C18] et [147, figures 4.1 et 4.2] pour des résultats complémentaires).

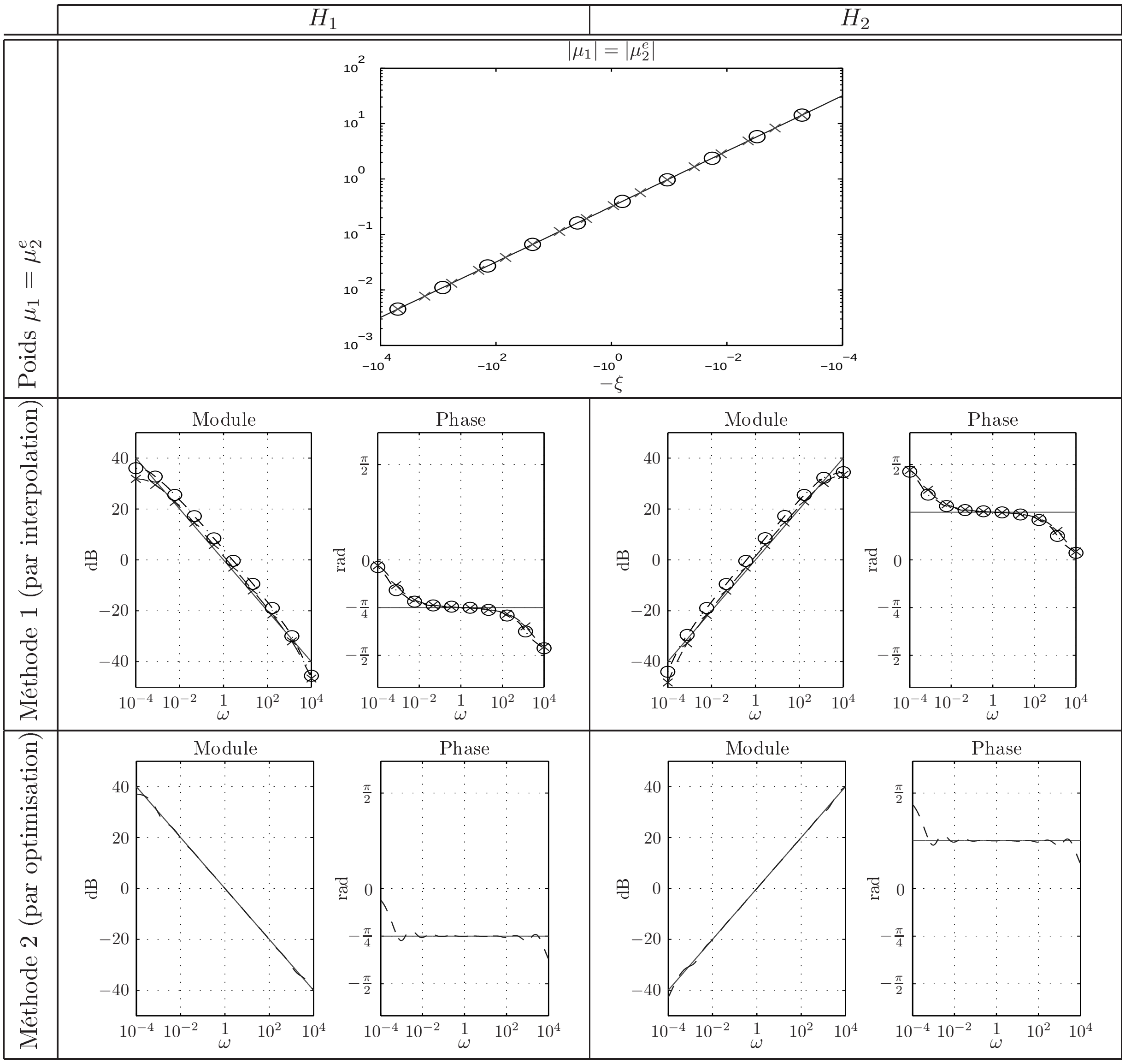


FIG. 2.2 – Exemples $H_1(s) = 1/\sqrt{s}$ et $H_2(s) = \sqrt{s}$: poids $\mu_1(-\xi) = \mu_2^e(-\xi)$ et approximations pour des placements de J pôles à progression géométrique entre $\xi_{min} = 5.10^{-4}$ et $\xi_{max} = 5.10^3$. Méthode 1 (par interpolation d'état) : comparaison de résultats pour $J = 10$ (o) et $J = 16$ (×). Méthode 2 (par optimisation) : $J=10$ (o).

Concernant $H_1(s) = 1/\sqrt{s}$ et $H_2(s) = s\,H_1(s)$ (extension par dérivation), les diagrammes de Bode exacts et approchés montrent que les résultats de la méthode par optimisation (avec $J = 10$ pôles) sont meilleurs que ceux de la méthode par interpolation de l'état (avec $J = 10$ et même $J = 16$). La plage de validité fréquentielle correspond à celle des amortissements des pôles placés sur la coupure (ici, $\xi_j \in [5.10^{-4}, 5.10^3]$ avec une progression géométrique). Elle conduit à une bonne précision (module et phase) sur 6 à 7 décades.

Les résultats observés sur H_4 et H_5 conduisent à la même conclusion à la fois pour les fonctions de transfert et les simulations temporelles. Sur l'exemple H_4, il est important de noter que l'analyse de la densité se révèle utile, pour la raison pratique suivante.

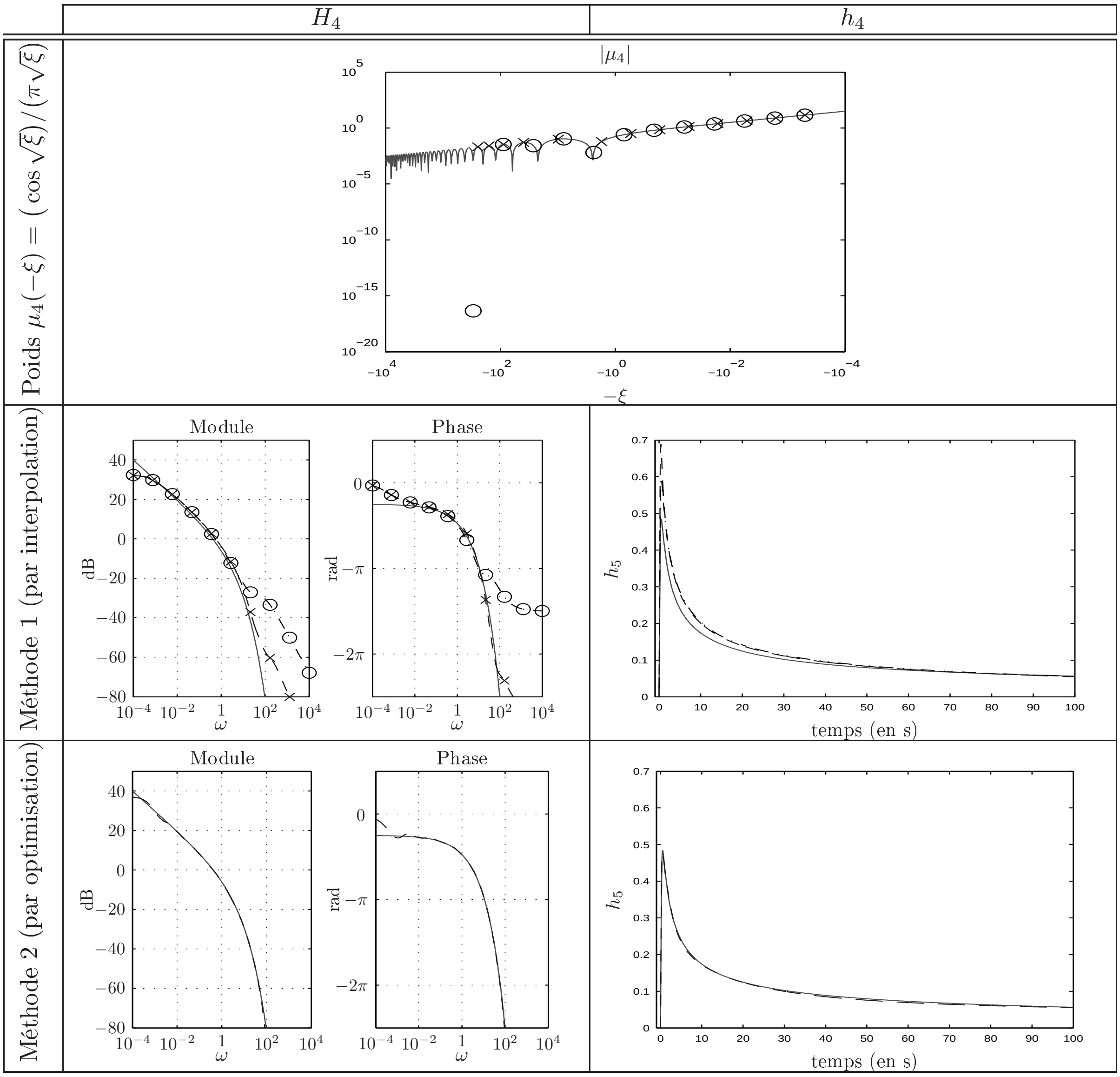


FIG. 2.3 – Exemple $H_4(s) = \exp\sqrt{s}/\sqrt{s}$ (cf. tab. 2.1 avec $z = 1$) : Poids $\mu_4(-\xi) = \cos\sqrt{\xi}/(\pi\sqrt{\xi})$ et approximations pour deux placements distincts de J pôles avec $J = 12$ entre $\xi_{min} = 5.10^{-4}$ et $\xi_{max} = 3.10^2$: le premier est à progression géométrique (o), le second ($\times$) est modifié pour correspondre aux maxima locaux de $|\mu_4|$. Les diagrammes de Bode et simulations des réponses impulsionnelles sont donnés pour : la méthode 1 (cas exact (-) et les deux approximations (o) et ($\times$)) ; la méthode 2 (cas exact (-) et l'approximation $\times$). Les deux réponses impulsionnelles calculées par la méthode 1 (o,$\times$) représentées en pointillés sont proches mais restent distinguables de la réponse exacte. L'approximation et la réponse exacte sont quasi-confondues pour la méthode 2.

Remarque 14 (Analyse de μ_4) *Sur les exemples H_1, H_2 et H_5, les pôles d'approximation ont été placés de façon heuristique, avec un amortissement qui suit une progression géométrique, "comme et sur la même plage que" les fréquences angulaires visées pour le diagramme de Bode (voir l'approximation en (o) sur la figure 2.3). Toutefois, contrairement à μ_1 ($= \mu_2^e$) et μ_5, la fonction μ_4 n'est pas une densité monotone (ni positive) : sa valeur absolue fait apparaître une suite de maxima locaux. A nombre fixé de pôles, le simple fait de déplacer légèrement les pôles de sorte qu'ils passent par ces maxima et évitent les zéros améliorent significativement les résultats en haute fréquence.*

Aussi, bien que la méthode par optimisation ne requiert par le calcul des densités μ, ce calcul peut fournir, pour cette méthode aussi, un indicateur de placement de pôles.

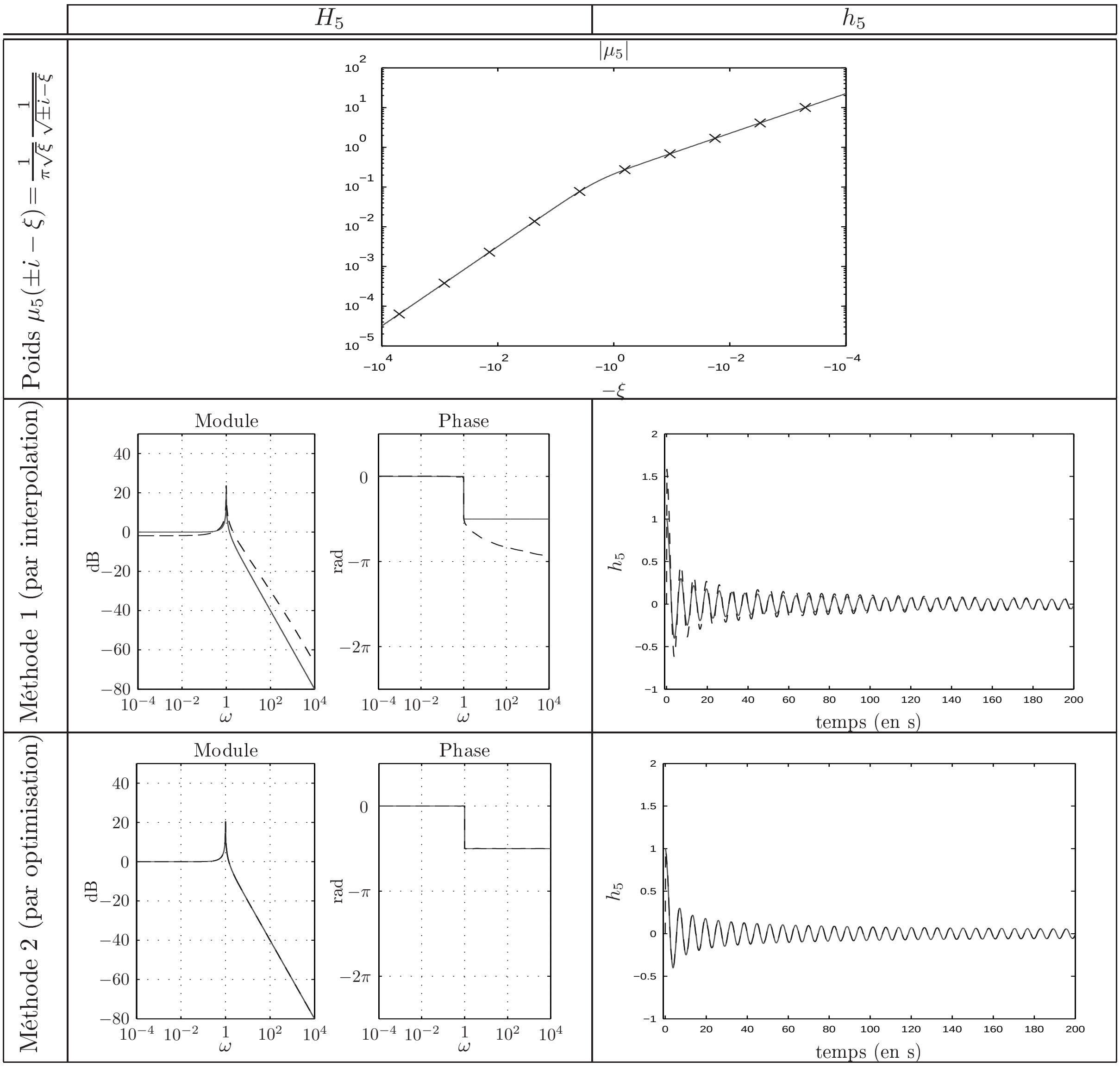


FIG. 2.4 – Exemple $H_5(s) = 1/\sqrt{1+s^2}$. Poids μ_5 et approximations par placement de $K = 10$ paires de pôles complexes conjugués $\gamma = \pm i - \xi$ avec le mêmes ξ qu'en figure 2.2. Les diagrammes de Bode et simulations temporelles des noyaux sont donnés pour les méthodes 1 et 2 (cas exact (-) et approché (- -)).

2.1.6 Perspectives

La méthode 2 décrite ci-dessus fournit un optimum global des paramètres $\boldsymbol{\mu}^{opt}$ pour $\boldsymbol{\sigma}$ fixé, mais le “bon” placement des pôles reste un problème ouvert. Suite à la remarque 14, une amélioration pratique consisterait à raffiner localement le résultat actuel à l'aide : (i) d'un placement de pôles construit à partir de caractéristiques de la densité μ, ou (ii) d'une optimisation locale standard du critère $\boldsymbol{\sigma} \mapsto \underline{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\mu}^{opt}(\boldsymbol{\sigma}))$ où $\boldsymbol{\sigma}$ devient le paramètre libre. De plus, puisque les coupures des fonctions de transfert ne sont pas uniques (seuls les points de branchements le sont), des questions pour l'optimisation sont celles : (iii) de leur choix et, si cela a un sens, de leur optimalité, et par suite, (iv) de contraindre ou non les pôles à rester sur $\mathcal{C}$ pour une optimisation de type (ii). Ceci renvoie à certaines questions profondes d'analyse fonctionnelle et sur les vitesses de convergence. Certaines de ces questions et pistes ont été examinées pendant le post-doctorat de Karim Trabelsi (cf. [G5, C14] et page 102). Mais ce sujet difficile reste à explorer.

2.2 Séries de Volterra

Les séries de Volterra ont été introduites par le mathématicien et physicien italien Vito Volterra. Ce sont des développements en séries de fonctionnelles à opérateurs à noyaux (cf. [215, 216] et les séries de Fliess [67]), capables de représenter la trajectoire de systèmes à non-linéarité régulière au voisinage d'un point fixe. En ce sens, elles fournissent une généralisation du filtrage et, dans les domaines de Fourier ou Laplace, des fonctions de transfert. Aussi, elles ont été très utilisées dans plusieurs domaines (traitement du signal, automatique, électronique, électro-magnétisme, mécanique, acoustique, génie bio-médical, etc), pour la modélisation, la réduction d'ordre, la simulation en temps réel et l'identification (cf. [75, 46] et aussi [62, 160, 182] pour le cas simplifié d'une *structure de Hammerstein*). Les travaux fondateurs donnant un cadre formel et une analyse rigoureuse de cet outil s'appuient d'une part sur la géométrie différentielle [16, 71, 67, 69, 93] avec une approche "contrôle géométrique" et, d'autre part, sur l'analyse fonctionnelle [180, 34, 186] avec une approche "opérateurs entrée/sortie" et "réalisation de système".

Nous présentons ici une méthode formelle simple, fondée sur un *système annulateur*, qui permet de déterminer les noyaux de problèmes faiblement non linéaires décrits par des équations différentielles, et plus largement, des *équations aux dérivées partielles* et *systèmes de dimension infinie*. Des simulations temps réel qui rejettent le repliement spectral dû aux non-linéarités sont proposées pour plusieurs applications (sons cuivrés, corde, circuit électronique audio). Nous introduisons aussi un formalisme en *séries de Green-Volterra* (cf. figure 2.5) pour résoudre des problèmes physiques non homogènes. Nous explorons une méthode pratique qui étend la plage de validité des noyaux pour le cas d'un système à saturation. Nous terminons par des résultats peu répandus dans la littérature, qui fournissent des bornes *calculables* de rayon de convergence et d'erreurs de troncature, avec des illustrations sur quelques exemples.

George Green (Anglais, 1793-1841) [79]		Vito Volterra (Italien, 1860-1940) [215]	
			
Portrait (vers 1840)	Moulin de Green Sneinton (/Nottingham)	Portrait (vers 1890)	Portrait (vers 1910)

FIG. 2.5 – **George Green**, mathématicien et physicien, est né en 1793 à Sneinton (/Nottingham) où il a passé la plupart de sa vie. Quasiment autodidacte, fils de boulanger, il n'a eu qu'une année de scolarité entre 8 et 9 ans. Son initiation scientifique reste mal connue. Son *Essai sur l'application de l'analyse mathématique aux théories de l'électricité et du magnétisme*, rédigé en partie dans le moulin de sa famille, fut publié en 1828 : y sont introduits les *fonctions et le théorème de Green*. Il entra à l'Université de Cambridge en premier cycle à 40 ans (1833), obtint son diplôme en 1837, puis resta y travailler sur l'optique, l'acoustique et l'hydrodynamique. Il tomba malade en 1840 et retourna à Nottingham où il mourut l'année suivante. **Vito Volterra**, mathématicien et physicien, est né en 1860 à Ancône. Dès 11 ans, il se passionne pour les mathématiques. A 13 ans, après avoir lu «De la Terre à la Lune» de Jules Verne, il cherche à calculer les trajectoires balistiques entre les deux astres en considérant leur champ gravitationnel. Alors que sa famille, pauvre, le destinait à démarrer un commerce, il fut encouragé dans la voie scientifique par un cousin ingénieur qui remarqua ses aptitudes. Vito Volterra est surtout connu pour ses travaux sur les équations intégro-différentielles, la dislocation des cristaux, et la dynamique des populations. Opposant résolu au fascisme, il n'hésita pas à renoncer aux honneurs académiques par conviction politique. Il vécut beaucoup à l'étranger et rentra à Rome juste avant sa mort. Il fut membre de la *Royal Society* (1910) et de la *Royal Society of Edinburgh* (1913). Un cratère de Lune porte son nom.

2.2.1 Préambule : lien avec la méthode des perturbations régulières

Bien que ce lien soit très peu mis en avant dans la littérature[6], le formalisme des séries de Volterra résulte de la méthode des perturbations régulières (utilisée de façon très classique dans de nombreux domaines de la physique et en automatique [106, chap. 10]) pour le cas particulier où l'entrée du système est choisie comme la perturbation. Ce lien est explicité ci-dessous du point de vue formel pour le cas d'un système de dimension finie. Avec Béatrice Laroche, nous l'avons aussi exploité pour traiter le problème de convergence, pour des systèmes de dimension finie et infinie (cf. § 2.2.7).

Soit un système causal de dimension finie, initialement au repos, de représentation d'état

$$\left\{\begin{array}{lcl} \partial_t x(t) &=& f\big(x(t),u(t)\big), \\ y(t) &=& g\big(x(t),u(t)\big), \end{array}\right. \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{array}{l} f(X,U) = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \frac{D_{p,q}f(0,0)}{p!\,q!}(\underbrace{X,\dots,X}_{p},\underbrace{U,\dots,U}_{q}) \\ g(X,U) = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \frac{D_{p,q}g(0,0)}{p!\,q!}(X,\dots,X,U,\dots,U) \end{array}\right. \tag{2.18}$$

où f et g sont des fonctions analytiques nulles en[7] $(u,x)=(0,0)$, et où les fonctions multi-linéaires[8] $D_{p,q}f(0,0)\in\mathcal{ML}_{p,q}(\mathbb{X},\mathbb{U},\mathbb{X})$ et $D_{p,q}g(0,0)\in\mathcal{ML}_{p,q}(\mathbb{X},\mathbb{U},\mathbb{Y})$ sont des dérivées de Fréchet (cf. e.g. [71]).

Considérons l'entrée u comme une perturbation du système et marquons-la par $\epsilon>0$ via le changement de variable $u(t)=\epsilon v(t)$. La méthode des perturbations régulières [106, chap. 5] consiste à expliciter les solutions recherchées sous la forme de puissances de ϵ : $x(t)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\epsilon^n x_n(t)$ et $y(t)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\epsilon^n y_n(t)$. En substituant ces séries solution dans (2.18) et en exploitant la multi-linéarité de $D_{p,q}f(0,0)$ et $D_{p,q}g(0,0)$ pour regrouper sur les puissances de ϵ, on trouve qu'un tel développement est *formellement* possible si les fonctions x_n satisfont $x_0=0$ et, pour $n\geq 1$,

$$\partial_t x_n(t) = A\,x_n(t)+r_n(t) \quad \text{où } r_1 = B\,v \ \text{ et, pour tout } n\geq 2, \tag{2.19}$$

$$r_n(t) = \sum_{\substack{(p,q)\in[0,n]^2_{\mathbb{N}}\\ 2\leq p+q\leq n}} \ \sum_{\substack{m\in(\mathbb{N}^*)^p\\ m_1+\dots+m_p=n-q}} \frac{D_{p,q}f(0,0)}{p!\,q!}\big(\underbrace{x_{m_1}(t),\dots,x_{m_p}(t)}_{p},\underbrace{v(t),\dots,v(t)}_{q}\big), \tag{2.20}$$

et où on a renoté $D_{1,0}f(0,0)(x)=Ax$ et $D_{0,1}f(0,0)(v)=Bv$ sous forme matricielle. On trouve des relations explicites avec une combinatoire similaire pour y_n. Puisque r_n ne contient que des occurrences de $x_{m<n}$ et v, on obtient une séquence de problèmes de Cauchy linéaires pour les x_n (ici, avec conditions initiales nulles). La solution s'écrit

$$x_n(t) = \int_{\mathbb{R}_+} w(\tau)\,r_n(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad \text{avec} \quad w(t)=\mathrm{e}^{A\,t}1_{\mathbb{R}_+}(t), \tag{2.21}$$

de laquelle y se déduit directement. En reformant la série $x(t)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\epsilon^n x_n(t)$, on trouve finalement que x s'exprime comme une somme sur $n\in\mathbb{N}^*$ de convolutions multiples sur n versions répétées de l'entrée u avec un noyau à n variables : ces noyaux sont précisément les noyaux de Volterra. Lorsque le domaine de convergence de la série (en un sens précisé plus loin) n'est pas réduit à $u=0$, le système est dit *faiblement non linéaire*.

Le formalisme des séries de Volterra fournit un cadre théorique et des outils pratiques qui permettent de déterminer les noyaux et de représenter la solution (2.21) explicitement en fonction de l'entrée u : en quelque sorte, il permet de “calculer le calculateur” de la solution, sans avoir à pré-fixer l'entrée.

Remarque 15 (Traitement des conditions initiales) *Pour des conditions initiales non nulles, le développement en séries de Volterra s'exprime comme la somme de la trajectoire nominale $x_0(t)$ obtenue pour une entrée nulle et de termes d'ordre $n\in\mathbb{N}^*$ qui décrivent la déviation due à u (cf. [115, (7.4)]). Une alternative que nous proposons en § 2.2.7 consiste à considérer les conditions initiales également comme une perturbation du point d'équilibre et à les marquer par (ici) le même ϵ.*

Dans ce qui suit, sauf mention contraire, les conditions initiales seront considérées nulles.

[6]Il est évoqué de façon très formelle dans [2] et esquissé sans vraiment le formuler dans [19].

[7]On considère ici que $(u,x)=(0,0)$ est un point d'équilibre, sans perte de généralité, quitte à recentrer les variables.

2.2.2 Définitions et généralités

Nous rappelons quelques résultats standard issus de [180, 15, 115, 84].

Définition 2 (Série de Volterra mono-entrée mono-sortie) *Un système dynamique d'entrée* $u(t) \in \mathbb{U} = \mathbb{R}$ *et de sortie* $x(t) \in \mathbb{X} = \mathbb{R}$ *pour* $t \in \mathbb{T} = \mathbb{R}$ *est décrit par une série de Volterra de noyaux* $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$*, si la sortie est donnée par, pour tout* $t \in \mathbb{T}$*,*

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \int_{\mathbb{T}^n} k_n(t, \tau_1, \dots, \tau_n)\, u(\tau_1) \dots u(\tau_n)\, \mathrm{d}\tau_1 \dots \mathrm{d}\tau_n. \tag{2.22}$$

Remarque 16 (Quelques systèmes représentables en séries de Volterra) *Les séries de Volterra englobent : (i) les systèmes linéaires* ($k_n = 0$ *si* $n \geq 2$)*; (ii) les fonctions développables en séries entières* $x(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n\, u(t)^n$*, ici, nulles en 0, avec* $k_n(t, \tau_1 \dots, \tau_n) \equiv a_n \delta(t-\tau_1, \dots, t-\tau_n)$ *(ou, avec une écriture plus rigoureuse et en notant* $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$*,* $k_n(t,\tau)\mathrm{d}\tau$ *devient* $a_n\, M_t(\mathrm{d}\tau)$ *avec la mesure de Dirac* $M_t = \delta(\tau_1 - t, \dots, \tau_n - t)$*); (iii) leurs combinaisons linéaires, multi-linéaires (de type produit de sorties) et leur cascade (cf. figure 2.6 et § 2.2.3).*

Une notion de convergence bien posée peut être introduite dans un cadre fonctionnel[8] avec le résultat suivant.

Proposition 1 (Fonction limitante et relation entrée-bornée/sortie-bornée) *Soit une série de Volterra* $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{VS}$*. On définit sa* fonction limitante *par la série entière* $\varphi(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \|k_n\|_{\mathcal{V}_{\mathbb{X}}^n}\, z^n$ *et on note* ρ *son rayon de convergence. Si* $\rho > 0$*, alors pour tout* $u \in \mathcal{U}$ *tel que* $\|u\|_{\mathcal{U}} < \rho$*, la série (2.22) est normalement convergente dans* $\mathcal{X}$ *et* $\|x\|_{\mathcal{X}} \leq \varphi\big(\|u\|_{\mathcal{U}}\big) < +\infty$*.*

La preuve est rappelée dans e.g. [A14]. Néanmoins, il est souvent difficile de déterminer les normes de tous les noyaux et d'en déduire un résultat exploitable en pratique. Ce problème a été résolu pour une classe de systèmes et les résultats sont donnés en § 2.2.7.

Un intérêt des séries de Volterra est de fournir des généralisations naturelles des propriétés et outils standard des systèmes linéaires aux cas faiblement non linéaires.

Proposition-Définition 1 (Analogies avec les systèmes linéaires et noyaux de transfert) *Les noyaux vérifient : (i) pour un système causal,* $k_n(t, \tau_1, \dots, \tau_n) = 0$ *si* $\max(\tau_1, \dots, \tau_n) > t$ *; (ii) pour un système stationnaire,* $k_n(t, \tau_1, \dots, \tau_n) = k_n(0, \tau_1 - t, \dots, \tau_n - t) \overset{\text{déf.}}{=} h_n(\tau_1 - t, \dots, \tau_n - t)$*. Pour un système causal stationnaire, (2.22) se récrit comme une somme de convolutions multiples* $x(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \int_{[0,t]^n} h_n(\tau_1, \dots \tau_n)\, u(t-\tau_1) \dots u(t-\tau_n)\, \mathrm{d}\tau_1 \dots \mathrm{d}\tau_n$*. Dans ce cas, on définit les* noyaux de transfert H_n *comme la transformée de Laplace multi-variable de* h_n

$$H_n(s_1, \dots, s_n) = \int_{\mathbb{R}_+} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)\, \mathrm{e}^{-(s_1\tau_1 + \dots + s_n\tau_n)}\, \mathrm{d}\tau_1 \dots \mathrm{d}\tau_n, \tag{2.23}$$

pour tout $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{C}^n$ *tel que l'intégrale soit absolument convergente. Comme pour les systèmes linéaires, les noyaux de transfert d'un système causal stable sont analytiques sur leur domaine de convergence de Laplace* $\mathcal{D}_n$ *qui est tel que* $(\mathbb{C}_0^+)^n \subseteq \mathcal{D}_n \subseteq \mathbb{C}^n$*.*

Enfin, notons que dans (2.22) toute permutation des variables τ_i laisse le résultat inchangé. Ainsi, $k_2(t, \tau_1, \tau_2)$, $k_2(t, \tau_2, \tau_1)$ mais aussi $\alpha k_2(t, \tau_1, \tau_2) + (1-\alpha) k_2(t, \tau_2, \tau_1)$ conduisent aux mêmes résultats. Pour rétablir une définition unique des noyaux (ce qui peut être intéressant pour assurer une structure fixe lors de procédures d'identification, par exemple), des versions respectant des propriétés supplémentaires ont été introduites : noyaux symétriques, noyaux triangulaires, noyaux réguliers (cf. [180]). Illustrons l'exemple des noyaux symétriques.

Proposition-Définition 2 (Noyaux symétriques) *Un noyau* k_n *est dit symétrique si pour toute permutation* $\pi \in \mathcal{P}(n)$*, il vérifie* $k_n(t, \tau_{\pi(1)}, \dots, \tau_{\pi(n)}) = k_n(t, \tau_1, \dots, \tau_n)$*. Soit une série* $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{VS}$*, sa version à noyaux symétriques est donnée par* $\{SYM[k_n]\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{VS}$ *où on définit, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*,* $t \in \mathbb{T}$ *et* $\tau \in \mathbb{T}^n$*,* $SYM[k_n](t, \tau) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi\in\mathcal{P}(n)} k_n(t, \tau_{\pi(1)}, \dots, \tau_{\pi(n)})$*. Les noyaux symétriques d'un système sont uniques.*

[8] Les espaces $\mathcal{U}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{V}_{\mathbb{X}}^n$ et $\mathcal{VS}$ sont détaillés page xii.

2.2.3 Lois d'interconnexion, système annulateur et réalisation

Plusieurs algorithmes de calcul des noyaux sont disponibles (cf. e.g. [180, 67, 115, 93, 84]). La méthode pratique retenue ici est fondée sur les lois d'interconnexion [84] et l'introduction d'un *système annulateur*.

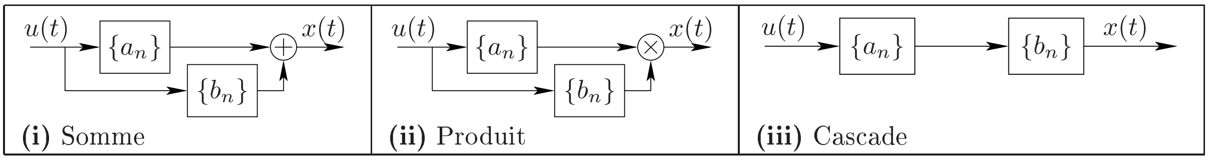


FIG. 2.6 – Interconnexions somme (i), produit (ii) et cascade (iii) de systèmes mono-entrée mono-sortie.

Proposition 2 (Lois d'interconnexion) *Soit un système* $(\mathcal{S}_a)$ *de noyaux* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in\mathcal{VS}$*, de fonction limitante* φ_a *et de rayon de convergence* $\rho_a>0$*. Dans le cas stationnaire, on note* A_n *les noyaux de transfert et* $\mathcal{D}_{A_n}$ *leur domaine de Laplace. Alors, les connexions de type* somme *(i),* produit *(ii) et cascade (iii) avec un second système* $(\mathcal{S}_b)$ *(cf. figure 2.6) définissent un système* $(\mathcal{S}_c)$ *de noyaux donnés par :*

(i) Somme	$c_n(t,\tau_1,\dots,\tau_n) = a_n(t,\tau_1,\dots,\tau_n) + b_n(t,\tau_1,\dots,\tau_n),$ $C_n(s_1,\dots,s_n) = A_n(s_1,\dots,s_n) + B_n(s_1,\dots,s_n),$
(ii) Produit	$c_n(t,\tau_1,\dots,\tau_n) = \sum_{m=1}^{n-1} a_m(t,\tau_1,\dots,\tau_m) \times b_{n-m}(t,\tau_{m+1},\dots,\tau_n),$ $C_n(s_1,\dots,s_n) = \sum_{m=1}^{n-1} A_m(s_1,\dots,s_m) \times B_{n-m}(s_{m+1},\dots,s_n),$
(iii.a) Cascade avec un système linéaire ($b_n=0$, si $n\geq 2$)	$c_n(t,\tau_1,\dots,\tau_n) = \int_{\mathbb{T}} b_1(t,\theta_1)\, a_n(\theta_1,\tau_1,\dots,\tau_n)\,\mathrm{d}\theta_1,$ $C_n(s_1,\dots,s_n) = B_1(s_1+\ldots+s_n)\, A_n(s_1,\dots,s_n),$
(iii.b) Cascade (cas général)	$c_n(t,\tau_1,\dots,\tau_n) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{\substack{p\in(\mathbb{N}^*)^m \\ p_1+\cdots+p_m=n}} \int_{\mathbb{T}^m} b_m(t,\theta_1,\dots,\theta_m)\times\ldots$ $a_{p_1}(\theta_1,\tau_1,\dots,\tau_{p_1})\ldots a_{p_m}(\theta_m,\tau_{p_1+\cdots+p_{m-1}+1},\dots,\tau_n)\,\mathrm{d}\theta_1\ldots\mathrm{d}\theta_m,$ $C_n(s_1,\dots,s_n) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{\substack{p\in(\mathbb{N}^*)^m \\ p_1+\cdots+p_m=n}} B_m(s_1+\ldots+s_{p_1},\ \ldots,\ s_{p_1+\cdots+p_{m-1}+1}+\ldots+s_n)\times\ldots$ $A_{p_1}(s_1,\dots,s_{p_1})\ \ldots\ A_{p_m}(s_{p_1+\cdots+p_{m-1}+1},\dots,s_n).$

Les rayons de convergences sont tels que $\rho_c\geq\rho_c^\star$ *avec* $\rho_c^\star=\min(\rho_a,\rho_b)$ *pour (i-ii),* $\rho_c^\star=\rho_a$ *pour (iii.a) et, pour (iii.b),*[9] $\rho_c^\star=\varphi_a^{-1}(\rho_b)$ *si* $\rho_b<\varphi_a(\rho_a)$ *et* $\rho_c^\star=\rho_a$ *sinon. Les fonctions limitantes sont telles que, pour tout* $x\in[0,\rho_c^\star[$*,* $\varphi_c(x)\leq\varphi_c^\star(x)$*, où* $\varphi_c^\star(x)$ *est donnée par* $\varphi_a(x)+\varphi_b(x)$ *pour (i),* $\varphi_a(x)\,\varphi_b(x)$ *pour (ii),* $\|b_1\|_{\mathcal{V}}^1\,\varphi_a(x)$ *pour (iii.a) et* $\varphi_b\circ\varphi_a(x)$ *pour (iii.b). Enfin, les domaines de convergence de Laplace* $\mathcal{D}_{C_n}$ *sont tels que* $\mathcal{D}_{C_n}^\star\subseteq\mathcal{D}_{C_n}$ *où* $\mathcal{D}_{C_n}^\star$ *est donné par* $\mathcal{D}_{A_n}\cap\mathcal{D}_{B_n}$ *pour (i),* $\bigcap_{1\leq m\leq n}\big(\mathcal{D}_{A_m}\times\mathcal{D}_{B_{n-m}}\big)$ *pour (ii),* $\big\{s\in\mathcal{D}_{A_n}\,|\,s_1+\cdots+s_n\in\mathcal{D}_{B_1}\big\}$ *pour (iii.a) et* $\bigcap_{m=1}^{n}\bigcap_{\substack{p\in(\mathbb{N}^*)^m\\ p_1+\cdots+p_m=n}}\big\{s\in\mathcal{D}_{A_{p_1}}\times\cdots\times\mathcal{D}_{A_{p_1}}\,|\,(s_1+\cdots+s_{p_1},\ldots,s_{p_1+\cdots+p_{m-1}+1}+\cdots+s_n)\in\mathcal{D}_{B_m}\big\}$ *pour (iii.b).*

Ces lois se généralisent aux cas de combinaisons linéaires pour (i), multi-linéaires pour (ii) et cascade à entrées et sorties multiples pour (iii) (cf. e.g. [A13, § 3.3] pour $\mathbb{X}=\mathbb{R}^{d_x}$, $\mathbb{U}=\mathbb{R}^{d_u}$).

Pour traiter le cas d'équations aux dérivées partielles dans la suite, nous ajoutons également la loi de dérivation par rapport un paramètre.

Proposition 3 (Dérivation selon un paramètre) *Soit un système paramétré par* $\theta\in\Theta$ *de sortie notée* $x(t,\theta)$ *et de noyaux notés* $\{k_n^{(\theta)}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$*, où* Θ *est un intervalle de* $\mathbb{R}$*. On suppose de plus que : (i) pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$*,* $\theta\mapsto k_n^{(\theta)}$ *est de régularité* $\mathcal{C}^1$ *; (ii)* $\{k_n^{(\theta)}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $\{\partial_\theta k_n^{(\theta)}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *appartiennent à* $\mathcal{VS}$ *; (iii) il existe* $\rho>0$ *tel que pour tout* $\theta\in\Theta$*, les rayons de convergence des séries* $\{k_n^{(\theta)}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $\{\partial_\theta k_n^{(\theta)}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *soient supérieurs ou égaux à* ρ*. Alors,* $\{\partial_\theta k_n^{(\theta)}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est une série de Volterra du système de sortie* $t\mapsto\partial_\theta x(t,\theta)$*.*

Ce résultat est une conséquence de la convergence normale des séries et de la règle de Leibniz.

[9] Notons qu'une fonction limitante φ est strictement croissante et donc bijective sur $[0,\rho[$.

Système annulateur, principe d'équivalence et noyaux solution. Nous proposons ici une méthode formelle pour calculer les noyaux. Considérons le système entrée-état (2.18) initialement au repos avec $\mathbb{X}=\mathbb{R}^{d_x}$ et $\mathbb{U}=\mathbb{R}$. On suppose que ce système est représentable par une série de Volterra de noyaux de transfert $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, vectoriels de dimension d_x (cf. figure 2.7ⓐ). Introduisons le système $(\mathcal{Z})$ d'entrée (x,u) et de sortie $z=\partial_t x - f(x,u)$ de sorte que z s'annule exactement pour les trajectoires du système $(\mathcal{S})$: nous appelons $(\mathcal{Z})$, le *système annulateur* de $(\mathcal{S})$ (cf. figure 2.7ⓑ).

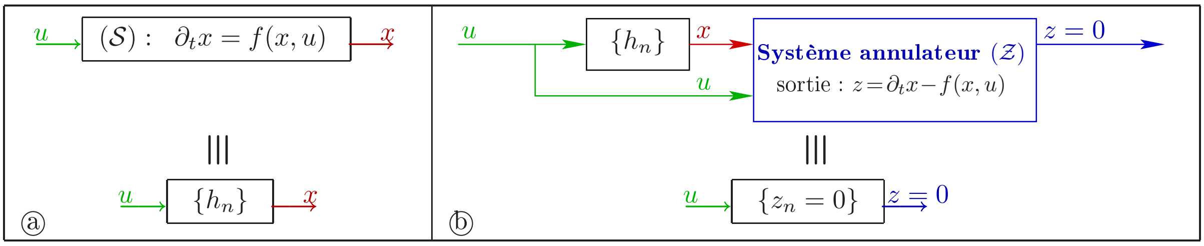


FIG. 2.7 – Système annulateur et principe d'équivalence de noyaux de Volterra.

En exploitant les lois d'interconnexion dans le domaine de Laplace[10], on trouve que les noyaux de transfert Z_n mettent en jeu la même combinatoire que (2.19-2.20) et que, avec les mêmes notations,

$$Z_n(s_1,\dots,s_n) \;=\; \big((s_1+\cdots+s_n)\,I_{d_x}-A\big)\,H_1(s_1)-R_n(s_1,\dots,s_n) \quad \text{où } R_1(s_1)=B \text{ et, pour tout } n\geq 2, \tag{2.24}$$

$$R_n(s_1,\dots,s_n) \;=\; \sum_{\substack{(p,q)\in[0,n]^2_{\mathbb{N}}\\ 2\leq p+q\leq n}} \;\sum_{\substack{m\in(\mathbb{N}^*)^p\\ m_1+\cdots+m_p=n-q}} \frac{D_{p,q}f(0,0)}{p!\,q!}\big(H_{m_1}(s_1+\ldots+s_{m_1}),\dots,H_{m_p}(s_{m_1+\ldots+m_{p-1}+1},\dots,s_n),\underbrace{1,\dots,1}_{q}\big), \tag{2.25}$$

et où R_n ne contient que des noyaux de transfert H_m d'ordre $m<n$. Puisque les noyaux solution H_n sont tels que $z=0$ pour tout u, ils doivent rendre nul le système de noyaux Z_n, i.e. pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $Z_n=0$. L'équation (2.24) conduit alors à la forme algébrique récurrente explicite suivante

$$H_n(s_1,\dots,s_n)=W(s_1+\cdots+s_n)\,R_n(s_1,\dots,s_n), \quad \text{avec } W(s)=\big(s\,I_{d_x}-A\big)^{-1}. \tag{2.26}$$

Pour de nombreuses applications, f est polynomiale et conduit à une combinatoire de R_n moins riche que dans ce cas général (2.25). L'utilisation du système annulateur prend alors un "intérêt supplémentaire" en pratique (cf. § 2.2.4-2.2.5). Mais, il est remarquable que, dans tous les cas : (i) H_1 est la fonction de transfert du système linéarisé ; (ii) les noyaux $H_{n\geq 2}$ s'écrivent sous la forme (2.26), c'est-à-dire, avec le point de vue du traitement du signal, que l'on filtre par $W(s)$ un signal construit par combinaison mutlilinéaire du signal d'entrée et des sorties de noyaux d'ordre inférieur. Cette structure correspond à celle de (2.21), exprimée sur les signaux : on l'exploite pour construire des versions réalisables du système, composées de[11] cascades de filtres et de combinaisons (instantanées) de signaux (cf. remarque 16(iii)).

Remarque 17 (Définition intrinsèque des systèmes linéaires et modules quotients [68])
*Dans l'approche comportementale développée par Willems [221, 222, 223] et le formalisme algébrique introduit par Fliess [68], un système linéaire est représenté de façon intrinsèque, sans imposer de forme Kalmanienne [100, 101] ni de rôle spécifique d'*entrée et d'état*. Pour un système* (Σ) : $\partial_t x = Ax+Bu$ *avec* $A\in\mathbb{R}^{d_x\times d_x}$ *et* $B\in\mathbb{R}^{d_x\times d_u}$*, on introduit : (i) le* $\mathbb{R}[\partial_t]$*-module à gauche* $\mathcal{F}=\big\{\sum_{i=0}^{I}A_i\partial_t^i\underline{x}+\sum_{j=0}^{J}B_j\partial_t^j\underline{u}\,|\,I\geq 0, J\geq 0, A_i\in\mathbb{R}^{d_x\times d_x}, B_j\in\mathbb{R}^{d_x\times d_u}\big\}$ *finiment engendré par les variables libres* $\underline{x}$ *et* $\underline{u}$ *et (ii) le sous* $\mathbb{R}[\partial_t]$*-module* $[z]=\big\{\sum_{i=0}^{I}C_i\partial_t^i z\,|\,I\geq 0, C_i\in\mathbb{R}^{d_x\times d_x}\big\}$ *engendré par la variable* $z=Z[\underline{x},\underline{u}]=\partial_t\underline{x}-A\underline{x}-B\underline{u}\in\mathcal{F}$*.* (Σ) *est le système pour lequel* $z=0$ *(et tous les éléments de* $[z]$ *sont nuls). Il peut être caractérisé (sans attribuer de rôle à* u *et* x*) par la structure que ses trajectoires donnent au module* $\mathcal{F}$*, i.e. par le module quotient* $\mathcal{F}/[z]$*. Bien que la structure algébrique des systèmes linéaires soit perdue ici*[12]*, le système annulateur* $(\mathcal{Z})$ *joue pour* $(\mathcal{S})$ *un rôle analogue à l'opérateur* Z *pour* (Σ) *: il construit une variable* z *liée à* u *et* x *que l'on souhaite annuler (dans le cadre linéaire, on dit qu'on veut la rendre de* torsion*).*

[10] L'opérateur ∂_t est associé aux noyaux de transfert $\Delta_1'(s_1)=s_1$, et $\Delta_{n\geq 2}'=0$. Comme en remarque 16(ii), on doit considérer cet opérateur temporel dans le cadre des distributions.

[11] En général, cette structure ne peut pas être réduite à celle de Hammerstein souvent utilisée en identification [62, 160, 182].

[12] Pour f polynomiale, il faudrait considérer une algèbre engendrée par les combinaisons multi-linéaires de $\partial_t^i x$ et $\partial_t^j u$.

Réalisation, simulation en temps discret et anti-repliement. En notant x_n la contribution d'ordre n de la série (identique à (2.20) en choisissant $\epsilon = 1$), les équations (2.20-2.21) et (2.25-2.26) conduisent à la réalisation décrite en figure 2.8 en se limitant aux $n_{max}=3$ premiers ordres.

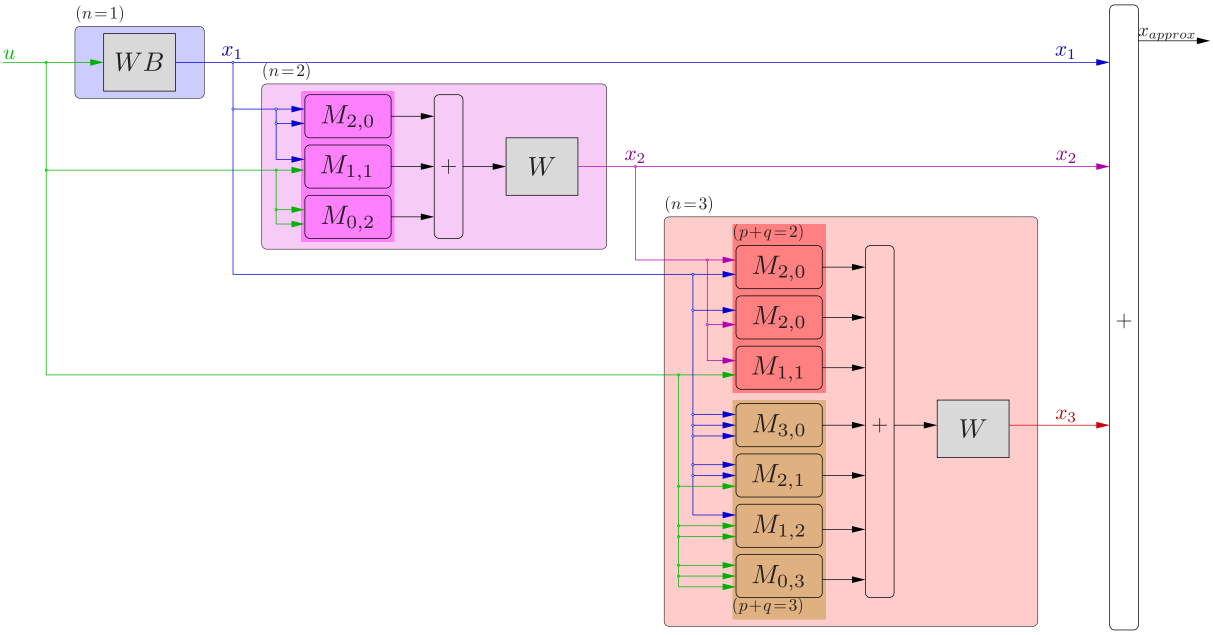


Fig. 2.8 – Réalisation des trois premiers ordres de la structure générale (2.21-2.20), (2.25-2.26) dans laquelle les blocs $M_{p,q}$ représentent les fonctions multi-linéaires $\frac{1}{p!\,q!}D_{p,q}f(0,0)$ nourries par les $p+q$ signaux, de haut en bas. Les blocs grisés (à bord non arrondis) représentent les filtrages associés aux matrices de transfert WB et W.

Ainsi, construire des simulations revient à construire des versions discrètes des filtres de matrice de transfert W (B est un vecteur constant) en utilisant les schémas numériques classiques. Il apparaît également que ce système ne contient pas de boucle et que sa stabilité est exclusivement conditionnée par celle du système linéaire associé à W.

Remarque 18 (choix de l'ordre de troncature) *En pratique, l'ordre auquel on tronque la série est souvent choisi faible (<10). On limite l'application à des entrées d'amplitude qui conduisent à des résultats satisfaisants par comparaison aux résultats issus de solveurs standard adaptés. Avec B. Laroche, nous avons fourni dans [A14], des bornes théoriques* calculables *de l'erreur de troncature, sur un domaine de convergence également* calculable, *pour la classe des systèmes affines en l'entrée et analytiques en l'état, i.e. tels que $D_{p,q}f(0,0) = 0$, si $q \geq 2$.*

Pour les applications audio, cette structure permet de traiter simplement le rejet de *repliement spectral* dû aux non-linéarités. En effet, si $a(t)$ et $b(t)$ sont des signaux à bande limitée sur $[-f_a, f_a]$ et $[-f_b, f_b]$, respectivement, alors le signal $c(t) = a(t)\,b(t)$ est aussi à bande limitée avec $f_c = f_a + f_b$. Par conséquent, un rejet efficace est obtenu en encapsulant le traitement de l'ordre n par un sur-échantillonneur de facteur $S_e = n$ en amont et le sous-échantillonneur associé en aval (ou un seul traitement global de facteur $S_e = n_{max}$).

Notons que dans les applications où W opère un filtrage passe-bas assez sélectif de fréquence de coupure inférieure à la fréquence de Shannon-Nyquist, l'opération de sous-échantillonnage peut se réduire à une simple décimation : c'est le cas pour l'application sur le circuit électronique audio présenté en § 2.2.6.

2.2.4 Application 1 : sons cuivrés

On reprend ici le problème de propagation non linéaire et amortie dans un tube droit (typiquement, de trombone) abordé en § 1.3. Dans [146], Ludovic Menguy et Joël Gilbert ont montré avec une analyse dimensionnelle que, dans cette configuration, la propagation peut être représentée avec réalisme par la superposition de deux ondes progressives quasi-découplées. Chacune est gouvernée par une équation de Burgers modifiée [145, (3.15)], qui retient les pertes visco-thermiques aux parois et la non-linéarité de propagation comme phénomènes dominants.

Modèle. Pour l'onde de pression *aller* dans un tube initialement au repos ($p = 0$ pour tout $x \geq 0$ et $t < 0$) et forcé en $x=0$ par un signal u, une version adimensionnelle du modèle est donnée par (cf. e.g. [C18, tab. I-II et (4-6)])

$$ⓐ : \ \forall x > 0, \ \forall t > 0, \quad \partial_x p + \alpha\, \partial_t^{1/2} p = \frac{\beta}{2}\, \partial_t\, p^2 \quad \text{et} \quad ⓑ : \ \forall t > 0, \quad p(x{=}0, t) = u(t). \tag{2.27}$$

où p est la pression, x est la variable d'espace, $t = \underline{t} - x/c$ est le temps absolu ($\underline{t}$) retardé du temps de transport (x/c), et $\alpha\partial_t^{1/2}$ est l'opérateur de dérivation fractionnaire (exemple 2 du tableau 2.1) représentant le mécanisme d'absorption [134, tab. 4.3-4].

Système annulateur et noyaux solution. Afin de construire une version cuivrée du signal $u(t)$, on cherche à déterminer les noyaux de Volterra du système (stationnaire) d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t) = p(x, t)$, après une propagation de l'onde sur une distance $x \geq 0$. Les noyaux *convolutifs* et *de transfert* de ce système sont paramétrés par x, et notés respectivement $h_n^{(x)}$ et $H_n^{(x)}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. Le système annulateur correspondant à (2.27) conduit au schéma fonctionnel représenté en figure 2.9.

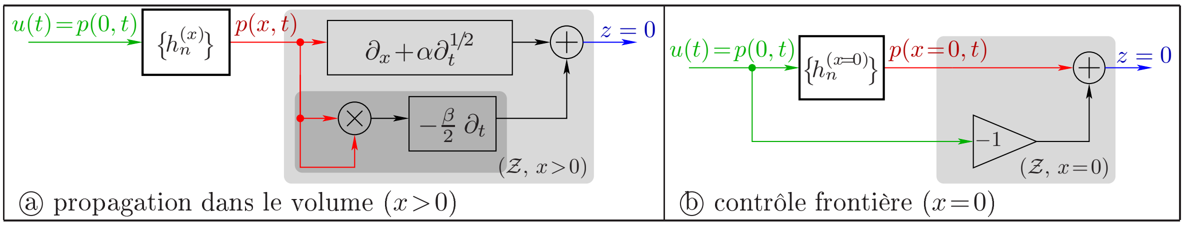


FIG. 2.9 – Diagramme fonctionnel : cascade des noyaux solution et du système annulateur associé à (2.27) pour : ⓐ l'équation dans le volume, ⓑ le contrôle à la frontière.

En reprenant le principe du système annulateur et en exploitant les lois d'interconnexion dans le domaine de Laplace, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(s_1, \ldots, s_n) \in (\mathbb{C}_0^+)^n$,

$$ⓐ : \ \forall x > 0, \ \partial_x H_n^{(x)}(s_1, \ldots, s_n) + \alpha\sqrt{s_1 + \ldots + s_n}\, H_n^{(x)}(s_1, \ldots, s_n) - R_n^{(x)}(s_1, \ldots, s_n) = 0,$$

$$\text{avec } R_n^{(x)}(s_1, \ldots, s_n) = \frac{\beta}{2}\,(s_1 + \ldots + s_n) \sum_{m=1}^{n-1} H_m^{(x)}(s_1, \ldots, s_m)\, H_{n-m}^{(x)}(s_{m+1}, \ldots, s_n), \tag{2.28}$$

$$ⓑ : \ H_n^{(x=0)} - \delta_{1,n} = 0, \quad \text{où} \quad \delta_{1,n} = 1 \text{ si } n{=}1 \text{ et } \delta_{1,n} = 0 \text{ sinon (symbole de Kronecker).} \tag{2.29}$$

L'équation (2.28) correspond à la somme (proposition 2(i)) de trois termes qui représentent dans l'ordre : (1) la cascade de $H_n^{(x)}$ avec l'opérateur de dérivation ∂_x (cf. la branche haute du système annulateur et la proposition 3) ; (2) la cascade avec l'opérateur linéaire $\alpha\partial_t^{1/2}$ de fonction de transfert[13] $\alpha\sqrt{s}$ (branche haute, prop. 2(iii.a)) ; (3) l'interconnexion produit (prop. 2(iii.b)) puis la cascade avec l'opérateur linéaire $\frac{\beta}{2}\partial_t$ de fonction de transfert $\frac{\beta}{2}s$ (branche basse). L'équation (2.29) indique que les noyaux en $x = 0$ reproduisent le système identité.

[13]Comme en § 2.1, $s \in \mathbb{C}_0^+ \mapsto \sqrt{s}$ est la détermination principale de la racine carrée.

A la place des équations de type algébrique (2.24-2.25), on obtient ici une séquence de problèmes linéaires en $H_n^{(x)}$, différentiels par rapport à x (pour ⓐ) avec condition à la frontière (pour ⓑ). La résolution conduit à, pour tout $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ et $(s_1, \ldots, s_n) \in (\mathbb{C}_0^+)^n$,

$$\begin{aligned} H_1^{(x)}(s_1) &= G(x, s_1), \quad \text{et si } n \geq 2, \\ H_n^{(x)}(s_1, \ldots, s_n) &= \int_0^x G(x-\xi, s_1 + \cdots + s_n)\, R_n^{(\xi)}(s_1, \ldots, s_n)\, \mathrm{d}\xi, \end{aligned} \tag{2.30}$$

avec la fonction $G : (x, s) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}_0^+ \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha x \sqrt{s}}$. Ceci nous a permis, avec Martin Hasler, de calculer des expressions analytiques exactes pour tous les ordres (cf. [A4]). Pour $n=2$, on trouve

$$H_2^{(x)}(s_1, s_2) = \frac{\beta}{2\alpha}(s_1+s_2)\, \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x \sqrt{s_1+s_2}} - \mathrm{e}^{-\alpha x (\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})}}{-\sqrt{s_1+s_2} + \sqrt{s_1}+\sqrt{s_2}}. \tag{2.31}$$

Réalisation de système et simulation pour les deux premiers noyaux. Pour approcher ces noyaux, nous avons développés des représentations diffusives multi-variables (stage de Vanessa Smet, cf. p. 103). Cependant, les réalisations et approximations qui en découlent restent trop lourdes pour obtenir une simulation faible coût. Une alternative efficace est obtenue (cf. [C18, (26)]) en multipliant le numérateur et le dénominateur de $H_2^{(x)}$ par $\sqrt{s_1+s_2} + \sqrt{s_1}+\sqrt{s_2}$ qui conduit à un dénominateur à variables séparées ($2\sqrt{s_1}\sqrt{s_2}$) et à 6 termes de la forme $A(s_1)B(s_2)C(s_1+s_2)$ dans chacun desquels une seule des deux entités (A, B) et C dépend de x. En regroupant les triplets qui représentent un même sous-système (ici, qui diffèrent uniquement par une commutation de A et B), quatre termes sont obtenus. Ils correspondent aux branches pointant sur l'opérateur ⊕ de la réalisation donnée en figure 2.10ⓐ.

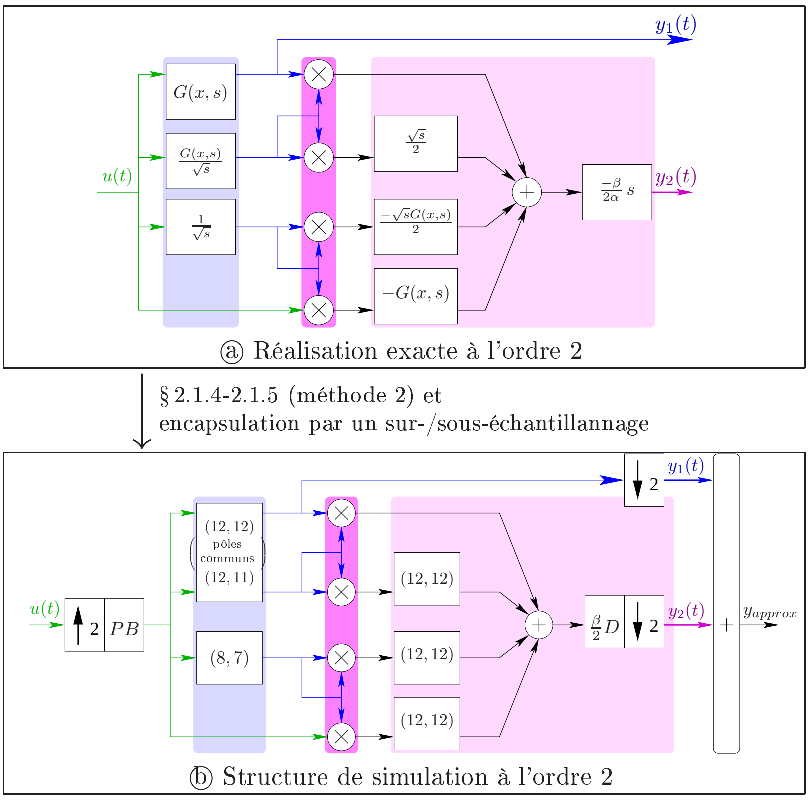


FIG. 2.10 – Réalisation de $H_n^{(x)}$ de sortie y_n pour $n=1, 2$: ⓐ structure avec les fonctions de transfert exactes ; ⓑ structure de simulation numérique de dimension finie incluant un filtre passe-bas PB dans le sur-échantillonneur, un filtre de dérivation avec gain $\frac{\beta}{2}D$ coupé à la fréquence de Shannon-Nyquist en sortie et des filtres $ARMA(p, q)$ où les valeurs de (p, q) sont indiquées dans chaque bloc.

Cette structure implique des fonctions de transfert irrationnelles de 5 types : $\sqrt{s}$ (dérivation d'ordre 1/2), $1/\sqrt{s}$ (intégration d'ordre 1/2), $G(x,s)/\sqrt{s}$, $G(x,s)$ et $\sqrt{s}\,G(x,s)$. Après la procédure d'approximation et d'optimisation décrite (méthode 2 en § 2.1 et voir les diagrammes de Bode de [C18, fig. 8] pour la qualité des résultats), nous avons obtenu une simulation des deux premiers noyaux (figure 2.10ⓑ). La complexité algorithmique est d'environ 41 MFLOPS pour une fréquence d'échantillonnage entrée-sortie de 44.1 kHz et un sur-échantillonage interne de facteur 2.

Résultats. La figure 2.11 présente les résultats obtenus pour : ⓐ une forme d'onde $u_a(t)$ de type sinusoïdale avec une attaque courte (20 ms), un relâchement plus long (0.65s) et une fréquence lentement variable (vibrato autour de 440 Hz±5%) ; ⓑ trois notes successives isolées dans un solo de trompette de Chet Baker (le niveau moyen est réglé artificiellement à 150 dB$_{SPL}$). Le cas ⓐ permet de bien visualiser la création par le noyau d'ordre 2 d'un second *partiel* en relation harmonique avec le signal d'entrée, et sa désactivation progressive dans la phase finale du relâchement.

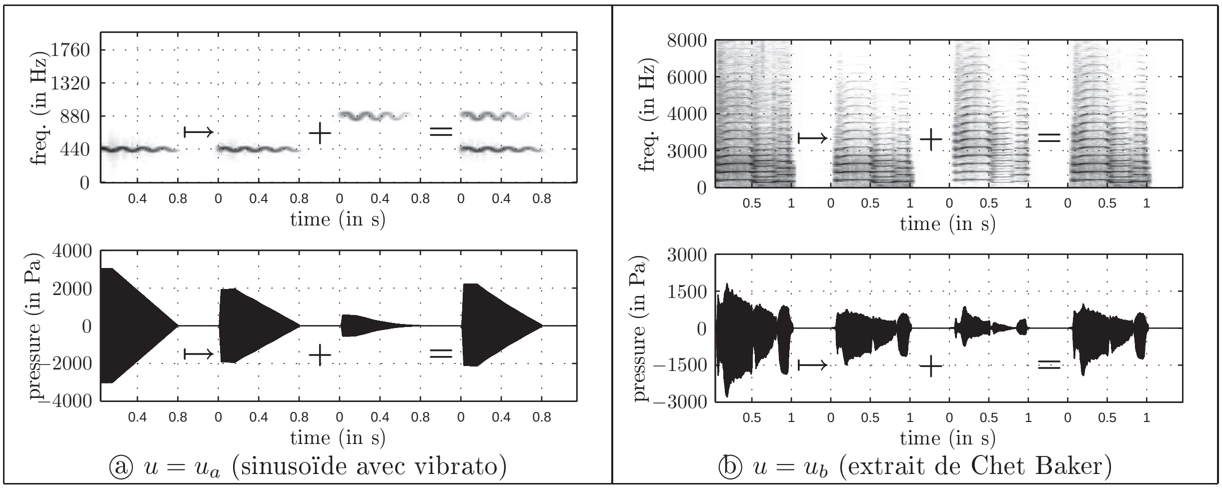


FIG. 2.11 – Spectrogrammes et signaux de $u \mapsto y_1 + y_2 = y_{approx}$ calculés par la structure de la figure 2.10ⓑ pour : ⓐ $u = u_a$ (sinusoïde avec vibrato) et ⓑ $u = u_b$ (extrait de Chet Baker).

Un intérêt de ce procédé est de fournir le signal de sortie sans calculer l'état acoustique à l'intérieur du tube, et ceci, quelle que soit la longueur du tube considérée. Des objets temps réel (Max/MSP et plug-in VST) ont été développés avec R. Muller et T. Carpentier (développeurs à l'Ircam). Ces objets ont depuis été utilisés dans des créations musicales[14] : à gain fixé sur le signal capté par le microphone, le "cuivrage" est activé de façon croissante avec l'amplitude du signal émis par l'instrument comme pour e.g. un trombone. Il suit donc naturellement la nuance et le phrasé du musicien en donnant un nouvel attribut (de type distorsion "cuivrée") à la sonorité de son instrument.

Enfin, mentionnons que des modèles de propagation de type équation des ondes ont été examinés et résolus en séries de Volterra : (i) l'équation de Westervelt avec amortissement[15] dans [C10] ; (ii) une équation des ondes non linéaire dans les tubes à section variable pendant le stage de Marc Rébillat (cf. p. 103). Dans la section suivante, nous traitons d'autres problèmes non linéaires pour le cas de cordes et de poutres.

[14] Une exploitation originale a par exemple consisté à faire cuivrer artificiellement en temps réel des sons de saxophones (pièce *Brisures Mouvements* de la compositrice *Hyangsook Song*).

[15] Dans [C10], nous soulignons le fait que le terme d'amortissement en $\partial_t^3 p$ communément utilisé dans cette équation (établie e.g. dans [82]) est source d'instabilité. La version corrigée proposée est en $\partial_t \Delta$.

2.2.5 Application 2 : cordes, poutre de Reissner et séries de "Green-Volterra" (thèse de David Roze)

Cette partie expose les résultats qui ont été obtenus pendant le stage de Master 2R ATIAM (que j'ai encadré) puis la thèse de David Roze (dirigée par A. Micaelli-CEA et co-encadrée par J. Bensoam-Ircam et X. Merlhiot-CEA), ainsi qu'un résultat plus récent toujours avec sa collaboration.

Corde de Kirchhoff non linéaire amortie excitée par une force à distribution spatiale statique

Modèle. On considère les ondes de déplacement transverse $u(x,t)$ d'une corde fixée aux extrémités, initialement au repos, gouvernées par le modèle non linéaire (M1) sans dimension donné par (cf. [108, 21] et cf. [A8, tableau 1] pour les changements de variables)

$$ⓐ : \forall x \in]0,1[, \ \forall t>0, \quad \partial_t^2 u + \alpha \partial_t u - \beta \partial_t \partial_x^2 u - \left(1 + \varepsilon \Big[\int_0^1 \left(\partial_x u(x,t)\right)^2 \mathrm{d}x \Big] \right) \partial_x^2 u = \Phi \, f_{tot}, \tag{2.32}$$

$$ⓑ : \forall x \in \{0;1\}, \quad u(x,t{=}0) = 0. \tag{2.33}$$

où la force d'excitation $t \mapsto f_{tot}(t)$ est distribuée spatialement par une fonction statique $x \mapsto \Phi(x)$ de mesure 1, et où $\varepsilon > 0$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ quantifient respectivement les effets non linéaires, l'amortissement fluide et un amortissement "structurel". Dans ce modèle, la non-linéarité vient de l'augmentation de la tension (considérée uniforme) pour les grands déplacements.

Système annulateur et noyaux solution. En reprenant le principe du système annulateur, développé en figure 2.12, et en exploitant les lois d'interconnexion dans le domaine de Laplace, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $(s_1,\ldots,s_n) \in (\mathbb{C}_0^+)^n$,

$$ⓐ : \forall x \in]0,1[, \ \big[(s_1+\ldots+s_n)^2 + \alpha(s_1+\ldots+s_n)\big] H_n^{(x)}(s_1,\ldots,s_n) - \big[1+\beta(s_1+\ldots+s_n)\big]\partial_x^2 H_n^{(x)}(s_1,\ldots,s_n) - R_n^{(x)} = 0,$$
$$\text{avec } R_1^{(x)}(s_1) = \Phi(x), \text{ et si } n \geq 2, \ R_n^{(x)}(s_1,\ldots,s_n) = \varepsilon \sum_{\substack{p,q,r\geq 1 \\ p+q+r=n}} \int_0^1 \big[\partial_x H_p^{(x)}(s_1,\ldots,s_p)\, \partial_x H_q^{(x)}(s_{p+1,\ldots,s_{p+q}})\big] \,\mathrm{d}x \; \partial_x^2 H_r^{(x)}(s_{p+q+1},\ldots,s_n). \tag{2.34}$$

$$ⓑ : \forall x \in \{0,1\}, \ H_n^{(x)}(s_1,\ldots,s_n) = 0. \tag{2.35}$$

Les deux premiers termes de l'équation correspondent à la cascade des noyaux et de l'opérateur linéaire (figure 2.12ⓐ, branche du haut), $R_1^{(x)}$ correspond à la contribution de l'entrée (branche du bas) et $R_{n\geq 2}^{(x)}$ à la partie non linéaire (bloc central grisé). L'équation (2.35) correspond aux conditions de Dirichlet.

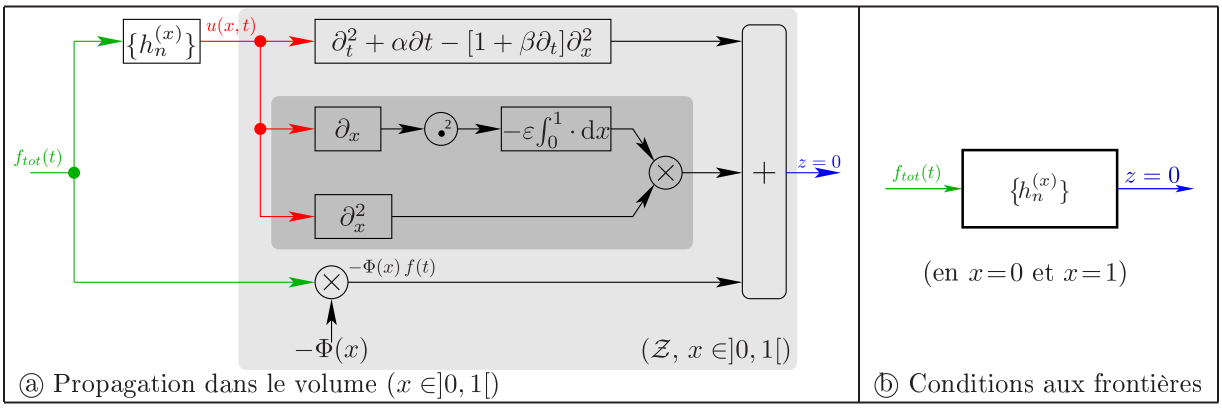


FIG. 2.12 – Diagramme fonctionnel : cascade des noyaux solution et du système annulateur associé à (2.32-2.33) pour : ⓐ l'équation dans le volume, ⓑ les conditions aux frontières.

On obtient ainsi une séquence de problèmes aux limites linéaires en les $H_n^{(x)}$. Leur résolution conduit à, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0,1]$ et $(s_1,\ldots,s_n) \in (\mathbb{C}_0^+)^n$,

$$H_n^{(x)}(s_1,\ldots,s_n) = \int_0^1 G(x,\xi,s_1+\ldots+s_n)\, R_n^{(\xi)}(s_1,\ldots,s_n)\,\mathrm{d}\xi, \tag{2.36}$$

avec $\forall s \in \mathbb{C}_0^+$, $\quad G(x,\xi,s) = \dfrac{\cosh\big((1+x+\xi)\,\Gamma(s)\big) - \cosh\big((1-|x-\xi|)\,\Gamma(s)\big)}{2\,(1+\beta s)\,\Gamma(s)\,\sinh\Gamma(s)}$, $\quad$ et $\quad \Gamma(s) = \sqrt{\dfrac{s^2+\alpha s}{1+\beta s}}$.

où la racine carrée est définie par (2.3), comme précédemment.

Remarque 19 *Pour $n=1$, la solution (2.36) correspond à la solution du problème linéarisé fournie par la fonction de Green. Une analyse de la fonction $s \mapsto G(x,\xi,s)$ montre qu'elle est analytique sur $\mathbb{C}_0^+$. De plus, tous les noyaux d'ordre pairs sont nuls ($R_{2p}^{(x)} = H_{2p}^{(x)} = 0$).*

Décomposition modale. Cette solution peut aussi être décomposée sur les fonctions propres $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ avec $e_k(x) = \sqrt{2}\sin(k\pi x)$ qui définissent une base orthonormée (hilbertienne) de $L^2(0,1)$: on introduit alors la décomposition modale $H_n^{(x)} = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} H_n^{[k]}\, e_k(x)$ où l'on trouve que $H_n^{[k]} = \langle H_n^{(\cdot)}, e_k(\cdot)\rangle_{L^2(0,1)}$ est donné par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $(s_1,\ldots,s_n) \in (\mathbb{C}_0^+)^n$,

$$H_n^{[k]}(s_1,\ldots,s_n) = G_k(s_1+\ldots+s_n)\, R_n^{[k]}(s_1,\ldots,s_n) \quad \text{où } \forall s \in \mathbb{C}_0^+,\ G_k(s) = \big[s^2 + (\alpha+\beta k^2\pi^2)s + k^2\pi^2\big]^{-1},$$

et $R_n^{[k]} = \langle R_n^{(\cdot)}, e_k(\cdot)\rangle_{L^2(0,1)}$ de sorte que $R_1^{[k]}(s_1) = \langle \Phi, e_k\rangle_{L^2(0,1)} \underset{\text{déf.}}{=} \phi_k$ et, si $n \geq 2$,

$$R_n^{[k]}(s_1,\ldots,s_n) = \varepsilon k^2\pi^4 \sum_{\substack{p,q,r\geq 1\\ p+q+r=n}} \sum_{\ell\in\mathbb{N}^*} \big[\ell^2 H_p^{[\ell]}(s_1,\ldots,s_p)\, H_q^{[\ell]}(s_{p+1,\ldots,s_{p+q}})\big]\, H_r^{[k]}(s_{p+q+1},\ldots,s_n). \tag{2.37}$$

Une forme complètement développée de cette décomposition a également été proposée. Elle permet de mémoriser, de façon indépendante, tous les héritages provenant des dynamiques modales linéaires. Sa combinatoire correspond à celle d'une famille d'arbres ternaires qui est structurée par l'ordre des modes [A8, Déf. 1 et Thm. 1].

Réalisation, résultats et limitations. Une réalisation obtenue à partir de (2.37) pour les noyaux d'ordre $1 \leq n \leq N = 3$ est donnée en figure 2.13.

Pour la simulation, des versions numériques des filtres $G_k(s)$, d'ordre 2, ont été implantées et le nombre de modes a été tronqué de sorte que les fréquences propres soient inférieures à la fréquence $f_{ech}/(3N)$. Les résultats données dans [A8, § 7, fig. 23-28] correspondent à $f_{ech} = 44100$ Hz, $N=3$ (puis 5), $K=20$, une distribution spatiale en arche de cosinus sur 4% de la corde et une excitation (académique) en forme de *dent de scie* sur 10 ms avec des valeurs réalistes (cf. [A8, tab. 1] pour une corde de piano, de tension réglée pour avoir un la 0 (A1) de fréquence $f = 55$ Hz.

Pour une force maximale de 5 N, la contribution non linéaire sur le déplacement est négligeable : 0.9 mm pour l'amplitude de crête de la composante linéaire contre 0.012 mm pour la composante d'ordre 3. Pour 20 N, elle commence à être perceptible (3.7 mm contre 0.5 mm). Pour 40 N, les crêtes des contributions deviennent du même ordre de grandeur (7.4 mm contre 3.8 mm). Pour 160 N, l'approximation n'est plus valide : la contribution non linéaire devient très supérieure et irréaliste (avec 29.5 mm contre 245.7 mm).

Ainsi, l'intérêt de cette application est d'apporter les premières variations de timbre dues à la non-linéarité (impaire) générée par l'accroissement de la tension de la corde avec son déplacement. Les résultats obtenus conduisent en effet à un enrichissement spectral qui améliore significativement le réalisme comparé à l'approximation linéaire. Néanmoins, outre l'effet de troncature de la série, ceci reste limité a une plage d'amplitudes bornées. Quelques éléments quantitatifs sur le domaine de convergence sont développés pour un modèle proche en page 62.

En pratique, le développement en série est efficace tant que, pour la dynamique globale, le terme non linéaire reste inférieur ou comparable à celui de l'amortissement pour la raison suivante.

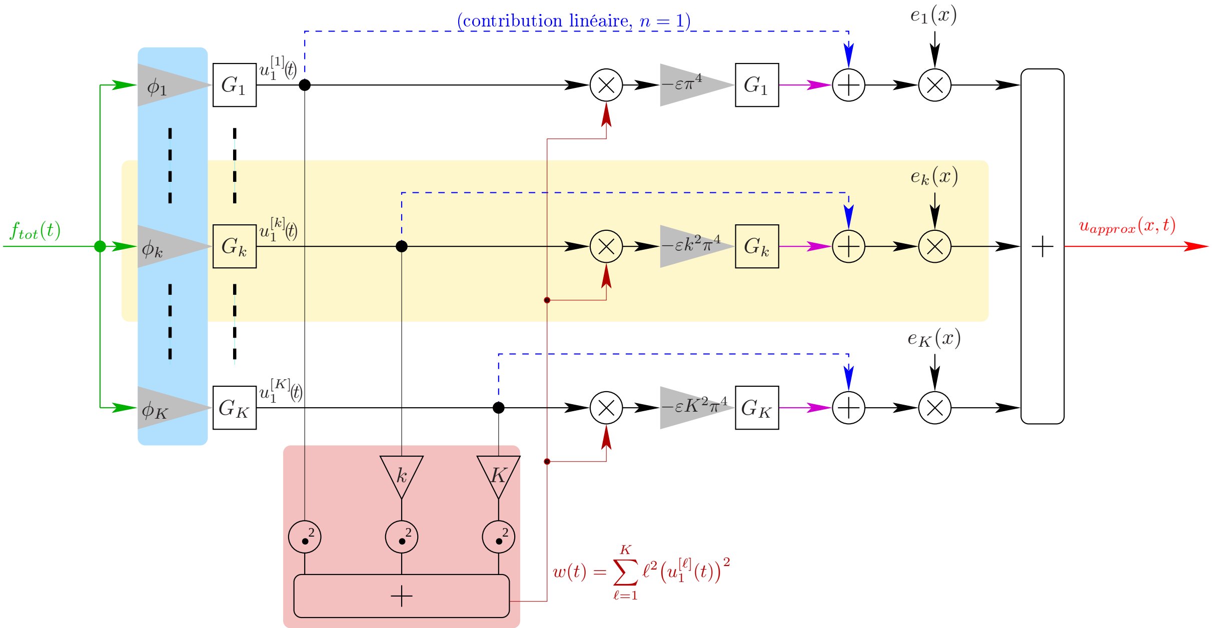


FIG. 2.13 – Schéma fonctionnel d'une réalisation pour $n \geq N = 3$ avec une précision en $o(\varepsilon)$ pour une distribution spatiale Φ décomposée sur K modes. Les flèches en pointillés isolent les contributions linéaires. La partie centrale isole la dynamique temporelle du mode k. La partie du bas isole la dynamique du terme intégral (les gains 1, k et K avant la mise au carré des signaux sont dus à ∂_x).

Remarque 20 (Modulation de fréquence, résonances internes et modes séculaires) *Pour de fortes amplitudes, un effet de la non-linéarité cubique dans le modèle est d'opérer une modulation de fréquence. Les perturbations régulières sont mal adaptées à la reconstruction d'un tel phénomène. Ce problème bien connu est classiquement illustré sur l'exemple de l'oscillateur de Duffing [50] : à cause des résonances internes apportées par la non-linéarité cubique, les contributions en perturbations régulières héritent d'un comportement à croissance polynomiale (exponentiellement stabilisé à l'infini pour le cas amorti et non borné pour le cas non amorti) incompatible avec la passivité du système. Ces termes sont qualifiés de* séculaires. *Des méthodes ont été introduites pour traiter le cas des systèmes en régime libre : la méthode de Lindstedt-Poincaré [169, 120] dans le cas non amorti et la méthode des échelles multiples [154, § 2.3]. Pour les systèmes de dimension infinie (toujours en régime libre ou forcé par des signaux sinusoïdaux très simples), une famille de méthodes exploite* les variétés invariantes de l'espace des phases du système, tangentes à l'origine aux sous-espaces propres. *Ces objets invariants, nommés* modes non linéaires *[189, 190, 191], permettent de traiter des systèmes conservatifs ou amortis ainsi que le problème de leur réduction d'ordre et l'étude de leur comportement. Cyril Touzé et Olivier Thomas ont proposé une méthode de calcul de ces variétés qu'ils ont appliquée notamment à des modèles de type* von Kármán *de plaques et de coques, et à l'étude de gongs, cymbales, etc (cf. [206] et leurs travaux suivants). Cette méthode est fondée sur la mise sous forme normale du système dynamique (travaux de Poincaré [168] pour le cas sans résonances internes, généralisés par Dulac [53] pour le cas de résonances internes, voir aussi [4, 97]). Ce type de technique a également été utilisé pour effectuer une réduction de modèle de clarinette dans [156]. Dans tous les cas, ces méthodes sont limitées à des formes d'excitation très réduites. Un des objectifs de mon programme de recherche consistera à rechercher à adapter ce type de représentations et méthodes de perturbations similaires aux cas de systèmes entrée/sortie.*

Autres cas traités

Dans [A8], deux autres modèles ont été traités : (M2) le modèle (M1) avec des conditions aux frontières dynamiques où $u(x=0,t)$ et $u(x=1,t)$ sont considérées comme deux entrées supplémentaires ; (M3) un modèle de Kirchhoff à non-linéarité locale donné par $\partial_t^2 u+\alpha\partial_t u-\beta\partial_t\partial_x^2 - \partial_x\Big[\Big(\frac{(1-\frac{2\varepsilon}{\eta})}{\sqrt{1+\eta(\partial_x u)^2}}+\frac{2\varepsilon}{\eta}\Big)\partial_x u\Big]\partial_x u = \Phi f_{tot}$. Le cas (M2) a été traité en introduisant des séries de Volterra à entrées multiples (cf. [A8, § 5]), qui conduit à la réalisation fournie en [A8, fig. 17-18]. Ce cas est intéressant pour introduire, par exemple, le couplage avec un chevalet et une table d'harmonie. Le cas (M3) est mono-entrée. Il conduit à une structure de réalisation analogue à celle de la figure 2.13, mais dans laquelle les non-linéarités statiques entre les deux bancs de filtres ont une combinatoire un peu plus complexe. La structure reste néanmoins creuse (cf. [A8, § 6, Thm. 4, fig. 20, 22 et (92)] pour une description détaillée).

Dans [179] (voir aussi [C28]), un modèle de poutre de Reissner a été étudié par David Roze, en collaboration avec Joël Bensoam (chercheur, Ircam), Xavier Merlhiot (chercheur, CEA-LIST), et moi-même (pour les représentations en série de Volterra et amortissements). Dans ce modèle, la poutre est considérée comme un continuum de disques indéformables empilés. Les déformations sont représentées par leurs positions respectives sur le groupe $SE(3)$ (3 translations pour placer le centre des disques et 3 rotations pour fixer leur orientation). Le modèle dynamique conservatif a été établi à partir du principe variationnel et l'écriture des énergies (cinétique et potentielle de déformation) sur l'algèbre de Lie associée ($se(3)$). Dans sa thèse, David Roze a ajouté *a posteriori* des modèles d'amortissement proportionnel et structurel compatibles, qui rendent le système dissipatif. La trajectoire est représentée par un vecteur qui fournit les coordonnées de déformation sur une carte adaptée (carte exponentielle locale entre l'algèbre et le groupe autour d'un point d'équilibre, cf. [C28, § 3.4]). Le système dynamique reliant la force d'excitation à ce vecteur de coordonnées a été représenté en série de Volterra : les noyaux ont été calculés encore en s'appuyant sur le principe de système annulateur et, comme pour la corde, par projection modale. Ce travail a permis d'introduire les couplages entre les vibrations transverses et de torsion, phénomènes qui peuvent s'exprimer en particulier pour les cordes frottées et spécialement pour la contrebasse.

Formalisme en séries de "Green-Volterra" et application pour une force $f(x,t)$

A la fin de la thèse de D. Roze, une généralisation des séries de Volterra au cas d'entrées dépendant de l'espace et du temps a été abordée. Depuis, nous avons introduit avec lui un formalisme en série de "Green-Volterra". Il combine celui en "fonction de Green", couramment utilisé en physique pour résoudre des problèmes linéaires non homogènes, et celui des "séries de Volterra" adaptés aux problèmes faiblement non linéaires (originellement différentiels). Nous le présentons et l'appliquons au cas du modèle (M1) de corde pour une force d'excitation distribuée $f : (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \mapsto f(x,t)$ avec $\Omega =]0,1[$. Ce travail a été présenté dans [C39] et un article est soumis en revue. En partie § 2.2.7, nous présentons des résultats de convergence sur ce type de problèmes, que nous avons traité avec B. Laroche par approche perturbative avec des semi-groupes.

La généralisation proposée ici[16] repose sur l'introduction de noyaux spatio-temporels définis ci-dessous.

Définition 3 (Série de Green-Volterra) *Un système d'entrée $f : (x,t) \in \Omega\times\mathbb{R} \mapsto f(x,t)$ et de sortie $u : (x,t) \in \Omega\times\mathbb{R} \mapsto u(x,t)$ est décrit par une série de Green-Volterra de noyaux $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, si la sortie u est donnée par*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{(\Omega\times\mathbb{R})^n} k_n(x,t,\ \xi_1,\tau_1,\dots,\xi_n,\tau_n)\quad f(\xi_1,\tau_1)\ \dots\ f(\xi_n,\tau_n)\quad \mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\tau_1\ \dots\ \mathrm{d}\xi_n\mathrm{d}\tau_n. \quad (2.38)$$

On montre que les résultats présentés en § 2.2.2 et § 2.2.3 se généralisent. En particulier, pour les problèmes stationnaires, une version convolutive des noyaux en les variables temporelles peut à nouveau être définie $k_n(x,t,\ \xi_1,\tau_1,\dots,\xi_n,\tau_n) = k_n(x,0,\ \xi_1,\tau_1-t,\dots,\xi_n,\tau_n-t) \stackrel{\text{déf.}}{=} g_n(x,\ \xi_1,\tau_1-t,\ \dots,\ \xi_n,\tau_n-t)$ à partir desquels des noyaux de transfert G_n peuvent être définis dans le domaine de Laplace. Enfin, les lois d'interconnexion et principe de système annulateur se généralisent également.

[16] Au moment de la rédaction de ce manuscrit, nous avons nouvellement pris connaissance de l'article [119] de 2009 dans lequel cette idée est déjà proposée et exploitée pour une application de processus industriels.

Pour le cas de la corde, on obtient les noyaux de transfert solution suivants dans le domaine de Laplace, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(x, \xi_1, \ldots, \xi_n) \in \Omega^{1+n}$ et $(s_1, \ldots, s_n) \in (\mathbb{C}_0^+)^n$,

$$G_n(x, \xi_1, s_1, \ldots, \xi_n, s_n) = \int_\Omega G(x, \zeta, s_1 + \cdots + s_n)\, R_n(\zeta, \xi_1, s_1, \ldots, \xi_n, s_n)\, \mathrm{d}\zeta \text{ où } G \text{ est définie en (2.36),}$$

$$\text{où } R_1(x, \xi_1, s_1) = \delta(x - \xi_1), \text{ et si } n \geq 2, \quad R_n(x, \xi_1, s_1, \ldots, \xi_n, s_n) = \varepsilon \sum_{\substack{p,q,r \geq 1 \\ p+q+r=n}} \Big(\int_\Omega \partial_\zeta G_p(\zeta,\ \xi_1, s_1,\ \ldots,\ \xi_p, s_p)$$

$$\times\, \partial_\zeta G_q(\zeta,\ \xi_{p+1}, s_{p+1},\ \ldots,\ \xi_{p+q}, s_{p+q})\, \mathrm{d}\zeta \Big)\ \partial_x^2 G_r(x,\ \xi_{p+q+1}, s_{p+q+1},\ \ldots,\ \xi_n, s_n). \tag{2.39}$$

A partir de cette équation, on trouve les points remarquables suivants :

(i) Pour $n = 1$, on retrouve exactement le formalisme standard en *fonction de Green*, appliqué au problème linéarisé (ce résultat est général) ;

(ii) Pour $n \geq 2$, la décomposition modale des noyaux de Green-Volterra de la corde conduit exactement à la même récurrence qu'en (2.37).

Ainsi, le résultat conduit à la solution simple et intuitive suivante : on retrouve la structure initiale de la figure 2.13, dans laquelle $f_{tot}(t)$ est remplacée par $f(x, t)$ et le premier étage de gains ϕ_k $(1 \leq k \leq K)$ est remplacé par un étage de projection modale $\langle \cdot, e_k \rangle_{L^2(0,1)}$.

Grâce à la forme modale de la réalisation obtenue, ce résultat pourra être intégré dans le logiciel Modalys *[26] de l'Ircam.*

2.2.6 Application 3 : filtre de synthétiseur Moog et extension de validité pour les systèmes à saturation par bouclage localement linéarisant

Le circuit analogique du filtre de synthétiseur Moog (*Moog Ladder filter*, cf. [151]) est un filtre passe-bas résonant à 4 étages qui est apprécié en musique électronique en raison de son contrôle intuitif et de la signature sonore apportée par les saturations de ses transistors qui opère une modification de timbre identifiable par l'auditeur. Il est aussi parfois utilisé dans un mode critique où il devient auto-oscillant. Pour ces raisons, l'étude de ce circuit a donné lieu à plusieurs travaux [199, 92, 200, 196, 208] dans la communauté des *effets audio-numériques* [229, 230] (voir [70, 227] pour le filtre similaire à diodes du synthétiseur EMS VCS3). Une version adimensionnelle de ce filtre (voir [A13, § 2] pour le schéma du circuit et les valeurs des composants) est décrite par, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\partial_t x = f(x, u), \quad \text{avec} \quad f(x, u) = \omega_c \begin{bmatrix} -\tanh(x_1) + \tanh(u - 4rx_4) \\ -\tanh(x_2) + \tanh(x_1) \\ -\tanh(x_3) + \tanh(x_2) \\ -\tanh(x_4) + \tanh(x_3) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad x(0) = 0, \tag{2.40}$$

où $\omega_c > 0$ est la pulsation de coupure et le gain de boucle $r \in [0, 1]$ règle la qualité de la résonance.

Des objets temps réel (Max/MSP et plug-in VST) ont été développés (avec R. Muller et T. Carpentier-Ircam) à partir de la démarche proposée en § 2.2.3 (système annulateur, calcul des noyaux, réalisation et simulation sans repliement spectral). Pour des développements d'ordre 3 ou 5 (les noyaux d'ordre pair sont nuls), les résultats sonores sont satisfaisants si les signaux sont d'amplitude au plus 1.2. Mais augmenter l'ordre de troncature n'est pas intéressant puisque même la convergence des fonctions de saturation tanh est perdue au-delà de $\pi/2$. Le développement standard en série de Volterra ne permet donc pas de couvrir toutes les situations utilisées en pratique, spécialement, lorsque le filtre est configuré en mode très résonant. Nous avons aussi constaté que le moyen intuitif fondé sur d'autres approximations polynomiales que celle de Taylor[17] n'apporte pas satisfaction, même s'il conduit à des amplitudes réalistes de signaux [A13, § 6.1 et fig. 13-14]. La raison est que les saturations ont un effet sur les temps de réponse caractéristiques du système, localement, en plus de leur fonction d'écrêtage de signal.

[17] Par exemple, issus d'une optimisation sur une plage d'amplitudes plus large sous contrainte de préserver le terme linéaire pour ne pas modifier la fréquence de coupure en petits signaux.

Extension de la plage de validité. Une méthode alternative détaillée dans [A13, § 6.2] repose sur un changement d'état qui linéarise localement le système en les nouvelles variables (cf. figure 2.14) et rend le développement en séries de Volterra efficace. Pour cela, on introduit un prédicteur $\breve{x}$ de l'état, comme $P_x^0 = x_T$ ou $P_x^1(t) = x_T + T\partial_t x_T$ où $x_T(t) = x(t-T)$, son homologue $\breve{u}$ pour l'entrée, et selon la procédure décrite dans [A13, § 6.2.1] (non détaillée ici), on construit le système dynamique équivalent représenté en figure 2.14. Celui-ci inclut un système direct $\widetilde{\mathcal{S}}$ de sortie $\widetilde{x} = x - \breve{x}$ et à entrées multiples : (i) une entrée est $\widetilde{u} = u - \breve{u}$; (ii) une entrée secondaire (multi-variable) w est une fonction η des signaux de prédiction $\breve{x}$ et $\breve{u}$ (signaux retardés d'un paramètre T et donc simulables sans résoudre d'équation implicite).

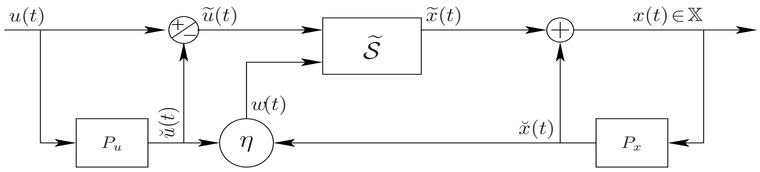


FIG. 2.14 – Transformation du système original $\mathcal{S}$ en le système $\widetilde{\mathcal{S}}$.

Quelques propriétés remarquables sont que : (i) si u est α-Lipschtzienne, alors $|\widetilde{u}| < \alpha T$ de sorte que régler T permet de régler la quasi-linéarité de $\widetilde{\mathcal{S}}$ en la variable $\widetilde{u}$ et d'améliorer la qualité de l'approximation fournie par une série de Volterra tronquée même à un ordre faible ; (ii) les noyaux de Volterra multi-entrées de $\widetilde{\mathcal{S}}$ (notés ici $\widetilde{h}_{n_u,n_w}$ où (n_u, n_w) représentent les ordres associés aux entrées $\widetilde{u}$ et w) sont indépendants de T (cf. [A13, fig. 18] pour la robustesse du système global en T) ; (iii) l'entrée $\widetilde{u}$ est dite *principale* tandis que w est dite *auxiliaire*, au sens où lorsque $\widetilde{u} = 0$, w n'a aucune influence sur la dynamique de $\widetilde{\mathcal{S}}$ ($\widetilde{h}_{n_u,n_w} = 0$ si $n_u = 0$, cf. rq. 26, voir aussi [C36, § 4.C]) ; (iv) Les noyaux alimentés exclusivement par $\widetilde{u}$ sont identiques aux noyaux du système original : $\widetilde{h}_{n_u,0} = h_{n_u}$.

Ainsi, la boucle agit sur le système et l'efficacité de sa représentation en série de Volterra de manière analogue à un "effet turbo" au sens où : (a) en accord avec (i) et (iv), elle améliore la qualité des résultats fournis avec les mêmes noyaux (pour l'entrée principale $\widetilde{u}$) que ceux de $\mathcal{S}$; (b) la boucle qui inclut un retard T n'a d'effet sur $\widetilde{\mathcal{S}}$ que si l'entrée principale $\widetilde{u}$ est active. Grâce à cette méthode, la non-linéarité du système est fortement reportée sur les prédicteurs et la fonction η. Les résultats obtenus sur un filtre à un étage conduisent à des dynamiques réalistes avec les prédicteurs P_x^1 et P_u^1 (cf.[A13, § 6.2.4 et fig. 20] pour $f_{ech} = 192$ kHz et $T = 1/f_{ech}$).

Même si cette méthode fonctionne en pratique, il reste qu'elle a plusieurs inconvénients : (i) la lourdeur des calculs formels nécessaires pour générer η et les noyaux activés par l'entrée auxiliaire ; (ii) à cause de η, la maîtrise de l'anti-repliement est plus délicate ; (iii) l'étude non évidente de la stabilité.

Aussi, quitte à perdre la maîtrise de l'anti-repliement, il est naturel de revenir à une approche alternative aux développements en séries de Volterra, fondée sur une discrétisation de l'équation (2.40). Ceci pose la question de la préservation des comportements stables ou auto-oscillants du système original.

Analyse de stabilité de Lyapunov et dissipativité. Cette question a été abordée dans [C37] en étudiant la passivité du circuit et en cherchant à assurer une version numérique de son bilan énergétique. Le cas simplifié du système linéarisé fait apparaître une première difficulté : l'énergie physique stockée dans les condensateurs ($V(x) = \frac{1}{2}x^T x$ en version adimensionnée) ne définit pas une fonction de Lyapunov sur le domaine de stabilité des paramètres $(\omega_c, r) \in \mathcal{D}_0 = \mathbb{R}_+^* \times [0, 1[$ fourni par l'analyse des pôles de la matrice de transfert. On ne retrouve que le sous-domaine $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R}_+^* \times [0, 5/12[$. Mais celui-ci est valable pour des paramètres variant dans le temps, ce qui n'assure pas l'analyse des pôles. Cette différence s'explique du point de vue physique par le fait que la boucle du circuit est active. Une étude plus fine permet de retrouver le domaine maximal $\mathcal{D}_0$: une fonction de Lyapunov adaptée est obtenue à condition que le paramètre r soit statique, en exprimant l'énergie stockée par les vecteurs propres [C37, § 4.3].

Nous montrons que pour le circuit non linéaire, les résultats s'étendent directement au domaine $\mathcal{D}_1$ en prenant pour fonction de Lyapunov $V_{nl}(x) = \sum_{k=1}^{4} \ln\cosh x_k^2$. Pour le cas $\mathcal{D}_0$, l'étude menée sur le système linéarisé s'avère plus délicate à adapter : le paramètre r doit être remplacé par une fonction $\rho_r(x_4)$ qui ne correspond plus à un gain statique.

Une perspective est d'établir un schéma numérique fournissant une version discrète du bilan de puissance (cf. [136, 81, 11, 28]). Un cadre approprié est celui des systèmes à hamiltoniens à ports [52] (cf. § 4).

2.2.7 Calcul de bornes de convergence de séries de Volterra

Les travaux et résultats exposés dans cette section ont été menés en collaboration avec Béatrice Laroche (DR INRA, UR 341, Mathématiques et informatique appliquées).

Plusieurs résultats théoriques sur l'existence d'un rayon de convergence sont disponibles : théorème de la fonction limitante [15] pour les entrées bornées (cf. proposition 1 ci-dessus), cas des systèmes dits "fading memory systems" pour des entrées continues [14], convergence locale en temps pour les systèmes affines en la commande, analytiques en l'état pour des entrées continues par morceaux [93, 115], convergence dans les espaces L^p pour les opérateurs de Fliess [78]. En revanche, il n'y a que très peu de résultats utilisables en pratique et qui fournissent des estimations du rayon. Ainsi, on trouve un critère de convergence pour les systèmes bilinéaires réels stationnaires, établi par R. Brockett [17], puis plus récemment, quelques résultats s'appuyant sur les perturbations régulières [19], ou bien établis dans le domaine fréquentiel [167, 95].

Nous avons établi des résultats de type "entrée bornée/état borné" et aussi "à décroissance exponentielle", plus précis et plus généraux. La classe des systèmes examinés est celle des systèmes stationnaires causaux (2.18) tels que la non-linéarité f est analytique en l'état et affine en l'entrée. Nous présentons d'abord des résultats obtenus sur les noyaux de Volterra pour des systèmes de dimension finie et à condition initiale nulle (cf. [A9, A14] et [C19, C24, C36]). Puis, nous traitons le cas plus général des systèmes de dimension infinie et avec une condition initiale non nulle. Pour cela, nous exploitons le lien avec le formalisme en perturbations régulières, indiqué en § 2.2.1 ([C35] et article en préparation).

Systèmes considérés et cadre fonctionnel. Les espaces $\mathbb{T}, \mathbb{X}, \mathbb{U}, \mathcal{U}, \mathcal{X}, \mathcal{V}^n_{\mathbb{X}}, \mathcal{VS}$ ci-dessous sont définis en page xii. La classe de systèmes étudiés correspond aux représentations d'état de la forme suivante :

$$\text{Pour tout } t\in\mathbb{T},\quad \partial_t x = A\,x + B\,u + P(x) + Q(x,u),\quad \text{avec } x(0)=x_{\text{ini}}\in\mathbb{X},\quad \text{et où} \tag{2.41}$$

$$P(x)=\sum_{p=2}^{\infty} A_p(\underbrace{x,\ldots,x}_{p}),\quad Q(x,u)=\sum_{p=2}^{\infty} B_k(\underbrace{x,\ldots,x}_{p-1},u),\ \text{avec } A_p\in\mathcal{ML}_k(\mathbb{X},\mathbb{X}),\ \ B_p\in\mathcal{ML}_{k-1,1}(\mathbb{X},\mathbb{U},\mathbb{X}).$$

L'opérateur $A\in\mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{X})$ est non nul, fermé, générateur d'un semi-groupe fortement continu S sur $\mathbb{X}$ de borne de croissance α, supposée strictement négative si $\mathbb{T}=\mathbb{R}_+$. On note $\beta>0$ la plus petite constante telle que pour tout $t\in\mathbb{T}$, $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{X})}\leq\beta\exp(\alpha t)$. L'opérateur B appartient à $\mathcal{L}(\mathbb{U},\mathbb{X})$. Les opérateurs multi-linéaires A_p et B_p sont supposés tels que les fonctions suivantes sont analytiques en $z=0$:

$$\mathcal{A}: z\mapsto\sum_{p=2}^{+\infty}\|A_p\|_{\mathcal{ML}_p(\mathbb{X},\mathbb{X})}\,z^p,\quad\text{et}\quad \mathcal{B}: z\mapsto\sum_{p=2}^{+\infty}\|B_p\|_{\mathcal{ML}_{p-1,1}(\mathbb{X},\mathbb{U},\mathbb{X})}\,z^{p-1}. \tag{2.42}$$

Remarque 21 (Cas de dimension finie et à entrée mono-dimensionnelle) *Dans le cas où l'état est de dimension finie ($x\in\mathbb{X}=\mathbb{R}^{d_x}$), A est une matrice de taille $d_x\times d_x$, $S(t)=\mathrm{e}^{At}1_{\mathbb{R}_+}(t)$, $\alpha=\max\big(\Re e(spec\,A)\big)$. Pour une entrée mono-dimensionnelle ($\mathbb{U}=\mathbb{R}$), B est une matrice de taille $d_x\times 1$.*

Pour la version linéarisée ($P=0$ et $Q=0$) du système (2.41), la notion de "mild solution" est définie de la façon suivante.

Définition 4 ("Mild solution" du système linéarisé) *Soit $u\in\mathcal{L}^\infty_{loc}(\mathbb{T},\mathbb{U})$. Soit x défini pour tout $t\in\mathbb{T}$ par $x(t)=S(t)x_{\text{ini}}+\int_0^t S(t-\tau)Bu(\tau)\,\mathrm{d}\tau$. Alors $x\in\mathcal{C}_0(\mathbb{T},\mathbb{X})$, et x est appelée* mild solution *du système linéarisé.*

Par analogie, on définit les "mild solutions" du système non linéaire comme suit.

Définition 5 ("Mild solution" du système (2.41)) *Soit $u\in\mathcal{L}^\infty_{loc}(\mathbb{T},\mathbb{U})$. Alors, x est appelé* mild solution *de (2.41) si $x\in\mathcal{C}_0(\mathbb{T},\mathbb{X})$ et satisfait, pour tout $t\in\mathbb{T}$,*

$$x(t)=S(t)x_{\text{ini}}+\int_0^t S(t-\tau)\Big(Bu(\tau)+P\big(x(\tau)\big)+Q\big(x(\tau),u(\tau)\big)\Big)\,\mathrm{d}\tau.$$

Un résultat standard de [165, § 6] est que, pour une entrée $u\in\mathcal{C}_0([0,T],\mathbb{U})$, il existe une fonction unique $x\in\mathcal{C}_0([0,T],\mathbb{X})$ telle que x est une "mild solution" de (2.41). Cependant, pour la classe de systèmes considérés ici, on peut montrer que l'existence et l'unicité locales de "mild solutions" s'étend au cas d'entrées $u\in\mathcal{L}^\infty_{loc}(\mathbb{T},\mathbb{U})$.

Résultats pour des systèmes mono-entrée de dimension finie avec condition initiale nulle

Dans cette section, on se limite d'abord au cas des systèmes de dimension finie ($\mathbb{X} = \mathbb{R}^{d_x}$), à entrée simple ($\mathbb{U} = \mathbb{R}$) et à condition initiale nulle ($x_{\text{ini}} = 0$, avec $B \neq 0$ pour que le système puisse être excité). On note $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ la famille de noyaux de Volterra [18] du système (2.41).

Notre résultat principal est donné par le théorème 1 qui repose sur la fonction $\mathcal{F}$ introduite ci-dessous.

Définition 6 (Fonctions $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ et rayon r) *On définit formellement la fonction $\mathcal{F}$ par*

$$\mathcal{F}(X) = \frac{\|k_1\|_{\mathcal{V}^1_{\mathbb{X}}} + \kappa\, \mathcal{B}(X)}{1 - \kappa\, \mathcal{A}(X)/X} \quad \textit{avec} \quad \kappa \geq \int_{\mathbb{T}} \left\|\mathrm{e}^{At}\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{X})} \mathrm{d}t, \tag{2.43}$$

où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont données en (2.42). On note $r \in \mathbb{R}^*_+ \cup \{+\infty\}$ le rayon de convergence de $\mathcal{F}$ en $x=0$. On introduit alors la fonction $\mathcal{G} : x \mapsto x\mathcal{F}'(x) - \mathcal{F}(x)$ définie sur $[0, r[$.

Rappelons que κ et $\|h_1\|_{\mathcal{V}^1_{\mathbb{X}}}$ sont finis car on a supposé que toutes les valeurs propres de A sont strictement négatives dans le cas où $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ (il n'y a pas d'hypothèse sur A sinon).

Théorème 1 (Borne $\rho^\star$ du rayon de convergence) *La famille de noyaux de Volterra $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ du système (2.41) appartient à $\mathcal{VS}$. Le rayon de convergence de sa fonction limitante est supérieur ou égal à $\rho^\star > 0$ avec*

$$\text{ⓐ} : \ \rho^\star = \lim_{x\to r^-} \frac{x}{\mathcal{F}(x)} \ \textit{ si } \mathcal{G} \textit{ n'a pas de racine sur } [0, r[, \quad \textit{et} \quad \text{ⓑ} : \ \rho^\star = \frac{\sigma}{\mathcal{F}(\sigma)} \ \textit{ sinon,} \tag{2.44}$$

où σ est l'unique racine de $\mathcal{G}$ sur $[0, r[$ dans ce dernier cas. De plus, pour tout $u \in \mathcal{U}$ tel que $\|u\| < \rho^\star$, la série (2.22) est normalement convergente dans $\mathcal{X}$ et sa somme est une fonction bornée sur $\mathbb{T}$, absolument continue. Elle est solution du système au sens de la définition 5.

Remarque 22 *Le cas à non-linéarités P et Q polynomiales conduit au cas ⓑ (cf. [C24]).*

La preuve de ce théorème repose sur l'utilisation d'outils d'analyse combinatoire [65] et s'organise selon les étapes techniques suivantes (détaillées dans [A14]) :

Etape 1 : en exploitant la définition récurrente des noyaux k_n, on montre que la suite

$$\psi_1 = \|k_1\|_{\mathcal{V}^1_{\mathbb{X}}}, \quad \text{et si } n\geq 2,\ \psi_n = \kappa \sum_{p=2}^{n} \Bigg(\|A_p\|_{\mathcal{ML}_p(\mathbb{X},\mathbb{X})} \sum_{\substack{m\in(\mathbb{N}^*)^p \\ m_1+\cdots+m_p=n}} \prod_{i=1}^{p} \psi_{m_i} + \|B_p\|_{\mathcal{ML}_{p-1,1}(\mathbb{X},\mathbb{U},\mathbb{X})} \sum_{\substack{m\in(\mathbb{N}^*)^{p-1} \\ m_1+\cdots+m_{p-1}=n-1}} \prod_{i=1}^{p-1} \psi_{m_i} \Bigg)$$

construit une suite majorante des normes $\|k_n\|_{\mathcal{V}^n_{\mathbb{X}}}$; (2.45)

Etape 2 : on montre que la série formelle génératrice $\Psi(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \psi_n z^n$ satisfait l'équation implicite $\Psi(z) = z\, \mathcal{F}\big(\Psi(z)\big)$;

Etape 3 : En utilisant le *lemme d'inversion analytique* dans le cas ⓐ ou le *théorème d'inversion singulière* dans le cas ⓑ, on trouve que Ψ est analytique en $z = 0$ et que $\rho^\star$ est une borne inférieure (cas ⓐ) ou la valeur exacte (cas ⓑ) de son rayon de convergence ;

Etape 4 : on obtient le résultat de convergence par la proposition 1 en remarquant que la fonction limitante φ est telle que $\varphi(x) \leq \Psi(x) < +\infty$ pour tout $x \in [0, \rho^\star[$;

Dans le cas à dimension finie, on prouve que la somme est absolument continue et que sa dérivée temporelle appartient à $\mathcal{X}$ de sorte qu'elle définit même une solution dite "faible" [A14, Thm. 3 et anx. B].

Une borne sur l'erreur de troncature de la série est obtenue en écrivant les inégalités entre les restes des séries définie par ϕ et Ψ.

Proposition 4 (Erreur de troncature) *On note $R_N x$, $R_N \phi$ et $R_N \Psi$ les restes d'ordre $N \in \mathbb{N}^*$ des séries définies par (2.22), la proposition 1 et l'étape 2 ci-dessus. Alors, pour tout $u \in \mathcal{U}$ tel que $\|u\|_{\mathcal{U}} < \rho^\star$, on a $\|R_N x\|_{\mathcal{X}} \leq R_N \varphi\big(\|u\|_{\mathcal{U}}\big) \leq R_N \Psi\big(\|u\|_{\mathcal{U}}\big)$.*

[18] Ceux-ci peuvent être calculés formellement en suivant la démarche proposée en § 2.2.1, ou en utilisant le principe du système annulateur (cf. [A14, proposition 1] pour des expressions détaillées de h_n, en version non stationnaire.

Remarque 23 (Démarche, petits bonheurs, et souvenirs dans la vie de chercheur) *Pour mettre au point ces résultats, la première classe de systèmes que nous avons étudiée fut la plus simple possible : celle des systèmes à non-linéarité quadratique en l'état [A9]. Dans ce cas, le calcul des ψ_n fait apparaître une combinatoire en nombres de Catalan. En les indexant à partir de $n = 1$, ceux-ci sont donnés par $\psi_1 = 1$ et $\psi_n = \sum_{k=1}^{n-1} \psi_k \psi_{n-k}$, dont on connaît explicitement la fonction génératrice $\Psi(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n z^n = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2}$. Ceci nous a permis d'obtenir le résultat sans recourir au* théorème d'inversion singulière *dans l'étape 3. Une extension aux systèmes à entrées multiples a aussi été obtenue [A9, § 4]. Un jour de septembre 2006, notre enthousiasme augmenta radicalement lorsque nous retrouvions cette fonction génératrice ($C(z) = \frac{\Psi(z)}{z}$ en indexant les nombres de Catalan depuis $n = 0$) parmi les exemples élémentaires [65, page 6] choisis par Philippe Flajolet et Robert Sedgewick dans le préambule de leur livre[19] "Analytic combinatorics". Cet exemple était pris pour illustrer et motiver les outils développés dans les quelques 800 pages suivantes... Nous y découvrions une clef (de base pour les mathématiciens du domaine) permettant de généraliser nos résultats : le théorème d'inversion singulière. En environ deux heures de temps, nous avions envoyé un courrier électronique à Philippe Flajolet et celui-ci nous appelait : après quelques questions et échanges scientifiques, nous étions orienté vers un cours commençant quelques jours plus tard à propos des outils que nous cherchions[20] et un exposé [F18] sur "les séries de Volterra pour la résolution d'EDP non linéaires" était programmé dans son équipe.*

A ces souvenirs, se joignent donc des pensées toutes particulières pour Philippe Flajolet qui est décédé en mars 2011.

Exemples. Nous présentons ici des résultats sur quatre exemples académiques. Les systèmes considérés sont :① un système 1D amorti à non-linéarité cubique ; ② une stabilisation avec saturation d'un système 1D ; ③ un oscillateur avec amortissement non linéaire ; ④ un pendule amorti. Les modèles et le calcul des quantités clef $\mathcal{F}$, σ et $\rho^\star$ sont donnés dans le tableau 2.3.

① Système 1D amorti à non-linéarité cubique ($0 < a$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$)	② Stabilisation avec saturation d'un système 1D ($0 < a < \gamma$, $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$)
$\partial_t x = -ax + \varepsilon x^3 + u$	$\partial_t x = ax - \tanh(\gamma x) + u$
$A = -a$, $B = 1$, $P(x) = \varepsilon x^3$, $Q = 0$ $\mathcal{F}(X) = \frac{1}{a - \lvert\varepsilon\rvert X^2}$, $\quad \sigma = \sqrt{\frac{a}{3\lvert\varepsilon\rvert}}$	$A = a - \gamma$, $B = 1$, $P(x) = \gamma x - \tanh(\gamma x)$, $Q = 0$ $\mathcal{F}(X) = \frac{X}{(2\gamma - a)X - \tan(\gamma X)}$, $\quad \sigma = \frac{1}{\gamma} \arctan \sqrt{1 - \frac{a}{\gamma}}$
$\rho^\star = \frac{2}{3}\sqrt{a^3}3\lvert\varepsilon\rvert$	$\rho^\star = \left(2 - \frac{a}{\gamma}\right) \arctan \sqrt{1 - \frac{a}{\gamma}} - \sqrt{1 - \frac{a}{\gamma}}$

③ Oscillateur avec amortissement non linéaire ($a > 0$, $b > 0$, $\omega > 0$, $\mathbb{T} = [0, T]$, $T > 0$)	④ Pendule amorti ($a > 0$, $\omega > 0$, $\mathbb{T} = [0, T]$, $T > 0$)
On note $\nu = \lVert k_1 \rVert_{\mathcal{V}^1_{\mathbb{X}}}$ et $\kappa = \int_0^T \left\lVert \mathrm{e}^{At} \right\rVert_{\mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{X})} \mathrm{d}t$ (valeurs calculées numériquement pour chaque T)	
$\partial_t^2 x_1 + 2a\partial_t x_1 + b(\partial_t x_1)^3 + \omega^2 \sin x_1 = u$	$\partial_t^2 x_1 + 2a\partial_t x_1 + \omega^2 \sin x_1 = u$
$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \partial_t x_1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P(x) = -b\, x_2^3\, B$, $\quad Q = 0_{2\times 1}$ $\mathcal{F}(X) = \frac{\nu}{1 - \kappa\, b\, X^2}$, $\quad \sigma = 1/\sqrt{3\kappa\, b}$	x, A, B : idem que pour ③ $P(x) = -\omega^2 (\sin x_1 - x_1)\, B$, $\quad Q = 0_{2\times 1}$ $\mathcal{F}(X) = \frac{\nu\, X}{X - \kappa\, \omega^2\, (\sinh X - X)}$, $\quad \sigma = \ln\left(1 + \frac{1 + \sqrt{1 + 2\kappa\omega^2}}{\kappa\omega^2}\right)$
$\rho^\star = \frac{1}{\nu\, \sqrt{3\kappa\, b}}$	$\rho^\star = \frac{\sigma - \kappa\omega^2 \left(\sinh \sigma - \sigma\right)}{\nu}$

TAB. 2.3 – Systèmes ①-④ et calculs des rayons $\rho^\star$ associés.

[19]De plus, les auteurs ont choisi de proposer ce livre en accès libre au format pdf, même avant sa dernière version fixée en 2009. Ce choix est très probablement l'une des raisons qui a permis à notre théorème 1 de voir le jour.

[20]Nous remercions chaleureusement Michèle Soria qui nous a accueilli dans son cours sur l'*analyse de la complexité des algorithmes* à l'Université Paris 6-UPMC.

Système ① : Les simulations en figure 2.15 montrent que la borne $\rho^\star$ correspond au rayon de convergence exact de la série de Volterra. En effet, si $\varepsilon > 0$, ce rayon coïncide même avec la limite de stabilité du système réel (cf. figure 2.15a-c). Si $\varepsilon < 0$, le système réel devient asymptotiquement stable mais on observe sur les simulations que la série de Volterra diverge lentement pour des entrées $e > \rho^\star$. Plus généralement, $\rho^\star$ fournit ici une borne exacte pour le système ① en autorisant des entrées et des paramètres ε et a complexes, si la borne de décroissance $\alpha = -\Re e(a)$ est négative.

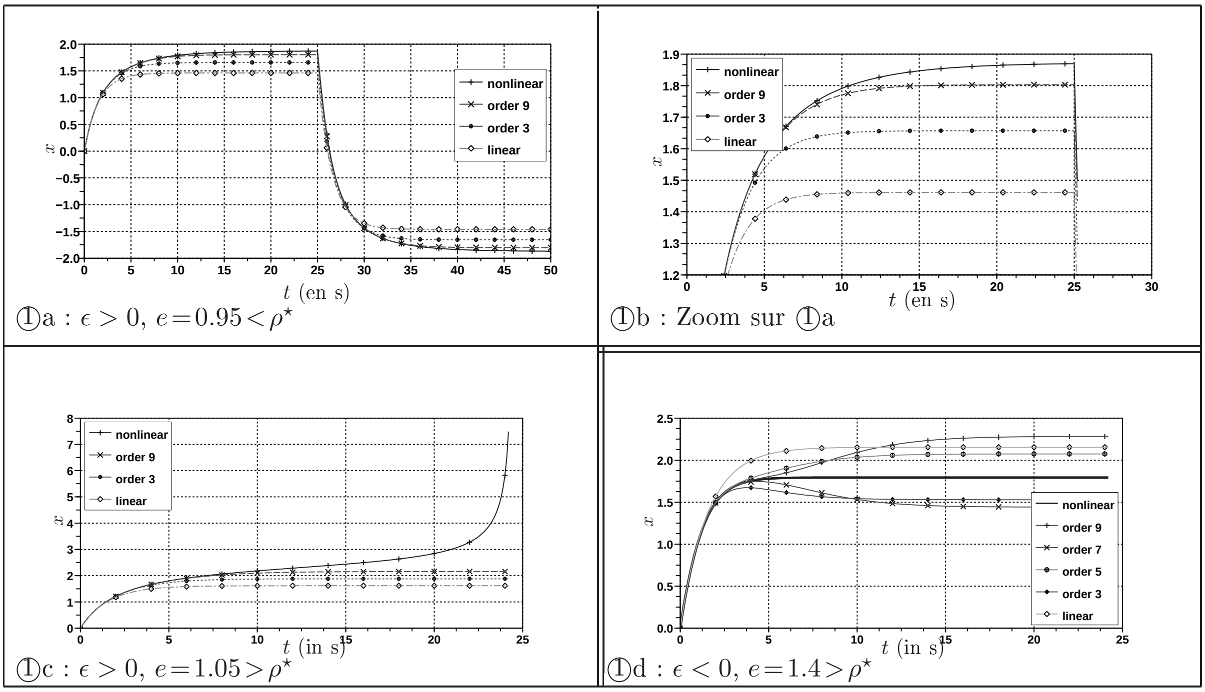


FIG. 2.15 – (Exemple ①) Simulations de x pour $a = 0.65$ et $\rho^\star = 1$ ($|\varepsilon| = 0.04068$). L'entrée $u(t)$ vaut e pendant 25 s puis $-e$ pendant 25 s. Deux configurations sont examinées : $\varepsilon > 0$ (a-c) et $\varepsilon < 0$ (d). On observe que, pour ce système ①, la borne $\rho^\star$ coïncide avec le rayon de convergence (cf. ①c).

Système ② : La simulation en figure 2.16② illustre bien l'apport des premières contributions de la série. Pendant les dix premières secondes, l'entrée a une amplitude voisine de $\rho^\star$ (ici, $0.8\rho^\star$). On y observe que : (1) l'approximation linéaire est assez mauvaise, (2) celle d'ordre 3 est significativement meilleure, et (3) celle d'ordre 5 est déjà excellente. Pendant les dix dernières secondes, l'amplitude est plus faible et les contributions non linéaires sont moins utiles.

La partie entre 5s et 10s révèle, quant à elle, une limitation de notre résultat. Le signal d'entrée contient ici une composante constante et une autre sinusoïdale de fréquence élevée (plus élevée que la bande passante du système linéarisé). Il se passe alors le phénomène suivant : alors que l'entrée atteint la limite de convergence en norme infinie (à chaque maximum de la sinusoïde), le comportement passe-bas du système fait que la composante sinusoïdale a finalement peu d'impact. L'approximation linéaire est déjà correcte et celle d'ordre 3 très bonne.

Ce défaut peut être en partie corrigé en considérant un critère de convergence non pas sur la norme de l'entrée, mais sur celle de la contribution linéaire x_1. L'idée est qu'on tient compte, à l'ordre 1, de l'atténuation que peut donner le système en fonction du contenu fréquentiel de l'entrée, avant d'appliquer une norme infinie et de tester le critère. Ce résultat est présenté ci-dessous (§ 2.2.7).

Terminons par une observation sur le cas d'entrées causales constantes. Pour ce type d'entrées, l'analyse de stabilité théorique conduit à une amplitude limite connue, donnée par $U_{\lim} = \sqrt{1 - a/\gamma} - (a/\gamma)\,\mathrm{arctanh}\sqrt{1 - a/\gamma}$. Puisqu'il s'agit d'entrées particulières, cette valeur U_{lim} est supérieure à $\rho^\star$, mais on observe sur la figure 2.17②, qu'elle s'en rapproche pour de faible gain de boucle γ.

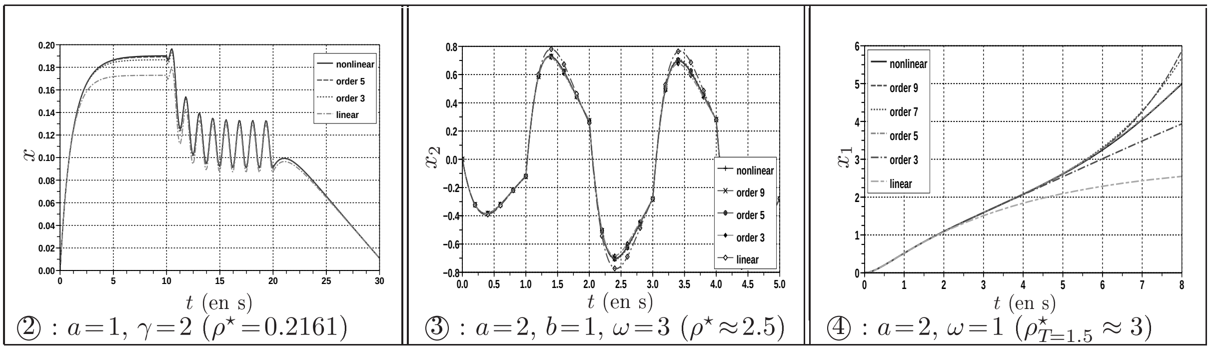


FIG. 2.16 – (Exemples ②-④ du tableau 2.3) Simulations de trajectoires pour des entrées $u(t)$ composées de : ② une constante de valeur $0.8\rho^\star$ (10 s), suivie d'un saut sur une sinusoïde centrée sur $0.5\rho^\star$, d'amplitude de $0.5\rho^\star$ et de fréquence de 0.8 Hz (10 s), suivie une rampe linéaire décroissante jusqu'à zéro ; ③ une entrée $u(t)$ en créneaux centrés d'amplitude $\rho^\star$; ④ une constante $u(t)\!=\!\rho^\star_{T=1.5}\!\approx\!3$.

Systèmes ③-④ : Ces systèmes sont des oscillateurs amortis qui ont des versions linéarisées identiques. A paramètres (a,ω) identiques, ils partagent donc le même noyau k_1 et les mêmes valeurs $\nu = \|k_1\|_{\mathcal{V}^1_{\mathbb{X}}}$ et $\kappa = \int_0^T \left\|e^{At}\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{X})} dt$. Dans les illustrations, ces valeurs ont été calculées numériquement pour plusieurs durées T de l'horizon de temps $\mathbb{T}\!=\![0,T]$ d'analyse.

On sait que le système ③ est inconditionnellement stable. Sa simulation pour une entrée de norme $\|u\|_{\mathcal{U}} = \rho^\star$ avec $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ conduit à de bons résultats à partir d'une approximation d'ordre 5 (cf. figure 2.16③).

Pour le système ④ excité par des entrées constantes, la limite de stabilité du point d'équilibre nul est $U_{lim} = 1$. On retrouve donc bien que U_{lim} majore $\rho_\star$ (pour $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$) quelle que soit la valeur $a \geq 0$ de l'amortissement (cf. figure 2.17④a). Le rayon de convergence est une fonction croissante de a. Pour des durées T suffisamment courte, le système excité n'a pas le temps de se déséquilibrer : on retrouve aussi ce résultat sur le rayon de convergence qui est une fonction décroissante de T et dépasse en effet $U_{lim}\!=\!1$ aux basse valeurs de T (cf. figure 2.17④b).

Concernant les simulations temporelles, on voit sur la figure 2.16④, que la trajectoire de la position angulaire du pendule croît, puisque l'entrée causale constante est telle que $u = 1.55 > U_{lim}$. L'horizon maximal sur lequel la convergence est garantie par le théorème 1, c'est-à-dire tel que $\rho^\star = 1.55$, correspond à $T\!=\!3$ (cf. figure 2.17④b). Et, sur cet horizon $\mathbb{T} = [0,3]$, on observe en figure 2.16④ que la trajectoire est bien approximée dès l'ordre trois.

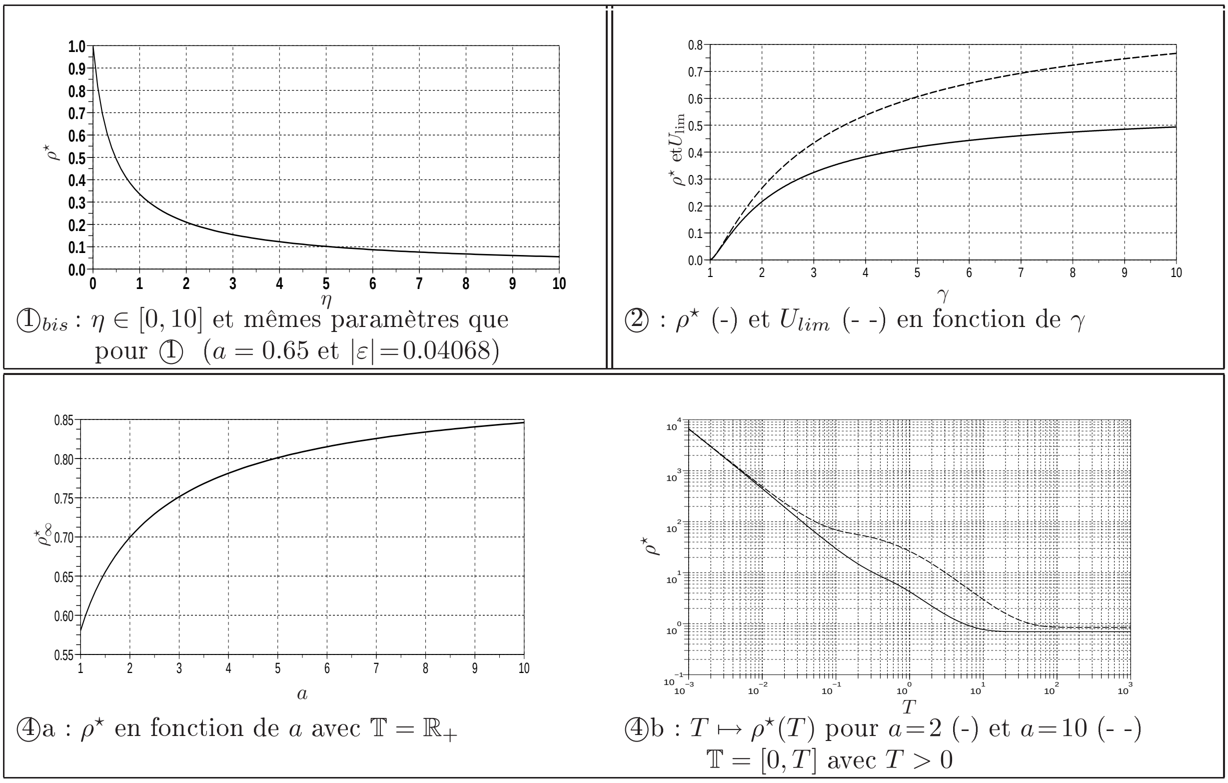
Ceci amène à s'interroger sur les ordres de troncature "intéressants" et la qualité des approximations. Si l'on cherche à déterminer le plus petit terme de la série pour en avoir un indicateur de divergence, on obtient : $n\!=\!9$ si $t\!<\!9.23$, $n\!=\!7$ si $9.23\!<\!t\!<\!11.4$ et $n\!=\!1$ si $t\!>\!11.4$.

Remarque 24 (Une perspective sur les séries divergentes) *Les développements en* séries divergentes *[13, 83, 173], les transformées à* opérateur de resommation *et la maîtrise de l'*ordre de troncature au plus petit terme *sont des outils intéressants à étudier et appliquer aux séries de Volterra, pour construire des approximations efficaces.*

Dans les exemples ①-④, la fonction Q est toujours nulle. Illustrons maintenant son effet ($Q\!\neq\!0$) en modifiant l'exemple ① en l'exemple ①bis : $\partial_t x = -ax + \varepsilon x^3 + \eta\, x\, u + u$ avec $\eta\!>\!0$. Le calcul du rayon de convergence peut être mené numériquement : on a $\mathcal{F}(X)\!=\!\frac{1+|\eta|\,X}{a-|\varepsilon|\,X^2}$, σ est l'unique racine positive de $a - 3\,|\varepsilon|\,X^2 - 2\,|\varepsilon\eta|X^3 = 0$ et $\rho^\star = \sigma/\mathcal{F}(\sigma)$. La figure 2.17①bis illustre la décroissance de $\rho^\star$ avec $\eta > 0$. Un calcul asymptotique de σ puis ρ conduit à $\rho^\star \sim a/\eta$ pour $\eta \to +\infty$.

Terminons par deux remarques décrivant des extensions du théorème 1 que nous avons établies.

Remarque 25 (Extension aux signaux entrée-état exponentiellement amortis) *Pour $\alpha < 0$ et $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$, si l'entrée u est majorable par une exponentielle décroissante, alors l'état l'est également. Ce résultat est détaillé dans [A14, § 5]. Il repose sur des adaptations des espaces $\mathcal{U}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{V}^n_{\mathbb{X}}$, ce qui modifie la fonction $\mathcal{F}$ mais pas l'algorithme de calcul.*



①$_{bis}$: $\eta \in [0, 10]$ et mêmes paramètres que pour ① ($a = 0.65$ et $|\varepsilon| = 0.04068$)

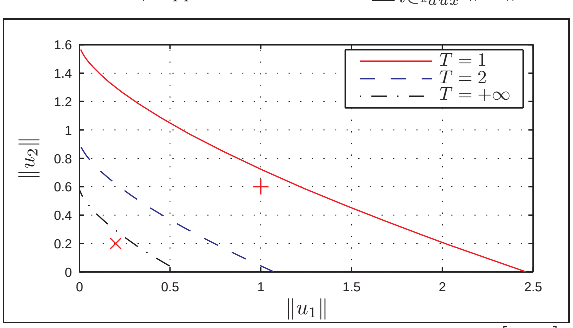
② : $\rho^\star$ (-) et U_{lim} (- -) en fonction de γ

④a : $\rho^\star$ en fonction de a avec $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$

④b : $T \mapsto \rho^\star(T)$ pour $a = 2$ (-) et $a = 10$ (- -) $\mathbb{T} = [0, T]$ avec $T > 0$

FIG. 2.17 – (Exemples ①$_{bis}$, ② et ④) : tracé de rayons de convergence calculés numériquement, en fonction des paramètres des systèmes. Dans la sous-figure②, la courbe du dessus (- -) représente la limite théorique de stabilité pour des entrées causales constantes ($U_{\lim} = \sqrt{1 - a/\gamma} - (a/\gamma)\,\mathrm{arctanh}\sqrt{1 - a/\gamma}$).

Remarque 26 (Extension pour les systèmes à entrées multiples) *Dans le cas d'entrées multiples* $(u_1, \ldots, u_d) \in \mathcal{U}^d$, *on introduit des noyaux* k_m *à index multiple* $m = (m_1, \ldots, m_d) \in \mathbb{M}^* = \mathbb{N}^d \setminus \{0_d\}$ *où* m_i *est l'ordre de la non-linéarité associée à l'entrée* u_i. *La série (2.22) est adaptée en* $x(t) = \sum_{m \in \mathbb{M}^*} \int_{\mathbb{T}^{\overline{m}}} k_m(t, \tau_1, \ldots, \tau_{\overline{m}}) \left(\prod_{i=1}^{d} \prod_{j=1}^{m_1} u_i(\tau_{m_1 + \cdots + m_{i-1} + j}) \right) \mathrm{d}\tau_1 \ldots \mathrm{d}\tau_n$ *avec* $\overline{m} = m_1 + \cdots + m_d$. *La généralisation pour le calcul des noyaux s'effectue sans difficulté (cf. [C36, A13]), mais l'étude de la convergence nécessite une légère adaptation et amène à distinguer les types d'entrées. Si la i-ième colonne de B est nulle, alors*[21] $k_{e_i} = 0$ *et l'entrée* u_i *est dite* auxiliaire. *Dans le cas contraire l'entrée est dite* principale. *Tant que les entrées principales sont nulles, le système reste à l'équilibre. Cette hiérarchie de types d'entrées joue donc un rôle dans la convergence de la série de Volterra. Elle est prise en compte à travers un ratio* γ *qui quantifie l'importance relative des entrées des deux types et une adaptation de* $\mathcal{F}$ *qui devient dépendante de* γ. *Ce ratio est* $\gamma = U_{aux}/U_{ppal}$ *où* $U_{aux} = \sum_{i \in \mathbb{I}_{aux}} \|u_i\|_{\mathcal{U}}$ *et* $U_{ppal} = \sum_{i \in \mathbb{I}_{ppal}} \|h_{e_i}\|_{\mathcal{V}^1_{\mathbb{X}}} \|u_i\|_{\mathcal{U}}$. *On obtient alors un rayon de convergence paramétré* $\gamma \mapsto \rho^\star_\gamma$ *qui s'applique aux entrées principales, sous la contrainte que* $U_{aux} < \gamma U_{ppal}$. *Finalement, le domaine de convergence est décrit par* $U_{ppal} < \rho^\star_\gamma$ *et* $U_{aux} < \gamma \rho^\star_\gamma$. *Ces définitions et résultats sont présentés dans [C36]. On y trouve aussi une illustration sur le système* $\partial_t^2 x_1 + 2a\partial_t x_1 + (1 + \varepsilon x_1^2 + u_2) x_1 = u_1$ *(oscillateur de Duffing amorti, excité par l'entrée principale* u_1 *et avec une entrée auxiliaire* u_2 *de modulation de fréquence). La figure ci-contre illustre le résultat obtenu pour* $a = 0.65$, $\varepsilon = 0.1$ *et plusieurs horizons* $\mathbb{T} = [0, T]$.



[21] On note ici $\{e_1, \ldots, e_d\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

Systèmes de dimension infinie avec condition initiale

Cette denière section sur les séries de Volterra traite des systèmes (2.41-2.42) de dimension infinie avec condition initiale $x_{\rm ini} \in \mathbb{X}$, où $\mathbb{U}$ et $\mathbb{X}$ sont des espaces de Banach. L'idée est de reprendre la démarche présentée en § 2.2.1 dans laquelle on considère aussi les conditions initiales comme une perturbation : on les marque par ϵ via le changement de variable $x_{\rm ini} = \epsilon \widetilde{x_{\rm ini}}$. Une solution formelle de (2.41-2.42) est $x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ où x_1 est donné par la définition 4 et, si $n \geq 2$, $x_n(t) = \int_0^t S(t-\tau) r_n(\tau)\,\mathrm{d}\tau$. Dans cette expression, r_n est donné par (2.20) dans laquelle les $\frac{D_{p,q}f(0,0)}{p!\,q!}$ sont remplacés par les opérateurs multi-linéaires A_p si $q=0$, B_p si $q=1$, et 0 sinon. En travaillant sur les x_n plutôt que les noyaux et en utilisant les mêmes étapes que dans le théorème 1, nous avons pu aboutir à des résultats similaires.

Considérons un système (2.41-2.42) avec $Q = 0$. Soit $\rho^\star$ défini comme dans le théorème 1 pour $\mathcal{F}(X) = \frac{1}{1-\kappa \mathcal{A}(X)/X}$ où $\kappa \geq \int_{\mathbb{T}} \|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{X})}\,\mathrm{d}t$, et soit Ψ la fonction analytique en 0, de rayon $\rho^\star$, telle que $\Psi(z) = z\,\mathcal{F}\big(\Psi(z)\big)$. On a alors les résultats suivants.
Théorème 2 (Convergence, cas $Q=0$) *Soient $x_{\rm ini} \in \mathbb{X}$ et $u \in \mathcal{U}$ tels que $\|x_1\|_{\mathcal{X}} < \rho^\star$. Alors, la série $x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ est normalement convergente dans $\mathcal{X}$ et $\|x\|_{\mathcal{X}} \leq \Psi\big(\|x_1\|_{\mathcal{X}}\big)$. Plus précisément, $\epsilon \mapsto \Psi\big(\epsilon\,\|x_1\|_{\mathcal{X}}\big)$ est une fonction dominante de $\epsilon \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \epsilon^n x_n$ pour tout ϵ complexe tel que $\epsilon\|x_1\|_{\mathcal{X}} < \rho^\star$. Il s'en suit que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, le reste $R_N x$ de la série est borné par celui de la série de Taylor de Ψ, évalué en $\|x_1\|_{\mathcal{X}}$, c'est-à-dire, que $\|x - \sum_{n=1}^{N} x_n\|_{\mathcal{X}} \leq R_N \Psi\big(\|x_1\|_{\mathcal{X}}\big)$.*

Pour un système affine en l'entrée ($Q \neq 0$), ce résultat s'adapte comme suit.

Théorème 3 (Convergence, cas $Q\neq 0$) *Pour $\omega \geq 0$, on introduit $\mathcal{F}(X) = \frac{1+\kappa\omega\mathcal{B}(X)}{1-\kappa\mathcal{A}(X)/X}$ et les objets $\rho^\star_\omega$ et Ψ_ω associés. Soient $x_{\rm ini} \in \mathbb{X}$, $u \in \mathcal{U}$ et $\omega \in \mathbb{R}_+$ tels que $\|u\|_{\mathcal{U}} \leq \omega\,\|x_1\|_{\mathcal{X}}$ et $\|x_1\|_{\mathcal{X}} < \rho^\star_\omega$. Alors, on a le même résultat que le théorème 2 avec $\rho^\star_\omega$ et Ψ_ω.*

On montre que $\omega \mapsto \rho_\omega$ est une fonction strictement décroissante de sorte que le résultat le plus large sur x_1 est obtenu en choisissant ω le plus petit possible. Remarquons que si $Q = 0$, alors on retrouve le théorème 2. En effet, $\mathcal{B} = 0$ de sorte que $\mathcal{F}_\omega$, $\rho^\star_\omega$ et Ψ_ω sont indépendantes de ω et que l'inégalité $\|u\|_{\mathcal{U}} \leq \omega\,\|x_1\|_{\mathcal{X}}$ n'est plus contraignante.

Une première version des théorèmes 2-3 et une illustration sur un exemple académique (modèle 1D réaction-diffusion) ont été présentées dans [C35]. Nous donnons dans l'exemple ⑤ ci-dessous une illustration pour un cas proche de la corde.

Exemple 5 : modèle non linéaire d'Euler-Bernoulli d'une poutre amortie. On considère le modèle d'Euler-Bernoulli [80, 76] d'une barre amortie, initialement au repos et simplement supportée aux extrémités, décrit par (en version adimensionnée), pour tout $z \in \Omega =]0,1[$ et $t \in \mathbb{T} = \mathbb{R}_+$,

$$\partial_t^2 w + 2\,(a + b\partial_z^4)\,\partial_t w + \partial_z^4 w - \eta\left(\int_0^1 \big(\partial_z w\big)^2\,\mathrm{d}z\right)\,\partial_z^2 w = \Phi\;\; f_{tot}, \tag{2.46}$$

avec, en $z \in \{0;1\}$, $w(z,t) = 0$ (extrémité fixée) et $\partial_z^2 w(z,t) = 0$ (moment de flexion nul). Les coefficients $a > 0$ et $b > 0$ sont les paramètres d'amortissement fluide et structurel, $\eta > 0$ est la constante du couplage non linéaire entre le moment de flexion et le déplacement (sous l'hypothèse de *von Kármán* [154]).

Ce modèle se récrit sous la forme (2.41-2.42) avec $u = f_{tot} \in \mathbb{U} = \mathbb{R}$ et $x = [w, \partial_t w]^T$ dans un cadre fonctionnel bien posé non détaillé ici, qui s'appuie sur [94]. Sous l'hypothèse que les amortissements soient tels que $\frac{a}{\pi^2} + b\pi^2 < 1$ et $2b(a - b\pi^4) \leq 1$, on trouve que le premier mode de la barre est oscillant et le moins amorti de tous. La borne de décroissance est alors $\alpha = -(a + b\pi^4)$. De plus, on trouve que $\int_{\mathbb{T}} \|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{X})}\,\mathrm{d}t \leq \kappa = \frac{1}{|\alpha|}$ et que $\|A_3\|_{\mathcal{ML}_3(\mathbb{X},\mathbb{X})} \leq \frac{\eta}{2\sqrt{10}}$. Ces valeurs conduisent à la fonction $\mathcal{F}(X) = \frac{1}{1-\lambda X^2}$ avec $\lambda = \frac{1}{3\sqrt{10}}\left|\frac{\eta}{\alpha}\right|$ dont on déduit $\sigma = (3\lambda)^{-\frac{1}{2}}$ et $\rho^\star = \frac{2}{3\sqrt{2\lambda}} = \frac{2\sqrt[4]{10}}{3}\sqrt{\left|\frac{\alpha}{\eta}\right|}$.

Des simulations ont été faites dans le cadre simple mais exact où la distribution spatiale Φ de l'excitation f_{tot} correspond à une combinaison linéaire des K premières fonctions propres du problème linéarisé. Ceci conduit à un système de dimension finie et permet de simuler et comparer les trajectoires calculées par un solveur standard d'équations différentielles ordinaires (ode15s, Matlab) et par réalisation en séries de Volterra (ici, jusqu'à l'ordre 7) utilisant des systèmes linéaires cascadés (`lsim`, Matlab). L'entrée est choisie proportionnelle à $1_{[0,\theta]}(t)$.

Deux configurations (C1) et (C2) ont été testées : (C1) $\theta = 3$, $K = 1$, $a = 0.999\pi^2$, $b = 0$ (proche du régime critique) et $\eta = 13.857$ de sorte que $\rho^\star = 1$ avec 4 amplitudes tests de sorte que $\|x_1\|_\mathcal{X} \in \{0.8; 1; 1.2; 2\}$; (C2) $\theta = 400$, $K = 3$ (modes excités avec la même amplitude) , $a = 0.02$, $b = 5 \times 10^{-5}$ (typique d'une barre en bois), $\eta \approx 0.035$ de sorte que $\rho^\star = 1$.

Remarque 27 (Ecoute) *Un échantillonnage de la trajectoire de ce problème adimensionné à la période* $T = 2\pi f_0 / \big(f_s \Im\mathrm{m}(s_1)\big)$ *permet d'entendre le signal produit avec la fondamentale* f_0 *sur une carte son réglée à la fréquence d'échantillonnage* $f_s = 48000Hz$*. Ceci a été utilisé pour la configuration (C2).*

La figure 2.18 représente les signaux $w(z = 0.5, t) = x_1(z = 0.5, t)$ pour la configuration (C1) et plusieurs ordres de troncature $N = 1, 3, 5, 7$.

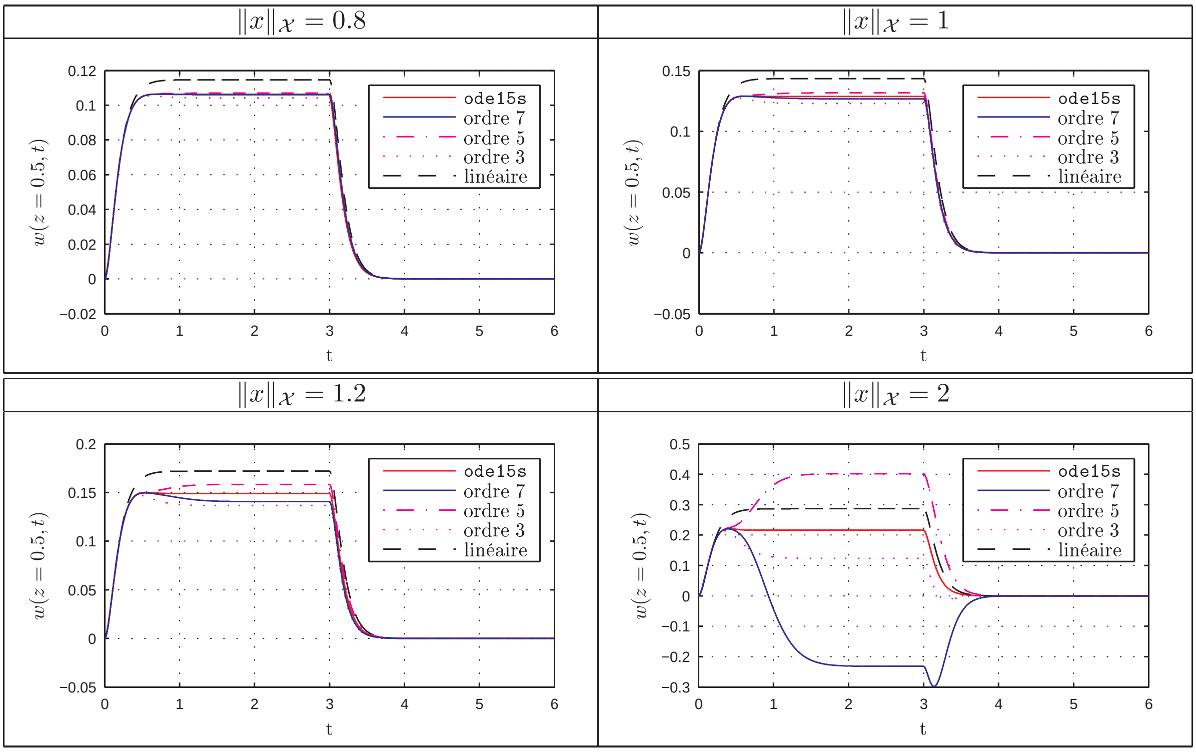


FIG. 2.18 – (Exemple ⑤) Simulations pour la configuration (C1).

Les simulations tracées en figure 2.19 montrent que pour $\|x\|_\mathcal{X} = 0.8$, une bonne approximation est obtenue dès que $N \geq 3$. Pour $\|x\|_\mathcal{X} = 1$, les approximations sont significativement améliorées en continuant d'augmenter l'ordre. Ceci n'est plus vrai pour le cas $\|x\|_\mathcal{X} = 1.2$ pour lequel la convergence

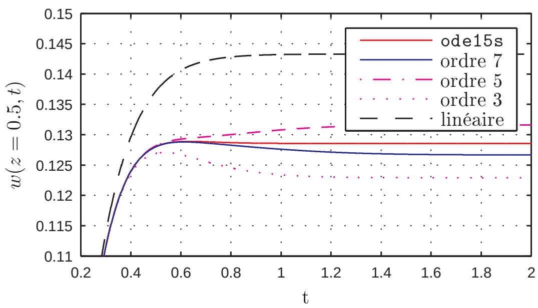


FIG. 2.19 – (Exemple ⑤) Zoom pour le cas $\|x\|_\mathcal{X} = 1$ de la figure 2.18.

semble perdue. Pour $\|x\|_{\mathcal{X}} = 2$, la divergence est si rapide (pour $1 \leq t \leq 3$) que la meilleure approximation est celle d'ordre 1. En conclusion, la borne $\rho^\star$ est proche de la borne de convergence exacte.

Pour la configuration (C2), les simulations présentées en figure 2.20 montrent que, pour $\|x_1\|_{\mathcal{X}} = 1$, les approximations sont très proches de la dynamique non linéaire, dès l'ordre 1. Pour $\|x_1\|_{\mathcal{X}} = 3$, des

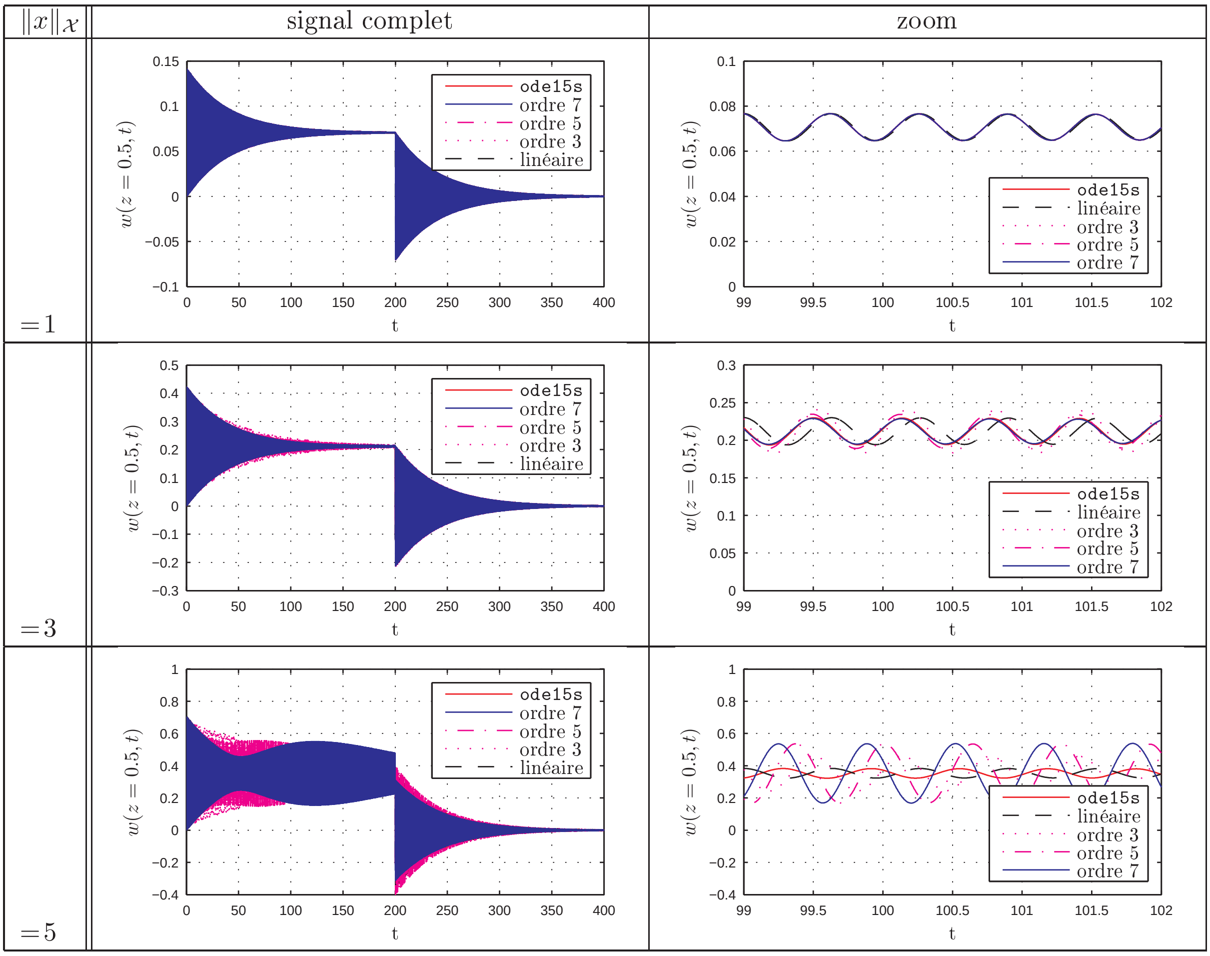


FIG. 2.20 – (Exemple ⑤) Simulations pour la configuration (C2).

différences apparaissent : on observe essentiellement un déphasage. Bien que la convergence ne soit plus garantie, l'augmentation de l'ordre du développement en série apporte une amélioration significative. Pour $\|x_1\|_{\mathcal{X}} = 5$, la convergence semble cette fois-ci perdue et les signaux $x_{m\geq 3}$ ont des amplitudes grandes irréalistes : on retrouve ici le phénomène de mode séculaire discuté en remarque 20. La borne $\rho^\star$ décrit le domaine des amplitudes pour lesquelles les contributions non linéaires n'ont pas encore acquis un "caractère séculaire" sur l'horizon $\mathbb{T}$ étudié.

Remarque 28 (Applications 1-3 et convergence) *Les applications présentées en § 2.2.4-2.2.6 n'entrent pas dans la classe des systèmes (2.41-2.42). Pour les applications sur les sons cuivrés et la corde, les opérateurs multi-linéaires A_n ne sont pas bornés (sur l'espace naturel $\mathbb{X}$ du problème linéarisé). Pour le filtre Moog (système de dimension 4), la non-linéarité n'est pas affine en l'entrée. Les résultats sur la convergence doivent donc encore être généralisés pour traiter ces cas.*

2.3 Inversion et observation d'état d'un instrument à vent simplifié

Avant propos. *Cette dernière section du chapitre 2 résume de façon descriptive et synthétique des résultats obtenus de deux travaux sur les problèmes inverses. Ces résultats sont préliminaires au sens où : (1) ils n'abordent que des sous-parties du problème global (déterminer la commande "gestuelle" qui fournit un son cible, pour un modèle physique) ; (2) les tests sont faits sur des sons de synthèses. Le premier travail (§ 2.3.1-2.3.2) date d'avant ma thèse (cf. [G2, G3] et [C3, C3]). Il s'agit d'une inversion entrée-sortie pour une trompette couplée aux lèvres dans le cadre simplifié où : (i) le modèle de l'instrument est caricaturé, (ii) la sortie mesurée est l'état acoustique dans l'embouchure et la pression de bouche, (iii) l'entrée correspond à des paramètres réduits caractérisant les propriétés macroscopiques d'une lèvre (pilotée par le musicien). Le second travail (§ 2.3.3), bien plus récent [A11], est complémentaire. Il concerne la reconstruction de l'état de l'instrument simplifié à partir de la mesure de la pression à l'extrémité du tube et de la pression de bouche. L'idée est d'assembler ensuite ses deux "briques" pour construire l'inverseur. Une des raisons du faible nombre de travaux sur ce thème et de son étalage sur le temps est que, vu la complexité des problèmes théoriques et pratiques à régler, il nous a semblé pertinent de mettre d'abord au point un banc expérimental (automatisé) pour tester, valider mais aussi explorer les bons outils. Ceci a occupé une partie de notre temps depuis 2006 (cf. § 3.2). La plate-forme est maintenant prête et une thèse que j'encadre (cf.§ 4.2.1) reprend ce sujet.*

2.3.1 Modèle simplifié

On considère un modèle caricatural d'instrument de type cuivre composé d'un système "masse-amortisseur-ressort" pour représenter une lèvre (unique), un jet (de type équation de Bernoulli) couplé à la lèvre et à un tube acoustique qui rayonne dans le milieu extérieur à l'extrémité libre. Ce modèle couple une équation différentielle (lèvre), via une non-linéarité statique (relation de Bernoulli), à un résonateur acoustique représenté par la réponse impulsionnelle de sa fonction de réflexion (cf. figure 2.21 et [209]) ou encore un modèle de tube acoustique droit idéalisé (système à retard).

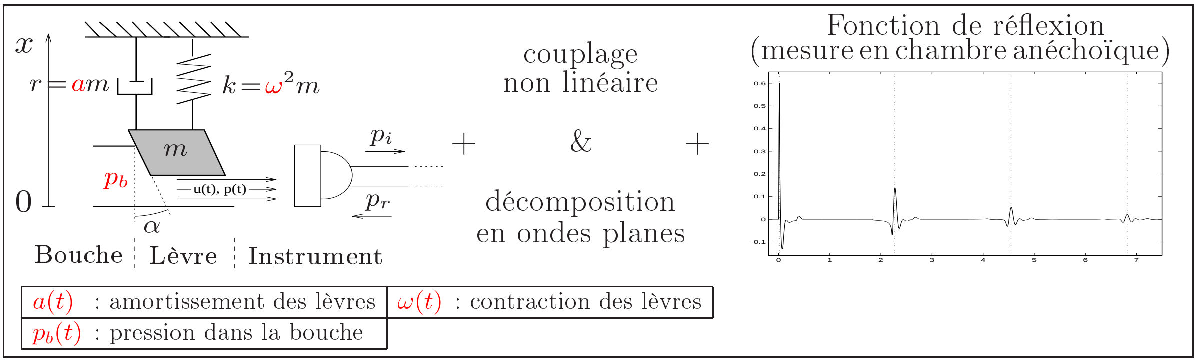


FIG. 2.21 – Modèle de cuivre simplifié.

Les gestes du musiciens sont représentés ici par les paramètres mécaniques réduits (ω, a) lentement variables de la lèvre et la pression dans la bouche p_b (cf. figure 2.21). L'état du système est composé de l'état dynamique de la lèvre (position et vitesse de la masse vibrante) et de l'état acoustique du résonateur.

2.3.2 Une inversion partielle du système (DEA ATIAM/ATS, 1998)

Dans [G2, G3], nous avons d'abord cherché à retrouver les paramètres mécaniques inconnus de la lèvre $I(t) = [\omega, a]^T$ à partir de la connaissance $C(t) = [p_{emb}, v_{emb}]^T$ de l'état acoustique dans l'embouchure pour une pression de bouche constante connue. Ce problème est (déjà) mal posé (cf. [G3, partie 2, chap. 1] pour l'application de l'algorithme d'inversion à gauche [130, chap. 4],[43, chap. 3]) : il existe une infinité de commandes solution $I(t)$ qui "vivent" sur une variété différentielle pilotée $C(t)$ (cf. figure 2.22).

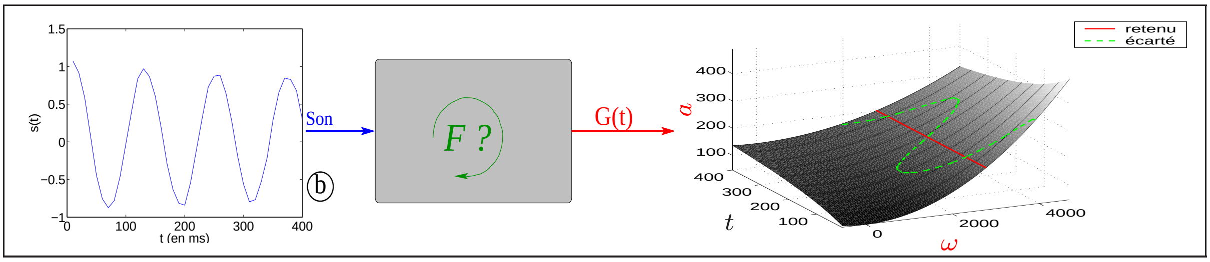


FIG. 2.22 – Illustration caricaturale et qualitative du problème mal posé de l'inversion : les deux trajectoires $I(t)$ représentées sont des solutions candidates.

Nous avons proposé deux méthodes : ⓐ la première consiste à régulariser le problème en imposant des modèles paramétriques des trajectoires $I(t)$ et à optimiser les paramètres sur de courtes trames ; ⓑ la seconde, construite avec un Lagrangien, consiste à rechercher les trajectoires $I(t)$ qui varient le moins dans le temps, sous contrainte de régénérer $C(t)$. La méthode ⓐ est détaillée dans [C3]. Sur des signaux de synthèse, elle fournit des résultats intéressants au sens où des commandes pertinentes sont retrouvées pour des régimes variés et non stationnaires. Ainsi, sur la figure 2.23, sont enchaînés (regarder la commande ω qui correspondrait à la pulsation pour une lèvre découplée du jet) : (1) une attaque sur une note stable ($0 < t < 0.6$s) ; (2) un glissando montant rapide ($0.6 < t < 0.7$s) ; (3) une note stable ($0.7 < t < 1.2$s) qui (4) dérive vers une note rugueuse ($1.2 < t < 2.2$s) ; (5) un glissando descendant ($2.2 < t < 2.7$s) ; (6) une note stable. Pour toutes ces configurations, les commandes sont estimées correctement.

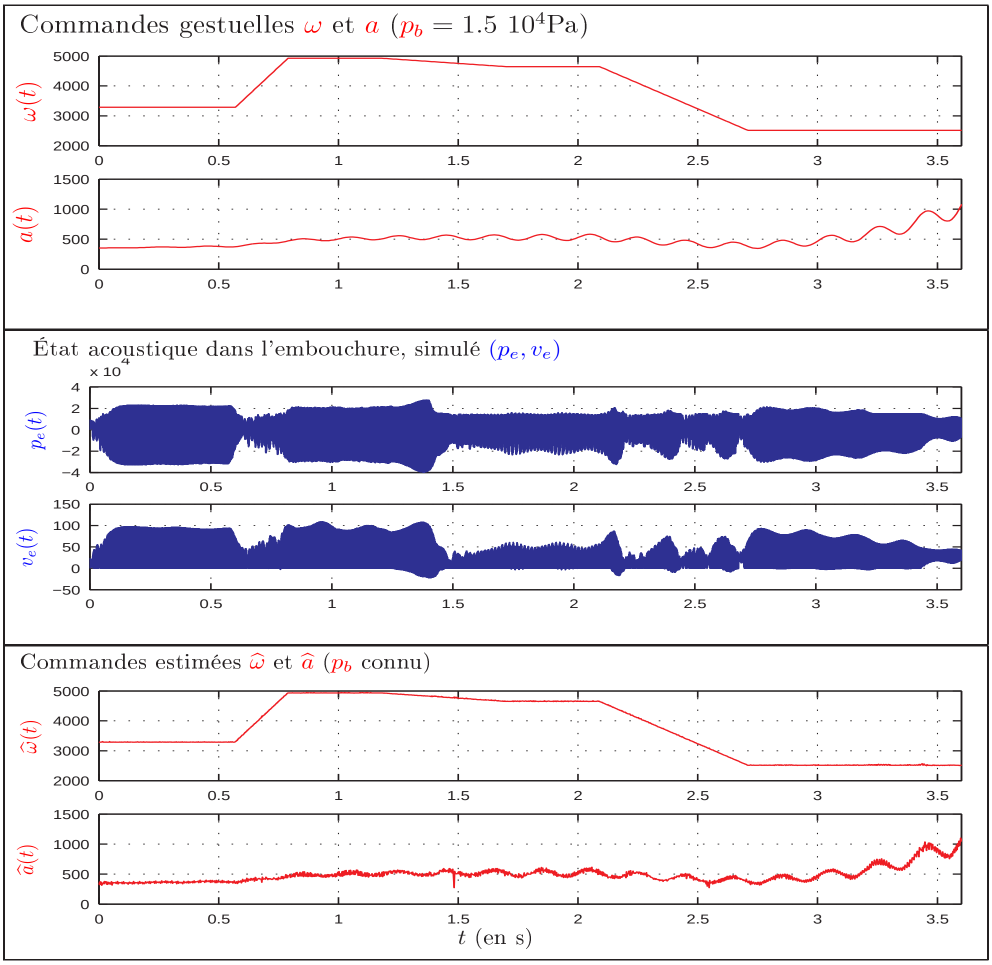


FIG. 2.23 – Résultats de l'inversion partielle obtenus par la méthode ⓐ.

2.3.3 Observateur d'état d'un système neutre

Ce travail a été mené pendant le projet CONSONNES[22] en collaboration avec Brigitte d'Andréa-Novel (Professeur, Ecole des Mines-ParisTech) et Jean-Michel Coron (Professeur, Université Pierre et Marie Curie, Laboratoire Jacque-Louis Lions, Institut Universitaire de France). Ce travail pour le moment "isolé" est détaillé dans l'article [A11] : celui-ci est joint en annexe pour éviter de le répéter ci-dessous. Nous nous limitons donc ici à des commentaires explicatifs.

Dans ce travail, nous avons repris le modèle simplifié de l'instrument en représentant le résonateur par un modèle caricatural de tube droit chargé par une impédance constante : le résonateur devient représentable par un système linéaire à retard. Grâce à cela, le système non linéaire complet a pu être mis sous la forme particulière $x'(t) = f\big(x(t), x(t-\tau), x'(t-\tau), u(t)\big)$ où τ est le temps d'aller-retour d'une onde dans le tube. L'état x est composé de la position de la lèvre (relativement à sa position d'équilibre), de sa vitesse et du signal de l'onde de pression "aller" à l'entrée du tube droit. L'entrée u est composée de la pression de bouche et de sa dérivée temporelle. La sortie $y(t)$ est la pression en bout de tube, ici, proportionnelle à $p(t-\tau/2)$. La dynamique correspond à celle d'un système dit "neutre", parce que la dérivée de l'état retardé intervient dans la fonction f.

Pour cette forme particulière, un observateur $\widehat{x}$ de l'état x, de type "filtre de Kalman étendu" [99] a pu être mis au point. Des réglages des gains de l'observateur ont pu être déterminés de sorte que le système dynamique de l'erreur $e = x - \widehat{x}$ soit globalement asymptotiquement stable[23]. Ainsi, si l'entrée et les paramètres du systèmes sont connus et si la sortie n'est pas entâchée d'erreur de mesure, le résultat [A11, Thm. 1] garantit la bonne reconstruction de l'état après un transitoire. Il s'est donc agit de tester la robustesse au bruit de mesure et à des erreurs commises sur les paramètres ou l'entrée.

Des tests sur des simulations sont présentés pour plusieurs configurations : conditions favorables (conditions initiales proches des valeurs exactes) en figure 2.24ⓐ, mauvaises conditions initiales sur l'observateur en figure 2.24ⓑ, bruit important en figure 2.25ⓒ, déviations des paramètres (pression de bouche, amortissement et raideur de la lèvre) en figure 2.25ⓓ, voir aussi [A11, fig. 6] pour un réglage du temps de réponse de l'observateur deux fois plus court.

La robustesse locale (prouvée en théorie) est déjà intéressante en pratique : si l'observateur de l'état est suffisamment proche de l'état exact, alors il "se verrouille" correctement sur le système.

L'étape suivante consistera à obtenir des résultats à robustesse globale. Pour cela, une propriété intéressante à exploiter est de garantir des bilans énergétiques bien posés (ce qui n'est pas le cas avec la relation de Bernoulli actuellement utilisée) : on peut s'appuyer sur l'énergie totale du système pour définir une fonctionnelle de Lyapunov. Ceci impose en particulier de construire un nouveau modèle (macroscopique, simple) de jet, ce que nous n'avons pas trouvé dans la littérature. Un travail sur ce point a été engagé pendant le dernier stage (M2R ATIAM, 2012) de Nicolas Lopes.

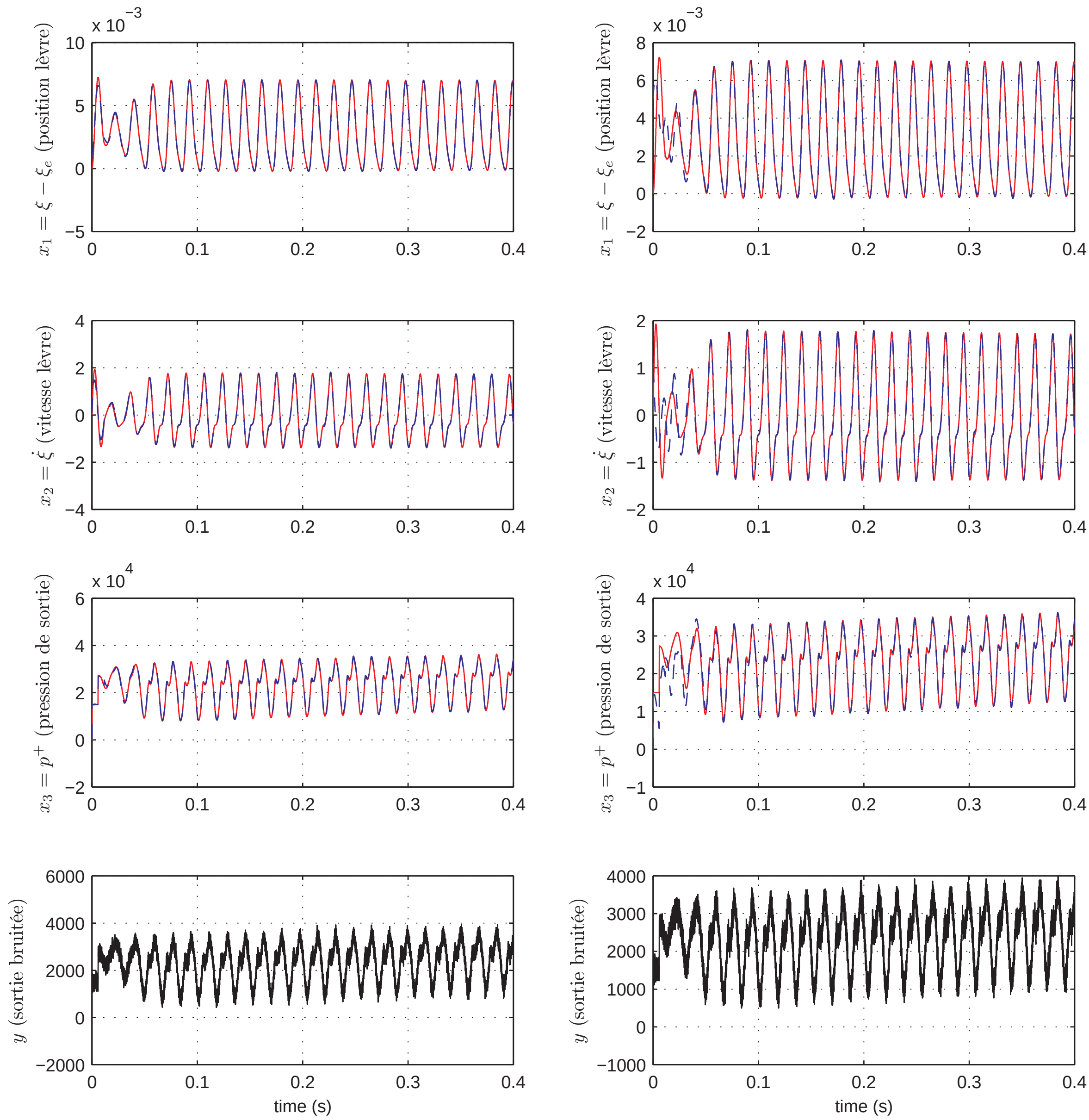
2.3.4 Quelques perspectives

Le problème complet d'inversion est de retrouver les paramètres mécanique et la pression de bouche à partir de la pression mesurée à l'extrémité du tube.

Pour bénéficier des deux travaux présentés ci-dessus, une première stratégie consiste à considérer deux échelles de temps : celle de l'état x (oscillations rapides, sur la plage des fréquence audibles) et celle des "gestes de pilotage" du musicien (à variation plus lente). On cherche à construire un observateur d'état du système neutre en supposant les "Gestes" localement constants. A une échelle plus lente, un estimateur des paramètres, de type "moindres carrés" nourri par l'état observé est construit. Il s'agit donc de construire un *observateur à filtrage adaptatif.* De tels outils seront mis en oeuvre et testés sur des simulations et le banc expérimental automatisé que nous décrivons dans le chapitre suivant.

[22] ANR-05-BLAN-0097-01 (décembre 2005 - mai 2009, dirigé par J. Kergomard, LMA, CNRS UPR 7051) : CONtrôle des SONs Naturels Et Synthétiques. Cf. `http ://www.consonnes.cnrs-mrs.fr/`.

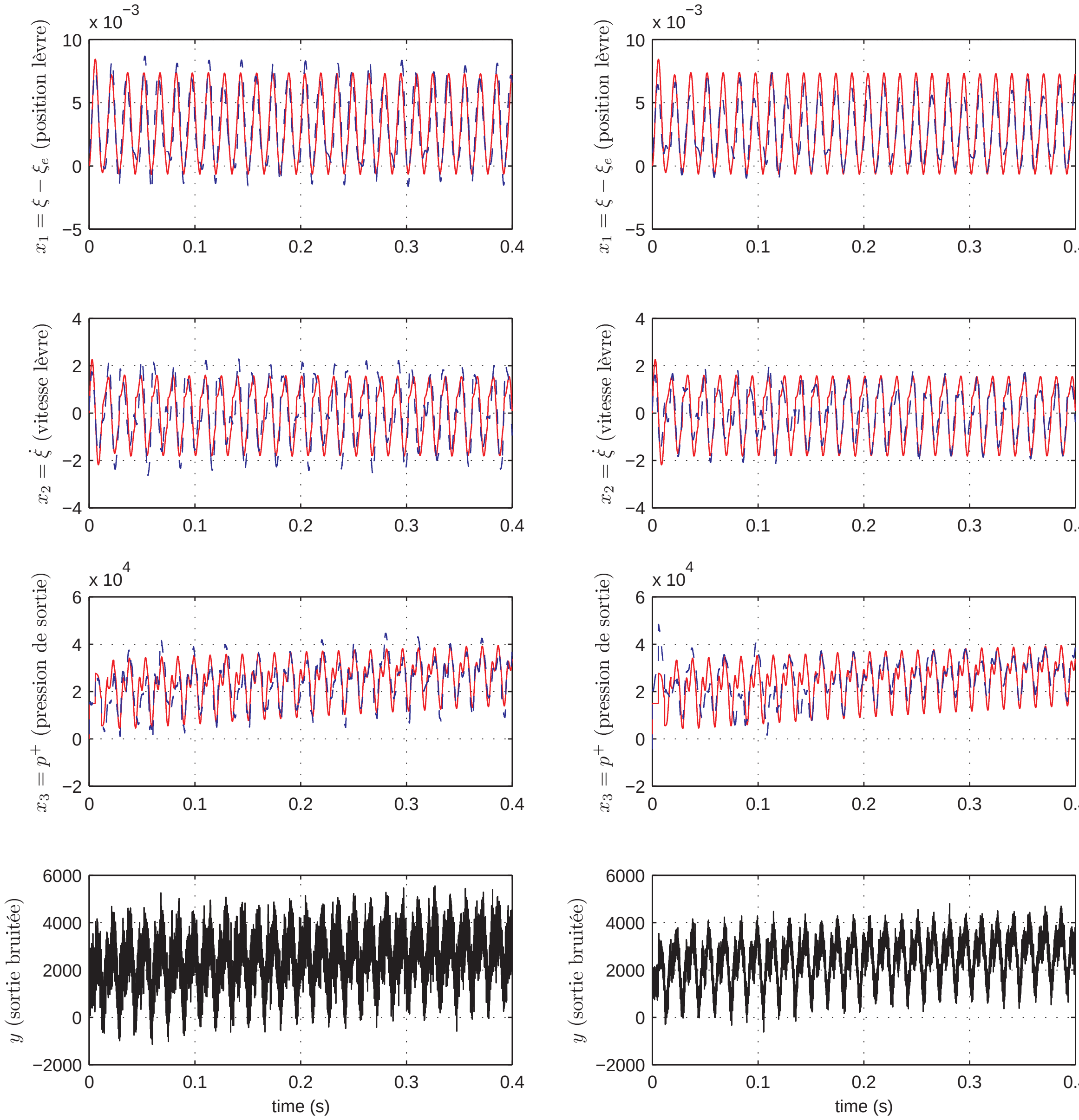
[23] La preuve s'appuie sur une fonctionnelle de Lyapunov stricte, spécialement élaborée (cf. [A11, Thm. 1]).



ⓐ Conditions favorable (faibles déviations sur les conditions initiales et un faible bruit)

ⓑ Mauvaises conditions initiales imposées sur l'observateur

FIG. 2.24 – Simulation du système (-) et de l'observateur (- -) reconstruit à partir de la sortie bruitée y (-).



ⓒ Bruit important sur la pression de sortie mesurée

ⓓ Bruit et déviations des paramètres (+10%) pour l'observateur

FIG. 2.25 – Simulation du système (-) et de l'observateur (--) reconstruit à partir de la sortie bruitée y (-).

Chapitre 3

Recherche et développement technologiques pour l'expérimentation, la validation et la simulation

Ce chapitre donne une description des outils technologiques (informatiques, électroniques ou mécatroniques) déjà développés (§ 3.1) ou en cours de développement (§ 3.2-3.4) et de leurs applications. Excepté le tout dernier outil (didactique) présenté en § 3.4, ces outils sont destinés à l'exploration, la mesure et la validation de modèles de systèmes électroniques ou biophysiques, en vue leur simulation réaliste. Cette thématique est un volet que j'ai progressivement intégré dans mes travaux ces dernières années, avec des collaborations et en partenariat avec des entreprises, ou au sein de projets de mécatronique de l'Ecole des Mines-ParisTech.

3.1 Amplificateurs guitare à lampes : mesures, modélisation et simulation temps réel (thèse CIFRE d'Ivan Cohen avec la société Orosys)

Le sujet de thèse CIFRE d'Ivan Cohen que j'ai encadré avec G. Pille (société Orosys) s'intitule "Modélisation, analyse et identification de circuits non linéaires : application aux amplificateurs guitare à lampes pour la simulation en temps réel". Son manuscrit étant encore sous clause de confidentialité, nous nous limitons ici à donner le résumé de son rapport et présenter des résultats publiés [C20, C25, C26, C33, C40] (d'autres résultats sont soumis pour des publications en revue). La dernière partie présente les résultats récents du stage M2R ATIAM de T. Usciati.

3.1.1 Résumé du rapport de thèse

«Ce travail porte sur la modélisation physique d'amplificateurs guitare à lampes pour la simulation numérique en temps réel. L'objectif recherché est la réalisation de simulations réalistes, avec une implantation numérique à faible coût, pour la commercialisation d'un futur produit sous la marque Two Notes.

Pour arriver à ce résultat, une étude des amplificateurs guitare à lampes est réalisée. Leur circuit électronique est décomposé en étages élémentaires, bien connus des électroniciens et des constructeurs d'amplificateurs. La combinaison de ces étages, et leur paramétrage permet de définir l'architecture de l'amplificateur, ainsi que sa signature sonore. Deux d'entre eux sont étudiés comme exemples, à savoir le Lag TL-1 Spitfire, et le Soldano SLO-100, en vue de leur simulation.

On utilise pour cela un formalisme de représentation de systèmes d'équations algébro-différentielles, les représentations d'états étendues (REE). Lorsqu'un système non linéaire est modélisé par une REE, il est possible de simuler son comportement avec des algorithmes de discrétisation numérique, et de résolution d'équations implicites, en s'assurant de la stabilité du schéma numérique résultant. Pour obtenir la REE de l'amplificateur complet, des algorithmes de mise en équation automatique sont utilisés pour chacun des étages élémentaires. On définit également des lois de mise en cascade de systèmes à deux ports, pour obtenir la REE totale de la concaténation des étages.

De plus, une étude spécifique a été réalisée sur les modèles de triodes réelles, composant clé des amplificateurs guitare, en se basant sur des mesures. Un appareil de mesure a ainsi été développé, permettant d'observer, de modéliser et de caractériser le comportement statique et dynamique des triodes. De nouveaux modèles ont ainsi été développés, et leurs paramètres estimés pour une dizaine de 12AX7s réelles. Les mesures et modèles ont alors permis de caractériser les différences de comportement entre ces lampes, et leur influence dans la signature sonore d'un amplificateur guitare réel ou simulé.

Enfin, des algorithmes de simulation optimisés ont été développés, d'abord avec le logiciel MATLAB, puis en C++ sous la forme d'un plug-in VST temps réel. On considère alors l'influence de la complexité du modèle, en particulier concernant la considération de phénomènes de second ordre, sur le rendu de la simulation, les performances des algorithmes, et surtout leur réalisme, par rapport à l'amplificateur réel qu'on cherche à simuler.»

3.1.2 Résultats principaux publiés et système de mesure de triodes

Les types d'étages électroniques qui composent les amplificateurs guitare à lampes réalisent les fonctions élémentaires suivantes : pré-amplification (PA), filtrage linéaire (FL), amplification de puissance (AP). Quelques exemples de circuits standard sont représentés en figure 3.1. Leurs nombres, agencements

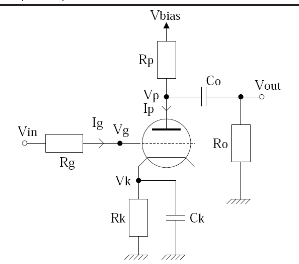
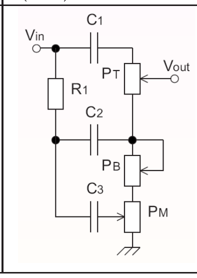
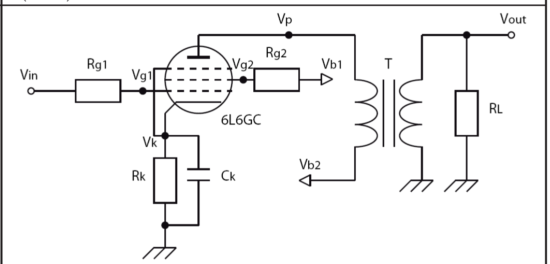
<table>
<tr><th>Type d'étage</th><th>pré-amplification (PA)</th><th>filtrage linéaire (FL)</th><th>amplificateur de puissance (AP)</th></tr>
<tr><td>Exemple de circuit</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

FIG. 3.1 – Exemples de circuits électroniques d'étages élémentaires : un circuit d'amplification (PA) à *triode à cathode commune* étudié dans [C20], un étage de filtrage linéaire basique (souvent appelé correction de tonalité), un étage amplificateur de puissance de classe A à pentode étudié dans [C33]. Il existe de nombreuses variations et autres types de circuits.

et réglages peuvent varier significativement selon les marques, modèles, et les types de sons visés (allant du son dit "clair" pour des distorsions faibles au son dit "métal" pour des distorsions fortes).

Modèles, raffinements considérés et mises en évidence par la mesure ou test perceptif

Dans les circuits d'amplification (PA, AP), les lampes à vides jouent un rôle important. En plus du gain d'amplification, elles introduisent des non-linéarités qui participent à la signature sonore. Ces caractéristiques restent aujourd'hui encore préférées par certains musiciens, comparées à celles introduites par les solutions plus modernes à base de transistors ou à simulation numérique. Parmi les lampes à vides utilisées, la triode de type 12AX7 (étages PA) est un composant clef très rencontré. Les modèles issus d'études physiques (cf. e.g. [137]) s'avèrent trop pauvres pour conduire à des simulations réalistes. Celui, phénoménologique, de Norman Koren [110] donne de meilleurs résultats mais néglige encore le courant de grille I_g. Bien qu'en pratique les concepteurs d'amplificateurs guitare cherchent à limiter l'effet de I_g [12], négliger ce courant peut devenir une approximation sévère dans certaines configurations d'utilisation. Pour améliorer les modèles, un banc de mesure (figure 3.2) adapté à la plage de fonctionnement des triodes (inclus dans $0V \leq V_{pk} \leq 400V$ et $-15V \leq V_{gk} \leq 5V$) a été développé.

Une première série de mesures effectuées pour deux ensembles de triodes de marques et modèles variés (A : 9 paires neuves ou en bon état, B : 9 paires considérées usagées par les musiciens) a permis d'établir

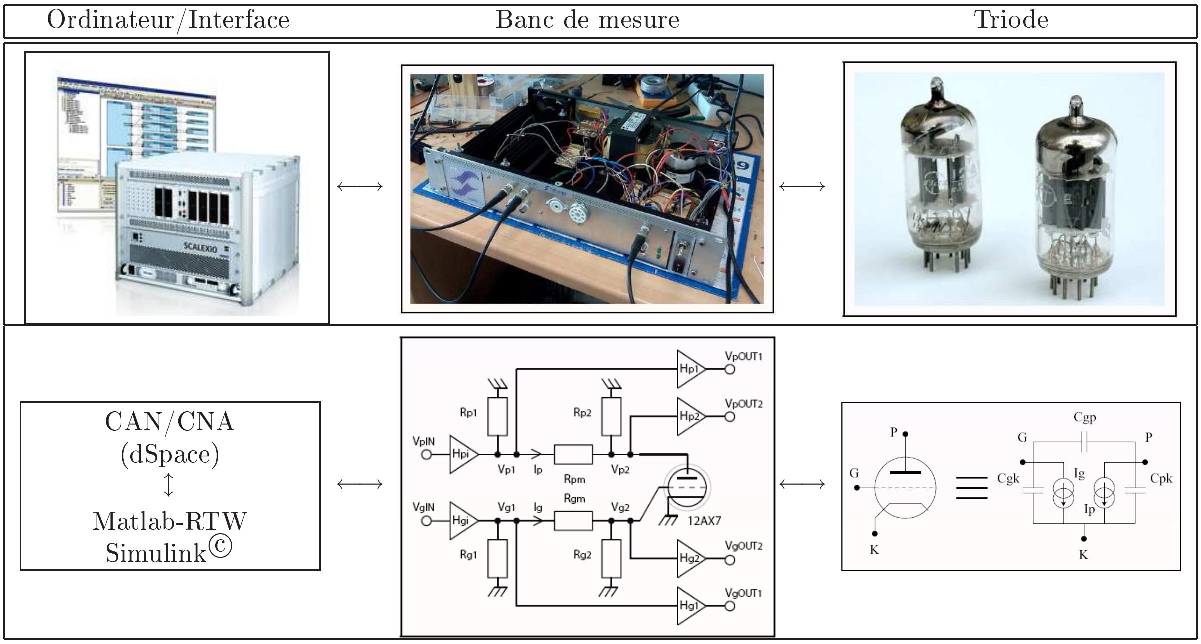


FIG. 3.2 – Triode et banc de mesure développé avec B. Ferren (ingénieur, Orosys) et utilisé pendant la thèse (mesures présentées dans [C40]) : photographies et circuits équivalents.

un critère de sélection de bon fonctionnement et une version raffinée (R1) du modèle de Normann-Koren qui inclut : une amélioration du modèle $I_p = L_p(V_{pk}, V_{gk})$ (incluant un nouveau paramètre) et un nouveau modèle (phénoménologique) $I_g = L_g(V_{pk}, V_{gk})$. Une procédure d'estimation des paramètres associés a été mise au point.

Une seconde série de mesures, pendant lesquelles le comportement dynamique des triodes est sollicité, a permis d'estimer une capacité parasite équivalente C_{gp} (raffinement R2) dont l'effet est prévalent (par effet "Miller" du gain d'amplification) et peut être audible [C20].

Par ailleurs, des comparaisons de signaux simulés (Matlab, LT-Spice) et mesurés, en sortie d'un amplificateur réel complet (ici, un Lag TL-1 Spitfire) ont également permis de tester l'influence du couplage inter-étage (raffinement R3), souvent simplifié ou négligé dans les simulations en temps réel qu'on peut trouver sur le sujet [164, 131, 44, 225, 184, 224].

Un test perceptif a été réalisé sur un échantillon de 24 personnes (guitaristes ou non). Ce test consistait à évaluer la proximité de sons issus des mesures et de simulations pour plusieurs configurations de raffinements. Ce test simple conduit à un résultat assez attendu : (i) les simulations jugées les plus proches des mesures sont celles qui incluent les 3 raffinements (R1-3) ; si l'on ne garde que deux raffinements, on trouve d'abord (R2,R3) puis (R1,R3) puis (R1,R2). Le couplage (R3) est donc capital et les raffinements apportés sur le modèle de triode sont utiles.

Simulation et code pour le temps réel

Pour assurer une simulation compatible avec le temps réel et une précision comparable à celle de logiciels de simulation de circuits électroniques, e.g. LT-Spice [204], nous avons profité de la structure particulière en étages et adopté la démarche suivante. Cette démarche diffère de la plupart des solutions proposées sur ce sujet en ce sens que : (i) les équations d'un étage sont établies dans le domaine à temps continu, (ii) le couplage inter-étage est considéré, (iii) la génération des équations à temps discret et du code compatible avec le temps réel est effectuée en fin de chaîne.

Pour (i), une bibliothèque d'étages de type (AP), (FL) et (PA) a été construite. La mise en équation du circuit d'un étage a été réalisée en adaptant des méthodes standard d'analyse automatique de circuit (Modified Nodal Analysis utilisée dans Spice, cf. e.g. [121], Bond Graphs cf. e.g. [39]). L'adaptation a consisté à exprimer les résultats de l'analyse sous la forme de systèmes algébro-différentiels non linéaires qui s'expriment comme une représentation d'état standard, étendue par les relations implicites entre courants et tensions dues aux composants non linéaires. Cette forme est décrite par

$$dx/dt = f(x, w, u), \quad 0_{dim(w)} = g(x, w, u), \quad y = h(x, w, u). \tag{3.1}$$

Pour (ii), puisque deux étages communiquent par un port[1] (si l'alimentation n'est pas considérée exogène), la mise en équation sous la forme (3.1) de leur cascade peut être construite comme illustrée en figure 3.3, puis en procédant par récurrence.

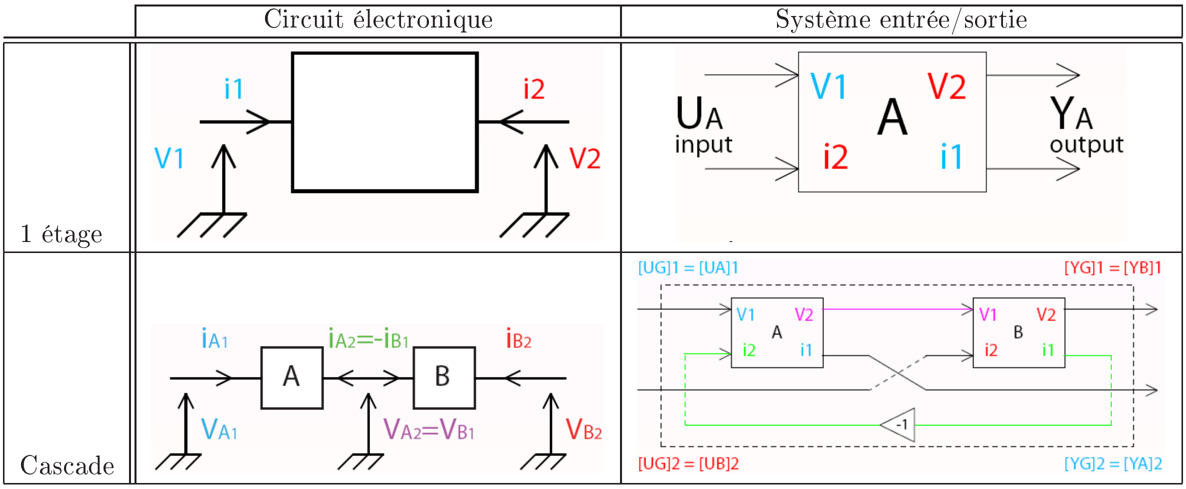


FIG. 3.3 – Représentation entrée-sortie d'un étage et de la cascade élémentaire de deux étages.

Pour (iii), un schéma numérique est appliqué sur l'équation dynamique. Chaque état associé à une capacité parasite C_{gp} (quelques pico-Farads) correspond à un problème raide de sorte que, pour assurer la stabilité en temps discret, une schéma implicite est utilisé. Sur les autres états, des schémas explicites restent utilisables. Dans les équations statiques (impliquant g, cf. (3.1)), les relations sur les triodes sont rendues explicites en recourant à des tables d'inversions pré-calculées numériquement). Les équations implicites résultantes (dynamiques et statiques) sont rassemblées. Elles sont résolues par un algorithme de type Newton-Raphson : pour des simulations limitant le repliement spectral, ici pour $f_e = 192$kHz, une étude numérique sur les circuits et applications visés montre que 3 itérations de l'algorithme suffisent.

Une mise en équation automatique et une génération automatique du code de simulation fondée sur les étapes (i-iii) a été implantée. Un plug-in VST qui permet d'inclure ce code et donne accès à des paramètres de réglage choisis (dont des valeurs de composants) a été développé pour la Société Orosys. Une capture d'écran d'une version limitée à un seul étage (de type PA) est donnée en figure 3.4. Des versions d'amplificateurs complets, couplés à une simulation d'enceinte rayonnante (réalisé par Orosys avant la thèse) ont été réalisées. La société travaille actuellement à des versions implantées sur DSP pour la commercialisation de produits *hardware*.

3.1.3 Simulations construites sur les "Systèmes à Hamiltoniens à Ports" (stage M2R ATIAM de Tarik Usciati)

Dans ce stage encadré par I. Cohen (Orosys) et moi-même, il a été cherché une solution qui garantisse la passivité des composants à la simulation. Pour cela, l'approche des "Systèmes à Hamiltoniens à Ports" a été choisie. Un tel système d'entrée u, d'état x, de sortie y est de la forme [52]

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = J(x)\partial_x H(x) - R(x)\partial_x H(x) + g(x)u, \text{ et } y = g(x)^T x, \text{ où } J \text{ est anti-symétrique et } R \text{ semi-définie positive.} \tag{3.2}$$

Dans ce formalisme $E = H(x)$ est l'énergie stockée dans le système et l'état dynamique x regroupe les variables des composants "stockants" (la charge q pour un condensateur, le flux magnétique ϕ pour une

[1] c'est-à-dire, un seul fil.

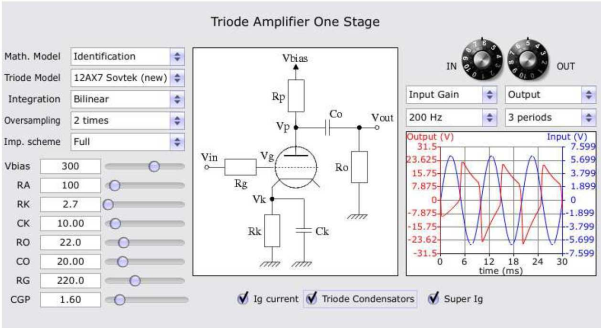


FIG. 3.4 – Capture d'écran d'un plug-in VST simulant un étage isolé de pré-amplification.

bobine, etc). Un tel système est donc passif (au sens de la définition 1, p. 24 avec $\mathcal{V} = H$) puisque (ici, pour des entrée/état/sortie de dimensions finies),

$$\frac{\mathrm{d}(H\circ x)}{\mathrm{d}t} = \partial_x H(x)^T \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\big[\partial_x H(x)\big]^T J(x)\partial_x H(x)}_{=0 \text{ car } J=-J^T} - \underbrace{\big[\partial_x H(x)\big]^T R(x)\partial_x H(x)}_{\geq 0 \text{ car } R=R^T\geq 0} + y^T u \geq y^T u. \qquad (3.3)$$

Cette équation fournit le bilan de puissance : le premier membre représente la variation d'énergie du système (ouvert) ; dans le second membre, le premier terme (nul) exprime les *échanges de puissances entre les composants "stockants"*, le deuxième (négatif) la *puissance dissipée*, le troisième (de signe quelconque) la *puissance entrante* dans le système.

Dans le stage, la présence de composants dissipatifs non linéaires (en particulier les triodes) a nécessité une extension de la forme (3.1). Les applications ont pu être traitées avec l'ajout d'un terme $-K^T Z(w)w$ dans le second membre de (3.2) où : (i) la puissance dissipée des composants non linéaires est donnée par $P(w) = w^T Z(w)w$ avec $Z(w)^T = Z(w) \geq 0$; (ii) les relations implicites entre w et l'état dynamique x ont pu s'écrire sous la forme $w = K\partial_x H(x) - MZ(w)w + g_{bis}(x,w)u$ avec $M = M^T \geq 0$. Cette structure baptisée ici *Systèmes à Hamiltoniens à Ports Etendus* (SHPE) reconduit à un bilan de puissance de type passif pour la sortie adaptée $y = \big[g(x)^T - g_{bis}(x,w)^T(I + MZ(w))^{-T}Z(w)^T K\big]\partial_x H(x)$. Comme en figure 3.3, une mise en équation automatique en SHPE de la cascade de deux étages de type SHPE communiquant par un port a été réalisée.

Pour la simulation, on a cherché un schéma de discrétisation qui préserve la passivité. Pour l'application testée[2], les opérateurs de différence finie suivants donnent satisfaction :

$$\mathrm{d}x(t,dt) = x'(t)\mathrm{d}t \quad \text{devient} \quad \delta x(t,\delta t) = x(t+\delta t) - x(t),$$
$$\mathrm{d}H(x,\mathrm{d}x) = \big[\partial_x H(x)\big]^T \mathrm{d}x \quad \text{devient} \quad \delta H(x,\delta x) = H(x+\delta x) - H(x).$$

En effet, la fonction $H(x)$ et l'état x du circuit sont donnés, respectivement, par la somme des énergies des condensateurs et la collection d'états x_n de chacun d'eux (par exemple, leur charge). Ainsi, H a la forme particulière $H(x) = \sum_{n=1}^N H_n(x_n)$. Il s'ensuit que $\delta H(x,\delta x) = \partial_x^d H(x,\delta x)^T \delta x$ où $[\partial_x^d H(x,\delta x)]_n = \frac{H_n(x_n+\delta x_n)-H_n(x_n)}{\delta x_n}$ si $\delta x_n \neq 0$ et $H_n'(x_n)$ sinon. La variation d'énergie $\delta[H\circ x](t,\delta t) = H\big(x(t+\delta t)\big) - H\big(x(t)\big) = \delta H\big(x(t), \delta x(t,\delta t)\big)$ avec l'équation dynamique à temps discret reconduit à la même forme (et aux mêmes inégalités) qu'en temps continu, dans laquelle on a substitué le vecteur $\partial_x H(x)$ par $\partial_x^d H(x,\delta x)$.

Pour un échantillonnage à la période $\delta t = T_e = 1/f_e$, la version à temps discret du SHPE conduit à résoudre des équations en $\delta x(t_k, T_e)$ et $w(t_k)$ (à $x(t_k)$ et $u(t_k)$ connus), dont on déduit $x(t_{k+1}) = x(t_k) + \delta x(t_k, T_e)$ et $y(t_{k+1})$. En pratique, les relations implicites sont résolues par un algorithme de type Newton-Raphson, qui donne satisfaction pour les mêmes conditions qu'en § 3.1.2 (3 itérations pour $f_e = 192$kHz). Une version qui fonctionne en temps réel a été réalisée chez Orosys, sous la forme d'un plug-in VST.

Ce travail sur les SHP(/SHPE) va être poursuivi dans le cadre d'une thèse sur le thème plus large de la simulation de modèles physiques producteurs de son à passivité garantie (cf. § 4).

[2]Il s'agit d'un pré-amplificateur simple, le *Tiny Terror* de la marque *Orange*, à 7 condensateurs (composants stockants), 13 résistances (composants dissipatifs linéaires), 2 triodes (composants dissipatifs non linéaires avec une source d'alimentation).

3.2 Projet Brasstronics

J'ai coordonné ce projet depuis son initialisation au sein du projet CONSONNES[3]*, d'abord en partenariat avec l'Ecole des Mines-ParisTech*[4] *où je donne des enseignements, puis en collaboration avec B. d'Andréa-Novel (Mines-ParisTech), C. Vergez et D. Ferrand (LMA, CNRS UPR 7051), R. Caussé, A. Terrier, G. Bertrand, V. Fréour, S. Goto, J.-P. Lambert, D. Perini (Ircam, CNRS UMR 9912) et dans le cadre de plusieurs stages (P. Chen, G. Parseihian, B. Véricel, N. Lopes). Depuis 2012, la plate-forme est assez avancée pour l'utiliser dans un travail de thèse (N. Lopes) que j'encadre avec R. Caussé.*

3.2.1 Motivation et description

Les instruments de musique de la famille des cuivres sont des systèmes physiques complexes. Ils mettent en jeu des phénomènes de mécanique des solides déformables (muscles, tissus biologiques), de mécanique des fluides (jet, turbulences) incluant la propagation acoustique. Comparé au résonateur, les connaissances sur l'excitateur (lèvres et couplage aéro-acoustique), sa modélisation et celle de son contrôle restent aujourd'hui assez élémentaires (§ 2.3). Pourtant l'excitateur avec son "pilotage humain" est crucial : il est responsable de la non-linéarité du système qui le rend auto-oscillant et capable d'une grande diversité de régimes. Ceci est encore plus délicat pour le cas analogue de la voix (autre système à valve humaine oscillante couplée à une charge acoustique) car la glotte est moins accessible que les lèvres et les moyens de mesure non invasifs sont limités. Afin d'explorer et caractériser les phénomènes fondamentaux, des plate-formes simplifiantes peuvent être utilisées [166, 73, 211] (cf. figure 3.5 pour des versions automatisées ou semi-automatisées). On trouve aussi des versions de telles machines pour assurer des *prestations*[5] (aujourd'hui majoritairement au Japon).

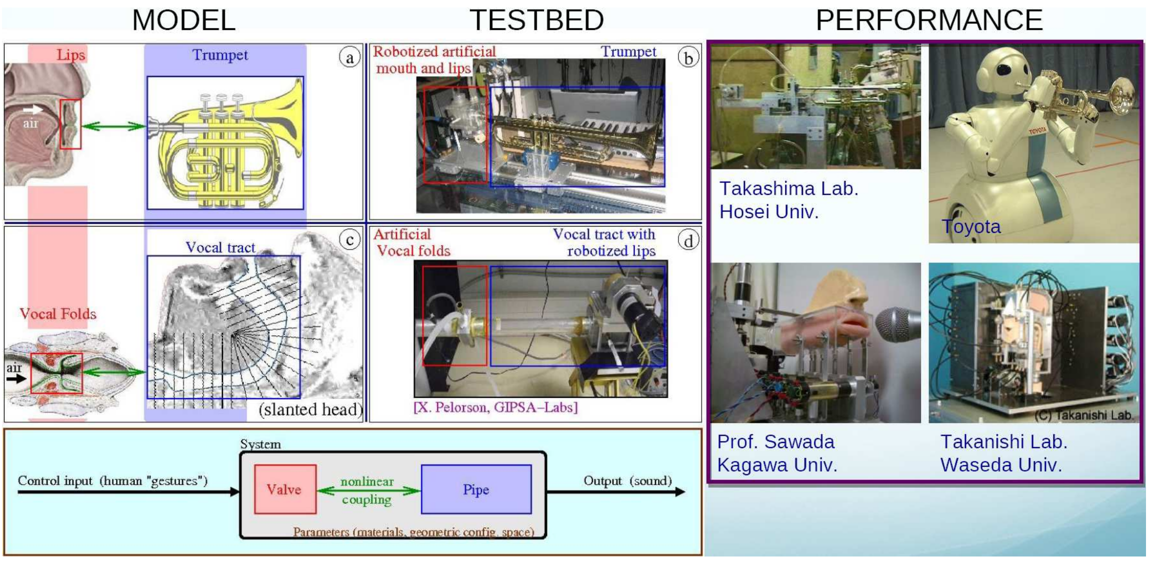


FIG. 3.5 – Jeu des cuivres et production de la voix : quelques exemplaires de reproductions artificielles automatisées de ces systèmes composés d'une *valve humaine oscillante* couplée à une charge acoustique.

L'outil que nous présentons ici a pour but de : (i) étudier le système aéro-dynamique et ces régimes auto-oscillants à l'aide d'expériences reproductibles et automatisées grâce à un contrôle artificiel des paramètres de la valve (ici, les lèvres) ; (ii) proposer des modèles, et d'en fournir des validations par comparaison de simulations numériques à des mesures ; (iii) mettre au point des commandes et asservissements pertinents pour le jeu. Quelques étapes de la mise au point de la bouche artificielle robotisée sont retracées et quelques organes sont illustrés en figure 3.6.

[3] ANR-05-BLAN-0097-01 (décembre 2005 - mai 2009, dirigé par J. Kergomard, LMA, CNRS UPR 7051) : CONtrôle des SONs Naturels Et Synthétiques. Cf. `http ://www.consonnes.cnrs-mrs.fr/`.

[4] Deux projets consécutifs de *mécatronique* impliquant 13 élèves ingénieurs de 2ième année (équipe pédagogique : B. Steux, J. Senpauroca, Y. Gaignebet), 3 élèves du BTS CPI du Lycée Léonard de Vinci, Melun (encadrant : P. Arbellot), 6 élèves des BTS IRIS et MAI (Lycée Diderot, Paris, encadrant : J.P. Lamy).

[5] La machine de Kempelen est un des ancêtres [49, 123].

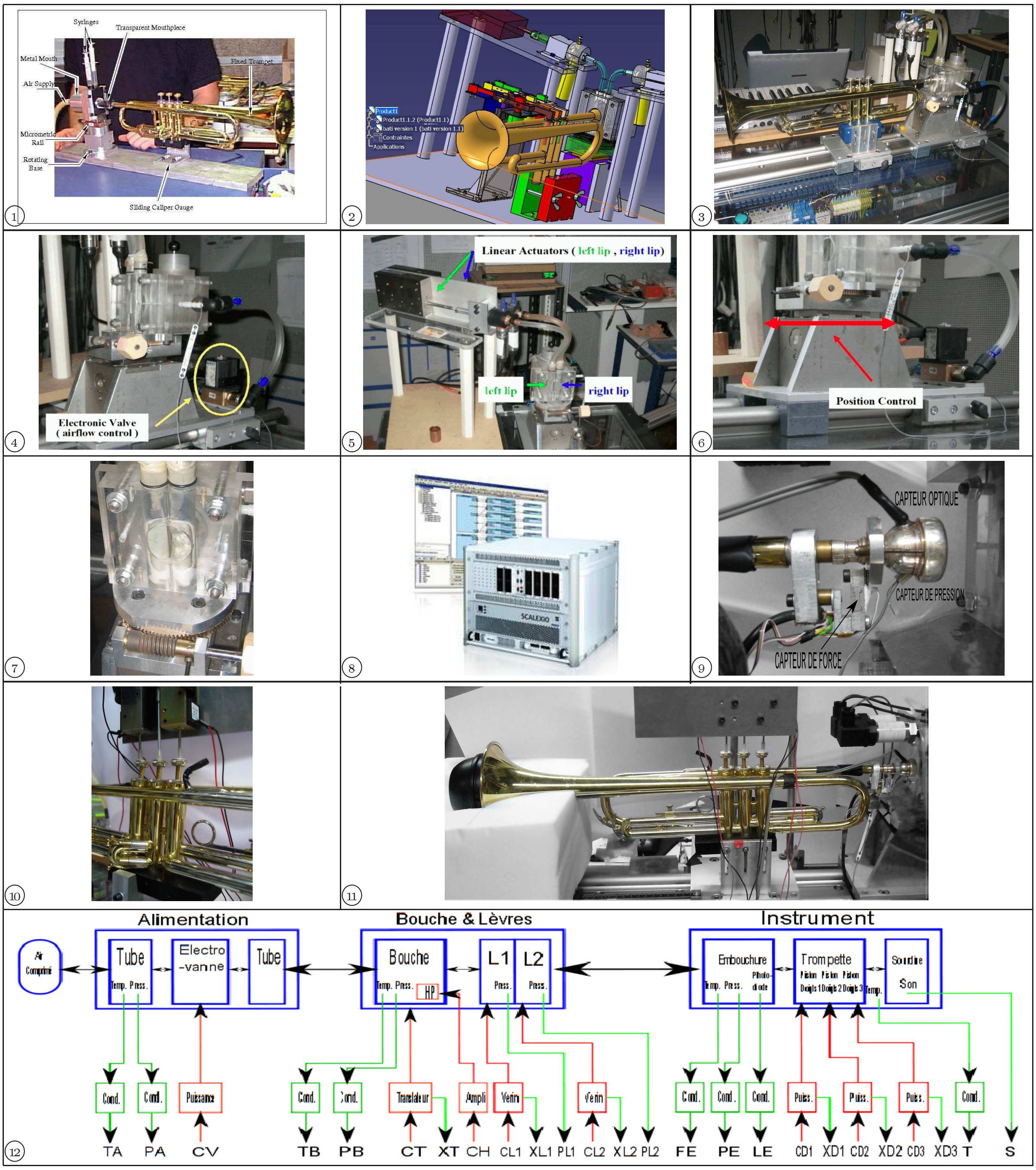


FIG. 3.6 – Evolutions de la bouche artificielle robotisée (2006-2011). De gauche à droite puis de haut en bas : 1. Bouche artificielle développée dans [209] (notre point de départ) ; 2. Première conception sous Catia réalisée à l'Ecole des Mines-ParisTech d'après le cahier des charges (2006) ; 3. Maquette reçue et retravaillée par A. Terrier, pilotée par une carte de contrôle *Rabbit* (2007) ; 4. Electro-vanne pilotant l'arrivée d'air ; 5. Vérins pilotant le volume d'eau dans les lèvres ; 6. Translateur pilotant la position de la bouche et son appui sur l'embouchure ; 7. Gros plan des lèvres ; 8. Remplacement du *Rabbit* par un système dSpace (2009) ; 9. Embouchure instrumentée (3 capteurs : pression statique/acoustique, force d'appui, intensité infra-rouge pour mesurer l'ouverture entre les lèvres, 2009) ; 10. Doigts électro-mécaniques (2011) ; 11. Vue de côté avec de nouveaux capteurs de pression d'eau (en haut à droite) utilisés en particulier pour le calibrage des lèvres (2011) ; Schéma global des entrées/sorties (2011-2012).

Le système est constitué des éléments suivants (cf. la sous-figure 3.6⑫ pour le schéma fonctionnel et la nomenclature des entrées et sorties). De l'air comprimé dont on mesure la température (TA) et la pression quasi-statique (PA) alimente une électro-vanne dont l'ouverture pilotée par la tension de commande (CV) contrôle un débit. Ce débit alimente en aval, la bouche artificielle dans laquelle on mesure la température de l'air (TB) et sa pression statique et acoustique (PB). Une excitation acoustique peut y être ajoutée via l'excitation (CH) d'un haut-parleur à compression. La bouche est fixée sur un translateur sur lequel une force commandée par la tension (CT) permet de changer la position qu'on mesure à $\pm 5\,\mu$m près (XT) et la force d'appui (FE) exercée par les lèvres sur l'embouchure. Les deux lèvres (L1,2) sont des chambres cylindriques en latex placées verticalement et remplies d'eau, en appui sur une plaque percée faisant office de dents. On pilote le volume de remplissage par deux vérins commandés en force (CL1,2) et dont on mesure la position (XL1,2). La pression d'eau au sommet des lèvres est également mesurée (PL1,2). En plus de la force d'appui (FE), on mesure dans l'embouchure la pression statique et dynamique (PE) et l'intensité de la lumière infrarouge (LE) passant entre les lèvres et générée par des LED placées dans la bouche. Ceci donne une estimation de l'aire d'ouverture entre les lèvres en fonction du temps. On peut placer un système de trois doigts électro-mécaniques commandés (CD1,2,3) et des capteurs incrémentaux mesurant l'enfoncement des pistons associés (XD1,2,3). Enfin, on peut placer un capteur (mobile) de température (T) sur ou dans l'instrument et mesurer le son à l'aide d'un microphone (S). Quelques éléments supplémentaires non mentionnés sur le diagramme sont : un système commandé de blocage pneumatique pour les vérins et à électro-aimant pour le translateur qui permet d'effectuer des mesures[6] pour des positions statiques sans être perturbé par d'éventuels effets d'asservissement en position. Les alimentations et conditionneurs de signaux sont placés sous la plate-forme dans une armoire dont l'ouverture des portes provoque la coupure de certaines alimentations. Un interrupteur "coup-de-poing" pour une coupure d'urgence est également placé sur la plate-forme.

Depuis 2009, les commandes, les mesures[7] et les asservissements de bas niveau (de type PID) du translateur et des vérins sont réalisés par les cartes d'un système dSpace/Simulink/Matlab-RTW©. Les pilotages de plus haut niveau, les procédures de calibrage et les expérience automatisées sont assurées sur l'ordinateur par l'environnement ControlDesk du système dSpace ou le logiciel musical temps réel Max/MSP avec lequel il est interfacé (Stage ENSEA de B. Véricel, 2009). Ceci a permis de premiers pilotages de l'air et des lèvres pour des régimes oscillants et de comparer les bifurcations observées à celles simulées (sous Manlab [30, 102], avec C. Vergez) pour des évolutions quasi-statiques de paramètres (Stage M2R ATIAM de B. Véricel, 2010).

3.2.2 Calibrage des lèvres, premières cartographies et résultats (Stages de N. Lopes)

En plus de la mesure des paramètres (TA,TB,T,PA) au repos, un réglage de l'origine de XL et un calibrage des lèvres sont effectués avant et après chaque expérience. Ceci permet d'avoir des versions standardisées des variables de positions, de caractériser l'élasticité du latex et de détecter sa fatigue ou la présence de fuite d'eau. On procède comme suit. Le translateur et les vérins sont d'abord reculés (pas de contact avec l'embouchure et lèvres quasi-vidées). On fait croître la position XL1 tout en mesurant la pression d'eau PL1 : (i) avant d'atteindre le volume nominal des cylindres en latex, PL1 est constante ; (ii) le latex se met ensuite en tension et PL1 devient une fonction affine de la position XL1 dont la pente estimée caractérise l'élasticité. Une origine robuste de XL1 est définie par l'abscisse du point d'intersection des deux droites estimées sur les données (i) et (ii). Ceci est reproduit sur la lèvre 2. Enfin, pour les lèvres remplies avec le volume nominal, on fait croître XT tout en mesurant la force d'appui FA qui permet de déterminer une origine robuste "de contact" pour la position du translateur, avec la même méthode. Une illustration est donnée en figure 3.7a-b. Pendant son dernier stage, N. Lopes a proposé un calibrage 2D qui établit le point de contact en fonction du volume d'eau dans une lèvre (cf. figure 3.7c), ainsi qu'un changement de variables plus élaboré qui donne une estimation du volume d'eau "utile", présent dans la partie déformée (noté ici VU1, VU2).

[6] Typiquement, ce mode est utilisé pour mesurer des réponses de lèvres excitées en petit signal via (CH) autour d'un équilibre.

[7] excepté S et parfois PB, PE, LE si l'on souhaite effectuer des mesures par une carte son à, typiquement, une fréquence d'échantillonnage de 48 kHz.

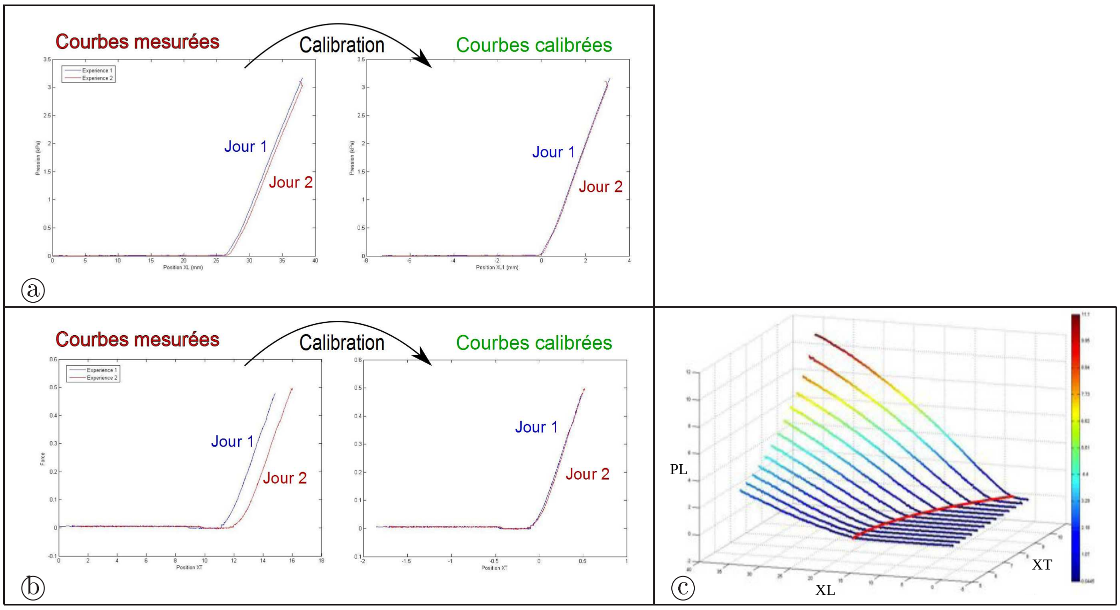


FIG. 3.7 – Illustration du calibrage des lèvres : ⓐ réglage de l'origine d'un vérin (pour 2 jours consécutifs), ⓑ réglage de l'origine du translateur (avec changement de la position de l'instrument entre les 2 jours consécutifs) ; ⓒ courbe caractérisant le contact entre une lèvre et l'embouchure.

L'analyse de signaux de pression d'embouchure PE enregistrés pour des balayages lents des positions (XL1,XL2,XT) et un débit d'air constant a permis de dresser de premières cartographies basiques (sans tenir compte de phénomènes d'hystérésis par exemple). En figure 3.8, on peut apprécier les fréquences de jeu détectables estimées[8]. Sur les sous-figures ⓑ et ⓒ, on peut observer que les lèvres n'ont pas un comportement parfaitement symétrique, ni en fonction de (VL1,VL2), ni en fonction de (PL1,PL2).

Pour le cas de la trompette, des tables de paramètres de notes jouables ont été générées à partir des des cartographies réalisées pour chaque doigté. Une commande en boucle ouverte construite à partir de cette table et pilotée depuis Max/MSP par un clavier MIDI (associé à un contrôleur de souffle pour le pilotage de l'électro-vanne) a permis de jouer quelques enchaînements basiques de notes[9]. Ces résultats ont été présentés en conférence [B4], [E9].

Dans le cadre du dernier stage (M2R ATIAM, 2012) de N. Lopes, des études semi-automatiques des résonances mécaniques des lèvres mises en contrainte par un anneau (mais sans l'instrument), similaires à celles proposées dans [73, 35], ont été réalisées. Elles révèlent la difficulté à obtenir des notes aigues. D'après des études qu'il a menées sur des trombonistes, V. Fréour (doctorant, Univ. McGill) a proposé de regarder l'influence du déphasage entre PE et PB que peut apporter un conduit vocal contrôlé[10]. Un contrôle actif (l'excitation étant fournie par le haut-parleur de compression commandé par CH) qui asservit le déphasage entre PB et PE a été réalisé sur le robot réglé pour une configuration statique (pour le moment, qui fournit un *buzz* jouable). Les résultats montrent que, pour chaque chaque note, l'amplitude de PE atteint un maximum pour un déphasage optimal (cf. figure 3.9 pour un exemple de résultat). Ceci apporte un indice positif sur cette potentielle stratégie des musiciens et pousse à poursuivre ce travail. Il suggère aussi que la jouabilité de certaines notes, encore inaccessible au robot, pourrait être récupérées en exploitant cette approche.

Enfin, un premier pas vers le formalisme des *Systèmes à Hamiltoniens à Ports* (dont il est question en § 4) et la modélisation complète du robot sous cette forme ont été initiées aussi dans ce stage : un modèle conservatif de jet (instationnaire) qui assure le transfert de puissance entre les lèvres et le jet a été élaboré. Celui-ci pourrait fournir une extension intéressante de l'équation de Bernoulli utilisée aujourd'hui.

Ces travaux seront poursuivis dans la thèse de N. Lopes qui a débuté en octobre 2012.

[8] La détection et l'estimation ont été fournie par la méthode YIN [40].

[9] Quelques vidéos sont disponibles à l'adresse suivante `http://recherche.ircam.fr/anasyn/helie/Brasstronics/index.html` .

[10] Cette stratégie semble être utilisée par les musiciens pour faciliter l'émission de notes aiguës qui correspondent à des pics faibles d'impédance d'entrée de l'instrument.

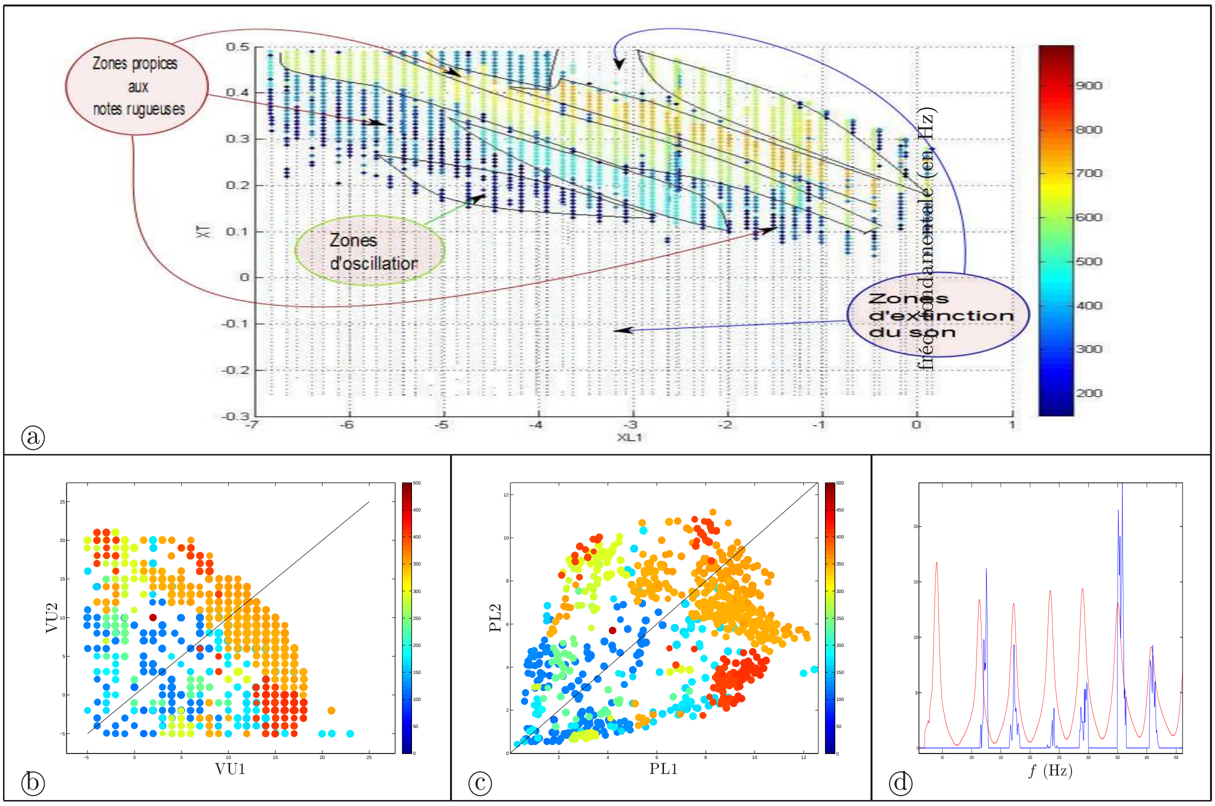


FIG. 3.8 – Cartographies des fréquences de jeu pour un débit d'alimentation constant en fonction des paramètres de contrôle des lèvres : ⓐ Cas d'une trompette en fonction de (XL1,XT) calibré et pour XL2 fixé ; ⓑ Cas d'un trombone en fonction de (VU1,VU2) et à XT fixé ; ⓒ Idem en fonction de (PL1,PL2) mesurés. ⓓ Histogramme des fréquences de jeu de b-c (en bleu) superposés (ordonnées qualitatives) au module de l'impédance d'entrée mesurée sur l'instrument (en rouge).

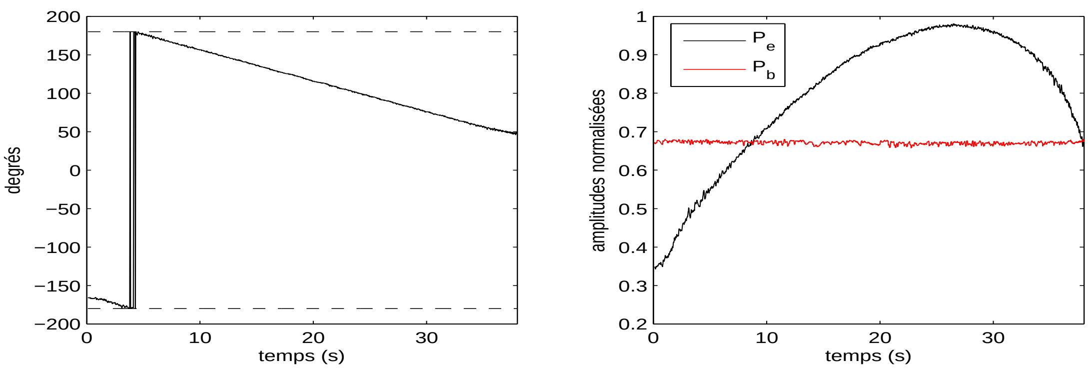


FIG. 3.9 – (Figure de V. Fréour) Différence de phases $\arg(P_b) - \arg(P_e)$ à gauche et amplitudes efficaces normalisées à droite, à la fréquence f_0 de l'oscillation établie pour les signaux de pression de bouche P_b et d'embouchure P_e. L'asservissement de CH est construit ici de sorte que $|P_b|$ reste constante et que le déphasage décroisse linéairement (au-delà de $t \approx 38$s, l'asservissement est mis en défaut par le système). L'amplitude de P_e atteint un maximum vers $t = 26s$.

Pour plus de détails, il sera possible de consulter l'article suivant à partir de juin 2013 : Fréour V., Lopes, N., Hélie, T., Caussé, R., Scavone G.. Simulating different upstream coupling conditions on an artificial trombone player system using an active sound control approach, In Proc. ICA 2013 Int. Conf. on Acoustics. Montréal, Canada.

3.3 Analyse/Synthèse de la voix informées par la physique (thèse de Thomas Hézard, en cours) et projet VoiceTronics

J'ai débuté explicitement mes travaux sur la voix en 2010 avec la proposition du sujet de thèse de T. Hézard et la mise en place du projet VoiceTronics[11] *que je coordonne avec T. Hézard et plusieurs spécialistes de la voix (cf. ci-dessous).*

3.3.1 Sujet de thèse

Cette thèse que je co-encadre (direction : R. Caussé-Ircam) s'intitule "Systèmes dynamiques de production de la voix informés par la physique et commandés par la géométrie pour l'analyse et la synthèse sonore". Elle s'effectue en collaboration avec B. Doval (LAM-IJLRA-UPMC) et s'articule avec le projet VoiceTronics décrit ci-dessous. Le sujet est le suivant.

Les outils d'analyse et de synthèse de la voix suscitent beaucoup d'intérêts et s'intègrent dans de nombreuses applications. La complexité des phénomènes mis en jeu dans sa production est telle que plusieurs approches ont dû être développées selon les buts visés. Ainsi, la communauté scientifique s'intéresse à des approches fondées sur : (1) la concaténation d'unités de sons (avec apprentissage sur des dictionnaires [55]), (2) des modèles de signaux (sinusoïdes plus bruit, formes d'ondes formantiques [175], etc), (3) la modélisation source-filtre [135], (4) des modèles physiques simplifiés (e.g. modèle de glotte à deux masses, représentation du conduit vocal par guides d'ondes ou impédances acoustiques), (5) des modélisations vibro-aéro-acoustique complexes (mécanique des fluides et des solides déformables couplés).
Aujourd'hui, les approches qui permettent à la fois des synthèses et analyses de qualité sont plutôt de type signal (1-3) alors que les approches plus physiques (4-5) permettent de comprendre le fonctionnement et de prédire le comportement de la voix. Plus précisément, pour les modèles "source-filtre" des méthodes d'estimation de paramètres [214, 41] sont disponibles, qui conduisent à une qualité sonore satisfaisante, mais le réalisme sonore est encore limité car des phénomènes significatifs (couplage glotte/conduit vocal, bruits de turbulence, double instant de fermeture de la glotte, etc) ne sont pas représentés. A l'inverse, il est difficile d'obtenir des méthodes d'estimation et d'inversion robustes pour les modèles physiques (4-5).
Dans cette thèse, on se propose de construire, d'étudier et de valider des systèmes dynamiques de production de la voix hérités de la structure source-filtre mais intégrant l'effet de la géométrie de la glotte et du couplage avec le conduit vocal. Ce sujet de thèse se situe à l'interface entre (3) et (4).
Le projet s'articule en trois parties :

(P1) Des modèles hérités du "modèle source-filtre" mais incluant des phénomènes physiques négligés dans les versions initiales seront proposés et étudiés. Dans un premier temps, on s'appuiera sur le modèle standard dit de Liljencrants-Fant [61] pour piloter l'ouverture d'un modèle aéro-acoustique simplifié de glotte plutôt que directement le débit glottique du modèle source-filtre original. On utilisera une pression sub-glottique et ce pilotage forcé pour exciter un modèle de conduit vocal de type filtre tout-pôle ou de type guide d'onde à parois mobiles vibrantes avec amortissement qu'on introduira. Dans un second temps, on développera des modèles plus fins de couplage aéro-acoustique et de géométries paramétrées de glottes (2D ou 3D) dont le pilotage restera forcé. Pour chacun des systèmes dynamiques ainsi obtenus, une simulation fonctionnant en temps réel sera développée dans des environnements appropriés (Max/MSP, Pure Data, etc). Pour piloter, comparer et valider ces modèles, deux types d'outils seront mis au point.

(P2) Un dispositif électronique d'électroglottographe multi-capteurs à multiplexage fréquentiel sera développé dans le cadre d'un projet mécatronique de l'Ecole des Mines-ParisTech. Deux étapes suivront. Dans l'étape (E1), cet appareil sera câblé vers des électrodes de surface placées sur une embouchure de trompette transparente. Le but sera d'acquérir de façon synchrone les signaux multidimensionnels d'impédancemétrie et les images d'ouverture (caméra rapide) d'une "valve humaine simple" (ici les lèvres d'un musicien en situation de jeu) afin de mettre en correspondance ces signaux et un modèle d'aire d'ouverture. Puis dans l'étape (E2), on adaptera ce système pour accéder à des signaux d'ouverture de glotte dépendant de l'espace à l'aide d'une électrode multi-capteur (plusieurs distributions géométriques des capteurs pourront être testées). Après une phase de calibration, les signaux seront utilisés pour piloter la géométrie (de complexité progressivement croissante) des modèles développés en 1, y compris dans les environnements temps réel. Une campagne de mesures sur des locuteurs et chanteurs sera lancée pour former des dictionnaires de tels signaux associés aux sons produits.

(P3) Des outils d'estimation automatique des paramètres de pilotage seront développés pour chaque modèle afin d'aboutir à une chaîne complète d'analyse-resynthèse de son. Les critères d'optimisation pourront être construits à partir de fonctions de vraisemblance, de fonctions définies positives construites sur des énergies physiquement sensées, de termes de régularisation standard (e.g. de Tikhonov [205]).

[11] Projet dans le cadre des projets de mécatronique de l'Ecole des Mines-ParisTech.

3.3.2 Premiers travaux et résultats

Le modèle source-filtre du signal de voix (cf. e.g. [135]) sépare idéalement les rôles joués par l'excitation (ou la source) majoritairement produite par le larynx et son filtrage acoustique opéré par le conduit vocal(/nasal) et le rayonnement : la source est assimilée au débit d'air glottique U_g et le filtre G est souvent approché par celui résultant d'une cascade de tubes droits (cf. figure 3.10ⓐ). Pour les sons voisés (glotte en vibration), U_g prend la forme d'un train d'impulsions. Un modèle paramétrique très employé d'une impulsion temporelle caractéristique est celui de Liljencrants-Fant (LF) [61, 60, 88]. On en connaît bien aussi les caractéristiques spectrales [45]. Des techniques de séparation, d'estimation de paramètres et de resynthèse avec contrôle de la qualité de la voix ont été proposées dans e.g. [126, 41, 42, 47].

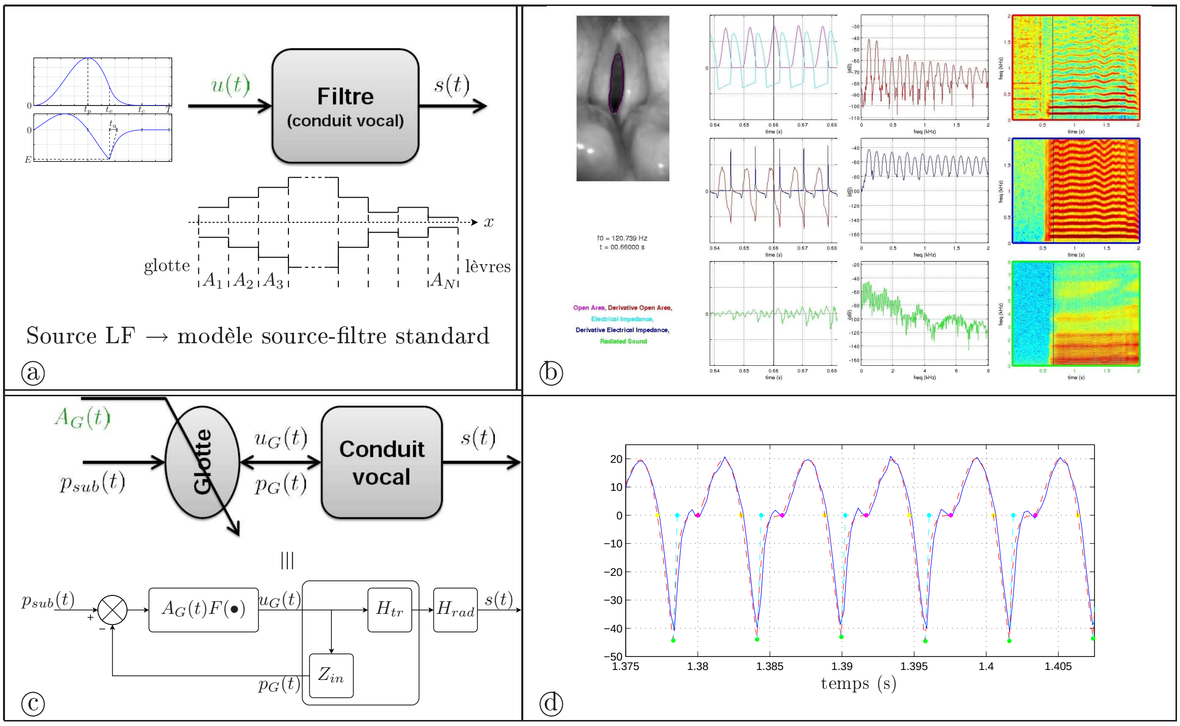


FIG. 3.10 – Exploration d'une base de données et proposition d'un modèle. ⓐ Modèle source-filtre excité par un débit glottique de type LF (en haut U_g, en bas sa dérivée $U_g'(t)$ pour une période). Le conduit vocal est assimilé au filtre résultant d'une cascade de N tubes droits et un tube de section infinie (rayonnement simplifié). ⓑ Capture d'écran de l'outil de visualisation vidéo (signaux et films construits sous Matlab) ; A gauche, de haut en bas : endoscopie ultra-rapide, affichage synchrone (avec barre de lecture) des signaaux d'aire glottique estimée $A_g(t)$ (en magenta), d'électroglottographie (en cyan) avec les dérivées respectives, et du son (en vert) ; A droite, les spectres et spectrogrammes correspondants. ⓒ Modèle piloté par l'aire glottique A_g et la pression sub-glottique p_s. ⓓ Signal U_g' (en bleu) et modèle de LF pour les paramètres estimés (en rouge).

Pour étudier le problème (P1), le forçage du modèle a été déplacé du débit glottique U_g vers l'aire glottique[12] $A_g(t)$ en introduisant un modèle simple de jet (équation de Bernoulli en régime quasi-stationnaire), engendré par une pression sub-glottique p_s, établi dans un canal de section $A_g(t)$, et couplé acoustiquement à une cascade de tubes droits (cf. figure 3.10ⓒ). Cette démarche permet de passer d'une acoustique forcée (via U_g) à une géométrie forcée (via A_g) avec une pression sub-glottique p_s (supposée lentement variable). Elle s'accompagne du problème de la modélisation de A_g. Pour aborder cette question, un premier travail de T. Hézard a consisté à construire un outil de visualisation de données synchrones[13] (cf. figure 3.10ⓑ, qui incluent des sons de voyelles tenues, des vidéo-endoscopies ultra-rapides de larynx

[12] Cette idée est déjà exploité dans e.g. [133] mais sans tenir compte du jet : dans ce cas, l'aire glottique pilote seulement une charge acoustique.
[13] Enregistrements réalisés par Erkki Bianco et Gilles Degottex [41].

(4kHz), et des signaux calculés. Ces-derniers sont l'aire glottique $A_g(t)$, sa dérivée temporelle, le spectrogramme du son, les spectres du son et de A'_g. Cette première étape a permis d'observer que : (O1) pour une partie significatives des données bio-métriques analysées, les signaux d'aire glottique A_g sont composés d'impulsions qualitativement proches du modèle LF ; (O2) sur toute la base de données, ces signaux présentent aussi une diversité importante de régimes. Suite à l'observation (O1), une méthode d'estimation des paramètres LF sur les signaux d'aire glottique a été mise au point (voir un résultat en figure 3.10ⓓ). Cette méthode s'appuie sur l'optimisation [112] d'un critère de type "moindres carrés" pour une fenêtre d'analyse glissante contenant 3 périodes de signal.

La pertinence du modèle de production de voix piloté par A_g et p_s a été testée sur des simulations. En figure 3.11ⓐ, l'influence du conduit vocal sur la forme de U_g est mise en évidence : les trois simulations sont réalisées avec le même signal A_g et la même pression sub-glottique (constante), et seul le conduit vocal qui charge la glotte est modifié (du haut en bas : $\backslash u\backslash$, $\backslash o\backslash$, $\backslash i\backslash$. La charge induite par le $\backslash i\backslash$ modifie significativement le signal U_g. On peut même observer de courtes durées sur lesquelles le débit est négatif. Dans cette simulation, cet effet démonstratif est un peu sur-évalué comparé à la réalité, dans la mesure où le conduit vocal ici idéalisé ne dissipe pas d'énergie. La figure 3.11ⓑ illustre l'influence de p_s sur l'enrichissement spectral du son (ici, pour un conduit vocal et un signal d'aire glottique identiques pour les trois simulations).

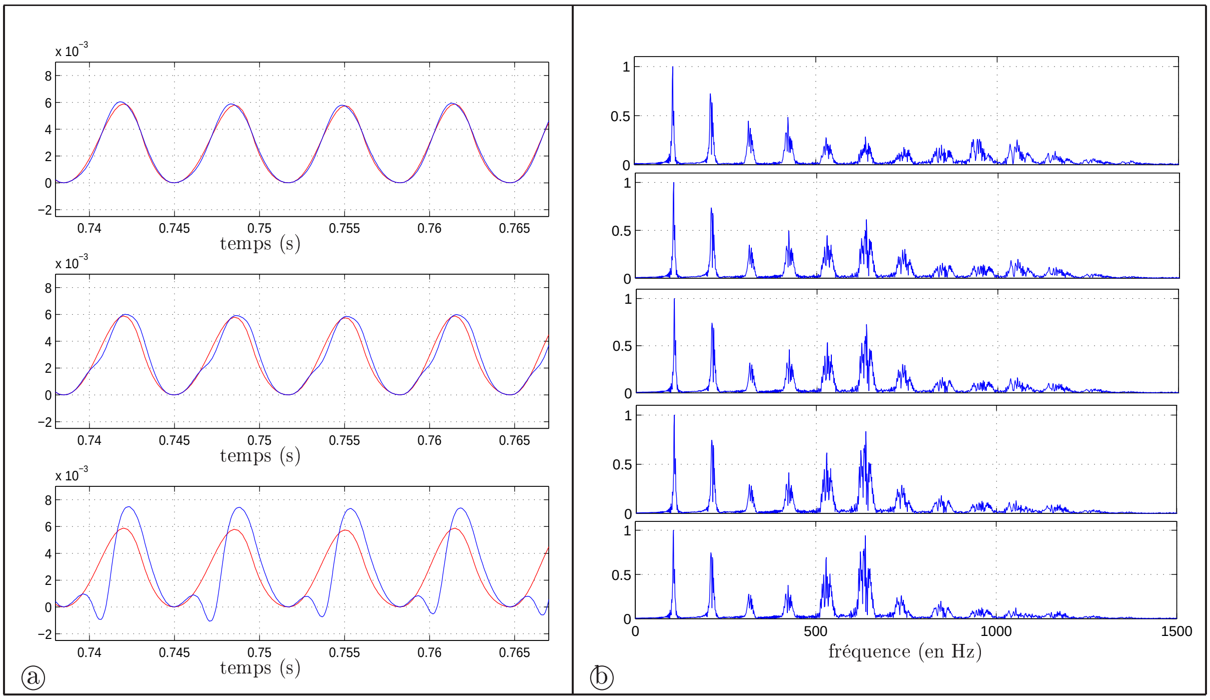


FIG. 3.11 – Résultats de simulation du modèle de la figure 3.10ⓒ avec p_s constant : ⓐ comparaison de signaux U_g (en bleu) au signal A_g (forcé de type LF, en rouge) pour trois conduits vocaux typiques, de haut en bas $\backslash u\backslash$, $\backslash o\backslash$, $\backslash i\backslash$ (profils issus de [201]) ; ⓑ Evolution du spectre de $u'_{\text{lèvres}} \propto p_{\text{son rayonné}}$ en fonction de p_s. De haut en bas : 1, 5, 10, 20 et 40 cm H_2O (Rq. : 1cm $H_2O \approx$ 100 Pa).

Ces résultats ont été présentés dans [B5] et [C41]. Ils montrent que le couplage aéro-acoustique est susceptible d'apporter des améliorations dans le cadre d'une estimation conjointe LF-conduit vocal. Par ailleurs, pour introduire un effet de couplage mécanique jet-valve oscillante et représenter la diversité des régimes observés (O2), une modélisation simple de A_g, autre que LF mais qui n'augmente pas ou peu le nombre de paramètres, a été proposée ci-dessous. La pertinence de la réunion de ces couplages a pu être exhibée et caractérisée expérimentalement sur des reproductions de plis vocaux [127, 192].

Modélisation en système de Lur'e de la diversité des signaux d'aire glottique (Stage M2R ATIAM de M. Le Borgne)

Ce stage a été encadré par T. Hézard et co-encadré par moi-même. Il a été impulsé lors du comité d'évaluation scientifique de l'Ircam en décembre 2011, suite à une discussion avec M. Hasler (EPFL) que nous remercions.

Ce travail a consisté à adapter au cas de la voix et de signaux de source glottique, des outils d'estimation de paramètres de systèmes non linéaires, dits « de Lur'e », capables de produire une grande diversité de régimes. Cette méthode, originellement mise au point par Oscar De Feo et le professeur Martin Hasler, a déjà produit des résultats originaux et remarquables pour classifier divers signaux bio-métriques complexes (ECG, EEG, parole, etc) [63, 64]. Ici, le but visé n'est pas de catégoriser des régimes mais d'analyser et synthétiser des signaux bio-métriques de voix et leur variabilité.

Les systèmes de Lur'e [128, 129, 106] sont composés d'un système linéaire stationnaire mono-entrée/mono-sortie (fonction de transfert G) bouclé avec un système non linéaire sans mémoire éventuellement variant dans le temps (fonction ψ telle que $\psi(x)/x$ est bornée), cf. figure 3.12. L'intérêt de cette structure est qu'elle permet de générer des régimes variés, y compris chaotiques, et d'étudier les propriétés du système (dont la stabilité) à l'aide d'outils et de critères simples.

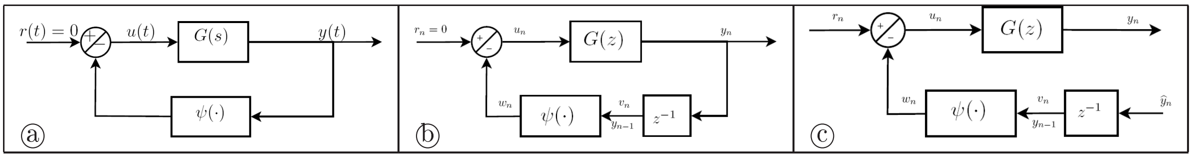


FIG. 3.12 – Système de Lur'e : ⓐ domaine à temps continu ; ⓐ domaine à temps discret incluant un retard dans la boucle de rétro-action ; ⓒ Version à boucle ouverte utilisée pour l'identification.

L'idée développée dans [63] consiste à estimer les paramètres de G et ψ de sorte que (cf. figure 3.12ⓒ) le système en boucle ouverte : (i) ne soit pas un voisin de l'identité ; (ii) reproduise l'identité pour le signal observé. On cherche ainsi la combinaison d'une déformation *linéaire à mémoire* et *non-linéaire sans mémoire*, non triviale, qui se compense uniquement pour le signal (/la classe de signaux) d'intérêt. On espère ainsi que le système bouclé va regénérer des signaux qualitativement proches de ceux de la classe d'intérêt et isoler un régime type, au sein de la diversité des signaux bio-métriques observés dans la base de données.

L'estimation est construite en minimisant une distance standard (de type "moindres carrés") pénalisée au voisinage de l'identité. Pour les paramètres pour lesquels le problème est non linéaire et non convexe, des raisons de choix pratique nous ont conduit à utiliser un algorithme de type "recuit simulé" plutôt que l'algorithme génétique proposé dans le travail initial [63].

Un premier test sur des signaux de la base de données a été effectué en choisissant une fonction paramétrée ψ générique (typiquement une fonction affine par morceaux) et un filtre d'ordre N faible ($N \leq 4$). Cette étape n'a conduit ni à des optimisations robustes exploitables, ni à un compromis intéressant entre le nombre de paramètres et la "pertinence de ψ" . Pour améliorer la pertinence, la seconde approche s'est appuyée sur une modélisation physique caricaturale à peu de paramètres et compatible avec le modèle de Lur'e : la valve oscillante est représentée par un système à une ou deux masses ($N \leq 4$), la charge acoustique Z_{in} (cf. figure 3.10ⓒ) est idéalisée par une réponse sans mémoire (constante), la surface de la valve est supposée mobile mais rigide de sorte que la pression du jet (bilan de Bernoulli quasi-stationnaire) applique une force globale.

Pour un choix de variables réduites adaptées, ces équations conduisent à un filtre linéaire auto-régressif (d'ordre 2 ou 4) et à une fonction non linéaire donnée par

$$\psi_{p_s,p_\star}(x) = -p_s f\Big(\frac{p_\star}{p_s} g(x)\Big) \quad \text{avec} \quad f(X) = X\big(1-\sqrt{1+2/X}\big), \quad \text{et} \quad g(X) = x^2/(1-x^2),$$

où p_s est la pression sub-glottique et $p^\star = \big(\frac{A_{\text{avant glotte}}}{A_{\text{entrée conduit}}}\big)^2 \rho c^2$ est de l'ordre de $1.4{\times}10^5$Pa (cf. figure 3.13)[14].

[14]La fonction dégénère continûment en -1, 0 et 1.

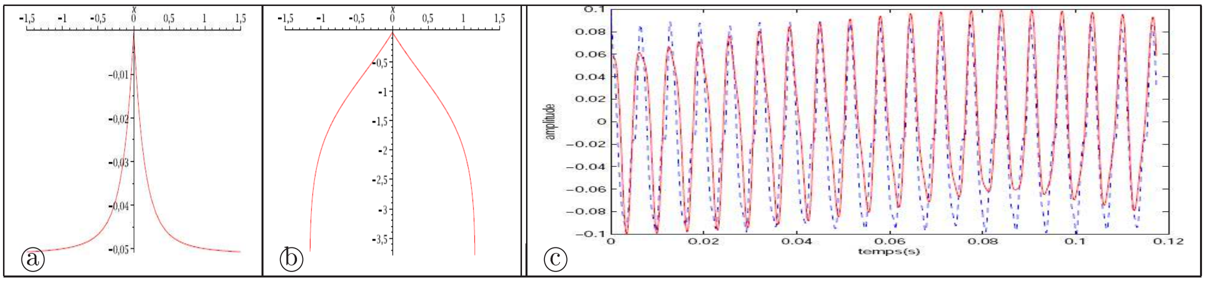


FIG. 3.13 – Tracés de la fonction $x \mapsto \psi_{p_s,p_\star}/p_s$ pour deux valeurs de (son unique paramètre) $\gamma = p_s/p_\star > 0$ et résultat d'estimation/resynthèse : ⓐ $\gamma = 0.1$; ⓑ $\gamma = 4$; Resynthèse (en rouge) d'un signal cible (en bleu) à partir de l'estimation des paramètres du système de Lur'e. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ si $\gamma < 1/2$ (cas physiologiquement réaliste, typiquement pour $p_s < 4\,\mathrm{kPa}$) et sur $[-x_\star, x_\star]$ avec $x_\star = \sqrt{2\gamma/(2\gamma-1)}$ sinon. Le résultat présenté en ⓒ correspond au cas $\gamma < 1/2$.

Cette approche simplifie la procédure d'optimisation dans la mesure où : (i) ψ ne peut pas générer de fonction au voisinage de l'identité ; (ii) le modèle est non linéaire seulement selon 2 paramètres (p_s et $p_\star$). Malgré la robustesse de l'analyse qui découle de ces deux propriétés et la variété possible des régimes auto-oscillants générée par le système en boucle fermée, les signaux simulés restent encore trop éloignés de la cible pour être utilisés en synthèse.

Perspectives. Deux pistes possibles d'amélioration (pour se rapprocher de (P3) dans le sujet de thèse) sont : (i) introduire une excitation $r \neq 0$ additive stochastique en amont du filtre (cf. figure 3.12), maximiser la vraisemblance des données et inférer des raffinements de modèle en analysant ce signal ; (ii) raffiner le modèle sur des considérations physiques (abandon de la forme de Lur'e pour se rapprocher de modèles complets, e.g. [213, 181, 5], mise sous forme de système passif avec source).

Enfin, une approche expérimentale a été lancée via le projet VoiceTronics décrit ci-dessous.

3.3.3 Projet VoiceTronics

En 2010, j'ai proposé à l'Ecole des Mines-ParisTech, et lancé avec T. Hézard et N. Henrich (GIPSA-Lab, CNRS UMR 5216) ce projet de mécatronique[15]. Ce projet a été reconduit en 2011 et 2012 avec les collaborations additionnelles de spécialistes d'électro-glottographie, M. Kob (prof., Univ. Detmold), T. Legoux (LPL, CNRS UMR 6057) et de l'anatomie et de la chirurgie du larynx, A. Lagier (Chirurgienne ORL, Hôpital La Timone). Le stage d'A. Mauffrey (2012, ENSEA-2A, correspondant : A. Tauvel) encadré par T. Hézard, E. Flety et moi-même à l'Ircam, est venu compléter les travaux sur le capteur multi-canal décrit ci-dessous.

Ce projet consiste à construire trois dispositifs électroniques ou mécatroniques : (1) un système de mesure généralisant l'électroglottographie (EGG) ; (2) une maquette reproduisant une géométrie simplifiée des plis vocaux à l'échelle 1 :1 dont l'ouverture $A_g(t)$ est pilotable en temps réel ($f_{oscillation} < 200Hz$), conçue en matériau conducteur afin d'étalonner et tester le dispositif (1) ; (3) une maquette agrandie, articulée et pilotable ($f < 1\mathrm{Hz}$), composée de reproductions morpho-réalistes des principaux cartilages et tissus du larynx impliqués dans la phonation.

EGG/TEI multi-canal : projet VoiceTronics et stage ENSEA d'A. Mauffrey

L'électroglottographie (EGG) est un moyen non invasif de mesure de l'activité de la glotte par impédancemétrie. Ce dispositif a été mis au point par P. Fabre en 1957 [59]. Le principe est d'imposer un courant alternatif de faible intensité ($\leq 10\,\mathrm{mA}$) entre deux électrodes cutanées posées sur le cou, de part et d'autre du larynx, à une fréquence suffisamment élevée (typiquement $2\,\mathrm{MHz}$) pour que la résistivité du corps soit suffisamment faible (de l'ordre de quelques centaines d'Ohm). La tension mesurée donne

[15] Equipe pédagogique : B. Steux, J. Senpauroca, Y. Gaignebet, D. Brousse, F. Bruyère et J. Rupil.

une image de l'impédance (majoritairement résistive). En phonation, pour une position statique des organes (larynx, langue, etc), cette tension va décroître d'autant que la surface de contact entre les plis vocaux est grande. Les signaux permettent d'accéder à de nombreuses informations sur l'activité de la glotte (périodicité, instants d'ouverture et de fermeture, type du mécanisme laryngé [178] (voir aussi [88, chap. 5] pour une description détaillée et e.g. [89]). Un système à $2+2$ électrodes [177] et un autre à $6+6$ électrodes [109] à multiplexage temporel permettent d'avoir une information spatiale un peu plus fine et, en particulier, d'estimer la position du larynx et un signal d'EGG valide quelle que soit cette position.

La tomographie d'impédance électrique (TEI, ou EIT en anglais) a été introduite par D.C. Barber and B.H. Brown [6] en 1984. Le principe est d'imposer un faible courant alternatif entre deux électrodes (souvent proches) et à mesurer la carte du potentiel à la surface du corps avec d'autres électrodes en haute impédance) [91]. On utilise cette information et des techniques de problèmes inverses pour estimer une carte interne de conductivité. Sur l'humain, cette technique est appliquée aujourd'hui pour l'imagerie pulmonaire et l'activité cérébrale. Pour la glotte, de premiers algorithmes, simulations [188] et essais "in vitro" [122] ont été testés.

Le dispositif que nous proposons ici inclus les deux approches avec des excitations et mesures multi-canaux, par multiplexage fréquentiel (cf. figure 3.14). Ce système, encore en cours d'élaboration (cf. sous-figure ⓑ), est composé de (cf. les autres sous-figures) : ⓐ M électrodes, chacune étant connectable via un routeur à au plus un des K+N+L dispositifs suivants, ⓒ K générateurs de courant de fréquences $f_{k=1,\ldots,K}$, ⓓ N résistances connectées à la masse (flottante), ⓓ L suiveurs, un nombre limité ($J < K(K+N+L)$) de démodulateurs et convertisseurs numériques (format ADAT). Le routeur est configurable à 48 kHz et les commutations sont réalisées de sorte qu'un générateur de courant n'est jamais en circuit ouvert. Sa fonction est de distribuer et recueillir les signaux électriques sur des électrodes à géométrie quadrillée "en *pixels*". Il permet aussi de réaliser un multiplexage temporel similaire à [109].

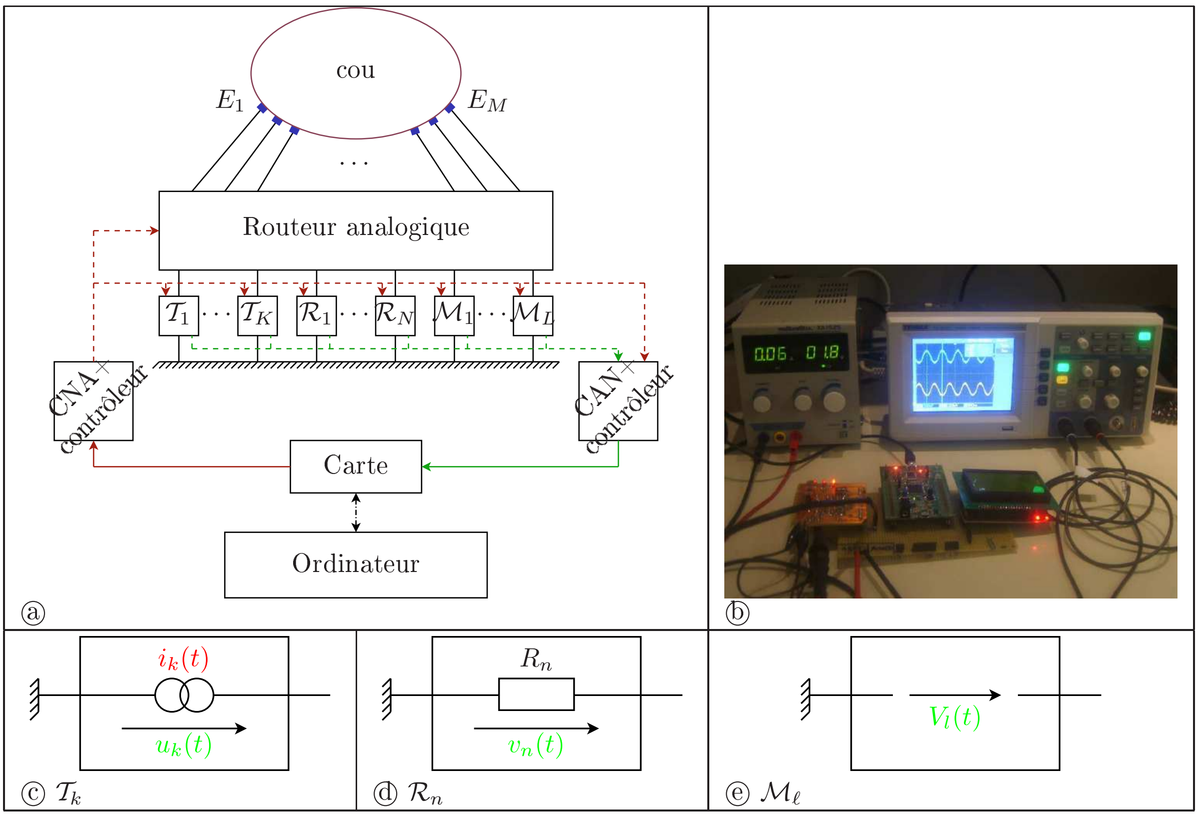


FIG. 3.14 – Système d'EIT/EGG multi-capteurs : ⓐ Système complet (signaux de commande et de configuration en rouge, signaux de mesure en vert, composants et fils électriques en noir, électrodes en bleu) ; ⓑ Version actuelle de la carte électronique réalisée (Stage ENSEA 2A d'A. Mauffrey) ; ⓒ Emetteur $\mathcal{T}_k$; ⓓ Récepteur $\mathcal{R}_n$; ⓔ Mesure de potentiel en haute impédance $\mathcal{M}_l$.

Le prototype en cours de développement vise les spécifications réduites suivantes : $K = 2$, $N = 2$, $L = 4$ et $M = 16+16$. Au moment de la rédaction de ce document, la version la plus aboutie a été obtenue pendant le stage d'A. Mauffrey à l'Ircam. Une carte et des sous-modules adaptés à l'évolution vers le prototype visé ont été mis au point : le micro-contrôleur qui gère la carte et assure la communication avec l'ordinateur, la configuration des générateurs de courant (avec son protocole), la configuration d'une partie du routeur et un démodulateur, ont été réalisés et fonctionnent.

Ce travail va être poursuivi. Les premiers tests des fonctions EGG et EIT avec récupération des signaux numérisés sous Max/MSP sont prévues pour le deuxième trimestre 2013.

Maquettes robotisées

L'anatomie du larynx est d'une grande complexité. Quelques éléments constitutifs, leur cinématique et quelques pilotages typiques sont décrits en figure 3.15.

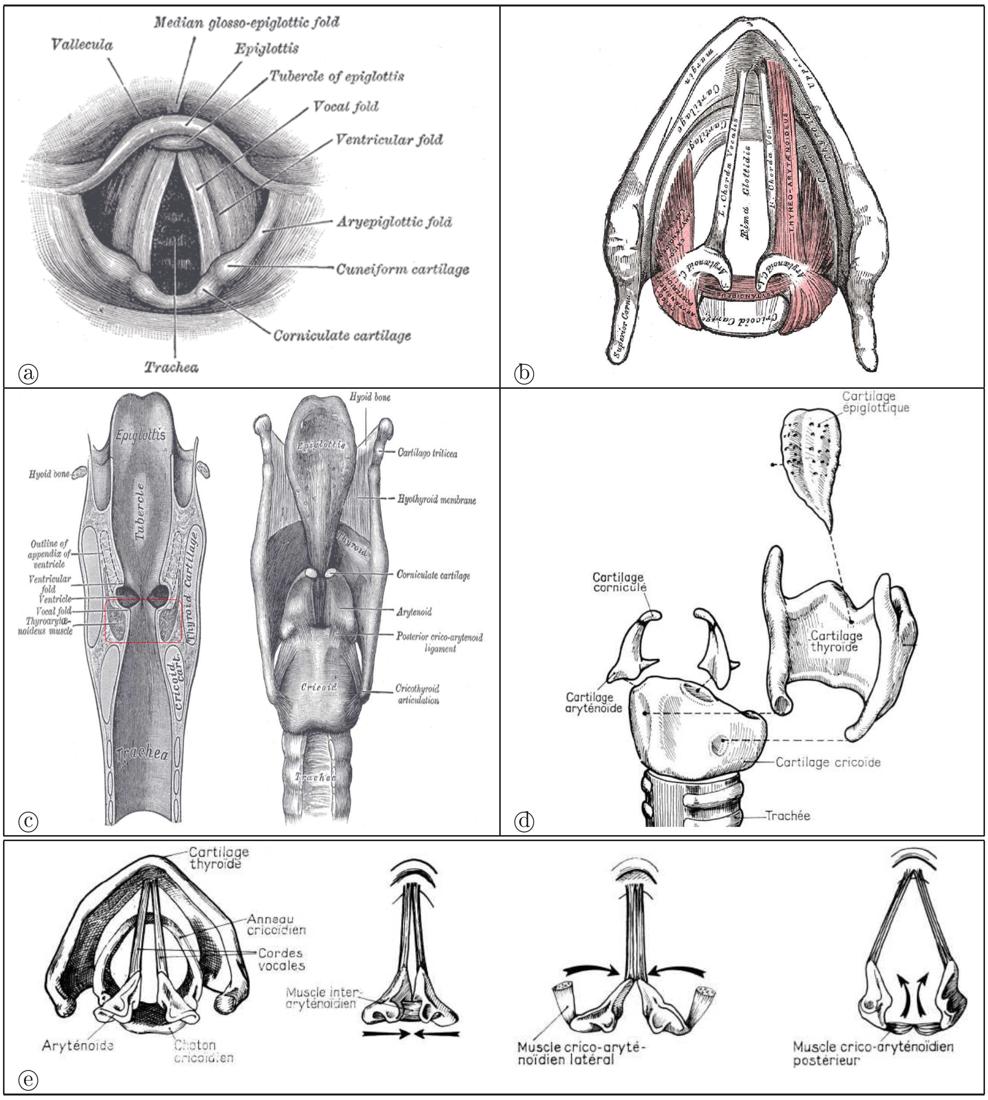


Fig. 3.15 – Anatomie du larynx (sources : [77] pour ⓐ-ⓒ et [117] pour ⓓ-ⓔ avec l'accord d'Elsevier Masson SAS). ⓐ Vue endoscopique du dessus de la glotte (la pomme d'Adam correspond au haut de la figure) ; ⓑ Muscles du larynx (Image originale tournée de 180° pour la cohérence avec les autres sous-figures et la figure 3.10ⓑ) ; ⓒ Coupe frontale du larynx (partie "valve oscillante" encadrée en rouge) ; ⓓ Décomposition des principaux cartilages ; ⓔ Pilotage des arythénoïdes avec de gauche à droite : 1. vue globale, 2. muscle interaryténoien (cinématique approchable par une "liaison glissière" horizontale) ; 3. muscle crico-aryténoïdien latéral (liaison pivot avec levier), 4. muscle crico-aryténoïdien postérieur (idem).

Maquette à l'échelle 1 :1. La construction d'une maquette a été engagée pour tester et valider, "in vitro" à l'échelle 1 :1, le dispositif EGG/EIT multi-canal . Cette maquette (cf. figure 3.16) est construite avec un bio-matériau souple et conducteur (hydrogel[16] [85, 198] de couleur blanchâtre sur les sous-figures 3.16ⓒ-ⓔ), moulé sur une armature cylindrique rigide perforée (voir la partie centrale de ⓑ et la partie rouge recouverte d'hydrogel dans ⓓ-ⓔ). A cause des difficultés techniques dues aux faibles dimensions, on se contente ici de reproduire une géométrie intérieure qui reproduit un relevé anatomique simplifié d'un conduit laryngé au repos (sous-figure 3.16ⓐ) : les moules négatifs (parties supérieure et inférieure de ⓑ) ont été construits à l'aide d'une prototypeuse 3D.

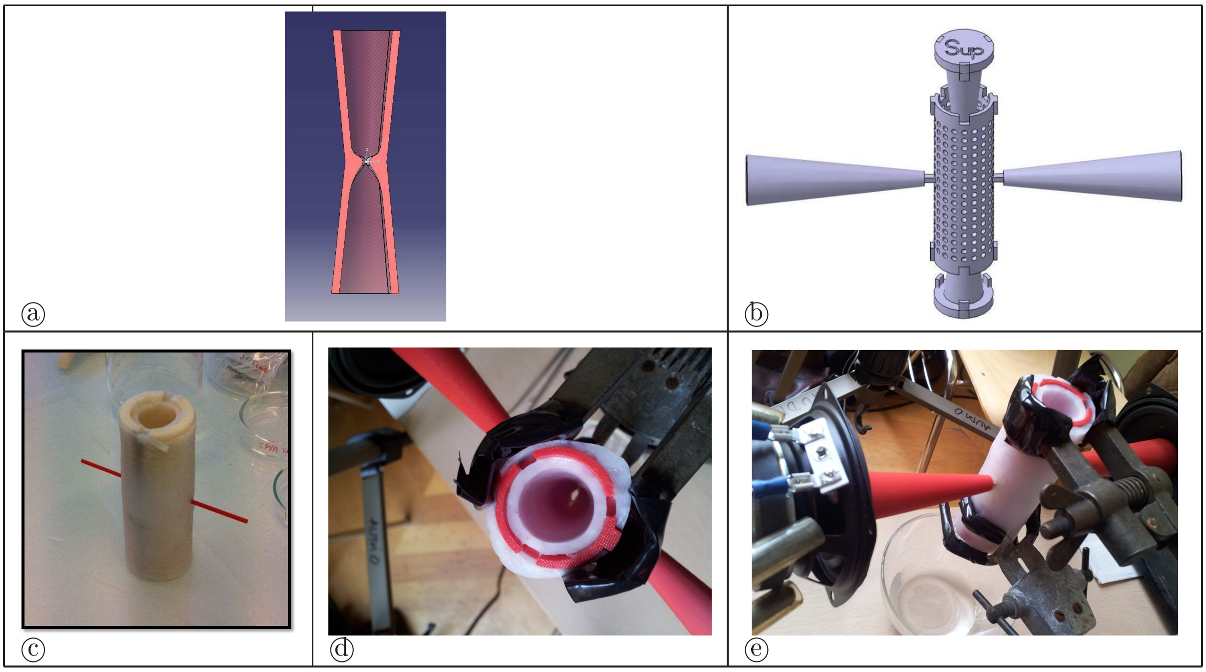


Fig. 3.16 – Maquette à l'échelle 1 :1. ⓐ Coupe du conduit laryngé relevé puis modélisé en Catia ; ⓑ Ensemble des pièces en Catia à construire avec la prototypeuse 3D (moules en haut et en bas, armature perforée au centre, et sur les côtés, cônes d'adaptation pour l'entraînement des barres de contrôle par les haut-parleurs) ; ⓒ Hydrogel (en blanc) moulé sur l'armature performée, et barres d'entraînement (en rouge) ; ⓓ Maquette vue du dessus (hydrogel en blanc et pièces rigides réalisées par la prototypeuse en rouge) ; ⓔ Vue d'ensemble avec les haut-parleurs pour le pilotage.

Le pilotage de la structure souple est assuré par des barres d'entraînement moulées à la hauteur des plis vocaux (barres rouges en sous-figure 3.16ⓒ) qui passent à travers deux fenêtres de l'armature cylindrique. Ces barres sont fines, rigides et non métallique pour perturber le moins possible la conductivité du tissu artificiel. Pour établir un signal d'aire glottique $A_g(t)$ avec des oscillations forcées ($f \leq 200$Hz), ces barres sont mises en mouvement par deux haut-parleurs de façon quasi-symétrique (mêmes modèles et excitations) à l'aide de pièces d'adaptation (cônes rouges en sous-figure 3.16ⓓ-ⓔ).

Il est actuellement prévu d'asservir les haut-parleurs sur : (i) une mesure des positions des barres, ou bien, (ii) un signal d'intensité lumineuse relié à l'ouverture de la glotte $A_g(t)$. La mise en fonction effective d'une version améliorée de cette maquette est prévue pour le premier trimestre 2013.

Maquette agrandie. L'idée de construire une telle maquette est venue suite à une discussion avec l'équipe enseignante des projets mécatroniques (Mines-ParisTech), demandeuse d'une partie cinématique actionnée plus sophistiquée que la maquette précédente. Nous avons proposé de reproduire quelques éléments clef articulés du larynx. Le but est de construire un dispositif morpho-réaliste démonstratif et pédagogique, qui permette de reproduire et visualiser les mouvements principaux utilisés pour configurer

[16]Nous remercions Messieurs Laurent Corté et David Moreau du Centre des Matériaux, Mines-ParisTech, CNRS UMR 7633 pour avoir validé la faisabilité, fourni le matériau et permis le moulage.

les plis vocaux en situation de phonation. Il ne s'agit donc pas littéralement d'un travail de recherche sinon que cet outil fournira un "guide" pour le plus long terme, dont l'évolution est contrôlée par une chirurgienne spécialiste du larynx et qui enseigne son anatomie (Aude Lagier, faculté et hôpital de La Timone, Marseille).

La cinématique simplifiée considérée pour le moment est la suivante (cf. figures 3.15ⓓ pour l'anatomie[17] et 3.17 pour la maquette) : (i) liaison glissière (translation verticale) entre le cou (E1, référentiel) et le crycoïde (E2, cartilage de la base de la trachée) ; (ii) liaisons pivot entre (E2) et le tyroïde (E3, cartilage de la "pomme d'Adam") ; (iii) une liaison combinant rotation et translation entre (E3) et chacun des deux aryténoïdes (E4g,E4d) (cf. figure 3.15ⓔ). Enfin, des reproductions de cordes vocales en matériaux souples seront attachées entre les aryténoïdes et le cricoïde (voir la sous-figure 3.15 gauche) et leur déformation pilotée par des barres rigides passant au travers des fenêtres prévues sur (E3).

Les actionneurs sont : un moteur et une courroie crantée pour (i), un servo-moteur pour (ii) et deux paires de servo-moteurs pour (iii). Une version pilotable de cette maquette incluant les aryténoïdes et des exemplaires simplifiés de cordes vocales est prévue pour la fin du second trimestre 2013.

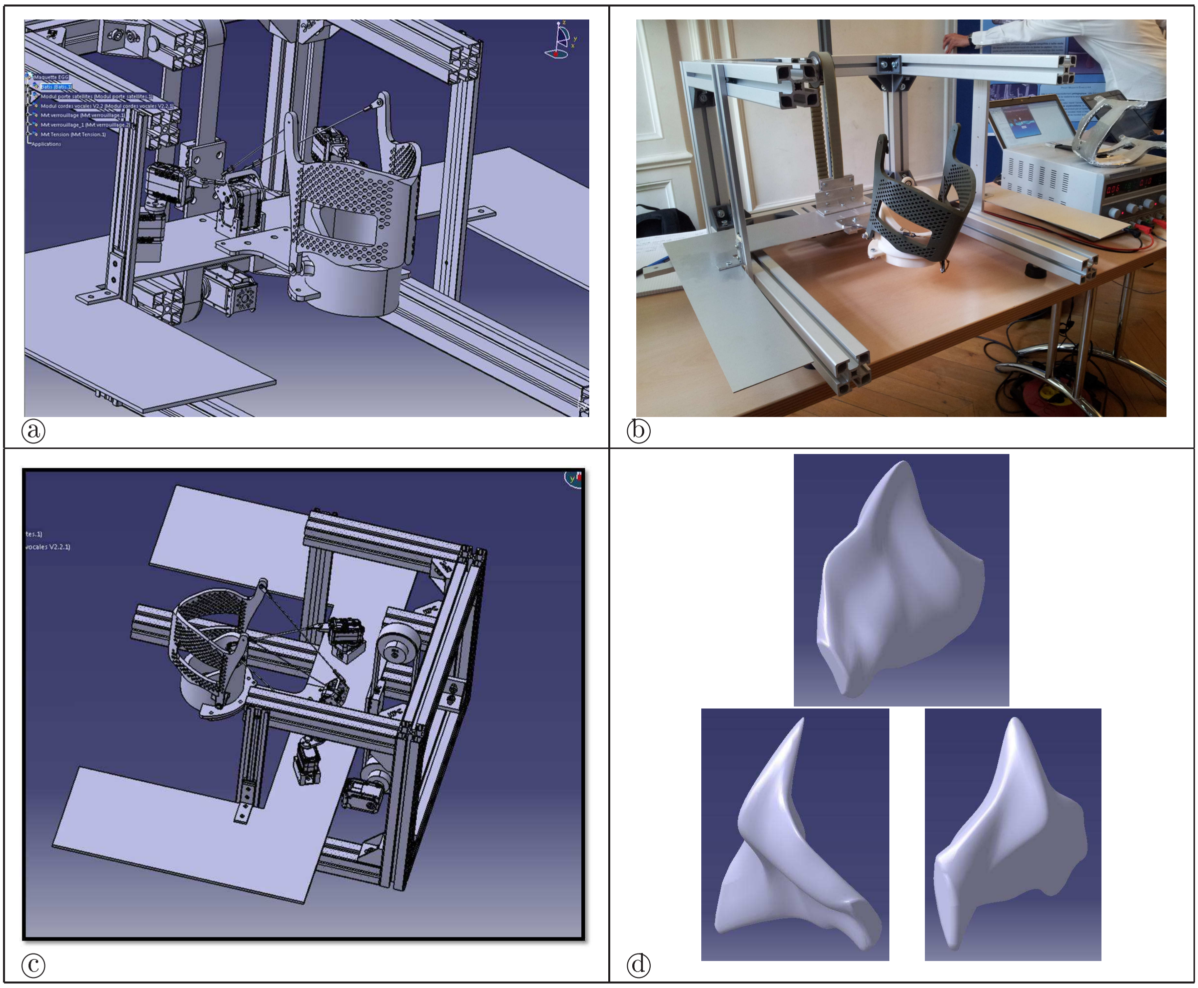


FIG. 3.17 – Maquette agrandie. ⓐ Modélisation en Catia de la maquette avec les éléments (E1-E3) sans les aryténoïdes (E4g,E4d) ; ⓑ Version correspondante réalisée ; ⓒ Vue d'ensemble ; ⓓ Modélisation Catia d'un aryténoïde (non réalisés au moment de la rédaction de ce document).

[17] L'épiglotte n'est pas considérée ici, sa fonction étant majoritairement réservée à la déglutition.

3.4 SnailAnalyzer

Nous terminons la présentation des travaux scientifiques par une application plus didactique d'analyse spectrale destinée aux musiciens et au secteur de l'audio. Le développement d'une l'application temps réel est assurée par Charles Picasso, développeur-Ircam. La version présentée ici est un prototype susceptible d'évoluer.

L'outil construit ici se compose d'une analyse spectrale standard du son (par transformée de Fourier à court terme ou banc de filtres accordés) et d'un affichage particulier (que j'ai d'abord mis au point sous Matlab). Le résultat de la plage de fréquences $f \in [f_{min}, f_{max}]$ est affiché sur un squelette en spirale de coordonnées polaires (ρ, θ) où $\rho(f) = 1 + \log_2(f/f_{min})$ et $\theta(f) = 2\pi \log_2(f/f^\star)\big)$ de sorte que : (i) le module vaut 1 en f_{min} ; (ii) le module est incrémenté de 1 à chaque octave ; (iii) toutes fréquences associées à même chroma (note, indépendamment de l'octave) correspondent à un même angle et sont alignées ; (iv) l'angle de la fréquence référence $f^\star$ (qui permet de régler par exemple le diapason) est fixé à 0.

Comparée aux analyseurs standard, cette représentation permet de visualiser simplement les zones actives par l'activation lumineuse (comme sur un spectrogramme) et d'organiser la disposition des fréquences par notes. Une capture d'écran du premier prototype est donné en figure 3.18.

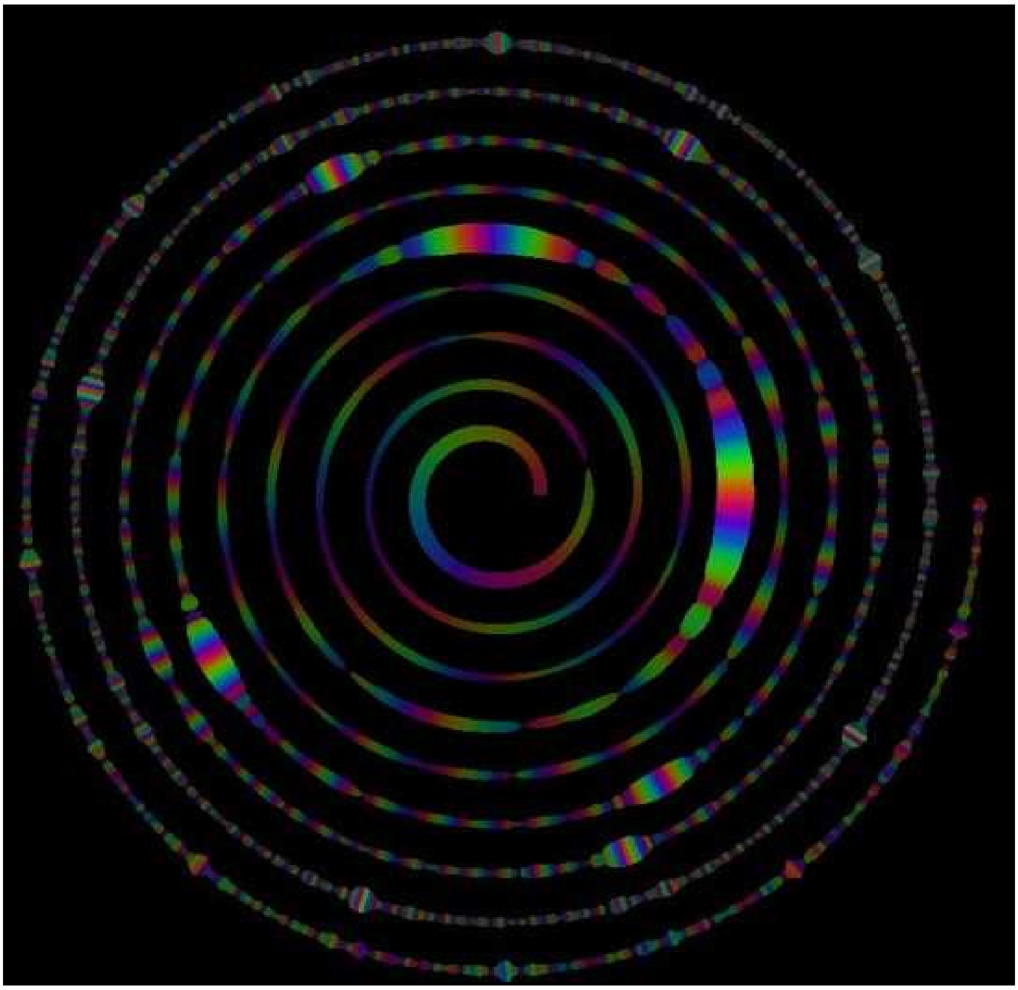


FIG. 3.18 – Capture d'écran d'une image fournie par le *SnailAnalyzer* avec une analyse de Fourier. La zone la plus active pour $\theta = 0$ correspond au (note *la*) *A440*.

Chapitre 4

Projet de recherche à 4 ans

Ce chapitre présente les thèmes de recherches que je développerai durant les quatre prochaines années. Ceux-ci se synchronisent avec deux projets ANR à quatre ans. Le projet CAGIMA[1] vise à construire des prototypes d'instruments à vent réels (par Buffet-Crampon) à "géométrie optimisée". Le projet HAMEC-MOPSYS[2] vise à développer de nouvelles méthodes pour l'analyse, la réduction d'ordre, la simulation et la commande de systèmes physiques ouverts en profitant de la structure apportée par des équations de bilan (en particulier sur l'énergie).

Cette poursuite de mes travaux s'organise selon deux thèmes : **modèles et analyse/synthèse sonore** (§4.1), et **systèmes mécatroniques** (§ 4.2). Elle comprend également la fin de la thèse de Thomas Hézard (cf. § 3.3) et se synchronise avec le démarrage de deux **nouvelles thèses** que j'encadre et dont les sujets sont reproduits ci-dessous (§ 4.3).

4.1 Modèles et analyse/synthèse sonore (outils et applications)

4.1.1 Tubes acoustiques

Vers un modèle 1D exact

La question de l'amélioration de l'équation de Webster à abscisse curviligne va être reprise. Il est envisageable que l'équation des ondes isobares (1.2) permettent d'établir une équation des ondes 1D exacte au voisinage de la paroi d'un tube à section variable en augmentant l'état acoustique avec des états (en nombre fini) caractérisant la géométrie locale des isobares. Cette possibilité pourrait émerger d'un invariant de la carte dynamique des isobares, comme il l'est esquissé en § 1.1.6. Si cela n'est pas le cas, les améliorations apportées par le relâchement de l'hypothèse de quasi-sphéricité pourront être étudiées (Hypothèse 1 avec $k \geq 3$).

Guides d'ondes numériques à ondes globalement découplées et à passivité garantie

Comme mentionné en § 1.2.4, une étude sur des ondes progressives à découplage global va être menée. Des guides d'ondes numériques construits avec ces états seront élaborés, et des mises en structures de Kelly-Lochbaum recherchées. Les fonctionnelles d'énergie qui correspondent à ces états seront construites, à partir desquelles une étude de passivité sera menée (d'abord dans le cas conservatif puis dans le cas avec pertes). Ensuite, on cherchera à construire des approximations de dimension finie des fonctions de transfert mises en jeu, qui préservent le bilan de puissance. Enfin, on cherchera une discrétisation temporelle qui conduisent à une version discrète du bilan de puissance, par exemple, avec une approche similaire à celle présentée en § 3.1.3. Certaines sous-questions pourront être abordées dans le cadre des thèses présentées en § 4.3.

[1] Conception acoustique globale d'instruments de musique à anche justes et homogènes *(projet blanc, SIMI 9-2011-0)*.
[2] Approche Hamiltonienne pour l'analyse et la commande des systèmes multiphysiques à paramètres distribués *(projet blanc, SIMI 3-2011-0)*.

Estimation et optimisation de la perce d'instruments à vent

Thème développé dans le cadre du projet ANR CAGIMA (une partie de ce travail sera réalisée dans le cadre d'un post-doctorat de ce projet)

En exploitant le modèle présenté en partie 1.1, ce travail consistera à : (a) développer une *boîte à outils Matlab* de calcul d'immittances de résonateurs de vents à partir de la géométrie [C31], (b) développer sa version réciproque ; (c) optimiser un profil d'instrument sur des critères objectifs établis dans le projet CAGIMA (dont certains porteront sur les immittances et d'autres sur les signaux simulés d'un instrument virtuel complet). Dans ce travail, une attention particulière sera portée sur la connexion du modèle avec des modèles (connus) d'autres éléments (trous latéraux et leur interaction, tubes coudés, cheminées et tampons, etc, cf. e.g. [29]). Si les tests sur (a,b) sont concluants, nous chercherons à les intégrer dans des outils dédiés existants (issus par exemple du projet PAFI). Par ailleurs, il est prévu que les résultats du point (c) se concrétisent en la réalisation d'un prototype de pavillon. Notre modèle sera aussi testé sur le cas d'une clarinette pour raffiner l'optimisation du placement de trous d'une clarinette dite "clarinette logique" (cf. [157]), avec l'effet du pavillon terminal.

4.1.2 Modèles généraux d'amortissement physiquement consistants et approximation optimales

Thème développé dans le cadre du projet HamecMopSys en collaboration avec D. Matignon, ISAE-Sup'Aéro.)

Dissipativité pour les Systèmes à Hamiltoniens à Ports

Pour les systèmes mécaniques linéaires de dimension finie, les séries de Caughey donnent la classe des matrices d'amortissements qui préservent les vecteurs propres [24, 25] : celles-ci s'expriment comme un polynôme d'une matrice, qui dépend des matrices de masse et de raideur. Dans l'article récent [C43], nous avons pu reformuler ce résultat dans le cadre des "Systèmes à Hamiltoniens à Ports" linéaires de dimension finie. De plus, dans le cas de systèmes linéaires de dimension infinie, la classe polynomiale s'étend aux fonctions rationnelles de l'opérateur (qui remplace la matrice) dans un cadre fonctionnel approprié. Ceci permet déjà sur le cas de l'équation des pavillons ou de poutre, de construire des classes d'amortissement non standard (incluant par exemple des opérateurs fractionnaires spatiaux). Cette étude va être poursuivie et le cas des systèmes non linéaires sera abordé.

Amélioration des procédures de réduction d'ordre de représentations intégrales

Concernant les approximations optimales de représentations intégrales présentées en §2.1, le placement de pôles sera amélioré par des méthodes pratiques d'optimisation locale. Si le temps et les moyens humains nous le permettent, les questions plus profondes sur les "vitesses de convergence" et les "coupures optimales" mentionnées en § 2.1.6 seront explorées.

4.1.3 Généralisation des séries de Volterra et méthodes de perturbations pour l'analyse, l'identification, la réduction de modèle et la simulation de systèmes non linéaires

Thème développé en collaboration avec B. Laroche, DR2-INRA.

Un premier travail consiste à étendre nos critères de convergence (cf. § 2.2.7) à la classe des systèmes dynamiques à non-linéarités analytiques en l'état et l'entrée.

Un second travail consiste à étendre le domaine de validité. Une première piste est de recourir à des techniques de resommation sur les séries divergentes. Une seconde piste est de modifier le type de développement en série des trajectoires, en ne considérant plus seulement des perturbations régulières sur les systèmes entrée-sortie.

Un cas étudié en particulier concernera les instruments pour lesquels la hauteur d'une note varie avec l'amplitude de l'excitation (et pas seulement le timbre). En effet, l'efficacité des séries de Volterra est perdue pour les systèmes non linéaires introduisant des modulations de fréquence (sortie du domaine de convergence et apparition de modes séculaires, e.g. oscillateur de Duffing). Ce travail consistera à :

(1) proposer des généralisations capables de gérer ce type de comportement, avant l'apparition de bifurcations ; (2) profiter des structures et décompositions obtenues pour construire des méthodes d'estimation robustes et réductions d'ordre efficaces.

4.1.4 Problèmes d'analyse, inversion et observation

Thèmes développés en collaboration, par sous-sujet.

Dans le cadre des travaux sur la voix, nous travaillons avec Thomas Hézard sur des méthodes d'estimation conjointe de paramètres de source glottique et conduit vocal (modèle temporels d'aire glottique, pression sub-glottique, filtre acoustique) et de systèmes de Lur'e décrits en § 3.3.2. Une approche construite sur des décompositions du *cepstre* est actuellement à l'étude, d'abord pour un modèle source-filtre standard. Elle s'appuie en partie sur [172, 203].

Concernant les instruments à vent, le travail sur la synthèse d'observateur, amorcé avec B. d'Andréa-Novel et J.-M. Coron, va être poursuivi (toujours en collaboration). Des tests sur l'observateur déjà construit vont d'abord être menés sur des signaux mesurés sur la plate-forme de bouche artificielle robotisée pour le cas d'un tube droit. Un nouveau travail (synthèse de nouveaux observateurs pour un trombone réel modélisé en *Système à Hamiltonien à Ports*) est programmé et détaillé dans le sujet de thèse de Nicolas Lopes (cf. § 4.3.2). Un travail plus général sur d'autres types d'instruments est également programmé dans le sujet de thèse d'Antoine Falaize-Skrzek (cf. 4.3.1).

4.1.5 Exploration de principes variationnels "espace-temps-échelle"

Thème développé en collaboration avec F. Dubois (Prof., CNAM) et I. Greff (Maître de conférence, Univ. Pau).

Nous travaillons depuis peu, avec François Dubois (CNAM, Paris) et Isabelle Greff (Dépt. Mathématique, Université de Pau), sur des principes variationnels pour des paradigmes dans lesquels une quantité (en physique, la vitesse) est considérée comme un *observable* qui dépend d'une échelle en plus du temps et de l'espace. Cette notion d'échelle a un intérêt en physique (relativité "espace-temps-échelle" proposée par Laurent Notalle [159], par exemple). Mais elle peut aussi trouver des intérêts pour les signaux et les sons (en particulier musicaux) qui font apparaître des structures à différentes échelles.

Pour le moment, notre étude débute par la compréhension des mathématiques et la mise au point d'outils appropriés [C42] (adaptation des équations d'Euler-Lagrange et de Hamilton-Jacobi). A terme, ceux-ci pourraient se réinscrire dans le cadre des *Systèmes à Hamiltoniens à Ports* mentionnés ci-dessus.

4.2 Systèmes mécatroniques (outils pour l'expérimentation et la validation

4.2.1 Modélisation, asservissement et commande d'une bouche artificielle robotisée pour le jeu des cuivres

Ce thème correspond au sujet de thèse de Nicolas Lopes détaillé ci-dessous.

4.2.2 Construction d'un électro-glottographe multi-canal et tomographie pour la reconstruction de la dynamique des plis vocaux

La poursuite de ce travail est programmée dans le cadre du stage de Master 2 d'Antonin Mauffrey qui débutera en février 2013. Les spécifications de l'appareil EGG/EIT visé pour juin 2013 sont celles décrites en § 3.3.3. Ce travail sera également suivi par Thomas Hézard et Emmanuel Flety (électronicien, Ircam). Les résultats seront exploités dans le travail de thèse de T. Hézard.

4.2.3 Système de production vocale robotisé et acoustique du conduit vocal par impédance active

Ce volet prospectif consiste à reproduire l'acoustique d'un conduit vocal à l'aide d'un système actif composé de paires de microphones/haut-parleurs co-localisés, placées sur un tube droit. L'asservissement consistera à reproduire des immittances acoustiques de conduit vocal variant dans le temps. Après une étude théorique et la mise en place d'un prototype, ce résonateur pourra être utilisé dans deux situations : (1) il sera couplé à une version adaptée de la maquette 1 :1 de larynx piloté (similaire à celle présentée en § 3.3.3) qu'on alimentera en air ; (2) il pourra être adapté sur la bouche artificielle pour étudier, in vitro, l'effet d'un conduit vocal sur la jouabilité des notes d'un trombone (le système qui a permis l'asservissement du déphasage, en figure 3.9, risque en effet d'être trop limité pour une exploration "large").

4.3 Deux sujets de thèse

Les sujets développés ci-dessous, sont donnés sous leur forme déposée avec le format requis par chaque Ecole Doctorale, à l'exception du résumé de sujet *(retiré ici pour ne pas surcharger).*

4.3.1 Synthèse sonore par modélisation physique préservant la passivité et inversion entrée-sortie (Antoine Falaize-Skrzek, ED EDITE-UPMC)

Au moment de la rédaction de ce manuscrit, le directeur de cette thèse est Xavier Rodet-Ircam. En accord avec lui, il a été prévu et mentionné à l'Ecole Doctorale lors du dépôt du sujet que je prendrai la direction officielle lorsque j'aurai obtenu l'Habilitation à diriger des Recherches.

Préambule et contexte : La synthèse sonore par modélisation physique s'attache à simuler des systèmes producteurs de son, existants ou imaginaires, qui respectent les lois de la physique. Il peut s'agir par exemple d'instruments de musique (percussions, cordes, vents, voix), de systèmes électro-acoustiques et circuits électroniques (amplificateurs de guitares, pédales d'effets, synthétiseurs analogiques). L'intérêt de ce type de synthèse est de récupérer non seulement le timbre du son mais aussi tous les comportements naturels (attaques, transitoires, distorsions, etc). La complexité et la finesse de la modélisation peuvent être très variables (géométrie, amortissements, non-linéarités, etc) et ont un impact direct sur la simulation. L'amortissement est crucial pour le réalisme. Les non-linéarités le sont aussi pour les systèmes auto-oscillants (instruments auto-entretenus) et pour les variations de timbres apparaissant aux nuances "fortissimo". Les travaux de ces dernières années sur le sujet ont permis des progrès significatifs tant pour le réalisme que la rapidité des calculs (on pourra consulter par exemple [1,2]). Un échantillon de tels travaux issus de l'équipe analyse/synthèse de l'Ircam est mentionné ci-dessous (cf. [3-6]).

Problème posé : Pour un modèle fixé, un des points clef (P1) pour la simulation est d'assurer sa stabilité et sa précision. Un autre point clef (P2) est que le réalisme du son n'est pas suffisant : il est aussi important d'assurer le réalisme venant du "jeu de l'instrumentiste". Ce dernier point, crucial pour la voix, pose le problème de l'inversion (cf. [7-8]) : comment piloter le modèle simulé pour obtenir tel son cible (ou un résultat pour lequel le jeu semble naturel) ?

Les outils standard pour (P1) consistent souvent à appliquer au modèle des schémas numériques ad hoc (différences finies, éléments finis, décomposition en guides d'ondes numériques, etc) pour lesquels on recherche des conditions de stabilité. Si un modèle est conservatif (une énergie se conserve et on est à la limite de la stabilité), le problème devient délicat. Des méthodes spécifiques (et très efficaces) de discrétisation existent, qui garantissent la conservation d'énergie (cf. [9] pour un exemple sur la corde). Le schéma numérique peut alors ne plus être préalable mais découler du modèle original. Il se fonde sur une formulation variationnelle adéquate, dite à Hamiltonien (H), qui "encode plus d'information structurelle" que la formulation différentielle (/aux dérivées partielles). En résumé, en discrétisant le Hamiltonien H plutôt que le problème différentiel, on arrive à garantir un principe physique, ici, la conservation de l'énergie (ce qu'une autre méthode n'assure pas par défaut). La recherche à conduire dans cette thèse est motivée par le fait que les systèmes amortis ne sont pas à Hamiltonien mais que l'on peut utiliser des approches et méthodes de discrétisation semblables qui préservent explicitement la dynamique de la puissance dissipée (c'est-à-dire, respectant le principe physique intrinsèque de dissipation de chaque modèle étudié).

Le problème (P2) est quant à lui mal posé en général, au sens où il existe une infinité de solutions et que celles-ci peuvent être très sensibles à de petites modifications de paramètres. Il devient crucial de régulariser le problème pour déterminer une solution pertinente et les considérations énergétiques peuvent être utiles pour cela.

Sujet : Cette thèse s'intègre dans les travaux de l'équipe Analyse/Synthèse de l'IRCAM (CNRS UMR 9912-UPMC). Elle a pour objectif de construire des méthodes automatiques de simulation (synthèse) et d'inversion (analyse) de systèmes physiques producteurs de son qui garantissent et exploitent explicitement leur passivité/dissipativité.

En effet, qu'ils soient simples ou complexes, les systèmes producteurs de son possèdent une propriété commune : hors des sources d'excitation (les générateurs), ils sont tous passifs. Lorsqu'il n'y a pas d'idéalisation qui néglige les amortissements, cette passivité devient même stricte : les systèmes ne sont plus conservatifs mais dissipatifs. Peu d'outils d'analyse/synthèse sonore cherchent à garantir et reproduire cette propriété.

Pour aborder ce sujet, on s'appuiera sur une méthode de la théorie des systèmes et de l'automatique qui permet de bien représenter cette propriété et pour laquelle les recherches actuelles sont très actives : il s'agit des "port-Hamiltonian systems" [10]. Après une introduction à l'outil et une étude bibliographique, on s'initiera au sujet avec une première application simple pour laquelle on construira : (1) des simulations préservant la dissipativité du système original et (2) des inverseurs entrée/sortie sélectionnant des commandes de pilotages naturellement pertinentes. Plus précisément, on pourra s'intéresser à des systèmes élémentaires, d'abord simples (oscillateur mécanique ou électronique linéaires puis non linéaires) puis plus élaborés (par exemple, tube acoustique, corde, poutre, plaque, haut-parleur, triodes, transistors, etc). Dans un second temps, on s'intéressera à la connexion et la mise en réseau de tels composants élémentaires qu'on aura rassemblé dans un dictionnaire. On exploitera le fait que la connexion de "port-Hamiltonian systems" permet de respecter les bilans énergétiques [11] pour développer un formalisme de construction d'instruments complets et qui préserve la dissipativité globale.

Dans cette progression, on fournira à chaque étape un couple d'outils d'Analyse (inversion)-Synthèse (simulation). On s'intéressera aussi à un générateur automatique de simulation, si possible compatible avec le temps réel (par exemple, en code FAUST).

Enjeux : Historiquement, la recherche de schémas préservant l'énergie des systèmes conservatifs a été introduite en mécanique analytique et motivée par l'étude numérique de la stabilité de systèmes célestes (système solaire, par exemple). Des recherches sur des schémas dits symplectiques (préservant par exemple des symétries, invariants géométriques naturels, etc) sont aussi très actives. Dans tous les cas, plutôt que de discrétiser la formulation différentielle (/aux dérivées partielles) du problème, on discrétise une formulation variationnelle adéquate qui "encode plus d'information structurelle", dont le Hamiltonien pour la conservation de l'énergie, comme indiqué ci-dessus. Les "port-Hamiltonian systems" introduits en automatique et théorie de systèmes en sont une généralisation possible. Ils permettent d'intégrer des amortissements, de considérer des entrées, et de connecter plusieurs systèmes entre eux tout en respectant les bilans énergétiques [11].

Parce que les phénomènes mis en jeu dans les instruments de musique peuvent être complexes (amortissements en dérivation fractionnaire dans les tubes acoustiques, géométries non triviales, etc), ils sont de bons candidats d'étude pour faire avancer les connaissances (appliquées et théoriques) sur les "port-Hamiltonian systems". Réciproquement, l'analyse/synthèse sonore a beaucoup à retirer de cette approche dans la mesure où l'on sait d'expérience que la qualité d'un amortissement joue un rôle crucial dans le réalisme sonore. Il devient donc nécessaire d'étendre les résultats obtenus pour des cas de systèmes conservatifs (à Hamiltonien) aux cas dissipatifs. De plus, pour les problèmes d'inversion et d'observation d'état à partir du son mesuré, inclure une information sur la structure des dynamiques, a un pouvoir régularisant, de même que toute contrainte préservant un invariant connu du système (cf. e.g. [12]). L'enjeu applicatif est important d'autant plus sur des systèmes complexes tels que la voix.

Enfin, l'énergie est souvent utilisée en automatique comme fonctionnelle de Lyapunov pour la stabilisation de système. Mais on peut aussi en tirer une distance naturelle pour mesurer un écart entre les états de deux systèmes jumeaux. Ceci pourrait être exploité pour la construction d'observateurs d'état (cf. [8]). Les modèles physiques de valves (anches, lèvres, glotte) utilisés en synthèse sonore ne sont pas à bilan énergétique bien posé. L'approche considérée dans cette thèse devrait permettre de dépasser ce problème.

Bibliographie :

[1] Hélie Thomas, Vergez Christophe, Des instruments de musique virtuels. Pour la science. Novembre 2008, n° 373, p. 70-77.

[2] Stefan Bilbao, Numerical Sound Synthesis : Finite Difference Schemes and Simulation in Musical Acoustics, October 2009.

[3] Hélie Thomas, Roze David, Sound synthesis of a nonlinear string using Volterra series. Journal of Sound and Vibration. March 2008, vol. 314, p. 275-306.

[4] Hélie Thomas, Volterra series and state transformation for real-time simulations of audio devices including saturations : application to the Moog ladder filter. IEEE Transactions on Audio, Speech and Language Processing. 2010, vol. 18, n° 4, p. 747-759.

[5] Mignot Remi, Hélie Thomas, Matignon Denis, Digital waveguide modeling for wind instruments : building a state-space representation based on the Webster-Lokshin model. Special Issue on Virtual Analog Audio Effects and Musical Instruments for the IEEE Transactions on Audio, Speech and Language Processing. 2010.

[6] Cohen Ivan, Hélie Thomas, Measures and parameter estimation of triodes, for the real-time simulation of a multi-stage guitar preamplifier. 129th convention of Audio Engineering Society. November 2010.

[7] Hélie Thomas, Vergez Christophe, Lévine Jean, Rodet Xavier, Inversion of a physical model of a trumpet. IEEE CDC - Conference on Decision and Control. Phoenix Arizona : Décembre 1999, vol. 38.3, p. 2593-2598.

[8] Hélie Thomas, d'Andréa-Novel Brigitte, Coron Jean-Michel, Observers of a nonlinear neutral system modelling a musical brass instrument. IFAC Workshop on Control of Distributed Parameter Systems. Toulouse, July 2009.

[9] S. Bilbao and J. O. Smith III. Energy-conserving finite difference schemes for nonlinear strings. Acta. Acustica united with Acustica, 91 :299-311.

[10] Schaft van der, Arjan (2006) Port-Hamiltonian systems : an introductory survey. In : International Congress of Mathematicians, August 22-30, 2006, Spain.

[11] Golo, G., van der Schaft, A. J., Breedveld, P. C., Maschke, B. M., Hamiltonian formulation of bond graphs. In Nonlinear and Hybrid Systems in Automotive Control (ed. by R. Johansson, A. Rantzer), Springer-Verlag, London 2003, 351-372.

[12] S. Bonnabel. A simple intrinsic reduced-observer for geodesic flow. IEEE Trans. on Automatic Control. Vol 55(9) pp :2186 - 2191, 2010.

4.3.2 Modélisation, asservissement et commande d'une bouche artificielle robotisée pour le jeu des cuivres (Nicolas Lopes, ED SMAER, UPMC)

Au moment de la rédaction de ce manuscrit, le directeur de cette thèse est René Caussé-Ircam. En accord avec lui, il a été prévu et mentionné à l'Ecole Doctorale lors du dépôt du sujet que je prendrai la direction officielle lorsque j'aurai obtenu l'Habilitation à diriger des Recherches.

Contexte : Une bouche artificielle robotisée dédiée au jeu des instruments de type cuivre a été développée à l'IRCAM. Ce système a déjà permis d'effectuer des séries d'expériences reproductibles et de fournir des cartographies (énergie, fréquence fondamentale, etc) en régimes stationnaires. A partir de ces résultats, des commandes en boucle ouverte (c'est-à-dire, sans correction par rétro-action) ont permis de jouer des séquences simples de quelques notes [1][3].

Sur la plate-forme actuelle, les actionneurs du robot sont : (A1) une électro-vanne pilotant l'arrivée d'air, (A2) un translateur pilotant l'appui de l'embouchure sur les lèvres artificielles, (A3-4) deux vérins pilotant le volume d'eau dans chacune des lèvres. Un haut-parleur (A5) permet en outre de générer une excitation acoustique à l'intérieur de la bouche afin d'examiner certaines fonctions de transfert pour des approximations en « petits signaux ».

Les capteurs utilisés pour les mesures sont : (C1-2) capteurs de pression de haute précision (un dans la bouche, un dans l'embouchure), (C3) un capteur optique mesurant l'ouverture entre les lèvres, (C4) capteur de force d'appui, (C5-6) capteurs de pression d'eau (un dans chaque lèvre). Quelques capteurs additionnels sont utilisés pour des asservissements de bas niveau (capteurs de positions sur (A2-4) et des vérifications de conditions expérimentales (capteur température et de pression d'alimentation).

[3] Cf. http ://recherche.ircam.fr/anasyn/helie/Brasstronics/FilmBrasstronics2011.avi

Tous les signaux peuvent être mesurés et les actionneurs pilotés en temps réel par un système dSpace (incluant DSP, carte entrée/sorties, très employé pour le prototypage dans le secteur de l'automobile et de l'industrie).

Problème posé, objectifs et résultats attendus : Dans cette thèse, on s'intéresse à : (1) la modélisation du système complet (mécatronique aéro-acoustique robotisé) qui garantit les bilans énergétiques, (2) la résolution de problèmes inverses (estimation de paramètres, observateur d'état, asservissement et commande), et (3) leur utilisation pour l'étude et la caractérisation d'instruments réels.

1. **Modélisation :** Dans ce volet, on s'intéressera d'une part à modéliser le système d'intérêt (l'instrument incluant la bouche et les lèvres artificielles) et d'autre part, les organes de pilotage.

   Pour cela, on s'appuiera de façon privilégiée sur la « formulation hamiltonienne à port » [2]. Cette approche a l'avantage de traiter tous les composants d'un système avec un outil unique. Elle permet de connecter des sous-systèmes physiques passifs divers (électronique, mécanique des solides et fluides, thermodynamique, génie des procédés, systèmes physiques complexes, etc) tout en préservant la passivité et en garantissant les bons bilans énergétiques. De plus, elle fournit une représentation d'état paramétrée standard du système entrée/sortie considéré, directement utilisable en automatique et robotique afin d'élaborer, par exemple, des lois de commandes. Cette étude bénéficiera des compétences de spécialistes des « systèmes hamiltoniens à port » au sein du projet ANR HamecMopSys (Hamiltonian Methods for the Control of Multidomain Distributed Parameter Systems, 2011-2015, Y. Le Gorrec).

   De plus, on portera une attention particulière au couplage (passif) aéro-acoustique, à l'origine responsable de la non-linéarité qui permet l'auto-oscillation du système lorsqu'il est excité (sons auto-entretenus) et conduit à une grande diversité de régimes (dont certains chaotiques, cf. [3,4]). Pour le résonateur, on s'appuiera sur un modèle uni-dimensionel dissipatif de pavillon validé récemment sur des mesures (équation de Webster-Lokshin à abscisse curviligne) [5].

   Des simulations des modèles obtenus, à passivité garantie, seront élaborées.

2. **Estimation de paramètres, asservissement et commande :** Dans ce volet, une première étape consistera à estimer les paramètres du système : ceux du résonateur à partir de mesures d'impédance acoustique, et ceux de l'excitateur à partir de mesures sur la bouche et d'un protocole de calibration qui sera mis au point. Dans un second temps, on étudiera la stabilité du système (en utilisant l'énergie fournie par le hamiltonien comme fonctionnelle de Lyapunov du robot et en exploitant la dissipativité) et on concevra un observateur d'état du système (cf. [6] pour un modèle simplifié). Enfin, on synthétisera des asservissements et lois de commandes afin de reproduire des sons ou consignes cibles (nuance, hauteur, etc), d'abord dans des cas simples (régimes périodiques, stationnaires, attaques calibrées) puis plus généraux (transitoires, restitution d'une phrase musicale, etc).

   Dans cette dernière étude, on pourra en partie chercher à mettre à profit l'approche en systèmes Hamiltoniens à port qui permet de synthétiser des asservissements et contrôleurs reproduisant un comportement physique naturel (par exemple, dissipatif, ce qui n'est généralement pas le cas a priori). L'inclusion d'une composante dynamique passive (physiologique) simplifiée, du musicien pourra ainsi être testée.

   On comparera les résultats obtenus et mesurés sur le robot à ceux obtenus par simulation.

3. **Résultats expérimentaux et étude d'instruments réels :** Le troisième volet exploitera les résultats précédents pour mettre au point un banc de test d'instruments réels. On proposera des protocoles pour quelques « tests clef » et génération de « cartographies type », par exemple (cf. [7,8]) : justesse et relation entre les fréquences de résonance de l'instrument et la fréquence de jeu (effet de la nuance), facilité d'émission (caractérisation numérique de bassins d'attraction), indice d'harmonicité du son en situation de jeu, etc. La mise au point de ces tests sera menée conjointement sur le robot et les versions simulées du modèle pour tester leur robustesse en pratique. Cette étude bénéficiera du cadre du projet ANR CAGIMA (Conception Acoustique Globale d'Instruments de Musique à Anche justes et homogènes, 2011-2015, P. Guillemain) dans lequel des prototypes réels d'instruments à perce optimale (selon des modèles et critères fixés) seront construits et devront être testés.

Retombées scientifiques : Les retombées scientifiques concernent la compréhension fine du fonctionnement et la validation de modèles de cuivre (en particulier, le couplage aéro-acoustique). Notons que ce type de modèle concerne également celui de glotte pour la voix. L'analyse de comportements dynamiques peut fournir des indices pour l'aide à la pédagogie. La synthèse de lois de commandes pour le pilotage de systèmes aéro-acoustiques auto-oscillants est un problème scientifique délicat et est encore un enjeu en soi. Enfin, le robot fournira un banc de test capable d'établir des cartes d'analyse et des caractéristiques objectives pour un instrument réel en situation de jeu.

Bibliographie :

[1] N. Lopes, Cartographie de paramètres de jeu de trompettiste : mise en correspondance automatique du son produit avec les paramètres de contrôle d'une bouche artificielle asservie. Stage ingénieur de l'ENSEA.

[2] V. Duindam et al., Modeling and Control of Complex Physical Systems : The Port-Hamiltonian Approach. Springer, 2009.

[3] C. Vergez, Trompette et Trompettiste : un système dynamique non linéaire analysé, modélisé et simulé dans un contexte musical. Thèse. Université Pierre et Marie Curie. 2000.

[4] F. Silva. Émergence des auto-oscillations dans un instrument de musique à anche simple. Thèse, 2009.

[5] T. Hélie et al., On the 1D wave propagation in wind instruments with a smooth profile. Forum Acusticum. Aalborg, 2011. Vol. 6, p.1-6.

[6] B. d'Andréa-Novel et al., Asymptotic state observers for a simplified brass instrument model. Acta Acustica. 2010, vol. 96, n° 4, p. 733-742

[7] J. Gilbert, S. Ponthus. Articial buzzing lips and brass instruments : Experimental results. JASA, 104 :1627, 1998.

[8] A. Almeida et al. Clarinet parameter cartography : automatic mapping of the sound produced as a function of blowing pressure and reed force. ISMA, 2010.

Deuxième partie

Partie Administrative et références bilbliographies

Chapitre 5

Curriculum vitae détaillé

Thomas HELIE, Chercheur CNRS CR1
Equipe Analyse/Synthèse, IRCAM-CNRS UMR 9912 - UPMC
1, place Igor Stravinsky, 75004 Paris
Tél. : 01 44 78 48 24 - Mél : `Thomas.Helie@ircam.fr`

Né le 13/08/1974
à Bayeux (Calvados)
Nationalité française
Marié, 2 enfants

Parcours scientifique et diplômes

2008 *Chargé de Recherche au CNRS (CR1, section 09)* Ircam-CNRS UMR 9912 "Sciences et Technologie de la Musique et du Son", Paris.

2004 *Chargé de Recherche au CNRS (CR2, section 09)* Ircam-CNRS UMR 9912 "Sciences et Technologie de la Musique et du Son", Paris.

2004 *Qualification "Maître de Conférence" dans les sections CNU 60, 61 et 63.*

2003-2004 *Attaché Temporaire à l'Enseignement et la Recherche.* Laboratoire des Signaux et Systèmes (CNRS UMR 8506), Université Paris Sud, Gif-Sur-Yvette.

2003 *Post-doctorat.* Laboratoire des Systèmes Non Linéaires de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse.
Simulation des signaux sonores et musicaux : non-linéarité de propagation dans les cuivres, résolution par les séries de Volterra et analyse harmonique.

1999-2002 *Thèse (et monitorat) de l'Université Paris Sud, bourse MENRT,* équipe Analyse-Synthèse, IRAM-CNRS UMR 9912, Paris. *Directeur : Xavier Rodet.*
Modélisation physique d'instruments de musique en systèmes dynamiques et inversion.

1998-1999 *Service national : scientifique du contingent (enseignements en électronique et traitement du signal),* Ecole Polytechnique.

1997-1998
ⓐ *DEA en Automatique et Traitement du Signal, Mention Très bien.* Université Paris Sud.
ⓑ *DEA en Acoustique Traitement du signal et Informatique Appliqués à la Musique, Mention Bien.* Université Pierre et Marie Curie.
ⓒ *Stage de DEA* (Ircam-UMR 9912, Paris, 6 mois) *Etude de méthodes d'estimation des paramètres d'un modèle physique d'instrument de musique - Application à la trompette.*

1996-1997
ⓐ *Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, Spécialité Images et Sons,* Paris.
ⓑ *Stage ingénieur 3ème année* (Ircam-UMR 9912, Paris, 4 mois) *Analyse sonore par optimisation d'un modèle paramétrique de transformée de Fourier à très court-terme.*

1994-1996
ⓐ *Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications de Bretagne, 1ère et 2ème années d'études d'ingénieur,* Brest.
ⓑ *Stage ingénieur 2ème année* (CINVESTAV, centre de recherche, Mexico D.F., 2 mois) *Création d'un outil de simulation de communications numériques.*
ⓒ *Licence de Mathématiques pures, télé-enseignement,* Université Pierre et Marie Curie.

1992-1994 *Mathématiques Supérieures/Spéciales, spécialité : mathématiques,* Lycée Malherbes, Caen.

1992 *Baccalauréat, série C.*

Prix

2003 *Prix des meilleures thèses en automatique décerné par le Club EEA,* avec la participation du GdR *Automatique du CNRS.*

Formations professionnelles suivies depuis l'entrée au CNRS

2009 *Cours en auditeur libre du M2R d'Astronomie et Astrophysique : Dynamique des systèmes lagrangiens et hamiltoniens* (environ 30 heures, Observatoire de Paris, Pr. J. Cresson).

2009 *Ecole thématique CNRS Sciences et Voix* (4 jours, Giens, organisatrice : N. Henrich).

2007 *Ecole thématique CNRS Acoustique et ondes non linéaires et applications* (6 jours, Oléron, organisateur : F. Coulouvrat).

2006 *Ecole d'été CNRS d'automatique de Grenoble Guaranted set computation with applications in identification, observation, control and robotics* (5 jours, Grenoble, organisateur : E. Walter).

2006 *Ecole d'été INRIA/CNRS Méthodes nouvelles d'estimation rapide en automatique et signal* (3 jours, Paris, organisateur : M. Fliess).

Liste exhaustive des publications

cf. p. 107.

Encadrement de travaux de recherche

Post-Doctorat

2007-2008 (25%)] K. Trabelsi (Post-doctorat, 15 mois, projet ANR CONSONNES) *Optimisation numérique de modèles physiques avec amortissement réaliste pour la synthèse sonore* (co-encadré par D. Matignon, HdR, ISAE-Sup'Aéro.).

Thèses

2010-(en cours) T. Hézard (E. D. SMAER, Université Pierre et Marie Curie) *Systèmes dynamiques de production de la voix informés par la physique et commandés par la géométrie pour l'analyse et la synthèse sonore* (co-directeur HdR : R. Caussé-Ircam).

2008-2012 (70%) I. Cohen (E. D. EDITE, Université Pierre et Marie Curie, bourse CIFRE-ANRT avec l'entreprise Orosys) *Modélisation, analyse et identification de circuits non linéaires : application aux amplificateurs de guitare pour la simulation en temps réel* (co-encadré par Dr. G. Pille-Orosys, fondateur de la société Orosys, co-directeur HdR : X. Rodet-Ircam).

2006-2010 (50%)] D. Roze (E. D. SMAER, Université Pierre et Marie Curie, bourse BDI CNRS-CEA) *Simulation de propagation non linéaire par les séries de Volterra* (co-encadré par J. Bensoam-Ircam, X. Merliot-CEA, co-directeur HdR : A. Micaelli-CEA).

2006-2009 (60%) R. Mignot (E. D. EDITE, Télécom ParisTech, bourse MENRT) *Réalisation en guides d'ondes numériques stables d'un modèle acoustique réaliste pour la simulation en temps réel d'instruments à vent* (co-directeur HdR : D. Matignon, ISAE-Sup'Aéro.).

Stages de troisième cycle :

2012 A. Mauffrey (ENSEA 2A, 2 mois) *Réalisation d'un système électronique pour l'exploration non invasive de l'activité glottique pendant la phonation,* co-encadré par T. Hézard (Doctorant EDITE), E. Flety-Ircam (correspondant de stage : A. Tauvel).

2012 M. Le Borgne (M2R ATIAM, 5 mois) *Système dynamique non linéaire de production de signaux de source glottique,* co-encadré par T. Hézard (encadrant principal, Doctorant EDITE).

2012 T. Usciati (M2R ATIAM, 5 mois) *Analyseur de circuit électronique analogique audio, et génération automatique de code pour la simulation temps réel,* co-encadré par I. Cohen (encadrant principal, Société Orosys).

2012 N. Lopes (M2R ATIAM, 5 mois) *Modélisation, asservissement et commande d'une bouche artificielle robotisée pour le jeu des cuivres,* co-encadré par R. Caussé-Ircam, et en collaboration avec V. Fréour (Doctorant, Univ. McGill).

2011 L. Delebecque (M2R ATIAM, 5 mois) *Etude de la passivité dans les pavillons acoustiques pour la simulation stable en guides d'ondes,* co-encadré par T. Hézard (doctorant EDITE) et R. Mignot (Post. Doc., ESPCI).

2011 N. Lopes (fin d'étude, ENSEA, 5 mois) *Cartographie de paramètres de jeu de trompettiste : mise en correspondance automatique du son produit avec les paramètres de contrôle d'une bouche artificielle asservie,* co-encadré par R. Caussé-Ircam. (correspondant de stage : N. Simond).

2010 T. Hézard (M2R ATIAM, 5 mois) *Ondes découplées et ondes progressives dans les tubes acoustiques à section variable pour la représentation en guide d'ondes,* co-encadré par R. Mignot (Post-Doc., ESPCI).

2010 B. Véricel (M2R ATIAM, 5 mois) *Confrontation théorique/expérimentale de caractéristiques d'excitation dans le jeu des cuivres,* co-encadré par C. Vergez et D. Ferrand (collaboration avec le LMA, UPR 7051) et R. Caussé-Ircam.

2009 T. Hézard (fin d'étude-ENSEA, 6 mois) *Construction d'une famille d'instruments à vent virtuels,* co-encadré par R. Mignot (doctorant EDITE). (correspondant de stage : A. Tauvel).

2009 B. Véricel (fin d'étude-ENSEA, 6 mois) *Interfaçage et contrôle d'un robot musicien,* co-encadré par C. Vergez et D. Ferrand (collaboration avec le LMA, UPR 7051) et R. Caussé-Ircam. (correspondant de stage : A. Tauvel).

2009 R. Milletich (fin d'étude-ENSEA, 5 mois) *Etude de méthodes de simulation de circuits audio non linéaires compatibles avec le temps-réel : application à la pédale de distorsion Big Muff,* co-encadré par I. Cohen (doctorant EDITE). (correspondant de stage : S. Reynal).

2008 P.-D. Dekoninck (fin d'étude-INSA Rouen, 6 mois) *Tubes acoustiques à section variables pour la synthèse sonore : modèles 1D et validation,* co-encadré par R. Mignot (doctorant EDITE). (correspondant de stage : N. Fortier).

2007 I. Cohen (Master2R ATIAM, 4 mois) *Simulation de circuits audio analogiques non linéaires par les séries de Volterra.*

2006 D. Roze (M2R ATIAM, 5 mois) *Simulation d'une corde avec fortes déformations par les séries de Volterra.*

2006 R. Mignot (M2R ATIAM, 5 mois) *Modélisation de résonateurs d'instruments à vent.*

2002 G. Gaullier (DESS de mathématiques appliquées de l'Université Paris VI, 5 mois), *Modélisation du conduit vocal : modèle géométrique et étude numérique de l'acoustique.*

Stages de second cycle :

2011 L. Cornu (Master 1 d'Ingéniérie Mathématiques) *Analyse/Synthèse d'un son généré par contact entretenu,* co-encadré par M. Lagrange-CNRS.

2006 M. Rébillat (Magistère EEA, ENS Cachan, 2 mois) *Simulation de l'effet de cuivrage dans les tubes courbes.*

2005 V. Smet (Magistère EEA, ENS Cachan, 3 mois) *Simulation de l'effet de cuivrage dans les instruments à vent : cas d'un tube droit.*

2005 R. Mignot (Master1 MIS, Université Paris VI, 5 mois) *Simulation de propagation d'ondes dans les tubes évasés avec pertes visco-thermiques pour la synthèse sonore en temps-réel.*

2001 S. Bailleul (Maîtrise de mathématiques appliquées, Université d'Orléans, 5 mois), *Modélisation physique de guides d'ondes à symétrie de révolution.*

Stages de premier cycle :

2007 P. Chen (Licence professionelle, IUT Vélizy, contrat par apprentissage, 10 mois) *Informatique industrielle pour le contrôle d'un bouche artificielle de robot musicien trompettiste,* co-encadré par R. Caussé-Ircam.

Activités d'enseignements

2007-2012 5x(27h) *Travaux Expérimentaux d'Acoustique* création de trois sujets : (1) Conduit vocal (modèle et mesures sur une maquette simplifiée échelle 1), (2) Spatialisation sonore et "head related transfer functions", (3) Mesure d'impédance acoustique à partir de l'impédance électrique d'un haut-parleur, 3ème année, Ecole Polytechnique, Palaiseau.

2006-2012 7x(21h) *Petites classes d'électronique* Tronc commun, 2ème année, Ecole des Mines de Paris.

2006-2012 7x(6h) *Cours* Introduction aux séries de Volterra, MASTER 2R, ATIAM, Université Paris VI.

2005-2012 8x(5h) *Travaux pratiques en Acoustique-Informatique-Musique* Vocoder LPC et simulation de sons "parlants", 3ème année, Ecole des Mines de Paris.

2003 (40h) *TP d'automatique en contrôle de processus* Contrôle d'un moteur, stabilisation d'un système électronique par représentation d'état, Maîtrise EEA, Université Paris Sud.

2003 (28h) *Cours-TD-TP d'électronique analogique* DEUG S3SM, Université Paris Sud.

2002 (2h) *Cours d'option* sur les «Instruments de musique auto-entretenus et systèmes dynamiques non linéaires», DEA ATIAM, Ircam, Paris.

2001-2002 (37h) *TD de probabilités* (G. Demoment), Licence et Magistère EEA, Université Paris Sud.

2000-2002 3x(32h) *TD d'initiation à Matlab* : Probabilités, Traitement du signal, Automatique non linéaire, NFIO, Université Paris Sud.

2001 (32h) *TP de traitement du signal* (M. Kieffer), FIUPSO (3A et DESS), Université Paris Sud.

2000 (32h) *TP d'électronique numérique* (J.P. Courat), DEUG S2SM, Université Paris Sud.

1999 (8h) *Assistance de l'interrogateur aux TP-oraux du concours de l'Ecole Polytechnique .*

1999 (48h) *TP de traitement du signal sonore* (S. Mallat, J.F. Genat) : Vocodeur LPC, Synthèse d'un son de corde, compression MPEG, Ecole Polytechnique.

1998 (48h) *TP d'électronique* (A. Fromentel) : Réalisation d'une liaison série hyper-fréquence, Ecole Polytechnique.

Responsabilités dans des instances scientifiques ou d'enseignement

Depuis 2011 *Responsable de l'Unité d'Enseignemennt "Traitement du Signal Musical" du Master 2R ATIAM (Acoustique Traitement du Signal et Informatique Appliqués à la Musique).* Université Pierre et Marie Curie.

Depuis 2007 Membre du Bureau (secrétaire depuis 2011) du Groupe Spécialisé en Acoustique Musicale de la Société Française d'acoustique (GSAM-SFA, `www.sfa-asso.fr/`).

Depuis 2006 Membre du Conseil de laboratoire (CNRS UMR 9912).

2007-2010 Membre du *Comité de sélection* de l'Université Paris Sud, section CNU 61.

2005-2009 Responsable d'une des 4 actions du projet ANR CONSONNES (Contrôle des sons naturels et synthétiques, `http ://www.consonnes.cnrs-mrs.fr/`) *Action 2 : Modèles numériques de synthèse temps-réel : optimisation, problèmes directs et inverses, discrétisation, contrôle automatique.*

Activité de relecture d'articles pour des revues scientifiques

Acoustique : Acta Acustica united with Acustica, Journal of the Acoustical Society of America.

Automatique : Automatica, IEEE Transactions on Automatic Control, IEEE Transactions on Circuits and Systems, International Journal of Control, Journal Européen des Systèmes Automatisés.

Traitement du signal : IEEE Transactions on Audio, Speech and Language Processing.

Organisation de journées scientifiques et de sessions structurées en conférences

2012 Session structurée "MA-S06 : Nonlinear aspects of musical instruments", Acoustics'2012, Nantes (avec S. Bilbao, University of Edinburgh).

2010 Sessions structurées "SS(AM) : Synthèse sonore par modèle physique" et "SS(AM) : Non-linéarités dans les instruments de musique : analyses, méthodes, simulations", 10ème Congrès Français d'Acoustique Lyon (avec C. Vergez, CNRS).

2008 Session structurée "Singularities Analysis and Integral Representations for Fractional Differential Systems", IFAC conference on Fractional Differentiation and its Applications, Ankara, Turquie (avec D. Matignon, ISAE-Sup'Aéro.).

2008 Journée "Non-linéarités dans les instruments de musique", Groupe Spécialisé en Acoustique Musicale de la Société Française d'Acoustique.

2001 Session structurée "Virtual Musical Instruments", Multiconference on Systemics, Cybernetics and Informatics, ISAS-SCI 2001, Orlando, Etats-Unis (avec C. Vergez, CNRS).

Relations industrielles et valorisation

2010-2012 Coordinateur client des projets mécatroniques *VoiceTronics 1* puis *VoiceTronics 2* avec l'Ecole des Mines, ParisTech : développement d'un électro-glottagraphe multi-canal et de maquettes robotisées (échelles 1 et 4) de conduit laryngé (avec T. Hézard-doctorant, N. Henrich-CNRS, M. Kob-Prof., T. Legou-CNRS et A. Lagier-Chirurgienne ORL).

2008-2012 Partenariat avec la société Orosys (lauréate du concours du Ministère de la recherche - OSEO en catégorie Création/Développement) : encadrement (principal) de la thèse CIFRE d'Ivan Cohen pour la création d'un produit commercial destiné au milieu professionel de la musique.

2007-2009 Développement du plug-in *BrassyFx* (avec V. Smet, R. Muller et T. Carpentier, Ircam-CNRS) : émulation d'un effet de cuivrage temps-réel (type trombone) par les séries de Volterra *(utilisé dans des créations musicales à l'Ircam).*

2007-2009 Développement du plug-in *IrcamFilter* (avec T. Carpentier, Ircam-CNRS) : émulation d'un filtre audio non linéaire par les séries de Volterra *(utilisé dans des créations musicales à l'Ircam).*

2005-2007 Coordinateur client des projets mécatroniques (*BarmStrong 1* puis *BarmStrong 2*) avec l'Ecole des Mines, ParisTech : robotisation d'une bouche artificielle pour le jeu des instruments à vent de type cuivre (projet ANR CONSONNES).

Actions de vulgarisation scientifique

2008 Article *"Des instruments de musique virtuels",* Pour la science, volume 373 (avec C. Vergez-CNRS).

2007 *Zoom sur les métiers : Les métiers des mathématiques (Fiche métier de Thomas Hélie),* (1) ONISEP-Ministère de l'Education nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche (ISBN :978-2-273-00695-8, 41000 exemplaires) ; (2) *Gazette des Mathématiciens*, volume 13 (SMF) ; (3) Journée de présentation à des classes de terminale, organisée par B. Lucquin (Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie) et V. Chauveau (Association "femmes et mathématiques", Institut Henri Poincaré).

2003 Démonstrations sonores et présentations "grand public" de résultats de recherche. 150è anniversaire de l'Ecole Polytechnique fédérale de Lausanne.

2001-2004 Démonstrations sonores et présentations "grand public" de résultats de recherche. Journées "Portes ouvertes" de l'Ircam.

Chapitre 6

Liste des publications personnelles

Ce chapitre rassemble l'ensemble de mes publications, organisées selon les dix champs recommandés par le CNRS pour la rédaction des rapports quadiennaux, puis par ordre chronologique. Ces dix champs sont les suivants : A. Revues à comité de lecture, B. Conférences invitées dans des congrès, C. Actes de colloques à comité de lecture, D. Publications dans des revues sans comité, E. Communications à des congrès (sans actes), F. Séminaires, G. Livres et ouvrages, H. Chapitres d'ouvrages, I. Logiciels, J. Vulgarisation scientifique, autres. Bien qu'elle soit vide, la partie D est incluse dans ce document pour respecter le classement et apparaître dans la table des matières.

A. Revues à comité de lecture

[A1] Thomas Hélie and Xavier Rodet. Radiation of a pulsating portion of a sphere : application to horn radiation. *Acta Acustica united with Acustica*, 89 :565–577, 2003.

[A2] Thomas Hélie. Mono-dimensional models of the acoustic propagation in axisymmetric waveguides. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 114 :2633–2647, 2003.

[A3] Thomas Hélie and Xavier Rodet. Modélisation physique d'instruments de musique en systèmes dynamiques et inversion. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 37 :1305–1310, 2003.

[A4] Thomas Hélie and Martin Hasler. Volterra series for solving weakly nonlinear partial differential equations : application to the Burgers equation with visco-thermal losses. *International Journal of Control*, 77-12 :1071–1082, 2004.

[A5] Thomas Hélie and Denis Matignon. Diffusive representations for analyzing and simulating flared acoustic pipes with visco-thermal losses. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 16-4 :503–536, 2006.

[A6] Thomas Hélie and Denis Matignon. Representation with poles and cuts for the time-domain simulation of fractional systems and irrational transfer functions. *Journal of Signal Processing, special issue on Fractional Calculus Applications in Signals and Systems*, 86 :2516–2528, 2006.

[A7] Thomas Hélie, Denis Matignon, and Rémi Mignot. Criterion design for optimizing low-cost approximations of infinite-dimensional systems : towards efficient real-time simulation. *Int. Journal of Tomography and Statistics*, 7 :13–18, 2007.

[A8] Thomas Hélie and David Roze. Sound synthesis of a nonlinear string using Volterra series. *Journal of Sound and Vibration*, 314 :275–306, 2008.

[A9] Thomas Hélie and Béatrice Laroche. On the convergence of Volterra series of finite dimensional quadratic MIMO systems. *International Journal of Control, special issue in Honor of Michel Fliess 60 th-birthday*, 81-3 :358–370, 2008.

[A10] Rémi Mignot, Thomas Hélie, and Denis Matignon. On the appearance of branch cuts for fractional systems as a mathematical limiting process based on physical grounds. *Physica Scripta*, 136 :1–7, 2009.

[A11] Brigitte Andréa-Novel, Jean-Michel Coron, and Thomas Hélie. Asymptotic state observers for a simplified brass instrument model. *Acta Acustica united Acustica*, 96-4 :733–742, 2010.

[A12] Rémi Mignot, Thomas Hélie, and Denis Matignon. Digital waveguide modeling for wind instruments : building a state-space representation based on the Webster-Lokshin model. *IEEE Transactions on Audio, Speech and Language Processing, special issue on Virtual Analog Audio Effects and Musical Instruments*, 18-4 :843–854, 2010.

[A13] Thomas Hélie. Volterra series and state transformation for real-time simulations of audio devices including saturations : application to the Moog ladder filter. *IEEE Transactions on Audio, Speech and Language Processing, special issue on Virtual Analog Audio Effects and Musical Instruments*, 18-4 :747–759, 2010.

[A14] Thomas Hélie and Béatrice Laroche. Computation of convergence bounds for Volterra series of linear analytic single input systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56-9 :2062–2072, 2011.

[A15] Rémi Mignot, Thomas Hélie, and Denis Matignon. From a model of lossy flared pipes to a general framework for simulation of waveguides. *Acta Acustica united with Acustica*, 97 :477–491, 2011.

[A16] Rémi Mignot, Thomas Hélie, and Denis Matignon. Simulation en guides d'ondes numériques stables pour des tubes acoustiques à profil convexe : quelques apports de l'automatique et du traitement du signal pour la résolution numérique en temps réel de problèmes de dimension infinie intervenant en acoustique musicale. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 45-7 :547–574, 2011.

B. Conférences invitées dans des congrès

[B1] Christophe Vergez and Thomas Hélie. Virtual musical instruments : Plenary session. In *the 5th Conference on Systemics, Cybernetics and Informatics*, Orlando, USA.

[B2] Thomas Hélie, Thomas Hézard, Rémi Mignot, and Denis Matignon. On the 1D wave propagation in wind instruments with a smooth profile. In *Forum Acusticum*, volume 6, pages 1–6, Aalborg, Denmark.

[B3] Thomas Hélie. TUTORIAL : introduction to Volterra series and applications to physical audio signal processing. In *DAFx - International Conference On Digital Audio Effects*, volume 14, pages 1–1, Paris, France.

[B4] Thomas Hélie, Nicolas Lopes, and René Caussé. Robotized artificial mouth for brass instruments : automated experiments and cartography of playing parameters. In *PEVOC - Pan European Voice Conference*, volume 9, pages 77–78, Marseille, France.

[B5] Thomas Hézard, Thomas Hélie, Boris Doval, René Caussé, and Gilles Degottex. Glottal area waveforms study from high speed video-endoscopic recordings and voice production model with aeroacoustic coupling driven by a forced glottal folds model. In *PEVOC - Pan European Voice Conference*, pages 75–76, Marseille, France.

C. Actes de colloques à comité de lecture

[C1] Philippe Depalle and Thomas Hélie. Extraction of spectral peak parameters using a short-time Fourier transform modeling and no sidelobe windows. In *IEEE WASPAA - Workshop on Applications of Signal Processing on Audio and Acoustics*, pages 1–4, Mohonk, USA, 1997.

[C2] Thomas Hélie, Christophe Vergez, Jean Lévine, and Xavier Rodet. Inverse problem in a physical model of trumpet : estimation of the player's control parameters. In *ICMC - International Computer Music Conference*, pages 1–4, Beijing, China.

[C3] Thomas Hélie, Christophe Vergez, Jean Lévine, and Xavier Rodet. Inversion of a physical model of a trumpet. In *IEEE CDC - Conference on Decision and Control*, volume 38.3, pages 2593–2598, Phoenix, Arizona, USA.

[C4] Thomas Hélie, Christophe Vergez, and Xavier Rodet. Virtual musical instruments : contribution to physical modeling and control of self-sustained instruments. In *the 5th Conference on Systemics, Cybernetics and Informatics*, volume 10, pages 547–552, Orlando, USA, 2001.

[C5] Thomas Hélie and Denis Matignon. Damping models for the sound synthesis of bar-like instruments. In *the 5th Conference on Systemics, Cybernetics and Informatics*, volume 10, pages 541–546, Orlando, USA, 2001.

[C6] Thomas Hélie and Denis Matignon. Numerical simulation of acoustic waveguides for Webster-Lokshin model using diffusive representations. In *Waves - International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation Phenomena (INRIA)*, volume 6, pages 72–77, Jyvaskyla, Finland, 2003.

[C7] Houssem Haddar, Thomas Hélie, and Denis Matignon. A Webster-Lokshin model for waves with viscothermal losses and impedance boundary conditions : strong solutions. In *Waves - International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation Phenomena (INRIA)*, volume 6, pages 66–71, Jyvaskyla, Finland, 2003.

[C8] Thomas Hélie and Martin Hasler. Representation of the weakly nonlinear propagation in air-filled pipes with Volterra series. In *IEEE NDES - Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems*, volume 11, pages 105–108, Scuol, Switzerland, 2003.

[C9] Thomas Hélie. On the use of Volterra series for real-time simulations of weakly nonlinear analog audio devices : application to the Moog ladder filter. In *DAFx - International Conference On Digital Audio Effects*, volume 9, pages 7–12, Montréal, Québec.

[C10] Thomas Hélie. Résolution d'une équation des ondes faiblement non linéaire par les séries de Volterra et décomposition modale. In *CFA - Congrès Français d'Acoustique*, volume 8, pages 1–4, Tours, France.

[C11] Thomas Hélie. Ondes découplées et ondes progressives pour les problèmes mono-dimensionnels d'acoustique linéaire. In *CFA - Congrès Français d'Acoustique*, volume 8, pages 1–4, Tours, France.

[C12] Thomas Hélie, Denis Matignon, and Rémi Mignot. Criterion design for optimizing low-cost approximations of infinite-dimensional systems : towards efficient real-time simulation. In *IFAC Workshop on Control Applications of Optimisation*, volume 13, pages 1–6, Cachan, France.

[C13] Thomas Hélie, Rémi Mignot, and Denis Matignon. Waveguide modeling of lossy flared acoustic pipes : Derivation of a Kelly-Lochbaum structure for real-time simulations. In *IEEE WASPAA - Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics*, pages 267–270, Mohonk, USA.

[C14] Karim Trabelsi, Thomas Hélie, and Denis Matignon. Time-domain simulation of functions and dynamical systems of Bessel type. In *WAVES - Conference on Mathematical and Numerical aspects of waves*, volume 8, pages 1–3, Reading, England.

[C15] David Roze and Thomas Hélie. Sound synthesis of a nonlinear string using Volterra series. In *ICA - International Congress on Acoustics*, volume 19, pages 1–6, Madrid, Spain.

[C16] Rémi Mignot, Thomas Hélie, and Denis Matignon. On the appearance of branch cuts for fractional systems as a mathematical limiting process based on physical grounds. In *FDA - Fractional Differentiation and its Applications*, pages 1–6, Ankara, Turkey, 2008.

[C17] Rémi Mignot, Thomas Hélie, and Denis Matignon. Stable realization of a delay system modeling a convergent acoustic cone. In *IEEE MED - Mediterranean Conference on Control and Automation*, pages 1574–1579, Ajaccio, France, 2008.

[C18] Thomas Hélie and Vanessa Smet. Simulation of the weakly nonlinear propagation in a straight pipe : application to a real-time brassy audio effect. In *IEEE MED - Mediterranean Conference on Control and Automation*, volume 16, pages 1580–1585, Ajaccio, France.

[C19] Thomas Hélie and Béatrice Laroche. Convergence radius and guaranteed error bound for the Volterra series expansion of finite dimensional quadratic systems. In *IEEE MED - Mediterranean Conference on Control and Automation*, volume 16, pages 741–746, Ajaccio, France.

[C20] Ivan Cohen and Thomas Hélie. Simulation of a guitar amplifier stage for several triode models : examination of some relevant phenomena and choice of adapted numerical schemes. In *AES - Convention of Audio Engineering Society*, volume 127, pages 1–4, New York, USA.

[C21] Brigitte D'Andréa-Novel, Jean-Michel Coron, Bernoît Fabre, and Thomas Hélie. Wind instruments as time delay systems. Part I : modeling. In *IFAC Workshop on Time Delay Systems*, pages 1–6, Sinaia, Romania, 2009.

[C22] Brigitte D'Andréa-Novel, Jean-Michel Coron, Benoît Fabre, and Thomas Hélie. Wind instruments as time delay systems. Part II : control and estimation. In *IFAC Workshop on Time Delay Systems*, volume 8, pages 7–12, Sinaia, Romania, 2009.

[C23] Rémi Mignot, Thomas Hélie, and Denis Matignon. State-space representations for digital waveguide networks of lossy flared acoustic pipes. In *DAFx - International Conference On Digital Audio Effects*, pages 60–64, Como, Italy.

[C24] Thomas Hélie and Béatrice Laroche. Computation of convergence radius and error bounds of Volterra series for single input systems with a polynomial nonlinearity. In *IEEE CDC - Conference on Decision and Control*, volume 48, pages 1–6, Shanghai, China.

[C25] Ivan Cohen and Thomas Hélie. Simulation temps réel d'un étage électronique non linéaire d'amplificateur guitare, et améliorations à l'aide de mesures de triodes. In *CFA - Congrès Français d'Acoustique*, volume 10, pages 1–6, Lyon, France.

[C26] Ivan Cohen and Thomas Hélie. Measures and parameter estimation of triodes, for the real-time simulation of a multi-stage guitar preamplifier. In *AES - Convention of Audio Engineering Society.*

[C27] Rémi Mignot, Thomas Hélie, and Denis Matignon. Simulation de guides d'ondes stables pour des tubes acoustiques convexes. In *CFA - Congrès Français d'Acoustique*, volume 10, pages 1–6, Lyon, France, 2010.

[C28] David Roze, Xavier Merlhiot, Thomas Hélie, and Joël Bensoam. Simulation de la dynamique d'une poutre de Reissner par les séries de Volterra. In *CFA - Congrès Français d'Acoustique*, volume 10, pages 1–6, Lyon, France.

[C29] Thomas Hélie, Thomas Hézard, and Rémi Mignot. Représentation géométrique optimale de la perce de cuivres pour le calcul d'impédance d'entrée et de transmittance, et pour l'aide à la lutherie. In *CFA - Congrès Français d'Acoustique*, volume 10, pages 1–6, Lyon, France.

[C30] Thomas Hélie and Christophe Vergez. Propagation non linéaire avec amortissement proportionnel : simulation entrée-sortie de solutions entropiques. In *CFA - Congrès Français d'Acoustique*, volume 10, pages 1–6, Lyon, France.

[C31] Thomas Hélie, Thomas Hézard, and Rémi Mignot. Input impedance computation for wind instruments based upon the Webster-Lokshin model with curvilinear abscissa. In *ISMA*, Sydney, Australia.

[C32] Thomas Hélie and Christophe Vergez. Nonlinear propagation with frequency-independent damping : input-output simulation of entropic solutions. In *ISMA*, Sydney, Australia.

[C33] Ivan Cohen and Thomas Hélie. Real time simulation of a guitar power amplifier. In *DAFx - International Conference On Digital Audio Effects*, volume 13, pages 1–4, Graz, Austria.

[C34] Rémi Mignot, Thomas Hélie, and Denis Matignon. Acoustic modelling of a convex pipe adapted for digital waveguide simulation. In *DAFx - International Conference On Digital Audio Effects*, volume 13, pages 1–7, Graz, Austria, 2010.

[C35] Thomas Hélie and Béatrice Laroche. Convergence of series expansions for some infinite dimensional nonlinear systems. In *IFAC SSSC - Symposium on System, Structure and Control*, volume 4, pages 1–7, Ancona, Italiy.

[C36] Thomas Hélie and Béatrice Laroche. Computation of convergence radius and error bounds of Volterra series for multiple input systems with an analytic nonlinearity in state. In *IEEE CDC - Conference on Decision and Control*, volume 49, pages 1–6, Atlanta, USA.

[C37] Thomas Hélie. Lyapunov stability analysis of the Moog ladder filter and dissipativity aspects in numerical solutions. In *DAFx - International Conference On Digital Audio Effects*, volume 14, pages 45–52, Paris, France.

[C38] Thomas Hélie, Thomas Hézard, Louis Delebecque, and Rémi Mignot. Considerations on travelling waves in the horn equation and energetic aspects. In *Acoutics 2012*, pages 1–5, Nantes, France.

[C39] David Roze and Thomas Hélie. Proposition of a Green-Volterra formalism to solve dynamics of a nonlinear string. In *Acoustics 2012*, pages 1–5, Nantes, France.

[C40] Ivan Cohen and Thomas Hélie. Measures and models of real triodes, for the simulation of guitar amplifiers. In *Acoustics 2012*, pages 1–5, Nantes, France, 2012.

[C41] Thomas Hézard, Thomas Hélie, René Caussé, and Boris Doval. Analysis-synthesis of vocal sounds based on a voice production model driven by the glottal area. In *Acoustics 2012*, pages 1–5, Nantes, France, 2012.

[C42] François Dubois, Isabelle Greff, and Thomas Hélie. On least action principles for discrete quantum scales. In *Quantum Interaction*, volume 6, pages 1–11, Paris, France.

[C43] Denis Matignon and Thomas Hélie. On damping models preserving the eigenfunctions of conservative systems : a port-hamiltonian perspective. In *In 4th IFAC Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Nonlinear Control*, pages 1–6, University of Bologna, Bertinoro, Italy, 2012.

D. Publications dans des revues sans comité

E. Communications à des congrès (sans actes)

[E1] Marcelo M. Wanderley and Thomas Hélie. Detailed study on the expressive movements of acoustic instrument performers with applications to humancomputer interaction in complex multiparametric contexts. In *Conference on Sensorimotor Controls in Men and Machines*, volume 3, Marseille, France.

[E2] Thomas Hélie. Representation of the weakly nonlinear propagation in air-filled pipes with Volterra series. In *Hassip Mid-term coupled with the workshop on Application Of Time Frequency Analysis In Acoustics and the ESI Spring Semester on Modern Time-Frequency Analysis, Erwin Schroedinger Institute*, Vienna, Austria.

[E3] Thomas Hélie. Systèmes différentiels fractionnaires et irrationnels : approximation et optimisation. In *Journée "Dérivation fractionnaire en mécanique - État-de-l'art et applications"*, Paris, France.

[E4] David Roze, Thomas Hélie, and Joël Bensoam. Application of Volterra series to simulate dynamics of a Reissner beam. In *Acoustics'08*, Paris, France.

[E5] Thomas Hélie, Brigitte D'Andréa-Novel, and Jean-Michel Coron. Inverse problem : recovering the full-state of a simplified model of a trumpet-like instrument from the radiated pressure. In *Acoustics'08*, Paris, France.

[E6] Rémi Mignot, Thomas Hélie, and Denis Matignon. Puzzles in pipes with negative curvature : from the Webster pde to stable numerical simulation in real time. In *IFAC CDPS - Workshop on Control of Distributed Parameter Systems*, Toulouse, France.

[E7] Thomas Hélie, Brigitte D'Andréa-Novel, and Jean-Michel Coron. Observers of a nonlinear neutral system modelling a musical brass instrument. In *IFAC CDPS - Workshop on Control of Distributed Parameter Systems*, Toulouse, France.

[E8] Thomas Hélie. Fractional and irrational systems : approximation and optimization. In *Journées "Dynamiques fractionnaires et Applications", Laboratoire de Mathématiques et de leur Applications , CNRS UMR 5142*, Pau, France, 2010.

[E9] Thomas Hélie, Nicolas Lopes, and René Caussé. Open-loop control of a robotized artificial mouth for brass instruments. In *Acoutics 2012 (ASA)*, pages 1–1, Hong Kong, China.

[E10] Thomas Hézard, Thomas Hélie, Boris Doval, Nathalie Henrich, and Malte Kob. Non-invasive vocal-folds monitoring using electrical imaging methods. In *100 years of electrical imaging*, Paris, France.

F. Séminaires

[F1] Thomas Hélie. Inversion d'un modèle physique de cuivre. Séminaire, Ircam-CNRS UMR 9912, Paris, Mars 2001.

[F2] Thomas Hélie. Méthode d'analyse pour un modèle physique de cuivre. Séminaire, Centre Automatique et Systèmes, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, Fontainebleau, Avril 2001.

[F3] Thomas Hélie. Modèles physiques d'instruments à vent : simulation temporelle et inversion. Laboratoire Lorrain de Recherche en Informatique et ses Applications CNRS UMR 7503, CNRS-INPL-INRIA-UHP, Nancy, Mars 2002.

[F4] Thomas Hélie. Modèles physiques d'instruments à vent : simulation temporelle et inversion. Ircam-CNRS UMR 9912, Paris, Mars 2002.

[F5] Thomas Hélie. Modèles physiques d'instruments à vent et simulation de la propagation acoustique dans les guides à symétrie de révolution. Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique CNRS UPR 7051, Marseille, Mars 2002.

[F6] Thomas Hélie. Systèmes dynamiques non linéaires et guides d'ondes : problèmes directs et inverses dans le contexte de la modélisation d'instruments de musique, de la synthèse sonore et de son contôle. Laboratoire Traitement et Communication de l'Information CNRS UMR 5141, École Nationale Supérieure des Télécommunications,Paris, Novembre 2003.

[F7] Thomas Hélie. Propagation acoustique non linéaire dans des guides d'ondes avec pertes viscothermiques. Centre de Mathématiques et Leurs Applications, École Normale Supérieure de Cachan, Décembre 2003.

[F8] Thomas Hélie. Propagation acoustique dans les tubes axi-symétriques et modèles à dépendance mono-spatiale. Centre de Recherches pour l'Étude et la Simulation de la Propagation des Ondes, INRIA Rocquencourt, Avril 2003.

[F9] Thomas Hélie. Systèmes dynamiques non linéaires et guides d'ondes : problèmes directs et inverses dans le contexte de la modélisation d'instruments de musique, de la synthèse sonore et de son contrôle. Laboratoire des Signaux et Systèmes CNRS UMR 8506, Supélec-CNRS-UPS, Gif-Sur-Yvette, Octobre 2003.

[F10] Thomas Hélie. Physical modeling of musical instruments with dynamical systems and inversion. Laboratoire des Systèmes Non Linéaires, École Polytechnique Fédérale de Lausane, Suisse, Février 2003.

[F11] Thomas Hélie. Propagation acoustique dans les tubes à section variable avec pertes viscothermiques : d'une équation des ondes 3d à un système bi-porte à retard avec représentations diffusives. Groupe Thématique «Systèmes à Retard» CNRS-INRIA, Conservatoire National des Arts et Métiers, Paris, Mai 2003.

[F12] Thomas Hélie. Propagation acoustique dans les instruments à vent de type cuivre. Séminaire "équations aux dérivées partielles et applications" de l'Institut Elie Cartan, Nancy, Novembre 2004.

[F13] Thomas Hélie. Séries de Volterra pour la résolution d'équations aux dérivées partielles non linéaires avec contrôle de dimension finie et infinie. Séminaire UME, ENS des Techniques Avancées, Palaiseau, Novembre 2005.

[F14] Thomas Hélie. Simulation faible coût de la propagation non linéaire avec pertes dans un tube droit. Séminaire, Ircam-CNRS UMR 9912, Paris, 2005.

[F15] Thomas Hélie. Résolution analytique d'une edp non-linéaire en système entrée-sortie par les séries de Volterra. Séminaire, Journée d'échange Ircam-CNRS UMR 9912-LMA CNRS,UPR 7051, Avril 2005.

[F16] Thomas Hélie. Transport non linéaire dissipatif d'ondes planes pour la synthèse sonore d'instruments de type cuivre : résolution en système entrée-sortie par les séries de Volterra. In *GdR Ondes (GT1) - Institut Henri Poincaré*, Paris, France, Mai 2005.

[F17] Thomas Hélie. Cours d'introduction aux séries de Volterra et leurs applications en acoustique. LMA CNRS UPR 7051, Marseille, Novembre 2006.

[F18] Thomas Hélie. Séries de Volterra pour la résolution d'équations aux dérivées partielles. Séminaire ALGO, INRIA Rocquencourt, Novembre 2006.

[F19] Thomas Hélie. Inversion-observation d'un système neutre : modèle simplifié d'un instrument à vent. Séminaire, projet blanc ANR-CONSONNES, Paris, Mai 2007.

[F20] Thomas Hélie. Séries de Volterra et simulation du cuivrage des sons. Séminaire, Ecole thématique Acoustique et ondes non linéaires et applications, Juin 2007.

[F21] Thomas Hélie. Inversion d'un modèle simplifié d'instrument à vent. Séminaire, Ircam-CNRS UMR 9912, Paris, Novembre 2007.

[F22] Thomas Hélie. Modélisation physique pour la synthèses sonore. CURSUS-Ircam : Formation à la composition et à l'informatique musicale, Ircam, Paris, Décembre 2007.

[F23] Thomas Hélie. Tutoriel "séries de Volterra" et applications. In *Journée Non-Linéarité et instruments de musique - Journée du GSAM, Société Française d'Acoustique*, Paris, France, 2008.

[F24] Thomas Hélie. Séries de Volterra : tutoriel et applications pour la synthèse sonore par modèle physique. In *Séminaire du CETHIL (CNRS UMR 5008)*, Lyon, France, Février 2009.

[F25] Thomas Hélie. Des mathématiques pour le son, son analyse, son traitement et sa synthèse. In *Séminaires de l'IREM sur "Les métiers des Mathématiques" (Math CLub)*, Paris, France, Novembre 2009.

[F26] Thomas Hélie and Béatrice Laroche. Représentation de systèmes non linéaires par les séries Volterra : Calcul de domaines de convergence et applications. In *Séminaire du Centre de Mathématiques Appliquées de Polytechnique*, Palaiseau, France, Mai 2010.

[F27] Thomas Hélie. Représentation de systèmes non linéaires par les séries Volterra : Calcul de domaines de convergence et applications. In *Séminaire de Mathématiques et de leurs Applications - LMAP - CNRS UMR 5142*, Pau, France, 2011.

[F28] Thomas Hélie. Représentation de systèmes non linéaires par les séries Volterra : Calcul de domaines de convergence et applications. In *Séminaire du Groupe de Travail "Modélisation des systèmes complexes", AFSCET - CNAM*, Paris, France, Novembre 2011.

[F29] Thomas Hélie. Quelques résultats pour l'étude d'instruments de musiques : Tubes acoustiques - séries de Volterra - Robot trompettiste. In *Séminaire du département Parole et Cognition, GIPSA-Lab*, Grenoble, France, 2012.

G. Livres et ouvrages

[G1] Thomas Hélie. Estimation des paramètres de partiels par modélisation de la transformée de fourier à court terme utilisant des fenêtre spectrales sans lobdes secondaires, 1997.

[G2] Thomas Hélie. Estimation des paramètres d'un modèle physique de trompette, 1998.

[G3] Thomas Hélie. Etude des méthodes d'estimation des paramètres d'un modèle physique d'instrument de musique : Application à la trompette, 1998.

[G4] Thomas Hélie. *Modélisation physique d'instruments de musique en systèmes dynamiques et inversion.* Thèse de doctorat, Université de Paris XI - Orsay, Paris, 2002.

[G5] Karim Trabelsi, Denis Matignon, and Thomas Hélie. On the numerical inversion of the laplace transform in the context of physical models with realistic damping. Technical report, Telecom ParisTech, 2009.

H. Chapitres d'ouvrages

[H1] Thomas Hélie. Vocoder par LPC. In P. Jouvelot B. d'Andréa Novel, B. Fabre, editor, *Acoustique-Informatique-MusiquE : Outils scientifiques pour la musique*, pages 351–380. Presses des Mines, Paris, France, 2012.

I. Logiciels

[I1] Thomas Hélie and Thibaut Carpentier. IrcamFilter. Emulation de filtre non linéaire par les séries de Volterra (Plug-In), 2009.

[I2] Thomas Hélie, Vanessa Smet, Thibaut Carpentier, and Rémy Muller. BrassyFx. Emulation d'un effet de cuivrage temps-réel par les séries de Volterra (Plug-In), 2009.

J. Vulgarisation scientifique, autres

[J1] Françoise Martin and Thomas Hélie. *Zoom sur les métiers : Les métiers des mathématiques : Fiche métier de Thomas Hélie*, volume ISBN :978-2-273-00695-8. Hervé de Monts de Savasse, 2007.

[J2] SMAI-SMF-SFDS-AFM, editor. *Gazette des Mathématiciens*, volume 113, chapter Lancement de «Zoom sur les métiers des mathématiques», page 129. Société Mathématique de France, 2007.

[J3] Thomas Hélie and Christophe Vergez. *Des instruments de musique virtuels*, volume 373. Pour la science, 2008.

6.1 Copie de [A11] : Acta Acustica United with Acustica, 2010 (version d'auteur)

Asymptotic state observers for a simplified brass instrument model

Brigitte d'Andréa-Novel*†
Mines ParisTech - Centre de Robotique, 60 boulevard Saint-Michel, 75272 Paris Cedex 06, France

Jean-Michel Coron‡
Université Pierre et Marie Curie - Laboratoire Jacque-Louis Lions, Institut Universitaire de France, B.C. 196, 4 place Jussieu 75252 Paris Cedex 05, France

Thomas Hélie§¶
IRCAM - CNRS UMR 9912 Sciences et Technologies de la Musique et du Son, 1 place Igor Stravinsky, 75004 Paris, France
(Dated:)

In this paper, a simplified model of a brass instrument is introduced. It is composed of a valve (including the mechanics of the lips), a jet (coupled with the valve dynamics), and a straight acoustic pipe excited by the jet, radiating in the air, and with frequency independent losses. This model couples an ordinary differential equation (valve) to a partial differential equation (acoustic pipe) through a static nonlinear function (Bernoulli relation on the jet). In fact, the overall system can be described by a "so-called" nonlinear neutral state space representation, the state of which being the position and velocity of the valve aperture and the ingoing wave of pressure at the entrance of the pipe. The measured output is the pressure at the open end of the pipe and the control is the mouth pressure. In this paper, methods of control engineering are applied to recover the state from the input and the measured output, assuming that propagation characteristics and player expression parameters are constant: a nonlinear state observer is built. The robustness to wrong initial conditions and to noise on the measured output are analyzed.

PACS numbers: 60.014, 75.005, 75.020

I. INTRODUCTION

Many physical models of musical instruments are available in the literature [1, 2]. But their control to obtain realistic musical restitution is usually a problem, especially for self-sustained instruments. Inversion of the model therefore appears as a natural tool to cope with this problem, i.e., recovering the control parameters from a target sound. This problem has already been investigated in the past [3, 4] using control engineering techniques, but significant improvements are still needed.

A problem to cope with consists in recovering both the vibro-acoustic state and the musician's control parameters from a unique observation, namely, the sound produced. The difficulty is increased by the fact that self-sustained instruments are able to generate a large variety of regimes and, possibly, complex regimes such as chaotic ones [5]. Nevertheless, what can be noticed for these systems is the fact that two separate time-scales can be considered. Vibrating variables x (such as acoustic pressure, reed or lips motion, etc) oscillate mainly at high frequencies compared to the control variables associated with the player's gestures G (pressure in the mouth, lip stiffness, etc).

Then, assuming some usual quantities are measured on the system, such as the pressure radiated at the end of the instrument, called the "output" y, the inversion could be performed in two steps :

(P1) the first step consists in recovering the full oscillating internal state x of the instrument from the knowledge of y, assuming the control G is locally constant . This is achieved by building a so-called "state observer" in control systems theory [6, 7];

(P2) the second one consists in computing the accessible parameters G from this observed state. This could be achieved using adaptive filtering techniques [8, 9].

This paper addresses the first problem (P1) of elaborating a state observer for a simplified brass instrument model, assuming that the output y is the pressure at the end of the pipe.The observer is elaborated from the nonlinear neutral state space representation associated to the overall system, using Lyapunov techniques. Other

*Note that the co-authors are listed with respect to the alphabetical order.
§Corresponding Author
†Electronic address: `brigitte.dandrea-novel@mines-paristech.fr`
‡Electronic address: `coron@ann.jussieu.fr`
¶Electronic address: `thomas.helie@ircam.fr`

approaches based on e.g. sliding modes can be found in [10].

The structure of the paper is as follows : section II introduces a simplified physical description of the instrument. Section III proposes a state-space representation of the instrument deduced from the model of section II. Section IV is dedicated to the elaboration of the state observer. Section V presents some simulation results. Conclusion and perspectives will be presented in section VI.

II. DESCRIPTION OF THE INSTRUMENT AND PHYSICAL EQUATIONS

Consider a simplified instrument, of the brass instrument type, composed of (see Fig.1),

- *a valve*, the aperture of which is modulated by a single solid characterized by its mass, stiffness and damping,
- *a jet* which applies a force on the valve,
- *an acoustic pipe* the vibrations of which are set in motion by the jet.

Each component is modeled as detailed below.

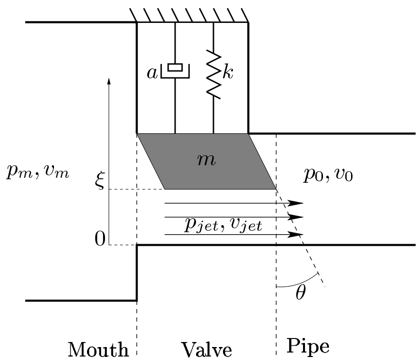


Figure 1: The dynamics of the musician's lips are modeled by that of a solid mass subjected to pressure forces, a damper and a spring. Variables p denote (relative) pressures and variables v denote particle velocities.

Moreover, the absolute pressure is denoted by the capital letter P and the relative pressure by $p = P - P_{atm}$ where P_{atm} is the atmospheric pressure. In the mouth, the (relative) pressure is denoted p_m and the particle velocity v_m. They are respectively denoted p_{jet} and v_{jet} in the jet.

A. Valve

The lips of the musician are represented by a one degree of freedom lip model: a valve composed of a trapezoid-parallelepipedic solid $\mathcal{S}$ with mass m, moving in the vertical direction, subjected to pressure forces F_{side} and F_{bot}, a damping a, and a spring with stiffness k. The bottom of the mass is located by the variable $\xi(t)$ and an open valve corresponds to $\xi > 0$. The equilibrium position at rest is denoted by $\xi(t) = \xi_e$ which is supposed to be positive.

The dynamics of the solid $\mathcal{S}$ are governed by

$$m\ddot{\xi} + a\dot{\xi} + k(\xi - \xi_e) = F_{side} + F_{bot}. \qquad (1)$$

The vertical component of the force due to the pressure on the sides of $\mathcal{S}$ is

$$F_{side} = (A_{side}\, \sin\theta)\,(p_m - p_0), \qquad (2)$$

where the area A_{side} of the lateral sides of $\mathcal{S}$ and the angle θ in Fig.1 are supposed to be constant. The force F_{bot} applied on the bottom side of $\mathcal{S}$ depends on the sign of ξ:

- If the valve is open, F_{bot} is due to the jet pressure p_{jet} so that

$$\text{if } \xi > 0, \qquad F_{bot} = A_{bot}\, p_{jet}, \qquad (3)$$

- If the valve is closed, F_{bot} is a contact force. An empirical model of a contact with a second lip (rather than with a non-realistic rigid body) is given by [11]

$$\text{if } \xi \le 0, \qquad F_{bot} = -m\kappa_m\ddot{\xi} - a\kappa_a\dot{\xi} - k\kappa_k(\xi - \xi_e). \quad (4)$$

  Coefficients κ_m, κ_a, and κ_k respectively correspond to an additional mass, damping and stiffness due to the contact of the two lips. Some empirical values of these corrections are $(\kappa_m, \kappa_a, \kappa_k) = (1, 4, 3)$ [12–14].

The equilibrium position ξ_e is a constant parameter set by the musician such that (1) is satisfied ($\xi = \xi_e$) with $p_m = p_{jet} = p_0 = 0$ and (arbitrary) constants m, a, k. Moreover, the mouth pressure p_m and parameters $(m, a, k, \kappa_m, \kappa_a, \kappa_k, A_{side}, A_{bot})$ are characteristic of the musician.

Note that more refined models of the lips mechanics have been studied: a two-dimensional lip vibration model used for the trumpet sound synthesis can be found in e.g. [15].

B. Aperture geometry and jet

If $\xi \le 0$, the valve is closed and there is no jet. If $\xi > 0$, there is a jet under the solid $\mathcal{S}$. The geometry of the aperture is supposed to be rectangular with an area

$$A(t) = \ell\,\xi(t), \qquad (5)$$

(ℓ is the lip width) much smaller than that of the mouth section A_m so that $A \ll A_m$. The jet is considered to be governed by the Bernoulli equation (quasi-steady jet and losses ignored)

$$p_m + \frac{1}{2}\rho v_m^2 = \frac{1}{2}\rho v_{jet}^2 + p_{jet}. \tag{6}$$

From the conservation of the airflow, the particle speed $|v_m| = |\frac{A}{A_m} v_{jet}| \ll |v_{jet}|$ is neglected in (6). Finally, for relative pressures, this yields

$$\begin{aligned} p_m &= \frac{1}{2}\rho v_{jet}^2 + p_{jet}, \text{ if } \xi > 0, & (7)\\ v_{jet} &= 0, \text{ if } \xi \leq 0. & (8)\end{aligned}$$

Remark 1 *From (7), $p_m \geq p_{jet}$ so that the jet is oriented from the mouth towards the pipe, that is,*

$$v_{jet} \geq 0.$$

More elaborate models which authorize negative v_{jet} have also been proposed [16]. This case will not be considered in the present paper.

C. Acoustic pipe and boundary conditions

Consider the linear acoustic propagation of plane waves in a lossless straight pipe with section S and length L. It is described by the conservative equations

$$\partial_t \begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{\rho c^2}{S} \\ \frac{S}{\rho} & 0 \end{bmatrix} \partial_z \begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \forall z \in [0, L], \tag{9}$$

where $p(z,t)$ is the pressure at location z and at time t in the pipe, u is the airflow and c is the celerity of the wave. Using the change of functions

$$\begin{bmatrix} p^+ \\ p^- \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix} \tag{10}$$

where $M = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & Z_c \\ 1 & -Z_c \end{bmatrix}$, $M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/Z_c & -1/Z_c \end{bmatrix}$ and $Z_c = \rho c/S$ is the characteristic impedance, the conservative equations yield

$$\begin{aligned} \partial_t p^+ + c\,\partial_z p^+ &= 0, & (11)\\ \partial_t p^- - c\,\partial_z p^- &= 0, & (12)\end{aligned}$$

which govern decoupled progressive waves and solve into

$$p^{\pm}(z,t) = p_0^{\pm}(t \mp z/c). \tag{13}$$

The boundary conditions are the following:

- at $z = 0$ (connection between the jet and the acoustic pipe), the airflow and pressure are assumed to be continuous, following remarks of Hirschberg [17] (experimental validations has been also obtained for the mouthpiece of a clarinet [18]):

$$p_{jet}(t) = p(0,t) = p_0^+(t) + p_0^-(t), \tag{14}$$

$$A(t)\,v_{jet} = u_{jet}(t) = u(0,t) = \frac{p_0^+(t) - p_0^-(t)}{Z_c}. \tag{15}$$

- at $z = L$, consider the non homogeneous boundary condition given by $p(z = L, t) = Z_L\, u(z = L, t)$ with a real passive impedance $Z_L > 0$. From (9) and (13), this expression translates into

$$\begin{aligned} p_0^-(t) &= \lambda\, p_0^+(t - \tau), & (16)\\ \tau &= 2\,L/c, & (17)\\ \lambda &= (Z_L - Z_c)/(Z_L + Z_c) \in (-1, 1). & (18)\end{aligned}$$

  Notice that this boundary condition is very simplified compared to realistic radiation impedances. But it allows to catch basic versions of the main effects. For instance, the usual correction of the pipe length due to the imaginary part of the radiation impedance can be included in the length L (simplified case of a constant length correction). Moreover, the radiated energy which is lost by an open pipe involves a small real positive impedance part. Here, $Z_L \ll Z_c$ (so that $\lambda < 0$) models a frequency-independent version of such a phenomenon.

In the discussion which follows, the notation $p^{\pm}(t)$ will be used rather than $p_0^{\pm}(t)$.

III. STATE-SPACE REPRESENTATION

A. Definitions of neutral systems, state, input, output, and reduced parameters

A neutral system [19, 20] is a delay differential system with the general expression

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f\big(x(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau), w(t)\big) & (19)\\ y(t) &= g\big(x(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau), w(t)\big) & (20)\end{aligned}$$

where the function f is responsible for the dynamics of the system and g defines the measured quantity. As detailed below, the model presented in section II can be represented by such a system, where the state $x = [x_1, x_2, x_3]^T$, the input $w = [w_1, w_2]^T$, and the output y are defined by

$$\begin{aligned} x(t) &= [\xi(t) - \xi_e, \dot{\xi}(t), p^+(t)]^T, & (21)\\ w(t) &= [p_m(t), \dot{p}_m(t)]^T, & (22)\\ y(t) &= (1+\lambda)\, p^+(t - \tau/2). & (23)\end{aligned}$$

Note that $y(t) = p(L,t)$ is the pressure measured at the output of the pipe and that the time derivative $\dot{p}_m$ of the mouth pressure will be necessary when establishing the neutral state-space representation (see section III C).

In this paper, the instrument is considered to be at rest before $t = 0$ so that x, w, and y are zero for $t < 0$. Moreover, quantities ξ_e, m, a, k, A_{side}, A_{bot}, θ, ρ, c, S, L, ℓ, λ, κ_m, κ_a, κ_k introduced in section II are all supposed to be constant. It will appear that the neutral system depends on the reduced constant parameters $\Theta = [\alpha^{\pm}, \omega^{\pm}, \beta_0^{\pm}, \beta_m^{\pm}, \lambda, \mu, \tau]$ defined in table I. The equations of the neutral system for the brass instrument are derived below.

Table I: Reduced parameters (σ denotes $\sigma = \mathrm{sign}(\xi)$).

σ	α	ω	β_0	β_m
$+$	$\frac{a}{m}$	$\sqrt{\frac{k}{m}}$	$\frac{A_{bot}-A_{side}\sin\theta}{m}$	$\frac{A_{side}\sin\theta}{m}$
$-$	$\frac{1+\kappa_a}{1+\kappa_m}\alpha^+$	$\sqrt{\frac{1+\kappa_k}{1+\kappa_m}}\omega^+$	$-\frac{A_{side}\sin\theta}{(1+\kappa_m)m}$	$\frac{A_{side}\sin\theta}{(1+\kappa_m)m}$
$\tau = 2L/c$	$\lambda = (Z_L - Z_c)/(Z_L + Z_c)$	$\mu = S^2/(\rho\ell^2c^2)$		

B. Mechanics of the lips

Combining equations (1) to (4) and (16) yields the following equations:

$$\text{if } \xi > 0, \quad \ddot{\xi}(t) + \alpha^+\dot{\xi}(t) + (\omega^+)^2(\xi(t) - \xi_e) = \beta_0^+\big(p^+(t) + \lambda p^+(t-\tau)\big) + \beta_m^+ p_m(t), \quad (24)$$

$$\text{if } \xi \le 0, \quad \ddot{\xi}(t) + \alpha^-\dot{\xi}(t) + (\omega^-)^2(\xi(t) - \xi_e) = \beta_0^-\big(p^+(t) + \lambda p^+(t-\tau)\big) + \beta_m^- p_m(t), \quad (25)$$

where the coefficients are given in Tab.I. Hence, from (21), (23), it follows that, writing $\sigma = \mathrm{sign}(\xi)$,

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad (26)$$

$$\dot{x}_2(t) = -(\omega^\sigma)^2 x_1(t) - \alpha^\sigma x_2(t) + \beta_0^\sigma\big(x_3(t) + \lambda x_3(t-\tau)\big) + \beta_m^\sigma w_1(t). \quad (27)$$

C. Jet and acoustics

1. *Case $\xi > 0$*

Using (5) and (14-16), equations (7) rewrite as follows:

$$p_m(t) = \frac{\mu}{2}\left(\frac{p^+(t) - \lambda p^+(t-\tau)}{\xi(t)}\right)^2 + p^+(t) + \lambda p^+(t-\tau), \quad (28)$$

where the coefficients are given in Tab. I. Then, writing

$$D(t) = 1 + \mu\frac{p^+(t) - \lambda p^+(t-\tau)}{\big(\xi(t)\big)^2}, \quad (29)$$

and isolating $\dot{p}^+(t)$ from the time derivative of (28) yields

$$\dot{p}^+(t) = \frac{\dot{p}_m(t) - 2\lambda\dot{p}^+(t-\tau) + \mu\frac{\dot{\xi}(t)\big(p^+(t)-\lambda p^+(t-\tau)\big)^2}{\xi(t)^3}}{D(t)} + \lambda\dot{p}^+(t-\tau).$$

Then, using (28) to substitute for $\left(\frac{p^+(t)-\lambda p^+(t-\tau)}{\xi(t)}\right)^2$ in the above equation leads to

$$\dot{p}^+(t) = \frac{\dot{p}_m(t) - 2\lambda\dot{p}^+(t-\tau) + \frac{2\dot{\xi}(t)\big(p_m(t)-p^+(t)-\lambda p^+(t-\tau)\big)}{\xi(t)}}{D(t)} + \lambda\dot{p}^+(t-\tau). \quad (30)$$

Remark 2 *For initial condition of (p_m, p^+, ξ) satisfying (28) at $t = 0$, the trajectory of (30) also satisfies (28) for $t > 0$. Equation (30) is then weaker than (28) but will be useful to derive the expected neutral state-space representation.*

Remark 3 *For closing lips, that is $\xi(t) \to 0^+$, the behavior of p^+ is such that, from (28),*

$$p^+(t) \underset{0^+}{=} \lambda p^+(t-\tau) + \xi(t)\sqrt{\frac{2}{\mu}\big(p_m(t) - 2\lambda p^+(t-\tau)\big)} + \mathcal{O}(\xi^2(t))$$

so that, in (29), excluding the case $p_m(t) = 2\lambda p^+(t-\tau)$,

$$\frac{\big(\xi(t)\big)^2}{p^+(t) - \lambda p^+(t-\tau)} \underset{0^+}{=} \frac{\xi(t)}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\big(p_m(t) - 2\lambda p^+(t-\tau)\big)}} + \mathcal{O}(\xi^2(t)),$$

and, in (30),

$$\dot{p}^+(t) \underset{0^+}{=} \lambda\dot{p}^+(t-\tau) + \sqrt{2\mu\big(p_m(t) - 2\lambda p^+(t-\tau)\big)}\,\dot{\xi}(t) + \mathcal{O}\big(\xi(t)\big).$$

2. *Case $\xi \le 0$*

Similarly, equation (8) and the time derivative of its left and right hand sides rewrite as follows:

$$p^+(t) = \lambda p^+(t-\tau), \quad (31)$$

$$\dot{p}^+(t) = \lambda\dot{p}^+(t-\tau). \quad (32)$$

3. *General expression*

Equations (30,32) are summarized by the following unique equation :

$$\dot{x}_3(t) = \frac{\sigma+1}{2}\left[\frac{w_2(t) - 2\lambda\dot{x}_3(t-\tau) + \frac{2x_2(t)\big(w_1(t)-x_3(t)-\lambda x_3(t-\tau)\big)}{x_1(t)+\xi_e}}{1 + \mu\frac{x_3(t)-\lambda x_3(t-\tau)}{\big(x_1(t)+\xi_e\big)^2}}\right] + \lambda\dot{x}_3(t-\tau). \quad (33)$$

D. Final neutral state-space representation

Equations (21-23) and (26,27,33) define the model of the instrument as a *nonlinear neutral system*, that is, a system described by (19-20). More precisely, functions f and g have the simple formulations

$$f\big(x(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau), w(t)\big) = F\big(x(t), x_3(t-\tau), \dot{x}_3(t-\tau), w(t)\big) \quad (34)$$

$$g\big(x(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau), w(t)\big) = C\,x(t-\tau/2)\,, \quad (35)$$

where C is the observation matrix $C = [0, 0, 1 + \lambda]$ and F is given by, for all the formal variables $(X, Y, Z, W) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$,

$$F_1(X,Y,Z,W) = [0,1,0]X, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} F_2(X,Y,Z,W) &= -(\omega^\sigma)^2 X_1 - \alpha^\sigma X_2 + \beta_0^\sigma X_3 \\ &\quad + \lambda\beta_0^\sigma Y + \beta_m^\sigma W_1, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} F_3(X,Y,Z,W) &= \frac{W_2 - 2\lambda Z + \frac{2X_2\left(W_1 - X_3 - \lambda Y\right)}{X_1+\xi_e}}{1 + \mu\frac{X_3-\lambda Y}{\left(X_1+\xi_e\right)^2}} \\ &\quad + \lambda Z, \qquad \text{if } X_1 + \xi_e > 0, \end{aligned} \quad (38)$$

$$F_3(X,Y,Z,W) = \lambda Z, \qquad \text{if } X_1 + \xi_e \leq 0, \quad (39)$$

recalling that, in (37), σ denotes symbol $+$ if $\xi = X_1 + \xi_e > 0$ and symbol $-$ otherwise. Expressions (36-37,39) are linear with respect to X, Y, Z, W while (38) is the nonlinearity responsible for the self-oscillation of the musical instrument.

Remark 4 *The difficulties due to the discontinuities in (37-39) when sign(ξ) changes, are not examined here. Nevertheless, numerical results presented in section V show that the case $\xi < 0$ is sparse and that deriving the observer with no special treatment of these discontinuities (section IV) yet produces a quite satisfying behaviour.*

In order to obtain a non delayed version of the output, the following change of state is introduced

$$\widetilde{x}(t) = x(t - \tau/2),$$

so that (19) and (20) rewrite

$$\begin{aligned} \dot{\widetilde{x}}(t) &= F\big(\widetilde{x}(t), \widetilde{x}_3(t-\tau), \dot{\widetilde{x}}_3(t-\tau), w(t-\tau/2)\big), \quad (40) \\ y(t) &= C\,\widetilde{x} = \widetilde{x}_3(t). \quad (41) \end{aligned}$$

For sake of simplicity, we will keep in (40-41) the notation $x(t)$ in place of $\widetilde{x}(t)$.

Remark 5 *Following remark 2, the neutral system given by (36-41) describes the physical model of our instrument if the initial conditions satisfy (28) or (31), namely, at $t = 0$,*

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{\mu}{2}\left(\frac{X_3 - \lambda Y}{X_1 + \xi_e}\right)^2 + X_3 + \lambda Y, \quad \textit{if } X_1 + \xi_e > 0, \\ X_3 &= \lambda Y, \quad \textit{otherwise.} \end{aligned}$$

IV. STATE-OBSERVER

As mentioned in the introduction, the problem which is considered here is the construction of an asymptotic state observer, assuming that the constant parameters Θ and the mouth pressure p_m are known. The idea is to use an extended Kalman filter type observer [21] elaborated from the nonlinear neutral system presented in section III. This observer will depend on the output error but also on its delayed value.

The gain matrices of the observer will be chosen to stabilize the linear time-varying neutral system governing the linearized equation of the estimation error vector. The proof of stability relies on a suitable Lyapunov function. The links with the local stability of the nonlinear error equation will be discussed.

A. Definition of the observer

The following state observer for system (40-41) is proposed :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= F\big(\hat{x}(t), \hat{x}_3(t-\tau), \dot{\hat{x}}_3(t-\tau), w(t-\tau/2)\big) \\ &\quad - \Lambda_1\big(y(t) - \hat{y}(t)\big) - \Lambda_2\big(y(t-\tau) - \hat{y}(t-\tau)\big) \end{aligned} \quad (42)$$

where Λ_1 and Λ_2 are 3×1 gain matrices.

B. Linearized error equation

Let e denote the estimation error vector:

$$e = x - \hat{x}. \quad (43)$$

The matrices Λ_1 and Λ_2 will be chosen such that the following linearized dynamical equation of the estimation error is locally asymptotically stable :

$$\dot{e}(t) = \widehat{\mathbb{A}}(t)\,e(t) + \widehat{\mathbb{B}}(t)\,e_3(t-\tau) + \widehat{\mathbb{H}}(t)\,\dot{e}_3(t-\tau), \quad (44)$$

where

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(X,Y,Z,W) &= \frac{\partial F}{\partial X}(X,Y,Z,W) + \Lambda_1 C, \quad (45) \\ \mathbb{B}(X,Y,Z,W) &= \frac{\partial F}{\partial Y}(X,Y,Z,W) + \Lambda_2 [C]_3, \quad (46) \\ \mathbb{H}(X,Y,Z,W) &= \frac{\partial F}{\partial Z}(X,Y,Z,W). \quad (47) \end{aligned}$$

and $\widehat{\mathbb{A}}(t) = \mathbb{A}\big(\hat{x}(t), \hat{x}_3(t-\tau), \dot{\hat{x}}_3(t-\tau), w(t)\big)$ and similarly for $\widehat{\mathbb{B}}(t)$ and $\widehat{\mathbb{H}}(t)$.

This property will be proved in Theorem 1, section IV D, the proof of which relies on the following technical lemmas.

Remark 6 *In the case of lips (versus to the case of reeds), θ is positive (see Fig. 1). Moreover, for closed lips the energy in the pipe is dissipated by the real passive impedance modeling the radiation (see (16)). Then, playing the musical instrument in a standard way (blowing situation, $p_m > 0$) involves that the lips cannot be blocked in a closed configuration. Moreover, the empirical values $(\kappa_m, \kappa_a, \kappa_k) = (1, 4, 3)$ used for the contact force (see (4)) help the system leave a "closed lips" configuration faster than with no contact force. In practice, the system mainly operates with* open lips.

C. Technical lemmas

Lemma 1 *The gain matrix Λ_2 can be chosen such that $\widehat{\mathbb{B}}(t)$ in equation (44) is zero.*

Proof : From (36-39) and denoting $\Lambda_2 = [\lambda_{21}, \lambda_{22}, \lambda_{23}]^T$, it can be easily shown that:

$$\mathbb{B}(X,Y,Z,W) = \begin{pmatrix} (1+\lambda)\lambda_{21} \\ \beta_1^{\sigma} + (1+\lambda)\lambda_{22} \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial Y} + (1+\lambda)\lambda_{23} \end{pmatrix}$$

where it is then clear that the λ_{2i}, $i = 1, \cdots, 3$ can be chosen such that $\widehat{\mathbb{B}}$ is the null matrix. This ends the proof. $\diamond$

Remark 7 *From lemma 1, the gain matrix Λ_2 in the observer equation (42) will be time dependent and a function of $X = \hat{x}(t)$, $Y = \hat{x}_3(t-\tau)$, $Z = \dot{\hat{x}}_3(t-\tau)$, $W = w(t-\tau/2)$.*

Lemma 2 *The matrix $\mathbb{H}(t) = \mathbb{H}(x(t), x_3(t-\tau), \dot{x}_3(t-\tau), w(t-\tau/2))$ defined from (47) is such that :*

$$|\ \mathbb{H}(t)\ | \leq |\lambda| < 1.$$

Proof : First, if $X_3 - \lambda Y \geq 0$, then $|\ \mathbb{H}(X,Y,Z,W)\ | \leq |\lambda|$. Indeed, from (36-39), it follows that $\mathbb{H}(X,Y,Z,W) = \big[0, 0, H_3(X,Y,Z,W)\big]^T$ with

$$\begin{aligned} H_3(X,Y,Z,W) &= \frac{\partial F_3(X,Y,Z,W)}{\partial Z} \\ &= \lambda \frac{1 - G(X,Y,Z)}{1 + G(X,Y,Z)}, \end{aligned} \tag{48}$$

where $G(X,Y,Z) = (X_1 + \xi_e)^2 / \big(\mu(X_3 - \lambda Y)\big)$ if $X_1 + \xi_e > 0$ (see Remark 3) and $G(X,Y,Z) = 0$ otherwise. Now, $|1 - G(X,Y,Z)|/|1 + G(X,Y,Z)| \leq 1$ if and only if $G(X,Y,Z) \geq 0$. This last condition is satisfied if $X_3 - \lambda Y \geq 0$.

Second, from equations (7,8) and following Remark 1, $v_{jet}(t) \geq 0$. Then, from equations (15,16) and since $A(t) \geq 0$, it follows that $p^+(t) = \lambda p^+(t-\tau) + A(t)\, Z_c v_{jet}(t) \geq \lambda p^+(t-\tau)$. This concludes the proof, taking $X = x(t)$, $Y = x_3(t-\tau)$. $\diamond$

Remark 8 *Since $|\lambda| < 1$, the inequality $|\widehat{\mathbb{H}}(t)| < 1$ will be also satisfied for a sufficiently small estimation error.*

Lemma 3 *Let $\chi > 0$. The matrix gain Λ_1 can be chosen such that $\widehat{\mathbb{A}}(t)$ in equation (44) takes the following form :*

$$\widehat{\mathbb{A}} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -(\omega^{\hat{\sigma}})^2 & -\alpha^{\hat{\sigma}} & 0 \\ \hline \widehat{\mathbb{M}}_{31} & \widehat{\mathbb{M}}_{32} & -\chi \end{array} \right)$$

where $\hat{\sigma} = sign(\xi_e + \hat{x}_1)$ and $\widehat{\mathbb{M}}(t) = \mathbb{M}(\hat{x}(t), \hat{x}_3(t-\tau), \dot{\hat{x}}_3(t-\tau), w(t-\tau/2))$ with $\widehat{\mathbb{M}} = \frac{\partial F}{\partial X}(X,Y,Z,W)$. This choice of Λ_1 ensures that e_1 and e_2 are decoupled from e_3's dynamics.

Proof : From (36-39), and denoting $\Lambda_1 = [\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13}]^T$,

$$\widehat{\mathbb{A}} = \widehat{\mathbb{M}} + \Lambda_1 C = \widehat{\mathbb{M}} + (1+\lambda) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_{11} \\ 0 & 0 & \lambda_{12} \\ 0 & 0 & \lambda_{13} \end{pmatrix}.$$

Denote $F = \widehat{\mathbb{M}}_{1:2,1:2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\omega^{\hat{\sigma}})^2 & -\alpha^{\hat{\sigma}} \end{pmatrix}$. The result is then obtained by choosing

$$\Lambda_1 = \frac{1}{1+\lambda} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\chi \end{bmatrix} - \widehat{\mathbb{M}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta_0^{\hat{\sigma}} \\ -\chi - \widehat{\mathbb{M}}_{33} \end{bmatrix}$$

and noticing that $\bar{e} = [e_1, e_2]^T$ satisfies the following dynamical equation :

$$\dot{\bar{e}} = F\bar{e} \tag{49}$$

where the constant matrix F is Hurwitz. $\diamond$

Remark 9 *The matrix F is constant (with respect to the time) for open lips ($\sigma > 0$). The same holds for closed lips (see remark 6).*

D. Main stability result

The main stability result is stated by the following theorem.

Theorem 1 *There exist positive constants $\kappa > 0$ and $\eta > 0$, such that for every solution of equation (44), the following inequality holds :*

$$\begin{aligned} &\left(e_1^2(t) + e_2^2(t) + e_3^2(t) + \textstyle\int_{t-\tau}^{t} \dot{e}_3{}^2(s)ds\right) \leq \\ &\kappa e^{-\eta t} \left(e_1^2(0) + e_2^2(0) + e_3^2(0) + \textstyle\int_{-\tau}^{0} \dot{e}_3{}^2(s)ds\right). \end{aligned} \tag{50}$$

Proof : From lemma 3, F being Hurwitz, define the symmetric positive definite matrix P solution of the matrix Lyapunov equation [7] :

$$F^T P + PF = -I_{2\times 2}$$

$I_{2\times 2}$ denoting the 2×2 identity matrix.

Now, consider the following Lyapunov function candidate where $C > 0$, $K > 0$ and $\nu > 0$ are suitable positive constants :

$$V = C\frac{e_3^2}{2} + K\bar{e}^T P\bar{e} + \int_{t-\tau}^{t} \dot{e}_3{}^2(s) e^{-\nu(t-s)} ds. \tag{51}$$

Let us recall the estimation error equation (44), that is,

$$\dot{e}(t) = \widehat{\mathbb{A}}(t)\, e(t) + \widehat{\mathbb{B}}(t)\, e_3(t-\tau) + \widehat{\mathbb{H}}(t)\, \dot{e}_3(t-\tau)$$

where $\widehat{\mathbb{A}}$ is given in lemma 3, $\widehat{\mathbb{B}}$ is zero using lemma 1 and $\widehat{\mathbb{H}} = [0, 0, \hat{H}_3]^t$ is defined as in lemma 2.

If the constant C is chosen to be equal to $C = 2\chi$, where $\chi > 0$ is defined in lemma 3, the time derivative of V along the solutions of the dynamical equations of the above observation error can be written as follows :

$$\dot{V} = T_1 + T_2 + T_3 \tag{52}$$

where

$$\begin{aligned} T_1 &= -\chi^2 e_3^2 - \dot{e_3}^2(t-\tau)(e^{-\nu\tau} - \hat{H}_3^2(t)) \\ &\quad -K(e_1^2 + e_2^2) \\ &\quad -\nu \int_{t-\tau}^{t} \dot{e_3}^2(s) e^{-\nu(t-s)} ds, \end{aligned} \tag{53}$$

$$T_2 = (\hat{M}_{31} e_1 + \hat{M}_{32} e_2)^2, \tag{54}$$

$$T_3 = 2\hat{H}_3(\hat{M}_{31} e_1 \dot{e_3}(t-\tau) + \hat{M}_{32} e_2 \dot{e_3}(t-\tau)), \tag{55}$$

where $\hat{M}_{31}$ and $\hat{M}_{32}$ are defined in lemma 3.

Notice that for all $\epsilon > 0$ and for all e_1, e_2 and $e_3(t-\tau)$, the following inequalities hold for some positive constants R_1 and R_2 :

$$T_3 \leq \frac{1}{\epsilon}(e_1^2 + e_2^2) + R_1 \epsilon \, \dot{e_3}^2(t-\tau) \tag{56}$$

and

$$T_2 \leq R_2(e_1^2 + e_2^2). \tag{57}$$

Moreover, from lemma 2, if the constant ν in V is chosen sufficiently small, $(e^{-\nu\tau} - \hat{H}_3^2(t)) \geq e^{-\nu\tau} - \lambda^2 \geq \delta > 0$, for all t and $\tau \in [0, 2L/c]$, so that :

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\chi^2 e_3^2 - \delta \dot{e_3}^2(t-\tau) \\ &\quad -(K - R_2)(e_1^2 + e_2^2) \\ &\quad +\frac{1}{\epsilon}(e_1^2 + e_2^2) + R_1 \epsilon \dot{e_3}^2(t-\tau) \\ &\quad -\nu \int_{t-\tau}^{t} \dot{e_3}^2(s) e^{-\nu(t-s)} ds. \end{aligned} \tag{58}$$

Choose

$$\epsilon = \frac{\delta}{2R_1} \tag{59}$$

which leads to :

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\chi^2 e_3^2 - \frac{\delta}{2} \dot{e_3}^2(t-\tau) \\ &\quad -(K - R_2 - \frac{2R_1}{\delta})(e_1^2 + e_2^2) \\ &\quad -\nu \int_{t-\tau}^{t} \dot{e_3}^2(s) e^{-\nu(t-s)} ds. \end{aligned} \tag{60}$$

Then, for $K = R_2 + \frac{4R_1}{\delta}$ and for a suitable positive constant $\eta > 0$, the following inequality holds:

$$\dot{V} \leq -\eta V \tag{61}$$

which ends the proof. ◇

Notice that the weight $e^{\pm\nu x}$ in the integral term of the Lyapunov function is essential to get a **strict** Lyapunov function. It is similar to the one introduced by Castelan and Infante [22] for matrix difference differential equations and also by Coron [23] to stabilize the Euler equation of incompressible fluids. More recently, it has also been used for linear symmetric hyperbolic systems [24] and for exponential stabilization of one-dimensional nonlinear hyperbolic systems [25, 26].

V. SIMULATION RESULTS AND DISCUSSION

Observation results have been performed on outputs y, simulated using an Euler explicit scheme on (40), that is, using the recursive equations $x\big((n+1)T\big) = x(nT) + T\delta x(nT)$ with $\delta x(nT) = T\,F\Big(x(nT), x_3\big((n-2N)T\big), \delta x\big((n-2N)T\big), w(n-N)T\big)\Big)$ where T is the sampling period (T and the length L are chosen such that $N = \tau/(2T)$ is integer). To be more realistic, Gaussian noise signals have been added to y.

Since the observer (42) is local, the initial conditions of $\hat{x}$ must be chosen sufficiently close to the actual initial condition $x(0) = 0$.

To test the robustness of this observer, several deviations on initial conditions and several noise measurements have been considered.

It is important to notice that, due to lemma 3, the characteristic damping of $\bar{e} = [e_1, e_2]^T$ is α. Moreover, the time constant of the observer is governed by α and χ. The arbitrary damping coefficient χ in $\widehat{\mathbb{A}}$ can be preferentially chosen greater than the fixed constant α. In practice, it is natural to choose $\chi \approx \alpha$ (or slightly greater than α).

Figure 2 presents a quasi ideal situation with initial conditions close to the actual ones and low noise. It can be seen that the proposed observer has a pretty good behavior. More precisely, the observer $\hat{x}$ converges rapidly towards x and the measurement noise is weakened quite well.

In Fig. 3, initial conditions have been chosen quite far from the real ones: the error $(p^+(0) - \hat{p}^+(0))$ is about 20% of the mouth pressure p_m. The obtained results show that the transient behavior is longer than in Fig. 2 as expected, but the observer succeeds in retrieving the real value of the state.

Figure 4 shows that for larger measurement noises, the observer is still available ($\sigma_{noise}/p_m \approx 4\%$ seems to be closed to the limit, here).

Figure 5 illustrates the robustness with respect to deviations on parameters α, p_m and ω. After 0.15 s, the error on initial conditions seems to be rejected and, despite the noise measurements and the deviation on parameters, the observer is locked on the original system dynamics. In

8

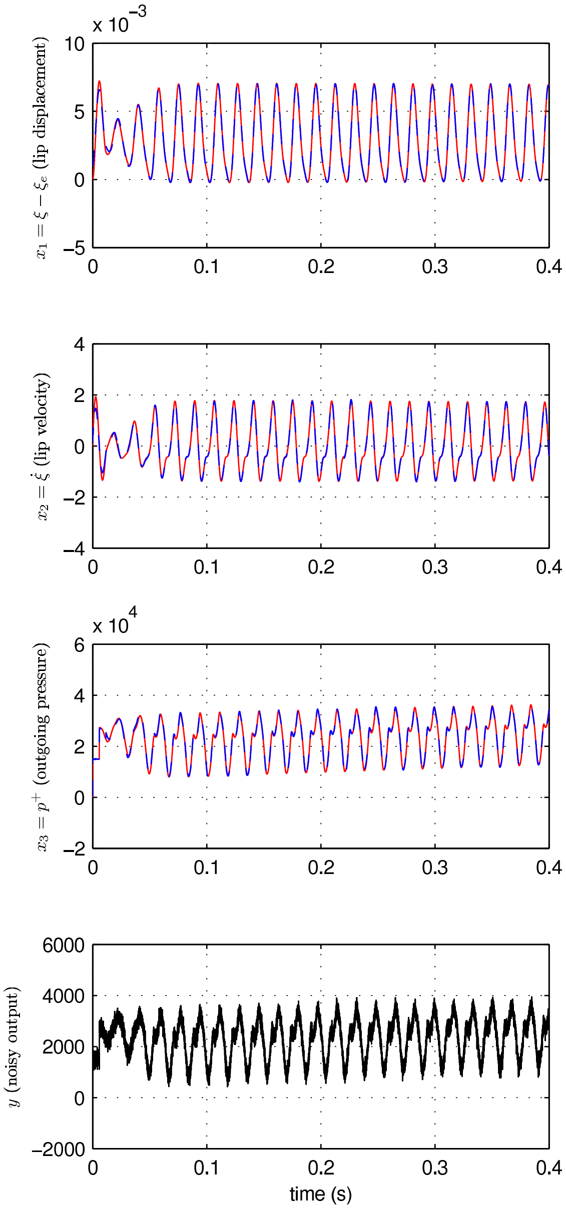


Figure 2: Simulation of the system (-) and of the observer (--) from the noisy output y (-). The simulations are performed for the following parameters: $\alpha = 150s^{-1}$, $\chi = 160s^{-1}$, $L = 1$, $p_m = 1.5e4Pa$, $\omega = 535s^{-1}$, quasi-ideal initial conditions $\hat{x}(0) = [1e-3, 1e-1, \frac{y(0)}{1+\lambda}]^T$ and low noise $\sigma_{noise}/p_m = 0.01$.

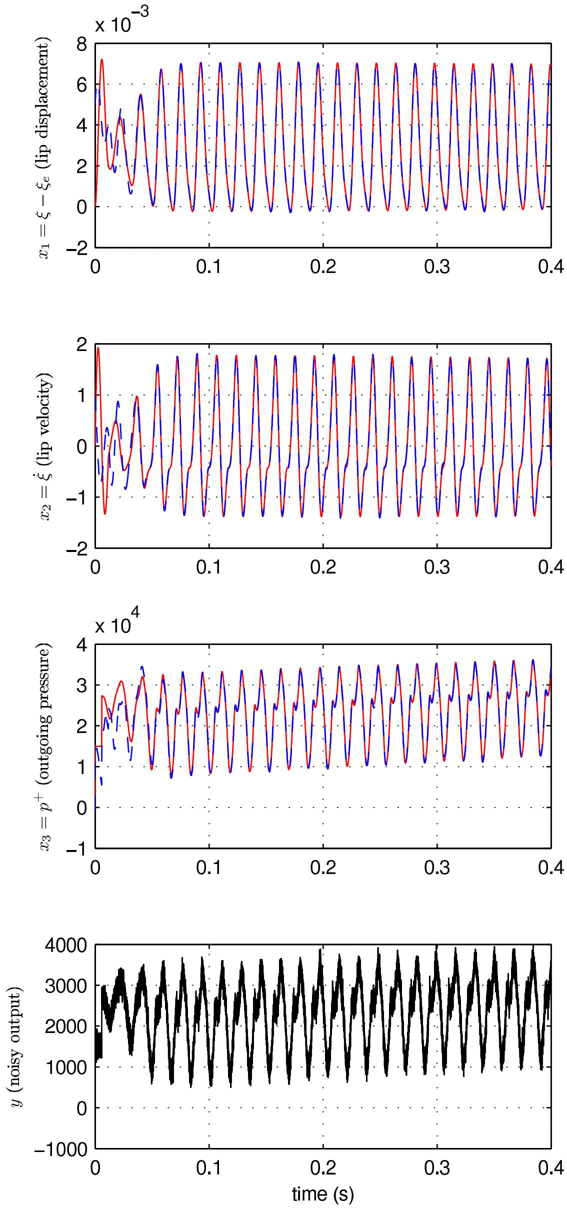


Figure 3: Simulation of the system (-) and of the observer (--) from the noisy output y (-). The simulations are performed for the following parameters: $\alpha = 150s^{-1}$, $\chi = 160s^{-1}$, $L = 1$, $p_m = 1.5e4Pa$, $\omega = 535s^{-1}$, a large deviation on initial conditions $\hat{x}(0) = [5e-3, 1, \frac{y(0)}{1+\lambda}]^T$ and low noise $\sigma_{noise}/p_m = 0.01$.

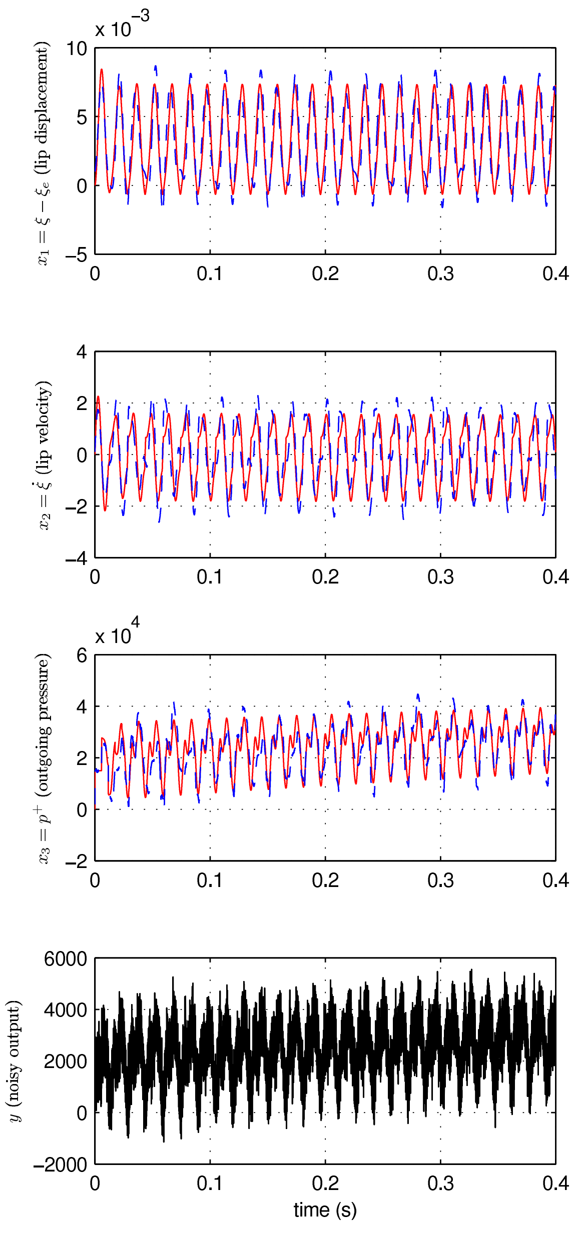


Figure 4: Simulation of the system (-) and of the observer (- -) from the noisy output y (-). The simulations are performed for the following parameters: $\alpha = 150s^{-1}$, $\chi = 160s^{-1}$, $L = 1$, $p_m = 1.5e4Pa$, $\omega = 535s^{-1}$, quasi-ideal initial conditions $\hat{x}(0) = [1e{-}3, 1e{-}1, \frac{y(0)}{1+\lambda}]^T$ and large noise $\sigma_{noise}/p_m = 4e{-}2$.

particular, we can notice that even the behaviour of the lip states (x_1, x_2) is still relevant.

Finally, Fig. 6 shows that increasing χ improves the convergence: now the transient part only lasts about 0.6 s and the estimation error is smaller than in Fig. 5. More generally, we have observed that: using $\chi \ll \alpha$ gives bad results (the observer converges too slowly); using the natural choice $\chi \approx \alpha$ (natural damping time scale of the original system) is satisfying; using larger values improves the observer convergence (but of course, too high values will also capture the noise).

Notice that since $y = (1 + \lambda)x_3$ is a "measured" quantity, in a simpler approach, it is not necessary to estimate x_3 and it could have been sufficient to elaborate observer based on x_1 and x_2 only. Nevertheless, since there are noise measurements, the total observer proposed here proves to be more robust. Indeed, in Figs. 2, 3, 4, the noise on $\hat{x}_3$ has been significantly reduced compared to that on y.

VI. CONCLUSION

In this paper, a nonlinear observer of a simplified model of a brass instrument (a lip blown cylinder with frequency independent losses) has been introduced. It has been proved using Lyapunov function techniques on neutral systems that the observer gains can be tuned to ensure the asymptotic stability of the linearized estimation error equation. Moreover, although the proof ensures only local stabilization, simulation results exhibit good robustness properties with respect to wrong initial conditions and significant noise on the measured output.

Future works could consist in improving both the resonator and the exciter models. For the resonator, models based on e.g. the Webster equation with realistic (frequency-dependent) losses [27, 28] could be considered. For such a model, associated Lyapunov functionals are available so that our approach could probably be adapted. For the exciter, the problem of finding sufficiently simple energy-balanced models is under study: their energy functional could constitute a Lyapunov functional candidate. Using the total energy of the instrument could help to derive a globally asymptotic observer.

Another work will concern the second problem (P2) described in the introduction, that is, computing the "player's gestures" from the measured output and the proposed observer. It could be processed by using adaptive filtering techniques and would thus complete the global inversion problem.

Acknowledgments

The authors thank Silviu Niculescu and the anonymous reviewers for their helpful advices. This work has been supported by the CONSONNES project, ANR-05-BLAN-0097-01.

10

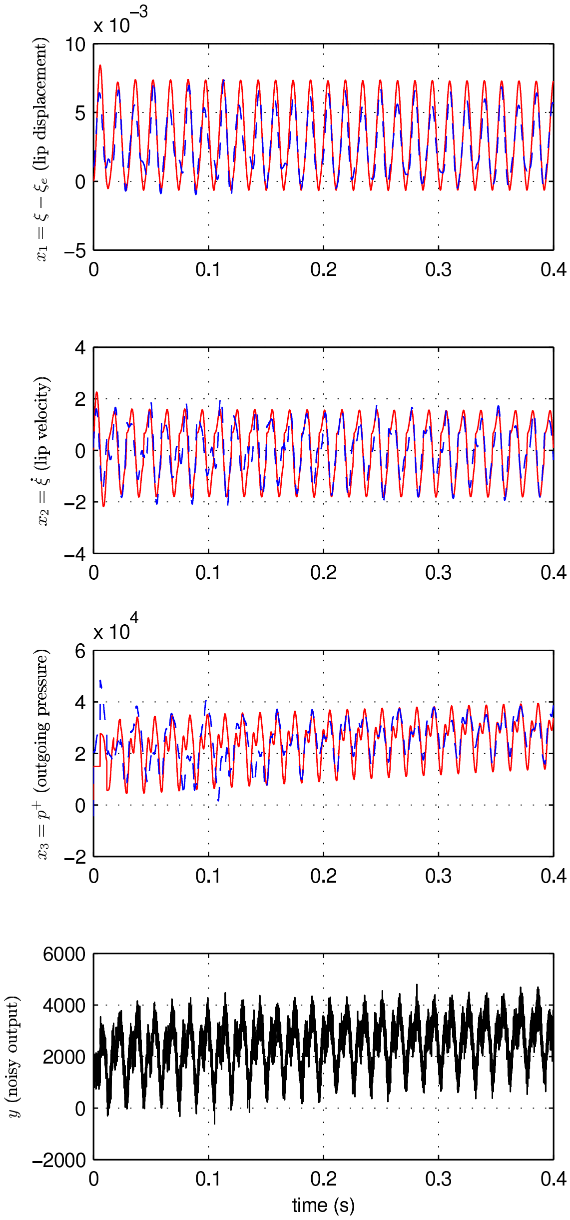


Figure 5: Simulation of the system (-) and of the observer (--) from the noisy output y (-) and with parameters deviations. For the original system, simulations are performed with the following parameters: $\alpha = 150s^{-1}$, $\chi = 160s^{-1}$, $L = 1$, $p_m = 1.5e4Pa$, $\omega = 535s^{-1}$. The added noise corresponds to $\sigma_{noise}/p_m = 0.02$. For the observer, simulations are performed with the following wrong parameters: $\alpha^o = 1.1\alpha$, $p_m^o = 1.1p_m$, $\omega = 1.1\omega^o$ and quasi-ideal initial conditions $\hat{x}(0) = [1e-3, 1e-1, \frac{y(0)}{1+\lambda}]^T$.

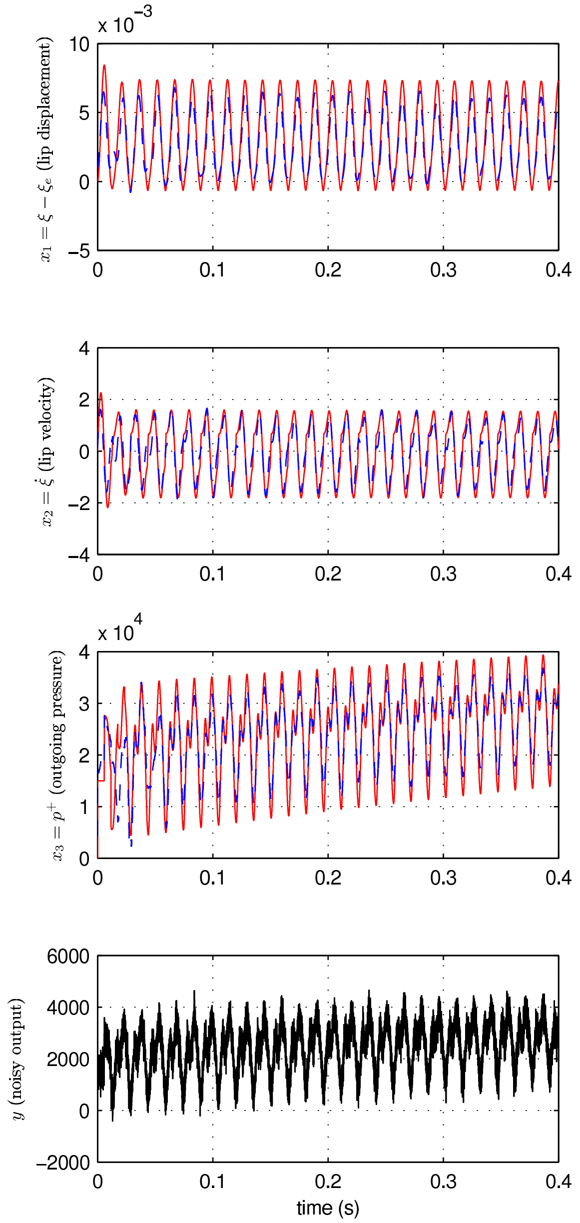


Figure 6: Idem than Fig. 5 but with $\chi = 2 \times 160s^{-1}$.

[1] N H. Fletcher and T. D. Rossing. *The Physics of Musical Instruments.* Springer-Verlag, New York, USA, 1998.

[2] A. Chaigne and J. Kergomard. *Acoustique Des Instruments De Musique (The Physics of Musical Instruments).* Belin, Paris, France, Echelles edition, 2008.

[3] E. H. Wold. *Nonlinear parameter estimation of acoustic models.* PhD thesis, Computer Science Division, Berkeley University of California, USA, 1987.

[4] Thomas Hélie, Christophe Vergez, Jean Lévine, and Xavier Rodet. Inversion of a physical model of a trum-

12

pet. In *Proc. of the Conference on Decision and Control*, volume 38.3, pages 2593–2598, Phoenix, Arizona, USA, 1999. IEEE.

[5] C. Vergez and X. Rodet. Bifurcation sequence in a physical model of trumpet-like instruments : From a fixed point to chaos. In *NOLTA*, volume 2, pages 751–754, Crans Montana, Switzerland, September 1998. IEICE.

[6] T. Kailath. *Linear systems.* Prentice-Hall, Oxford, UK, 1980.

[7] B. d'Andréa Novel and M. Cohen de Lara. *Commande linéaire des systèmes dynamiques (Linear control of dynamical systems).* Modélisation Analyse Simulation Commande. Masson, Paris, France, 1994.

[8] L. Ljung. *System Identification - Theory For the User.* Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J. 07458, USA, 2nd edition edition, 1999.

[9] E. Walter and L. Pronzato. *Identification of Parametric Models: From Experimental Data.* Communications and Control Engineering. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, Germany, 1997.

[10] L. Wu, C. Wang, and Q. Zeng. Observer-based sliding mode control for a class of uncertain nonlinear neutral delay systems. *Journal of the Franklin Institute*, 345(3):233–253, 2008.

[11] C. Vergez. *Trompette et trompettiste: un système dynamique non linéaire à analyser, modéliser et simuler dans un contexte musical (Trumpet and trumpeter: a nonlinear dynamical system to analyze, to model and to simulate in a musical context).* PhD thesis, Université de Paris 6, France, 2000.

[12] W. J. Strong. Computer simulation of a trumpet. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 87:S138, 1990.

[13] Xavier Rodet. One and two mass model oscillations for voice and instruments. In *ICMC: International Computer Music Conference*, pages 207–214, Banff, Canada, September 1995.

[14] Xavier Rodet and Christophe Vergez. Nonlinear dynamics in physical models : From basic models to true musical-instrument models. *Computer Music Journal*, 3(23), 1999.

[15] S. Adachi and M.-A. Sato. Trumpet sound simulation using a two-dimensional lip vibration model. *J. Acoust. Soc. Am.*, 99(2):1200–1209, 1996.

[16] C. Vergez and X. Rodet. Air flow related improvements for basic physical models of brass instruments. In *International Computer Music Conference*, Berlin, Germany, 2000. ICMC.

[17] A. Hirschberg. *Mechanics of Musical Instruments, CISM Courses and Lectures*, volume 355, chapter chapter 7, pages 291–369. Springer, Wien, Austria, 1995.

[18] J.-P. Dalmont, J. Gilbert, and S. Ollivier. Nonlinear characteristics of single-reed instruments: Quasistatic volume flow and reed opening measurements. *J. Acoust. Soc. Am.*, 114:2253–2262, 2003.

[19] J. Hale and S.M. Verduyn Lunel. *Introduction to Functional Differential Equations.* Springer-Verlag, New York, USA, 1993.

[20] W. Michiels and S.-I. Niculescu. *Stability and stabilization of time-delay systems. An eigenvalue-based approach*, volume 12 of *Advances in design and control.* SIAM, Philadelphia, USA, 2007.

[21] R.E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, pages 35–45, 1960.

[22] W.-B. Castelan and E.-F. Infante. A liapunov functional for a matrix neutral difference-differential equation with one delay. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 71(1):105–130, 1979.

[23] J.-M. Coron. On the null asymptotic stabilization of the two-dimensional incompressible euler equations in a simply connected domain. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 37(6):1874–1896, 1999.

[24] C.-Z. Xu and G. Sallet. Exponential stability and transfer functions of processes governed by symmetric hyperbolic systems. *Journal of Control Optimisation and Calculus of Variations (ESAIM)*, 7:421–442, 2002.

[25] J.-M. Coron, B. d'Andréa Novel, and G. Bastin. A strict lyapunov function for boundary control of hyperbolic systems of conservation laws. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(1):2–11, 2007.

[26] J.-M. Coron, G. Bastin, and B. d'Andréa Novel. Dissipative boundary conditions for one dimensional nonlinear hyperbolic systems. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 47(3):1460–1498, 2008.

[27] Thomas Hélie. Mono-dimensional models of the acoustic propagation in axisymmetric waveguides. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 114:2633–2647, 2003.

[28] Houssem Haddar, Thomas Hélie, and Denis Matignon. A webster-lokshin model for waves with viscothermal losses and impedance boundary conditions: strong solutions. In *Waves - International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation Phenomena (INRIA)*, volume 6, pages 66–71, Jyvaskyla, Finland, 2003.

Bibliographie

[1] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, Dover, New York, 1970.

[2] A. A. Agrachev and R. V. Gamkrelidze, *Volterra series and permutation groups*, Journal of Mathematical Sciences **71** (1994), no. 3, 2410–2433.

[3] J. Agulló, A. Barjau, and D. H. Keefe, *Acoustic propagation in flaring, axisymmetric horns : I. A new family of unidimensional solutions*, Acustica united with Acta Acustica **85** (1999), 278–284.

[4] V. I. Arnold, *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*, Springer (2nd ed.), 1988.

[5] L. Bailly, *Explorations «in vivo» et «in vitro» de l'influence des bandes ventriculaires en phonation*, Thèse de doctorat, Université du Maine, 2009.

[6] D. C. Barber and B. H. Brown, *Applied potential tomography*, J. Phys. E. Sci. Instrum. **17** (1984), 723–733.

[7] A. H. Benade and E. V. Jansson, *On plane and spherical waves in horns with nonuniform flare. I. Theory of radiation, resonance frequencies, and mode conversion*, Acustica **31** (1974), 79–98.

[8] D. P. Berners, *Acoustics and signal processing techniques for physical modeling of brass instruments*, Ph.D. thesis, Stanford University, 1999.

[9] D. Bernoulli, *Physical, mechanical and analytical researches on sound and on the tones of differently constructed organ pipes*, Mém. Acad. Sci. (Paris), 1762.

[10] S. Bilbao, *Wave and scattering methods for numerical simulation*, Wiley, 2004.

[11] ______, *A family of conservative finite difference schemes for the dynamical von karman plate equations*, Numerical Methods for Partial Differential Equations **24** (2008), no. 1, 193–216.

[12] M. Blencowe, *Designing tube preamps for guitar and bass*, Merlin Blencowe, 2009.

[13] E. Borel, *Leçons sur les séries divergentes*, 2nd ed. ed., Gauthier-Villars, Paris, France, 1928.

[14] S. Boyd and L. Chua, *Fading memory and the problem of approximating nonlinear operators with Voltera series*, IEEE Trans. on Circuits and Systems **32** (1985), no. 11, 1150–1161.

[15] S. Boyd, L. O. Chua, and C. A. Desoer, *Analytical foundations of volterra series*, IMA Journal of Mathematical Control and Information **1** (1984), 243–282.

[16] R. W. Brockett, *Volterra series and geometric control theory*, Automatica **12** (1976), 167–176.

[17] ______, *Convergence of Volterra series on infinite intervals and bilinear approximations*, Nonlinear Systems and Applications (V. Lakshmikanthan, ed.), Academic Press, 1977, pp. 39–46.

[18] M. Bruneau, P. Herzog, J. Kergomard, and J.-D. Polack, *General formulation of the dispersion equation bounded visco-thermal fluid, and application to some simple geometries*, Wave motion **11** (1989), 441–451.

[19] F. Bullo, *Series expansions for analytic systems linear in control*, Automatica **38** (2002), 1425–1432.

[20] L. M. B. C. Campos, *Some general properties of exact acoustic fields in horns and baffles*, Journal of Sound and Vibration **95** (1984), 177–201.

[21] G. F. Carrier, *On the non-linear vibration problem of the elastic string*, Quarterly of Applied Mathematics **3** (1945), 157–165.

[22] C. Casenave, *Représentation diffusive et inversion opératorielle pour l'analyse et la résolution de problèmes dynamiques non locaux*, Ph.D. thesis, Université Toulouse III, Paul Sabatier.

[23] C. Casenave and G. Montseny, *Introduction to diffusive representation*, IFAC Symposium on System, Structure and Control (SSSC), vol. 4, 2010, pp. 15–17.

[24] T. K. Caughey, *Classical normal modes in damped linear dynamic systems*, Trans. of ASME, Journal of Applied Mechanics **27** (1960), 269–271.

[25] T. K. Caughey and M. E. J. O'Kelly, *Classical normal modes in damped linear dynamic systems*, Trans. of ASME, Journal of Applied Mechanics (1965), 583–588.

[26] R. Caussé, J. Bensoam, and N. Ellis, *Modalys, a physical modeling synthesizer : More than twenty years of researches, developments, and musical uses*, J. Acoust. Soc. Am., vol. 130-4, 2011, pp. 2365–2365.

[27] R. Caussé, J. Kergomard, and X. Lurton, *Input impedance of brass musical instruments - comparison between experiment and numerical models*, J. Acoust. Soc. Amer. **75** (1984), no. 1, 241–254.

[28] J. Chabassier and P. Joly, *Energy preserving schemes for nonlinear hamiltonian systems of wave equations. application to the vibrating piano string*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **199** (2010), 2779–2795.

[29] A. Chaigne and J. Kergomard, *Acoustique des instruments de musique*, Belin, 2008.

[30] B. Cochelin and C. Vergez, *A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions*, Journal of Sound and Vibration **324** (2009), 243–262.

[31] P. R. Cook, *Identification of control parameters in an articulatory vocal tract model with applications to the synthesis of singing*, Ph.D. thesis, CCRMA, Stanford University, 1991.

[32] F. Coulouvrat, *A quasi-analytical shock solution for general nonlinear progressive waves*, Wave Motion **46** (2009), 97–107.

[33] L. Cremer, *On the acoustic boundary layer outside a rigid wall*, Arch. Elektr. Uebertr. **2** (1948), 136–139.

[34] P. E. Crouch and P. C. Collingwood, *The observation space and realizations of finite Volterra series*, SIAM journal on control and optimization **25** (1987), no. 2, 316–333.

[35] J. Cullen, J. Gilbert, and D. M. Campbell, *Brass instruments : linear stability analysis and experiments with an artificial mouth*, Acta Acustica united with Acustica **86** (2000), no. 3, 704–724.

[36] R. F. Curtain and H. Zwart, *An introduction to infinite-dimensional linear system theory*, Springer-Verlag, 1991.

[37] J.-P. Dalmont, C. J. Nerderveen, and N. Joly, *Radiation impedance of tubes with different flanges : numerical and experimental investigation*, J. Sound Vib. **244** (2001), no. 3, 505–534.

[38] G. Dauphin, D. Heleschewitz, and D. Matignon, *Extended diffusive representations and application to non-standard oscillators*, Proceedings of the Mathematical Theory of Networks and Systems symposium MTNS (Perpignan, France), 2000, pp. 1–10.

[39] G. Dauphin-Tanguy, *Les bond graphs*, Hermès, Paris, 2000.

[40] A. de Cheveigné and H. Kawahara, *Yin, a fundamental frequency estimator for speech and music*, J. Acoust. Soc. Amer. **111** (2002), 1917–1930.

[41] G. Degottex, *Glottal source and vocal-tract separation*, Thèse de doctorat, Université Paris 6 - UPMC, 2010.

[42] G. Degottex, A. Roebel, and X. Rodet, *Joint estimate of shape and time-synchronization of a glottal source model by phase flatness*, IEEE ICASSP, 2010, pp. 5058–5061.

[43] E. Delaleau, *Dérivées de l'entrée en représentation et commande des systèmes non linéaires*, Thèse de doctorat, Université de Paris-Sud, 1992.

[44] K. Dempwolf, M. Holters, and U. Zölzer, *Discretization of parametric analog circuits for real-time simulations*, 13th international conference on Digital Audio Effects DAFx-10 (Graz, Austria), 2010.

[45] B. Doval, C. d'Alessandro, and N. Henrich, *The spectrum of glottal flow models*, Acta Acustica united with Acustica **92** (2006), 1026–1046.

[46] F. J. Doyle, R. K. Pearson, and B. A. Ogunnaike, *Identification and control using Volterra models*, Springer, 2002.

[47] T. Drugman, *Advances in glottal analysis and its applications*, Ph.D. thesis, University of Mons, 2011.

[48] E. Ducasse, *Modélisation et simulation dans le domaine temporel d'instruments à vent à anche simple en situation de jeu : méthodes et modèles*, Thèse de doctorat, Université du Maine, 2001.

[49] H. Dudley and H. Tarnoczy T. *The speaking machine of Wolfgang von Kempelen*, The Journal of the Acoustical Society of America **22** (1950), no. 2, 151–166.

[50] G. Duffing, *Erzwungene schwingungen bei veränderlicher eigenfrequenz (forced oscillations with variable natural frequency and their technical significance)*, F. Vieweg u. Sohn, Braunschweig, 1918, monographie, 134 pages.

[51] D. G. Duffy, *Transform methods for solving partial differential equations*, CRC Press, 1994.

[52] V. Duindam, A. Macchelli, S. Stramigioli, and H. Bruyninckx (eds.), *Modeling and control of complex physical systems : The port-hamiltonian approach*, Springer, 2009.

[53] H. Dulac, *Solutions d'un système d'équations différentielles dans le voisinage de valeurs singulières*, Bulletin de la S. M. F. **40** (1912), 324–383.

[54] M. Dunau, *Représentations diffusives de seconde espèce : introduction et expérimentation*, Master's thesis, DEA d'Automatique, Toulouse, 2000.

[55] T. Dutoit, *Review of data-driven techniques in speech synthesis*, Computational Linguistics **28** (2003), no. 4, 570–572.

[56] E. Eisner, *Complete solutions of the Webster horn equation*, J. Acoust. Soc. Am. **41** (1967), no. 4, 1126–1146.

[57] P. Eveno, J.-P. Dalmont, R. Caussé, and J. Gilbert, *Comparisons between models and measurements of the input impedance of brass instruments bells*, Forum Acusticum (Aalborg, Denmark), 2011, pp. 567–572.

[58] ——, *Wave propagation and radiation in a horn : Comparisons between models and measurements*, Acta Acustica **98** (2012), 158–165.

[59] P. Fabre, *Un procédé électrique percutané d'inscription de l'accolement glottique au cours de la phonation : glottographie de haute fréquence. premiers résultats*, Bull. Académie Nationale de Médecine (1957), 66–69.

[60] G. Fant, *The LF-model revisited. transformations and frequency domain analysis*, Speech Transmission Laboratory-Quarterly Progress and Status Report 2-3, p.119-155, KTH, 1995.

[61] G. Fant, J. Liljencrants, and Q. Lin, *A four-parameter model of glottal flow*, Speech Transmission Laboratory-Quarterly Progress and Status Report 26-4, p.1-13, KTH, 1985.

[62] A. Farina, *Simultaneous measurement of impulse response and distortion with a swept-sine technique*, Convention of the Audio Engineering Society, vol. 108, 2000, paper 5093.

[63] O. De Feo, *Modeling diversity by strange attractors with application to temporal pattern recognition*, Ph.D. thesis, Swiss Federal Institute of Technology Lausanne (EPFL), 2001.

[64] ——, *Self-emergence of chaos in identifying irregular periodic behavior*, Chaos **13** (2003), 1205–1215.

[65] P. Flajolet and R. Sedgewick, *Analytic combinatorics*, Cambridge University Press, 2009.

[66] N. H. Fletcher and T. D. Rossing, *The physics of musical instruments*, 2nd edition ed., Springer, 1998.

[67] M. Fliess, *Fonctionnelles causales non linéaires et indéterminées non commutatives*, Bulletin de la S.M.F. **109** (1981), 3–40.

[68] ——, *Some basic structural properties of generalized linear systems*, Systems & Control Letters (1990), 391–396.

[69] M. Fliess, M. Lamnabhi, and F. Lamnabhi-Lagarrigue, *An algebraic approach to nonlinear functional expansions*, IEEE Trans. on Circuits and Systems **30** (1983), no. 8, 554–570.

[70] F. Fontana and M. Civolani, *Modeling of the EMS VCS3 voltage-controlled filter as a nonlinear filter network*, IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing **18** (2010), no. 4, 760–772.

[71] E. G. Gilbert, *Functional expansions for the response of nonlinear differential systems*, IEEE Trans. Automat. Control **22** (1977), 909–921.

[72] J. Gilbert, J. Kergomard, and J.-D. Polack, *On the reflection functions associated with discontinuities in conical bores*, J. Acoust. Soc. Amer. **87** (1990), no. 4, 1773–1780.

[73] J. Gilbert, S. Ponthus, and J.-F. Petiot, *Artificial buzzing lips and brass instruments : experimental results*, J. Acoust. Soc. Am. **104** (1998), no. 3, 1627–1632.

[74] E. Godlewski and P.-A. Raviart, *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, Springer, New York, 1996.

[75] Y. Goussard, W. C. Krenz, L. Stark, and G. Demoment, *Practical identification of functional expansions of non linear systems submitted to non gaussian inputs*, Ann. Biomed. Eng. **19** (1991), 401–427.

[76] K. F. Graff, *Wave motion in elastic solids*, Dover, New York, 1991.

[77] H. Gray and W. H Lewis, *Anatomy of the human body*, Philadelphia : Lea & Febiger, 1918.

[78] W. S. Gray and Y. Wang, *Fliess operators on Lp spaces : convergence and continuity*, Systems & Control Letters **46** (2002), no. 2, 67–74.

[79] G. Green, *An essay on the application - mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism*, printed by T. Wheelhouse, Nottingham, UK, 1828.

[80] M. Géradin and D. Rixen, *Théorie des vibrations*, Masson, 1996.

[81] E. Hairer, C. Lubich, and G. Warner, *Geometric numerical integration*, Springer, 2002.

[82] M. F. Hamilton and D. T. Blackstock, *Academic press*, Academic Press, San Diego, 1998.

[83] G. H. Hardy, *Divergent series*, 2nd ed., Providence R.I. : American Mathematical Society, 2000.

[84] M. Hasler, *Phénomènes non linéaires*, vol. 3, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, January 1999.

[85] C. M. Hassan and N. A. Peppas, *Biopolymers/pva hydrogels/anionic polymerisation nanocomposites*, Advances in Polymer Science, vol. 153, ch. Structure and applications of poly(vinyl alcohol) hydrogels produced by conventional crosslinking or by freezing/thawing methods, pp. 37–65, Abe, A., 2000.

[86] W. D. Hayes, R. C. Haefeli, and H. E. Kulsrud, *propagation in a stratified atmosphere with computer program*, Tech. Report CR-1299, NASA, 1969.

[87] D. Heleschewitz, *Analyse et simulation de systèmes différentiels fractionnaires et pseudo-différentiels linéaires sous représentation diffusive*, Thèse de doctorat, ENST, 2000.

[88] N. Henrich, *Etude de la source glottique en voix parlée et chantée*, Thèse de doctorat, Université Paris 6 - UPMC, 2001.

[89] N. Henrich, C. d'Alessandro, B. Doval, and M. Castellengo, *On the use of the derivative of electroglottographic signals for characterization of nonpathological phonation*, J. Acoust. Soc. Am. **115** (2004), no. 3, 1321–1332.

[90] A. Hirschberg, J. Gilbert, R. Msallam, and A. P. J. Wijnands, *Shock waves in trombones*, J. Acoust. Soc. Am. **99** (1996), 1754–1758.

[91] D. S. Holder, *Electrical impedance tomography : methods, history and applications*, Institute of Physics, 2005.

[92] A. Huovilainen, *Non-linear digital implementation of the Moog ladder filter*, Proc. of the Int. Conf. on Digital Audio Effects (Naples, Italy), 2004, pp. 61–64.

[93] A. Isidori, *Nonlinear control systems (3rd ed.)*, 3rd ed. ed., Springer, 1995.

[94] B. Jacob, C. Trunk, and M. Winklmeier, *Analyticity and Riesz basis property of semigroups associated to damped vibrations*, Journal of Evolution Equations **8** (2008), no. 2, 263–281.

[95] X. J. Jing, Z. Q. Lang, and S. A. Billings, *Magnitude bounds of generalized frequency response functions for nonlinear Volterra systems described by NARX model*, Automatica **44** (2008), 838–845.

[96] L. Jordi and A. Barjau, *Cas d'instruments à vent : discrétisation en tuyaux exponentiels*, Journal de Physique IV **2** (1992), no. C1, 79–83.

[97] L. Jézéquel and C.H. Lamarque, *Analysis of non-linear dynamical systems by the normal form theory*, Journal of Sound and Vibration **149** (1991), no. 3, 429–459.

[98] T. Kailath, *Linear systems*, Prentice-Hall, 1980.

[99] R. E. Kalman, *A new approach to linear filtering and prediction problems*, Journal of Basic Engineering (1960), 35–45.

[100] ______, *On the general theory of control systems*, IFAC Congress (London), vol. 1, 1960, pp. 481–493.

[101] ______, *Mathematical description of linear dynamical systems*, SIAM J. Control **1** (1963), 152–192.

[102] S. Karkar, C. Vergez, and B. Cochelin, *Oscillation threshold of a clarinet model : a numerical continuation approach*, J.Acoust.Soc.Am. **131** (2012), no. 1, Pt.2.

[103] J. L. Kelly and C. C. Lochbaum, *Speech synthesis*, ICA (Copenhagen, Denmark), 1962, pp. 1–4.

[104] J. Kergomard, *Champ interne et champ externe des instruments à vent*, Thèse d'Etat, Université Paris 6 - UPMC, 1981.

[105] ______, *Comments on wall effects on sound propagation in tubes*, J. Sound Vibr. **98** (1985), no. 1, 149–153.

[106] H. K. Khalil, *Nonlinear systems*, 3rd edition ed., Prentice Hall, 2002.

[107] G. Kirchhoff, *Ueber die Einflußder Wärmeleitung in einem Gase auf die Schallbewegung*, Annalen der Physik Leipzig **134** (1868), 177–193, (English version : R. B. Lindsay, ed., Physical-Acoustics, Dowden, Hutchinson and Ross, Stroudsburg, 1974).

[108] G. Kirchhoff, *Vorlesungen über mathematische physik : Mechanik*, Leipzig : Teubner, 1877.

[109] M. Kob and T. Frauenrath, *A system for parallel measurement of glottis opening and larynx position*, Biomedical Signal Processing and Control **4** (2009), 221–228.

[110] N. Koren, *Improved vacuum tube models for Spice simulations*, Glass Audio **5** (1996), no. 2, 18–27.

[111] P. Krée, *Les noyaux des opérateurs pseudo-différentiels classiques*, Annales de l'Institut Fourier **19** (1969), 179–194.

[112] J. C. Lagarias, J. A. Reeds, M. H. Wright, and P. E. Wright, *Convergence properties of the Nelder-Mead simplex method in low dimensions*, SIAM Journal of Optimization **9** (1998), no. 1, 112–147.

[113] J. L. Lagrange, *Nouvelles recherches sur la nature et la propagation du son*, Misc. Taurinensia (Mélanges Phil. Math., Soc. Roy. Turin), 1760-1761.

[114] R. F. Lambert, *Acoustical studies of the tractrix horn. I*, J. Acoust. Soc. Am. **26** (1954), no. 6, 1024–1028.

[115] F. Lamnabhi-Lagarrigue, *Analyse des systèmes non linéaires*, Editions Hermès, 1994, ISBN 2-86601-403-0.

[116] J. Laroche, *Traitement des suignaux audio-fréquences*, Département Signal, Groupe Acoustique, TELECOM Paris, 1995.

[117] F. Legent, L. Perlemuter, and C. Vandenbrouck, *Cahiers d'anatomie ORL*, vol. 2, Masson, 1968-1988.

[118] H. Levine and J. Schwinger, *On the radiation of sound from an unflanged circular pipe*, Physical Review **73** (1948), no. 4, 383–406.

[119] H.-X. Li, C. Qi, and Y. Yu, *A spatio-temporal Volterra modeling approach for a class of distributed industrial processes*, Journal of Process Control **19** (2009), 1126–1142.

[120] A. Lindstedt, *Beitrag zur integration der differentialgleichungen der störungstheorie (contribution à l'intégration des équations différentielles de la théorie des perturbations)*, 7, vol. XXI, Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg, 1882.

[121] V. Litovski and M. Zwolinski, *VLSI circuit simulation optimization*, Capman and Hall, 1997.

[122] D. Liu, A. Seppänen, A. Nissinen, V. Kolehmainen, S. Siltanen, and A.M. Laukkanen, *Preliminary results on 3d electrical impedance tomography imaging of vocal folds*, International Conference on Voice Physiology and Biomechanics, (Erlangen), 2012.

[123] J.-S. Liénard, *Reconstruction de la machine parlante de Kempelen*, Proceedings of the 4th International Congress of Acoustics (Budapest), 1967.

[124] A. A. Lokshin, *Wave equation with singular retarded time*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **240** (1978), 43–46 (in Russian).

[125] A. A. Lokshin and V. E. Rok, *Fundamental solutions of the wave equation with retarded time*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **239** (1978), 1305–1308 (in Russian).

[126] H.-L. Lu, *Toward a high-quality singing synthesizer with vocal texture control*, Ph.D. thesis, Stanford University, 2002.

[127] J.-C. Lucero, K. Lourenço, N. Hermant, A. Van Hirtum, and X. Pelorson, *Effect of source-tract acoustical coupling on the oscillation onset of the vocal folds*, J. Acoust. Soc. Am. **132** (2012), no. 1, 403–411.

[128] A. I. Lur'e and V. N. Postnikov, *On the theory of stability of control systems*, Applied mathematics and mechanics **8** (1944), no. 3, 245–251 (in Russian).

[129] I. Lur'e, *Some nonlinear problems in the theory of automatic control*, H. M. Stationery Off., London, 1957 (in Russian, 1951).

[130] J. Lévine, *Introduction à la commande non linéaire*, Cours d'automatique non linéaire, 1997.

[131] J. Macak and J. Schimmel, *Real-time guitar tube amplifier simulation using an approximation of differential equations*, 13th international conference on Digital Audio Effects DAFx-10 (Graz, Austria), 2010.

[132] C.-A. Macaluso and J.-P. Dalmont, *Trumpet with near-perfect harmonicity : design and acoustic results*, J. Acoust. Soc. Am. **129** (2011), no. 1, 404–414.

[133] S. Maeda, *A digital simulation method of the vocal-tract system*, Speech Communication **1** (1982), no. 3-4, 199–229.

[134] S. Makarov and M. Ochmann, *Nonlinear and thermoviscous phenomena in acoustics. Part II*, Acustica united with Acta Acustica **83** (1997), 197–222.

[135] J. D. Markel and A. H. Gray, *Linear prediction of speech*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1976.

[136] J. Marsden and M. West, *Discrete mechanics and variational integrators*, Acta Numerica (2001), 357–514.

[137] W. Marshall and J. R. Leach, *Spice models for vacuum-tube amplifiers*, J. Audio Eng. Soc **43** (1995), no. 3, 117–126.

[138] P. A. Martin, *On Webster's horn equation and some generalizations*, J. Acoust. Soc. Am. **116** (2004), no. 3, 1381–1388.

[139] D. Matignon, *Représentations en variables d'état de modèles de guides d'ondes avec dérivation fractionnaire*, Thèse de doctorat, Université de Paris XI Orsay, 1994.

[140] D. Matignon and B. d'Andréa-Novel, *Spectral and time-domain consequences of an integro-differential perturbation of the wave PDE*, Waves'1995, INRIA-SIAM, vol. 3, INRIA-SIAM, 1995, pp. 769–771.

[141] D. Matignon and G. Montseny (eds.), *Fractional differential systems : models, methods and applications*, vol. 5, ESAIM Proceedings, SMAI, 1998.

[142] D. Matignon and H. Zwart, *Standard diffusive systems as well-posed linear systems*, `http://wwwhome.math.utwente.nl/ zwarthj/drafts/MaZw9.pdf`, 2008.

[143] Denis Matignon, *Stability results for fractional differential equations with applications to control processing*, In Computational Engineering in Systems Applications, 1996, pp. 963–968.

[144] ______, *Lois d'échelle, fractales et ondelettes*, ch. Introduction au calcul fractionnaire, Hermès, 2002.

[145] L. Menguy, *Propagation acoustique non linéaire dans les guides monodimensionnels*, Thèse de doctorat, LAUM-Université du Maine, 2001.

[146] L. Menguy and J. Gilbert, *Weakly non-linear gas oscillations in air-filled tubes ; solutions and experiments*, Acta Acustica united with Acustica **86** (2000), 798–810.

[147] R. Mignot, *Réalisation en guides d'ondes numériques stables d'un modèle acoustique réaliste pour la simulation en temps-réel d'instruments à vent*, Thèse de doctorat, Edite de Paris - Telecom ParisTech, Paris, 2009.

[148] G. Mittag-Leffler, *Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène*, Acta Math. **29** (1904), 101–168.

[149] G. Montseny, *Diffusive representation of pseudo-differential time-operators*, ESAIM, vol. 5, 1998, pp. 159–175.

[150] ______, *Représentation diffusive*, Hermès-Lavoisier, 2005.

[151] Robert A. Moog, *A voltage-controlled low-pass high-pass filter for audio signal processing*, in Proc. of the 17^{th} AES Convention (New York), 1965, pp. 1–12.

[152] P. M. Morse and K. U. Ingard, *Theoretical acoustics*, McGraw-Hill, New York, 1968.

[153] R. Msallam, S. Dequidt, R. Caussé, and S. Tassart, *Physical model of the trombone including nonlinear effects. Application to the sound synthesis of loud tones*, Acta Acustica united with Acustica **86** (2000), no. 4, 725–736.

[154] A.H. Nayfeh and D. T. Mook, *Nonlinear oscillations*, Wiley-VCH, 1995.

[155] T. Nimura and Y. Watanabé, *Effect of a finite circular baffle board on acoustic radiation*, J. Acoust. Soc. Amer. **25** (1953), 76–80.

[156] D. Noreland, S. Bellizzi, C. Vergez, and R. Bouc, *Nonlinear modes of clarinet-like musical instruments*, Journal of Sound and Vibration **324** (2009), 983–1002.

[157] D. Noreland, J.Kergomard, F. Laloë, C. Vergez, P. Guillemain, and A. Guilloteau, *The logical clarinet : numerical optimization of the geometry of woodwind instruments*, Tech. report, Ecole Normale Supérieure de Paris-Archive Ouverte pluridisciplinaire HAL,, 2012.

[158] A. N. Norris and I. C. Sheng, *Acoustic radiation from a circular pipe with an infinite flange*, Journal of Sound and Vibration **135** (1989), no. 1, 85–93.

[159] L Nottale, *Scale relativity and fractal space-time : A new approach to unifying relativity and quantum mechanics*, World Scientific Publishing Company, 2011.

[160] A. Novak, L. Simon, F. Kadlec, and P. Lotton, *Nonlinear system identification using exponential swept-sine signal*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement **59** (2010), 2220–2229.

[161] K. B. Oldham and J. Spanier, *The fractional calculus : theory abd application of differentiation and integration of arbitrary order*, Academic press, 1974.

[162] Alain Oustaloup, *La dérivation non entière : théorie, synthèse et applications*, Hermès, 1995.

[163] V. Pagneux, N. Amir, and J. Kergomard, *A study of wave propagation in varying cross-section waveguides by modal decomposition. Part I. Theory and validation*, J. Acoust. Soc. Am. **100** (1996), no. 4, 2034–2048.

[164] J. Pakarinen and M. Karjalainen, *Wave digital simulation of a vacuum-tube amplifier*, IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, 2006.

[165] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer, 1983.

[166] X. Pelorson, A. Hirschberg, A. P. J. Wijnands, and H. Baillet, *Description of the flow through in-vitro models of the glottis during phonation*, Acta Acustica **3** (1995), 191–202.

[167] Z. K. Peng and Z. Q. Lang, *On the convergence of the Volterra-series representation of the Duffing's oscillators subjected to harmonic excitations*, Journal of Sound and Vibration **305** (2007), 322–332.

[168] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique célèste*, vol. 1, Gauthier-Villars, 1892.

[169] ______, *Les méthodes nouvelles de la mécanique célèste*, vol. 2, Gauthier-Villars, 1893.

[170] J.-D. Polack, *Time domain solution of Kirchhoff's equation for sound propagation in viscothermal gases : a diffusion process*, J. Acoustique **4** (1991), 47–67.

[171] G. R. Putland, *Every one-parameter acoustic field obeys Webster's horn equation*, J. Audio Eng. Soc. **6** (1993), 435–451.

[172] T. F. Quatieri, *Discrete-time speech signal processing. principles and practice*, Prentice Hall, 2002.

[173] J.-P. Ramis, *Séries divergentes et théories asymptotiques*, vol. 121, Société Mathématique de France, 1993.

[174] B. Riemann, *Über die fortpflanzung ebener luftwellen von endlicher schwingungsweite*, Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen **8** (1860), 43–66 (in German).

[175] X. Rodet, *Time-domain formant-wave-function synthesis*, Computer Music Journal **8** (1984), 9–14.

[176] B. Ross, *The development of fractional calculus 1695-1900*, Historia Math. **4** (1977), 75–89.

[177] M. Rothenberg, *A multichannel electroglottograph*, J. Voice **6** (1992), 36–43.

[178] B. Roubeau, N. Henrich, and M. Castellengo, *Laryngeal vibratory mechanisms : the notion of vocal register revisited*, Journal of Voice **33** (2009), no. 4, 425–438.

[179] D. Roze, *Simulation de propagation non linéaire par les séries de volterra*, Thèse de doctorat, Université Paris 6 - UPMC, 2010.

[180] W. J. Rugh, *Nonlinear system theory, the Volterra/Wiener approach*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1981.

[181] N. Ruty, X. Pelorson, A. Van Hirtum, I. Lopez-Arteaga, and A. Hirschberg, *An in vitro setup to test the relevance and the accuracy of low-order vocal folds models*, J. Acoust. Soc. Am. **121** (2007), no. 1, 479–490.

[182] M. Rébillat, R. Hennequin, E. Corteel, and B. F. G. Katz, *Identification of cascade of Hammerstein models for the description of non-linearities in vibrating devices*, Journal of Sound and Vibration **330** (2011), no. 5, 1018–1038.

[183] J. Sabatier, M. Moze, and C. Farges, *LMI stability conditions for fractional order systems*, Computer and Mathematics with Applications **9** (2010), 1594–1609.

[184] Francesco Santagata, Augusto Sarti, and Stefano Tubaro, *Non-linear digital implementation of a parametric analog tube ground cathode amplifier*, Proc. of the Int. Conf. on Digital Audio Effects (DAFx-07) (Bordeaux, France), Sept. 10–15, 2007, pp. 169–172.

[185] G. P. Scavone, *An acoustic analysis of single-reed woodwind instruments with an emphasis on design and performance issues and digital waveguide modeling techniques*, Ph.D. thesis, Music Dept., Stanford University, 1997.

[186] M. Schetzen, *The Volterra and Wiener theories of nonlinear systems*, Wiley-Interscience, 1989.

[187] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, 1966.

[188] A. Seppänen, A. Nissinen, V. Kolehmainen, S. Siltanen, and A.-M. Laukkanen, *Electrical impedance tomography imaging of larynx*, Proceedings of the 7th International Workshop on Models and Analysis of Vocal Emissions for Biomedical Applications (MAVEBA), 2011.

[189] S. Shaw and C. Pierre, *Nonlinear normal modes and invariant manifolds*, J. Sound Vib. **150** (1991), no. 1, 170–173.

[190] ———, *Normal modes for nonlinear vibratory systems*, J. Sound Vib. **164** (1993), no. 1, 85–124.

[191] ———, *Normal modes of vibration for non-linear continuous systems*, J. Sound Vib. **169** (1994), no. 3, 319–347.

[192] P. Sidlof, *Fluid-structure interaction in human vocal folds*, Ph.D. thesis, Charles University in Prague, 2007.

[193] F. Silva, P. Guillemain, J. Kergomard, B. Mallaroni, and A.-N. Norris, *Approximation of the acoustic radiation impedance of a cylindrical pipe*, Journal of Sound and Vibration **322** (2009), 255–263.

[194] J. O. Smith, *Physical modeling using digital waveguides*, Computer Music Journal **16** (1992.), 74–91.

[195] ———, *Physical modeling using digital waveguides*, Computer Music Journal **16** (1992), 74–91.

[196] ———, *Virtual acoustic musical instruments : Review of models and selected research*, Proc. Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics (WASPAA), IEEE, 2005.

[197] O. J. Staffans, *Well-posedness and stabilizability of a viscoelastic equation in energy space*, Trans. Amer. Math. Soc. **345** (1994), no. 2, 527–575.

[198] J. A. Stammen, S. Williams, D. N. Ku, and R. E. Guldberg, *Mechanical properties of a novel PVA hydrogel in shear and unconfined compression*, Biomaterials **22** (2001), no. 8, 799–806.

[199] T. Stilson and J. O. Smith, *Analyzing the Moog VCF with considerations for digital implementation*, Proc. of Int. Computer Music Conf. (Hong Kong, China), 1996, pp. 398–401.

[200] T. E. Stinchcombe, *Derivation of the transfer function of the Moog ladder filter*, Tech. report, `http://www.timstinchcombe.co.uk/synth/Moog_ladder_tf.pdf`, 2005.

[201] B. H. Story and I. R. Titze, *Parametrization of vocal tract area functions by empirical orthogonal modes*, Journal of Phonetics **26** (1998), 223–260.

[202] S. Tassart, *Modélisation, simulation et analyse des instruments à vent avec retards fractionnaires*, Thèse de doctorat, Université Paris 6 - UPMC, Paris, 2000.

[203] T.Drugman, *Advances in glottal analysis and its applications*, Ph.D. thesis, Université de Mons, 2011.

[204] Linear Technology, *LTSpice IV*, available at `http://www.linear.com/`, 2010.

[205] A. N. Tikhonov, A. V. Goncharsky, V. V. Stepanov, and A. G. Yagola, *Numerical methods for the solution of ill-posed problems*, Kluwer Academic Publishers, 1995.

[206] C. Touzé, O.Thomas, and A. Chaigne, *Hardening/softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear nomal modes*, Journal of Sound and Vibration **273** (2004), 77–101.

[207] L. Trautmann and R. Rabenstein, *Digital sound synthesis by physical modeling using the functional transformation method*, Kluwer Academic/Plenum Publishers, 1003.

[208] V. Valimaki and A. Huovilainen, *Oscillator and filter algorithms for virtual analog synthesis*, Computer Music Journal **30** (2006), no. 2, 19–31.

[209] C. Vergez, *Trompette et trompettiste : un système dynamique non linéaire analysé, modélisé et simulé dans un contexte musical.*, Thèse de doctorat, Ircam, Paris, 2000.

[210] C. Vergez and X. Rodet, *Bifurcation sequence in a physical model of trumpet-like musical instruments : from a fixed point to chaos*, Proceedings of the 1998 NOLTA Conference (Nonlinear Oscillation Theory and Its Applications, Presses polytechniques et universitaires romandes-Lausanne, 1998, pp. 751–754.

[211] ———, *Experiments with an artificial mouth for trumpet*, ISMA : International Symposium of Music Acoustics (Leavenworth, Washington state USA), Juin 1998, pp. 153–158.

[212] ———, *New algorithm for nonlinear propagation of a sound wave. application to a physical model of a trumpet*, Journal of Signal Processing **4** (2000), no. 1, 79–87.

[213] C. E. Vilain, *Contribution à la synthèse de parole par modèle physique. application à l'étude des voix pathologiques*, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2002.

[214] F. Villavicencio, A. Roebel, and X. Rodet, *Extending efficient spectral envelope modeling to mel-frequency based representation*, IEEE ICASSP, 2008.

[215] V. Volterra, *Sopra le funzioni che dipendono de altre funzioni*, Rend. R. Academia dei Lince, vol. 2, 1887, pp. 97–105, 141–146, and 153–158.

[216] ———, *Theory of functionnals and of integral and integro-differential equations*, Dover Publications, 1959.

[217] V. Välimäki, *Discrete-time modeling of acoustic tubes using fractional delay filters*, Ph.D. thesis, Helsinki University of Technology, Faculty of Electrical Engineering, 1995.

[218] M. V. Walstijn, *Discrete-time modelling of brass and reed woodwind instruments with application to musical sound synthesis*, Ph.D. thesis, University of Edinburgh, 2002.

[219] A. G. Webster, *Acoustical impedance, and the theory of horns and of the phonograph*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. **5** (1919), 275–282, Errata, ibid. **6**, p.320 (1920).

[220] E. S. Weibel, *On Webster's horn equation*, J. Acoust. Soc. Am. **27** (1955), no. 4, 726–727.

[221] J. C. Willems, *From time series to linear system (parts I&II)*, Automatica **22** (1986), 561–580 & 675–694, Part III :23, 87–115.

[222] ———, *From time series to linear system (part III)*, Automatica **23** (1987), 87–115.

[223] ———, *Paradigms and puzzles in the theory of dynamical systems*, IEEE Trans. on Automat. Control **36** (1991), 258–294.

[224] D. T. Yeh, *Digital implementation of musical distortion circuits by analysis and simulation*, PhD thesis, Stanford University, 2009.

[225] D. T. Yeh and J. O. Smith, *Discretization of the '59 Fender Bassman Tone Stack*, 9th international conference on Digital Audio Effects DAFx-06 (New York, USA), 2006.

[226] K. Yoshida, *Functional analysis*, Springer, 1995.

[227] S. Zambon and F. Fontana, *Efficient polynomial impementation the EMS VCS3 filter model*, Proc. of the Int. Conf. on Digital Audio Effects (Paris), vol. 13, 2011, pp. 287–290.

[228] W. E. Zorumski, *Generalized radiation impedances and reflection coefficients of circular and annular ducts*, J. Acoust. Soc. Am. **54** (1973), no. 6, 1667–1673.

[229] U. Zölzer, *DAFX - Digital Audio Effects*, Wiley, 2002.

[230] ———, *DAFX - Digital Audio Effects*, second ed., Wiley, 2011.