

# Transferts d'énergie par couplage modal : étude d'un cas particulier.

Cyril Touzé,<sup>1</sup> Pierre Lanchantin,<sup>1</sup> Antoine Chaigne,<sup>1</sup> et Olivier Thomas<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ENSTA - UME, Unité de Recherche en Mécanique,  
Chemin de la Hunière, 91761 Palaiseau Cedex, France

## RESUME

Les transferts d'énergie par couplage non-linéaire entre modes propres dont les fréquences naturelles présentent des relations de résonance interne sont couramment observés en vibrations non-linéaires. Ici on étudie le cas particulier d'une résonance interne d'ordre 3 :  $\omega_1 + 2\omega_2 = \omega_3$ , pour un système de 3 oscillateurs non-linéaires couplés et forcés harmoniquement. Les conditions d'existence de solutions couplées sont mises en évidence, ainsi que certaines particularités des branches de solutions. Ces résultats sont reliés aux vibrations de plaques circulaires minces, ainsi qu'aux vibrations des cymbales et des gongs.

## I. INTRODUCTION

### I.1. Cadre de l'étude

L'étude des vibrations des instruments de percussions de type cymbale ou gong montre des phénomènes typiques des systèmes dynamiques non-linéaires : sensibilité aux conditions initiales et spectre large bande en sont les deux manifestations les plus évidentes. Les grandes amplitudes de vibration observées sont responsables des non-linéarités, de type géométriques, apparaissant dans les équations de vibration. La démarche modélisatrice entreprise au laboratoire, dans laquelle s'inscrit cette étude, a pour but de rendre compte des phénomènes observés [1, 2]. Ici, on s'intéressera plus particulièrement aux échanges d'énergie que l'on observe entre modes propres présentant une relation de résonance interne. Ces échanges sont des phénomènes non-linéaires, et expliquent comment une réponse impliquant plusieurs modes peut être observée lorsque l'on excite harmoniquement une telle structure.

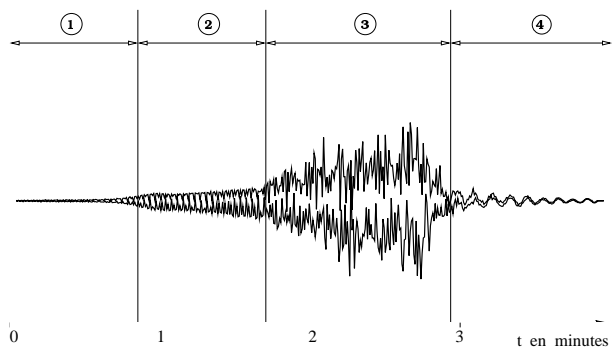
Cette recherche ouvre de plus sur une problématique vaste et largement inexplorée, puisque les méthodes mises en œuvre peuvent s'appliquer aux oscillations non-linéaires de toute structure mince continue : poutres, arches, plaques, coques... La cymbale sera donc présentée comme application de résultats beaucoup plus généraux.

### I.2. Observations sur une cymbale

On présente d'abord quelques résultats expérimentaux obtenus sur une cymbale, excitée par un pot vibrant encastré au centre [1], reprenant un montage expérimental de [3]. Ces observations ont été renouvelées depuis sur d'autres structures, et avec un exciteur électromagnétique : sur un gong [4], des plaques circulaires [5], et récemment des coques sphériques.

L'idée générale est de tirer le système loin de sa position d'équilibre en lui imposant un forçage harmonique d'amplitude croissante. La figure 1 montre

un enregistrement typique, où se distinguent 4 zones différentes.



**Figure 1:** Évolution de l'amplitude de vibration pour une cymbale forcée harmoniquement.

- Au début du signal (zone 1), la vibration est unimodale. La non-linéarité s'est déjà manifestée par l'apparition d'harmoniques de la fréquence d'excitation dans la réponse, mais un seul mode est impliqué dans la vibration. [5, 6].
- Après la première bifurcation (zone 2), un régime génériquement quasipériodique est observé, caractérisé par l'excitation de modes en *combinaison de résonance* [1, 4, 7].
- Une seconde bifurcation intervient (zone 3) et le régime est chaotique [1, 7].
- Enfin en zone 4, on arrête l'excitation et le système revient au repos.

Dans cet article, nous étudierons plus spécifiquement le régime quasipériodique (zone 2), en s'intéressant surtout à définir des conditions d'instabilité permettant d'expliquer la première transition. Le régime 2 est caractérisé par l'apparition de partiels de fréquences incommensurables avec la fréquence d'excitation, notée  $F_{exc}$ . De plus, les fréquences

supplémentaires (notons-les  $f_i$ ) sont inférieures à  $F_{exc}$ , correspondent à des fréquences propres, et sont regroupables deux à deux selon la relation [4, 7] :

$$f_i + f_j = F_{exc}. \quad (1)$$

Ce phénomène de *combinaison de résonance* est spécifique aux régimes non-linéaires et trouve son explication dans la théorie des formes normales (cf. par ex. [8–10]). La relation (1) est de plus caractéristique d'une non-linéarité quadratique.

Il est attendu que la perte de stabilité de la solution unimodale (zone 1) soit due aux termes de couplage non-linéaires. Ce travail poursuit donc l'étude des vibrations unimodales asymétriques, où les termes non-linéaires permettent d'expliquer les couplages entre configurations préférentielles [5, 6].

## II. CADRE THÉORIQUE

On se restreint au cas des vibrations axisymétriques d'une plaque circulaire mince. Excluant les modes asymétriques (présentant une dépendance angulaire), nous n'aurons pas à considérer de configurations préférentielles [5, 6]. La non-linéarité est cubique et provient du chargement quadratique du plan moyen [2, 6, 9].

On choisit arbitrairement d'étudier la résonance interne d'ordre trois correspondant à la relation  $\omega_1 + 2\omega_2 \simeq \omega_3$ , soit, en introduisant un paramètre de désaccord  $\sigma_1$  :

$$\omega_1 + 2\omega_2 - \omega_3 = \varepsilon\sigma_1 \quad (2)$$

On considère enfin que la fréquence d'excitation sera proche de l'une de ces trois fréquences propres. Par conséquent, tous les autres modes auront, en régime permanent et au premier ordre, une amplitude nulle [11]. La dynamique à étudier est donc la suivante :

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = \varepsilon [\Gamma_1 q_1^3 + C_{12} q_1 q_2^2 + C_{13} q_1 q_3^2 + K_1 q_2^2 q_3 - 2\mu_1 \dot{q}_1 + \delta_{\Omega, \omega_1} Q_1 \cos \Omega t] \quad (3a)$$

$$\ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = \varepsilon [\Gamma_2 q_2^3 + C_{21} q_2 q_1^2 + C_{23} q_2 q_3^2 + K_2 q_1 q_2 q_3 - 2\mu_2 \dot{q}_2 + \delta_{\Omega, \omega_2} Q_2 \cos \Omega t] \quad (3b)$$

$$\ddot{q}_3 + \omega_3^2 q_3 = \varepsilon [\Gamma_3 q_3^3 + C_{31} q_3 q_1^2 + C_{32} q_3 q_2^2 + K_3 q_1 q_2^2 - 2\mu_3 \dot{q}_3 + \delta_{\Omega, \omega_3} Q_3 \cos \Omega t] \quad (3c)$$

Les équations (3) proviennent de la projection des analogues dynamiques des équations de Von Kármán sur la base des modes normaux linéaires [2, 9, 11], suivie d'un changement de variables non-linéaire menant à la forme normale du problème [10]. On ne retient que ces termes dans l'analyse, conformément à l'étude de la dynamique normale sur les modes non-linéaires, pris comme variétés invariantes tangentes aux sous-espaces propres [10]. Les amplitudes  $q_i$

correspondent donc aux amplitudes des modes non-linéaires étudiés, auxquels sont associés les pulsations propres  $\omega_i$ . Les coefficients  $C_{ij}$  seront appelés coefficients de couplage triviaux, les  $K_i$  non-triviaux.

Enfin, la pulsation d'excitation  $\Omega$  sera proche soit de  $\omega_1$ , soit de  $\omega_2$ , soit de  $\omega_3$ , d'où les symboles de Kronecker :  $\delta_{\Omega, \omega_j} = 1$  si  $\Omega \simeq \omega_j$ , 0 sinon.

Le système (3) de 3 oscillateurs non-linéaires couplés est un problème temporel, ce qui permet de s'affranchir d'une géométrie particulière, et donc d'étendre les résultats à diverses structures. C'est pour cette raison que les coefficients sont gardés variables.

## III. ÉCHELLES MULTIPLES

### III.1. Définitions

Les solutions du système (3) sont recherchées à l'aide d'un développement en échelles multiples au premier ordre (cf. [9]). La méthode procède en développant les différents termes en puissance de  $\varepsilon$ , et en définissant plusieurs échelles de temps :  $T_0 = t$ ,  $T_1 = \varepsilon t$ . La solution au premier ordre est de la forme :  $q_j = a_j(T_1) \exp(i\theta_j(T_1) + i\omega_j T_0) + c.c.$ , où *c.c.* désigne le complexe conjugué.

### III.2. Transfert vers les basses fréquences

Au cours de ces développements, qui ne sont pas reproduit ici par souci de concision, on montre que si  $\Omega \simeq \omega_1$  ou  $\Omega \simeq \omega_2$ , alors seul le mode excité directement (resp.  $q_1$  ou  $q_2$ ) aura une amplitude de vibration non-nulle en régime permanent. Par contre, pour  $\Omega \simeq \omega_3$ , des solutions couplées (*i.e.* telles que  $\forall j = 1, 2, 3; q_j \neq 0$ ) existent [11–13].

On montre ainsi que le transfert d'énergie entre les modes impliqués ne peut se faire que *vers les basses fréquences* [11, 12]. La suite de l'étude ne concerne désormais que le cas de l'excitation du mode de plus haute fréquence. On introduit alors un second paramètre de désaccord tel que :

$$\Omega = \omega_3 + \varepsilon\sigma_2 \quad (4)$$

### III.3. Système autonome

Le développement en échelles multiples conduit à un système dynamique gouvernant les phases  $\theta_j$  et les amplitudes  $a_j$  des modes considérés. Ce système est à l'échelle de temps  $T_1$ , soit une échelle de temps lente par rapport à  $T_0$ . Dans le cas qui nous intéresse désormais ( $\Omega \simeq \omega_3$ ), il peut être rendu autonome en posant :

$$\gamma_1 = \sigma_1 T_1 + 2\theta_2 + \theta_1 - \theta_3 \quad (5a)$$

$$\gamma_2 = \sigma_2 T_1 - \theta_3 \quad (5b)$$

Soit :

$$a_1' = -\mu_1 a_1 - \frac{K_1}{2\omega_1} a_2^2 a_3 \sin \gamma_1 \quad (6a)$$

$$a_2' = -\mu_2 a_2 - \frac{K_2}{2\omega_2} a_1 a_2 a_3 \sin \gamma_1 \quad (6b)$$

$$\begin{aligned} \gamma_1' = & \sigma_1 + a_1^2 \left( \frac{C_{31}}{\omega_3} - \frac{3\Gamma_1}{2\omega_1} - \frac{2C_{21}}{\omega_2} \right) + a_2^2 \left( \frac{C_{32}}{\omega_3} - \frac{C_{12}}{\omega_1} - \frac{3\Gamma_2}{\omega_2} \right) \\ & + a_3^2 \left( \frac{3\Gamma_3}{2\omega_3} - \frac{C_{13}}{\omega_1} - \frac{2C_{23}}{\omega_2} \right) + \frac{Q_3}{4\omega_3 a_3} \cos \gamma_2 \\ & + \left( \frac{K_3}{2} \frac{a_1 a_2^2}{\omega_3 a_3} - \frac{K_1}{2} \frac{a_3 a_2^2}{\omega_1 a_1} - \frac{K_2 a_1 a_3}{\omega_2} \right) \cos \gamma_1 \quad (6c) \end{aligned}$$

$$a_3' = -\mu_3 a_3 + \frac{K_3}{2\omega_3} a_1 a_2^2 \sin \gamma_1 + \frac{Q_3}{4\omega_3} \sin \gamma_2 \quad (6d)$$

$$\begin{aligned} \gamma_2' = & \sigma_2 + \frac{2C_{31} a_1^2 + 2C_{32} a_2^2 + 3\Gamma_3 a_3^2}{2\omega_3} \\ & + \frac{K_3}{2\omega_3} \frac{a_1 a_2^2}{a_3} \cos \gamma_1 + \frac{Q_3}{4\omega_3 a_3} \cos \gamma_2 \quad (6e) \end{aligned}$$

La suite de l'étude consiste désormais à expliciter les différentes solutions de (6). On s'intéressera en particulier à l'étude des solutions couplées (telles que  $\forall j, a_j \neq 0$ ). On appellera *solution 1 ddl* (pour 1 degré de liberté) la solution pour laquelle seul le mode directement excité a de l'énergie (*i.e.*  $a_3 \neq 0$ ,  $a_1 = a_2 = 0$ ), et on cherchera à définir les conditions telles que cette solution perde sa stabilité au profit d'une solution couplée. On reprend le schéma d'étude préconisé dans [6].

## IV. RELATIONS GÉNÉRALES DE POINTS FIXES

### IV.1. Conditions d'existence

On s'intéresse aux régimes permanents du système (3) forcé. Ils sont donnés par les points fixes de (6), qui s'obtiennent en annulant les dérivées temporelles à gauche. On obtient alors 5 relations donnant des conditions d'existence de points fixes pour les solutions couplées, qui ne peuvent pas se développer n'importe où dans l'espace des phases. Ces conditions seront explicitées sur les amplitudes.

Les équations de points fixes provenant de (6a-6b) fournissent les deux conditions d'existence suivantes :

$$\frac{a_2^2 a_3}{a_1} \geq \frac{2\omega_1 \mu_1}{|K_1|} \quad (7a)$$

$$a_1 a_3 \geq \frac{2\omega_2 \mu_2}{|K_2|} \quad (7b)$$

Ces équations montrent en particulier que l'existence du transfert d'énergie entre les modes est uniquement gouvernée par les coefficients de couplage non-triviaux  $K_1$  et  $K_2$ . Ces coefficients proviennent de la relation de résonance interne (2). Ils couplent les variétés correspondantes qui autrement auraient été invariantes. De (7b), puisque  $a_3 \neq 0$ , on déduit que  $a_1$  ne peut pas tendre vers zéro. Reportant dans (7a), il vient que  $a_2$  ne peut pas tendre vers zéro non plus.

Ce point est problématique dans la mesure où l'on constate d'emblée que les solutions couplées ne sont pas connectées au plan ( $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 0$ ) où se situe la solution 1 ddl. Ainsi n'y aura-t-il pas de région d'instabilité pour la solution 1 ddl dans le plan ( $\sigma_2, a_3$ ). Les solutions 1 ddl et couplées coexisteront dans deux régions distinctes de l'espace des phases, mais on ne pourra pas passer continûment de l'une à l'autre. Physiquement, cela veut dire qu'il faudra fortement perturber le système pour observer les solutions couplées si l'on est sur une solution à 1 ddl, ce qui est contraire aux observations. Ce point sera repris en conclusion.

### IV.2. Définition de la région $\mathcal{D}$

En éliminant les angles  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  des relations de points fixes, on peut trouver une troisième condition d'existence ne regroupant que les amplitudes et les paramètres physiques du problème [12]. Elle s'écrit :

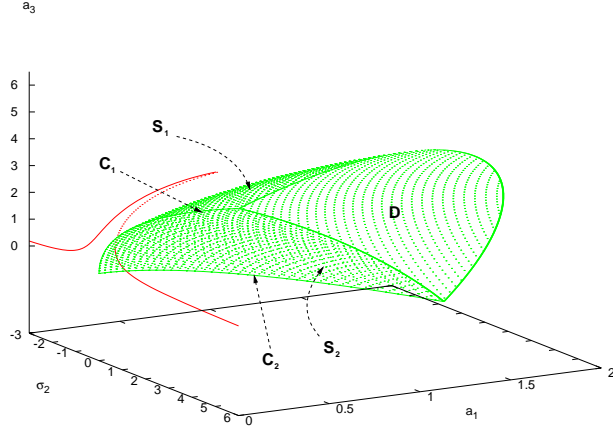
$$\begin{aligned} \left| (\sigma_2 - \sigma_1) + a_1^2 \left( \frac{3\Gamma_1}{2\omega_1} + \frac{2C_{21}}{\omega_2} \right) + a_2^2 \left( \frac{3\Gamma_2}{\omega_2} + \frac{C_{12}}{\omega_1} \right) \right. \\ \left. + a_3^2 \left( \frac{C_{13}}{\omega_1} + \frac{2C_{23}}{\omega_2} \right) \right| \leq \left| \frac{K_1}{2} \frac{a_2^2 a_3}{\omega_1 a_1} + \frac{K_2 a_1 a_3}{\omega_2} \right| \quad (8) \end{aligned}$$

Cette relation définit une région  $\mathcal{D}$  dans l'espace des phases à l'intérieur de laquelle des solutions couplées sont possibles. Cette région est représentée figure 2, dans l'espace ( $\sigma_2, a_1, a_3$ ). On a choisi cet espace de représentation car le déphasage  $\sigma_2$  par rapport à la fréquence d'excitation est couramment utilisé comme paramètre de contrôle et est aisément reliable à l'expérience. De plus, des relations de points fixes, il vient la relation de proportionnalité suivante entre  $a_1$  et  $a_2$  :

$$\frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{K_1 \omega_2 \mu_2}{K_2 \omega_1 \mu_1}, \quad (9)$$

qui permet de s'affranchir d'une des deux amplitudes des modes non-directement excités. On a choisi ici arbitrairement d'éliminer  $a_2$ . Tout cela nous permet de visualiser la région  $\mathcal{D}$  dans un espace tridimensionnel.

La région  $\mathcal{D}$  est délimitée par deux surfaces  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  données par les valeurs limites de l'inégalité (8). Elles se rejoignent sur le plan ( $\sigma_2, a_3$ ) en une courbe nommée  $\mathcal{C}_1$ , et sur le plan ( $\sigma_2, a_1$ ) en une courbe appelée  $\mathcal{C}_2$ . On montre que dans le cas conservatif (*i.e.* en mettant tous les amortissements  $\mu_j$  à zéro), les courbes solutions se situent exactement *sur*  $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$  [12]. Par contre, l'ajout de l'amortissement conduit à séparer la zone d'existence des points fixes des courbes solutions, qui alors vont se trouver à l'intérieur de  $\mathcal{D}$ . Ceci est montré section suivante IV.3.



**Figure 2:** Représentation de la région  $\mathcal{D}$  dans l'espace des phases, à l'intérieur de laquelle des solutions couplées sont possibles. On a aussi représenté dans le plan  $(\sigma_2, a_3)$  la courbe de résonance 1 ddl.

L'équation de  $\mathcal{C}_1$  est :

$$\sigma_2 = \sigma_1 - a_3^2 \left( \frac{C_{13}}{\omega_1} + \frac{2C_{23}}{\omega_2} \right). \quad (10)$$

On montrera l'importance de cette courbe en section V.1.

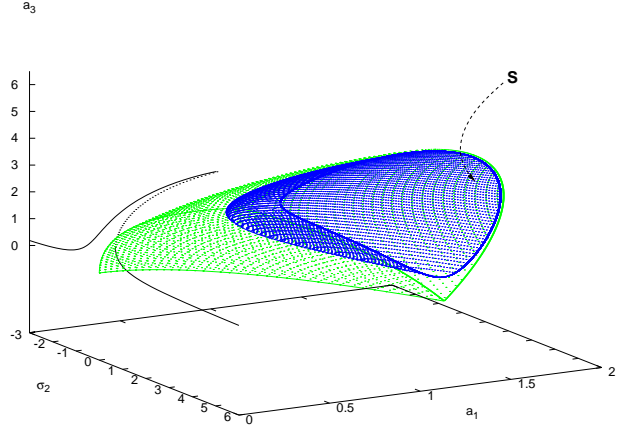
#### IV.3. Effet de l'amortissement

On peut éliminer systématiquement les angles  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  dans les relations de points fixes pour n'avoir que trois relations non-linéaires entre les amplitudes des modes et les paramètres du problème. On appelle ces équations : relations de points fixes générales. Elles s'écrivent :

$$\left( \frac{K_1 a_2^2 a_3}{2 \omega_1 a_1} + \frac{K_2 a_1 a_3}{\omega_2} \right)^2 = (\mu_1 + 2\mu_2)^2 + \left[ (\sigma_2 - \sigma_1) + a_1^2 \left( \frac{3\Gamma_1}{2\omega_1} + \frac{2C_{21}}{\omega_2} \right) + a_2^2 \left( \frac{3\Gamma_2}{\omega_2} + \frac{C_{12}}{\omega_1} \right) + a_3^2 \left( \frac{C_{13}}{\omega_1} + \frac{2C_{23}}{\omega_2} \right) \right]^2 \quad (11a)$$

$$\frac{Q_3^2}{16\omega_3^2 a_3^2} = \mu_3^2 \left( 1 + \frac{K_3 \omega_1 \mu_1 a_1^2}{K_1 \omega_3 \mu_3 a_3^2} \right)^2 + \left[ \frac{-2C_{31} a_1^2 + 2C_{32} a_2^2 + 3\Gamma_3 a_3^2}{2\omega_3} - \sigma_2 \pm \frac{K_3 a_1 a_2^2}{2\omega_3 a_3} \sqrt{1 - \left( \frac{2\omega_2 \mu_2}{K_2 a_1 a_3} \right)^2} \right]^2 \quad (11b)$$

Relations auxquelles il convient d'ajouter l'équation (9). Une étude géométrique des branches de solutions peut être alors menée : chacune des équations (9-11) définit une ou plusieurs hypersurfaces dans l'espace  $(\sigma_2, a_1, a_2, a_3)$ , l'intersection de ces surfaces donne les branches de solutions couplées recherchées [12]. Ici, nous ne nous intéresserons qu'à l'hypersurface définie par (11a), car elle se confond avec  $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$  lorsque l'on met les amortissements à zéro. Elle permet donc de mettre en évidence l'influence de l'amortissement. L'hypersurface  $\mathcal{S}$  définie par l'équation (11a) est représentée figure 3.



**Figure 3:** Représentation de la surface  $\mathcal{S}$  dans l'espace des phases.

Plus les amortissements sont grands, et plus  $\mathcal{S}$  se "contracte" à l'intérieur de  $\mathcal{D}$ , en s'éloignant du plan  $(\sigma_2, a_3)$ . Ceci est classique en oscillations non-linéaires [6, 9], et montre que plus le système est dissipatif, plus les régimes couplés seront difficiles à obtenir, puisque les branches de solutions se développent sur l'hypersurface  $\mathcal{S}$ .

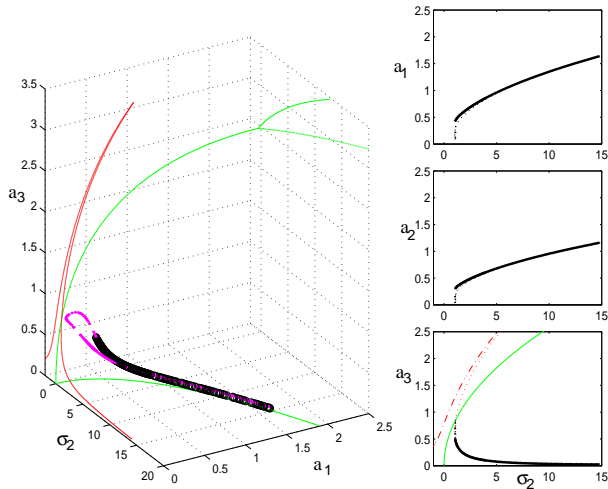
## V. BRANCHES DE SOLUTIONS

Les branches de solutions couplées sont étudiées numériquement, à l'aide du logiciel dstool [14], permettant de calculer les points fixes ainsi que leur nature, donnée par les valeurs propres de la matrice jacobienne de (6). Le système dynamique (6) présente un vaste ensemble de comportements possibles, surtout lorsque l'on peut faire varier tous les paramètres. Nous en soulignons ici deux propriétés importantes.

### V.1. Influence de $\mathcal{C}_1$

Le nombre de branches de solutions existantes est directement relié à la position de la courbe  $\mathcal{C}_1$  (dans le plan  $(\sigma_2, a_3)$ ) par rapport à la courbe de solution 1 ddl. On montre figure 4 un cas où  $\mathcal{C}_1$  est basse par rapport à la solution 1 ddl. Il ne se développe alors qu'une seule branche de solutions stables, et une branche de solutions instables, les deux se rejoignant par bifurcation nœud-col en  $\sigma_2 = 15$ .

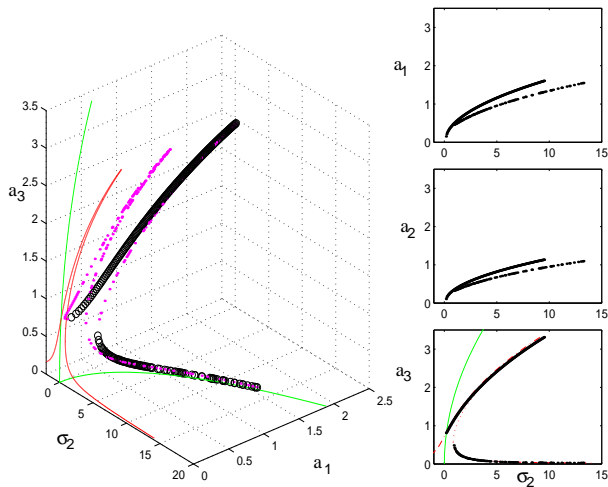
Un cas similaire a déjà été étudié par Nayfeh *et al.* [11, 13]. Dans ces études, des coefficients correspondants à une plaque réelle avaient été utilisés. Il en avait été déduit que les amplitudes des modes non-directement excités (ici  $a_1$  et  $a_2$ ) étaient supérieures à l'amplitude du mode directement excité (ici  $a_3$ ), ce qui est effectivement le cas pour leurs valeurs, qui correspondent, à un rapport d'échelle près, à celles



**Figure 4:** A gauche : branches de solution dans l'espace  $(\sigma_2, a_1, a_3)$ . La branche stable est représentée en noir, la branche instable en mauve. A droite et de haut en bas : projections de solutions couplés dans les plans  $(\sigma_2, a_1)$ ,  $(\sigma_2, a_2)$  et  $(\sigma_2, a_3)$ . On retrouve, dans le plan  $(\sigma_2, a_3)$  (en bas à droite) la courbe de résonance 1ddl, ainsi que la courbe  $\mathcal{C}_1$ .

utilisées dans les simulations correspondants à la figure 4. Cependant ceci n'est pas général, il suffit en effet de modifier les coefficients  $C_{13}$  et  $C_{23}$  qui gouvernent la pente de  $\mathcal{C}_1$  (cf. éq. (10)) pour voir d'autres cas apparaître.

Nous montrons figure 5 que lorsque  $\mathcal{C}_1$  passe au-dessus de la courbe de résonance 1 ddl, deux branches de solutions couplées existent, dont l'une est telle que le troisième mode a la plus grande amplitude.



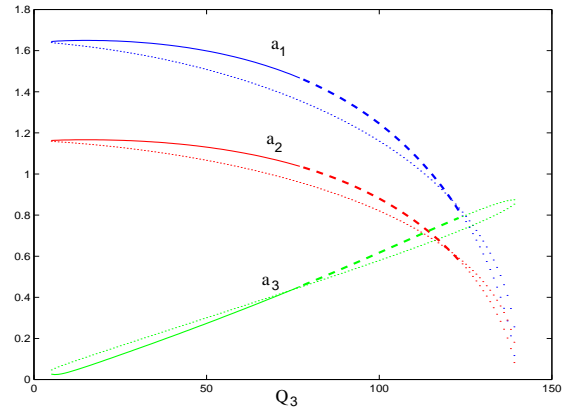
**Figure 5:** A gauche : branches de solution dans l'espace  $(\sigma_2, a_1, a_3)$ . Solutions stables en noir, instables en mauve. A droite : projection dans les plans  $(\sigma_2, a_1)$ ,  $(\sigma_2, a_2)$  et  $(\sigma_2, a_3)$ . Seuls les états stables y ont été représentés pour plus de lisibilité.

Les simulations ont été menées ici en prenant tous les coefficients physiques (*i.e.*  $\Gamma_i$ ,  $K_i$  et  $C_{ij}$ ) négatifs, ce qui correspond au cas des plaques minces. D'autres comportements sont cependant susceptibles d'être observés si l'on introduit une courbure au système physique, puisque les coefficients pourront alors prendre des valeurs positives [9, 15].

## V.2. Cascade de bifurcations par doublements de période

On s'intéresse désormais à l'évolution des branches de solution lorsque l'on augmente l'amplitude du forçage  $Q_3$ . La figure 6 montre les résultats d'une simulation obtenue avec des valeurs typiques, correspondants au cas de la figure 4, *i.e.* pour lesquelles une seule branche de solution stable existe.

On peut y observer plusieurs phénomènes importants. Tout d'abord, au fur et à mesure de l'augmentation de  $Q_3$ , l'amplitude des modes  $a_1$  et  $a_2$  décroît, ce qui montre que le transfert d'énergie est de moins en moins efficace. Ceci à tel point que pour  $Q_3 \geq 140$ , la branche de solutions couplées n'existe plus, il n'y a donc plus de transferts d'énergie possible.

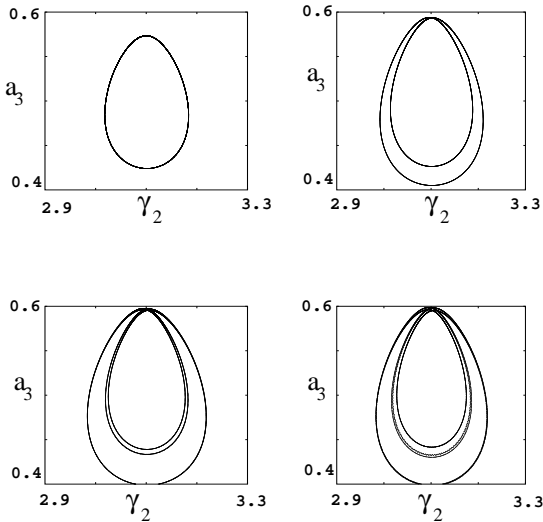


**Figure 6:** Evolution des branches de solutions avec le forçage. En bleu :  $a_1$ , en rouge :  $a_2$ , en vert :  $a_3$ . Trait continu : solution stable (foyer), tirets : solutions instables avec une paire de valeurs propres conjuguées à parties réelles positives, pointillés : solutions instables avec une valeur propre réelle positive.

En  $Q_3 = 77.3$ , la branche d'états stables perd sa stabilité par bifurcation de Hopf : une paire de valeurs propres complexes conjuguées voit en effet sa partie réelle devenir positive. Pour les valeurs supérieures de  $Q_3$ , on observe donc une cascade de bifurcations par doublements de période, retrouvant ainsi les résultats de [13]. Après la première bifurcation, un cycle limite stable apparaît dans l'espace des phases, puis ce cycle se double, et ainsi de suite, jusqu'à arriver au chaos. Les premières étapes de cette cascade sont représentées figure 7, en projec-

tion dans le plan  $(a_3, \gamma_2)$ .

Ceci entraîne des modulations de l'enveloppe d'amplitude pour chaque mode. Ces solutions ont cependant un bassin d'attraction extrêmement réduit, si bien qu'il est très difficile de les mettre en évidence numériquement. Ainsi la solution chaotique que l'on devrait obtenir à la fin de la cascade n'a pas pu être observée.



**Figure 7:** Premières étapes de la cascade de doublements de période, en projection dans le plan  $(a_3, \gamma_2)$ . De gauche à droite, on augmente progressivement  $Q_3$ .

## VI. CONCLUSION

Dans cette étude, on s'est intéressé aux couplages modaux pour une résonance interne d'ordre trois du type :  $\omega_1 + 2\omega_2 = \omega_3$ , pris comme cas particulier de couplages génériquement observés en vibrations non-linéaires. Il a été démontré que le transfert d'énergie ne peut se faire que vers les basses fréquences, *i.e.* uniquement si l'on excite le mode de fréquence propre la plus élevée, retrouvant ainsi des résultats déjà montrés dans [11]. De plus, il a été mis en évidence que les solutions couplées ne sont pas connectées à la solution 1 ddl. Ces deux types de solutions coexistent dans deux régions distinctes de l'espace des phases. Ainsi n'est-il pas possible de passer continûment d'une réponse unimodale à une solution couplée sans fortement perturber le système. Ceci montre que pour que le transfert d'énergie soit possible de manière continue, il faudrait par exemple rajouter

une relation de résonance 1:1 dans le système. Ceci peut se faire en prenant en compte, dans le cas des plaques circulaires, un mode asymétrique, présentant deux configurations préférentielles. Ceci est de plus conforme aux observations qui montrent qu'il y a toujours au moins un mode asymétrique présent dans un régime quasipériodique. Reliant ce fait aux vibrations de cymbales, cela permettrait aussi d'expliquer pourquoi les cymbales sont circulaires et non pas rectangulaires, puisque les résonances 1:1 sont plus rares pour des plaques rectangulaires, alors que dans le cas circulaire, à chaque mode asymétrique correspond deux configurations préférentielles résonantes. Des études complémentaires sont désormais menées avec des non-linéarités quadratiques, de manière à étendre ces résultats, et à se rapprocher des cas observés expérimentalement (combinaison de résonance d'ordre deux du type :  $f_i + f_j = F_{exc}$ ).

## REFERENCES

1. C. Touzé, *Analyse et modélisation de signaux vibratoires et acoustiques chaotiques. Application aux instruments de percussion non-linéaires*, Thèse de doctorat de l'université Paris VI (2000).
2. O. Thomas, *Analyse et modélisation de vibrations non-linéaires de milieux élastiques minces. Application aux instruments de percussion*, Thèse de doctorat de l'université Paris VI (2001).
3. K. Legge et N. H. Fletcher, *J. Acoust. Soc. Am.* **86**(6), 2439-2443 (1989).
4. A. Chaigne, C. Touzé et O. Thomas, *Proc. ISMA* (2001).
5. O. Thomas, C. Touzé et A. Chaigne, *J. of Sound and Vibration*, à paraître (2002).
6. C. Touzé, O. Thomas et A. Chaigne, *J. of Sound and Vibration*, à paraître (2002).
7. C. Touzé et A. Chaigne, *Acta Acustica* **86**(3), 557-567 (2000).
8. P. Manneville, *Dissipative structures and weak turbulence*, Academic Press (1991).
9. A. H. Nayfeh et D. T. Mook, *Nonlinear oscillations*, John Wiley (1979).
10. C. Touzé, soumis au *J. of Sound and Vibration* (2002).
11. S. Sridhar, A. H. Nayfeh et D. T. Mook, *J. of Sound and Vibration*, **41**(3), 359-373 (1975).
12. P. Lanchantin, *Vibrations non-linéaires de plaques circulaires minces*, rapport de stage de DEA ATIAM (2001).
13. J. Hadian et A. H. Nayfeh, *J. of Sound and Vibration*, **142**(2), 279-292 (1990).
14. J. Guckenheimer, M. R. Myers, F. J. Wicklin et P.A. Worfolk, Technical report (1995).
15. O. Thomas, C. Touzé et A. Chaigne, *Proc. ISMA* (2001).