Résolution d'une équation différentielle ordinaire

Problème avec correction proposé par Stéphan Tassart
IRCAM, 1 place Igor Stravinsky, 75004 PARIS

tassart@ircam.fr http://www-stud.enst.fr/~tassart/

Décembre 1996

Résumé

Les fonctions de substitution sont parmi les plus utiles pour manipuler des expressions par l'intermédiaire d'un outil de calcul formel. L'exemple suivant illustre une utilisation fréquente de la fonction `subs` de maple appliqué au cas de la détermination d'une solution d'une équation différentielle ordinaire.

1 Résolution d'une équation différentielle ordinaire

On cherche les solutions rationnelles à l'équation différentielle suivante (p étant entier naturel):

$$x^2 f''(x) + x f'(x) - p^2 f(x) = 0 \tag{1}$$

- Définir sous Maple l'expression Q par $x^2 f''(x) + x f'(x) - p^2 f(x)$ `[diff]`.
- Substituer l'expression $f(x) = x^k$ dans Q puis évaluer le résultat `[subs]`, `[eval]` et `[expand]`.
- Par combinaisons linéaires des solutions précédantes, déduire de la question précédante la forme générale des solutions rationelles de l'équation différentielle `[solve]`.
- Retrouver ce résultat avec la fonction `[dsolve]` de Maple.
- Les conditions aux limites de l'équation différentielle sont données par $f(R_0) = 1$ et $f'(R_0) = 0$. Évaluer la solution en fonction de R_0 à l'aide des fonctions `[subs]`, `[diff]` et `[solve]`. Retouver le même résultat avec la fonction `[dsolve]`.

2 Solutions

Nous définissons dans un premier temps l'expression Q comme suit:

```
> Q := x^2 * diff(f(x),x,x) + x*diff(f(x),x) - p^2*f(x);
```

La substitution de $f(x)$ par le monôme x^k se fait par:

```
> subs(f(x)=x^k,Q);
```

Il ne reste plus qu'à évaluer cette dernière expression et à trouver les valeurs de k qui l'annulent.

```
> expand(");
> solve(",k);
```

Ce qui nous donne $k = p$ ou $k = -p$. L'équation différentielle ordinaire étant du second ordre, elle admet au plus deux degrés de liberté. Les deux solutions x^p et $\frac{1}{x^p}$ sont indépendantes, donc elles forment une base pour l'ensemble des solutions. Donc la forme générale des solutions de l'équation différentielle est une combinaison linéaire des deux solutions indépendantes, i.e. $Ax^p + B/x^p$. On retrouve évidemment ce résultat avec l'instruction `dsolve(Q,f(x))`.

On pose:

```
> F : = A*x^p + B/x^p;
```

On introduit les conditions aux limites, puis on résoud le système en A et B, et enfin on réintroduit les solutions de A et B dans l'expression de F:

```
> solve({subs(x=R0,F)=1, subs(x=R0,diff(F,x))=0},{A,B});
> subs(",F);
```

ce qui aboutit au résultat final:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{R_0}\right)^p + \frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{x}\right)^p \tag{2}$$

On aurait abouti au même résultat en utilisant la syntaxe suivante:

```
> dsolve({Q,f(R0)=1,D(f)(R0)=0},f(x));
```