Électrotechnique

Problème avec correction, proposé par Stéphan Tassart
IRCAM, 1 place Igor Stravinsky, 75004 PARIS

tassart@ircam.fr http://www.ircam.fr/equipes/analyse-synthese/tassart

Février 1997

Résumé

Ce problème rassemble un ensemble de petits exercices de base d'électronique qui peuvent être traités très systématiquement sous Maple, sans faire apparaître aucune astuce de calculs. Les exercices sont indépendants les uns des autres, il est donc conseillé d'utiliser la commande `start` afin de réinitialiser le logiciel entre chaques exercices.

1 Problèmes

1.1 Pont de Wheastone

On considère le schéma électrique de la figure 1.

- Orienter le circuit électrique. On notera i_1 l'intensité du courant qui passe dans la résistance R_1, i_2 pour R_2 etc.
- Écrire la loi des nœuds aux point A, B, C et D.
- Écrire la loi des mailles pour les mailles composées des points ABC, puis BCD.
- Résoudre ce système d'équation pour obtenir i_a en fonction de i `[solve]`.
- Établir la condition sur R_1, R_2, R_3, R_4 pour que $i_a = 0$ (i.e. l'équilibre du pont).
- Calculer la résistance équivalente du système entre les points A et D.

1.2 Équivalence triangle-étoile

Ce théorème d'équivalence permet de passer systématiquement d'une configuration triangulaire à une configuration étoilée (voir figure 3) et réciproquement. Ce théorème est très utilisé pour simplifier les montages électroniques.

- On cherche à déterminer une équivalence entre les points A et B en annulant le courant de la branche C (voir figure 2). Écrire la condition sur R_A, R_B, R_C, r_A et r_B pour que les deux schémas de la figure 2 soient équivalents.

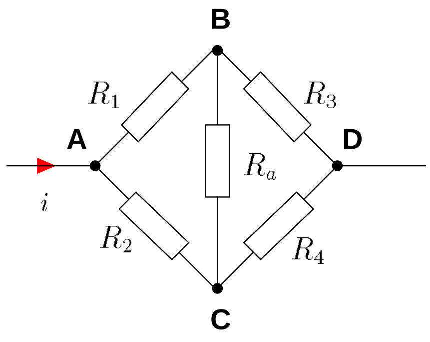

FIG. 1 – *Pont de Wheastone*

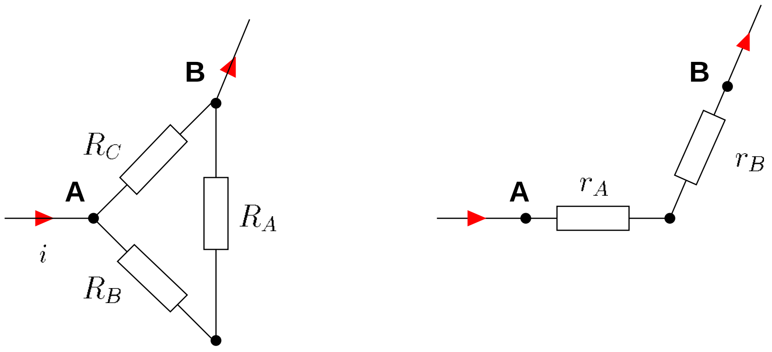

FIG. 2 – *Équivalence triangle-étoile entre les points A et B*

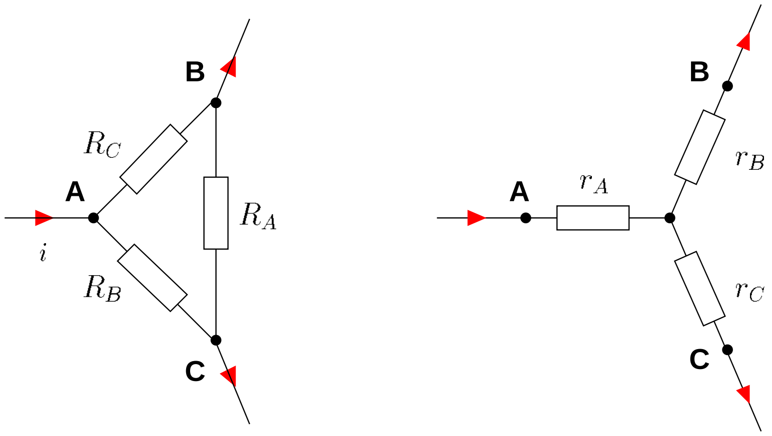

FIG. 3 – *Équivalence triangle-étoile complète*

- Par permutation circulaire, on annule successivement les courants des deux autres branches. Écrire les deux autres conditions sur R_A, R_B, R_C, r_A, r_B et r_C pour que les deux schémas de la figure 3 soient équivalents.
- Avec la fonction `solve` de Maple, résoudre ce système de 3 équation à 3 inconnues afin d'exprimer:
  - r_A, r_B, r_C en fonction de R_A, R_B, R_C,
  - R_A, R_B, R_C en fonction de r_A, r_B, r_C.

1.3 Générateurs de tension répartis

On considère le schéma de la figure 4.

- Écrire la loi des nœuds aux points A, B, C et D.
- Écrire la loi des mailles pour les mailles composées des points ABC, ABD et ACD.
- Calculer (en utilisant la fonction `solve`) l'intensité i en fonction de R, R' et e.

1.4 Générateur de courant commandé

On considère le schéma de la figure 5, où l'intensité du courant débité par le générateur est proportionnel à celui qui passe dans la résistance R_2.

- Écrire la loi des nœuds aux points A.
- Écrire deux lois des mailles différentes.
- Calculer (en utilisant la fonction `solve`) l'intensité i en fonction de R, R_1, R_2, e et β .

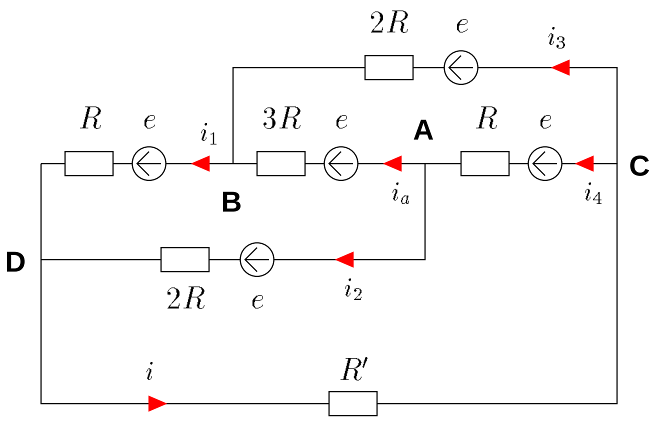

Fig. 4 – *Générateurs de tension répartis*

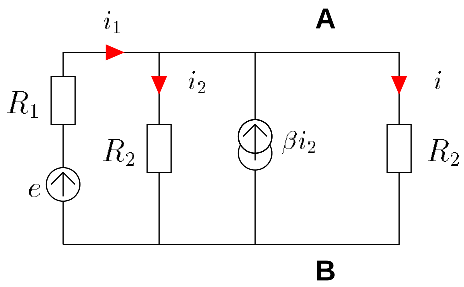

Fig. 5 – *Générateur de courant commandé*

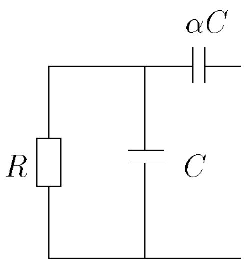

Fig. 6 – *Schéma électrique*

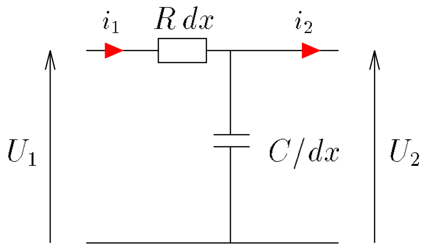

FIG. 7 – *Élement du modèle de pertes de charge équirépartie*

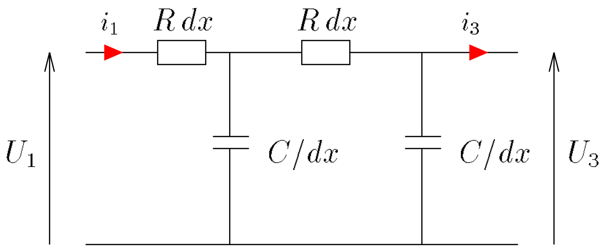

FIG. 8 – *Modèle de pertes de charge équirépartie*

1.5 Diagramme de Bode

On considère le schéma de la figure 5 en régime sinusoïdal forcé (de pulsation ω). On note les impédances complexes $Z_1 = R$ et $Z_2 = \frac{1}{jC\omega}$.

- Calculer l'impédance complexe équivalente $Z(j\omega)$ du schéma.
- Tracer le diagramme de Bode ($|Z(j\omega)|$) pour $\omega \in [10, 10^6]$ (en prenant C=10^{-7}F et R=300Ω, et finalement $\alpha \in 1, 10, 100, 1000$).
- Ce filtre est-il passe-bas, passe-haut ou passe-bande?
- Évaluer graphiquement (i.e. approximativement) la (les) pulsation de coupure, et si elle est définie, la bande passante.

1.6 Perte de charge équirépartie

On considère le schéma de la figure 7 en régime sinusoïdal forcé (de pulsation ω). On utilisera la notation des impédances complexes.

- Calculer (U_2, i_2) en fonction de (U_1, i_1). Exprimer le résuktat sous forme matricielle.
- À partir du résutat de la question précédante, calculer (U_3, i_3) en fonction de (U_1, i_1) (voir figure 8). En déduire un relation matricielle qui permet de calculer (U_n, i_n) à partir de (U_1, i_1).
- Dans le cas où $dx = 10^{-2}$, $\omega = 2\pi \cdot 50$rad.s^{-1}, R= 10Ω et C=10^{-7}F, calculer (U_{100}, i_{100}) en fonction de (U_{100}, i_{100}).

2 Solution

2.1 Pont de Wheastone

Les lois des nœuds et des mailles s'écrivent successivement comme suit. Pour obtenir i_a en fonction de i, il suffit de résoudre le sytème de 6 équations:

```
> eq1 := {i=i1+i2, i1=ia+i3, i2+ia=i4, i3+i4=i};
> eq2 := {i1*R1+ia*Ra = i2*R2, ia*Ra+i4*R4=i3*R3};
> solve(eq1 union eq2, {i1,i2,i3,i4,ia}): subs(",ia);
```

$$i_a = i\frac{R_2R_3 - R_1R_4}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)+R_a(R_1+R_2+R_3+R_4)} \tag{1}$$

Le pont est équilibré si $i_a = 0$, ce qui n'arrive que si et seulement si $R_2R_3 = R_1R_4$. La résistance équivalente s'obtient en faisant le rapport suivant:

```
> simplify((R1*i1 + R3*i3) / i);
```

Ce qui donne après quelques simplifications manuelles:

$$\frac{(R_2+R_4)(R_1+R_3)+R_aR_1R_2R_3R_4(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4})}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)+R_a(R_1+R_2+R_3+R_4)} \tag{2}$$

2.2 Équivalence triangle-étoile

La résistance équivalente du second schéma est $r_A + r_B$ alors que la résistance équivalente du premier schéma est $R_C \parallel (R_B + R_A)$. Ce qui implique la relation suivante:

```
> eq1 := 1/(rA + rB) = 1/RC + 1/(RB+RA);
```

Par permutation circulaire, on obtient les deux relations suivantes:

```
> eq2 := 1/(rB + rC) = 1/RA + 1/(RC+RB);
> eq3 := 1/(rC + rA) = 1/RB + 1/(RA+RC);
```

Pour obtenir r_A, r_B, r_C en fonction de R_A, R_B, R_C, il suffit de faire:

```
> solve({eq1,eq2,eq3},{rA,rB,rC});
```

Réciproquement, pour obtenir R_A, R_B, R_C en fonction de r_A, r_B, r_C, il suffit de faire:

```
> solve({eq1,eq2,eq3},{RA,RB,RC});
```

$$\left\{\begin{array}{l} r_C = \dfrac{R_AR_B}{R_A+R_B+R_C} \\ r_A = \dfrac{R_BR_C}{R_A+R_B+R_C} \\ r_B = \dfrac{R_CR_A}{R_A+R_B+R_C} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} R_C = r_ar_b\left(\dfrac{1}{r_A}+\dfrac{1}{r_B}+\dfrac{1}{r_C}\right) \\ R_A = r_br_c\left(\dfrac{1}{r_A}+\dfrac{1}{r_B}+\dfrac{1}{r_C}\right) \\ R_B = r_cr_a\left(\dfrac{1}{r_A}+\dfrac{1}{r_B}+\dfrac{1}{r_C}\right) \end{array}\right. \tag{3}$$

2.3 Générateur de tension réparti

Les lois des nœuds et des mailles s'écrivent successivement comme suit:

```
> eq1 := {i4 = ia + i2, i1 = i3 + ia, i = i3 + i4, i1 + i2 = i};
> eq2 := {-e + R*i4 - e + 3*R*ia = -e +2*R*i3,
          -e + 3*R*ia - e + i1*R = -e + 2*R*i2,
          -e + R*i4 - e + 2*R*i2 + i*Rp = 0};
```

Maintenant, on obtient directement l'intensité du courant passant dans la résistance R':

```
> solve(eq1 union eq2, {i1, i2, i3, i4, ia, i});
> subs(",i);
```

$$i = \frac{19}{13R+9R'}e \tag{4}$$

2.4 Générateur de courant commandé

Les lois des nœuds et des mailles s'écrivent successivement comme suit:

```
> eq1 := {i1 + beta * i2 = i2 + i};
> eq2 := {-e + R1*i1 + i2*R2=0, i2*R2 = i*R};
```

Pour obtenir l'intensité i, il suffit de résoudre le système:

```
> solve(eq1 union eq2 , {i1,i2,i});
> subs(",i);
```

$$i = e\frac{R_2}{RR_1(1-\beta)+R_2(R+R_1)} \tag{5}$$

2.5 Diagramme de Bode

L'impédance complexe équivalente est $(R \parallel \frac{1}{jC\omega}) + \frac{1}{\alpha}\frac{1}{jC\omega}$, c'est-à-dire:

```
> Z := 1/(1/R + I*C*omega) + 1/(alpha *I*C*omega);
```

L'application numérique s'obtient en posant:

```
> AN:={R=30,C=1E-7,omega=10^x}; Zan := subs(AN,Z);
```

Il ne reste plus qu'à tracer $20\log_{10}|Z(j\omega)|$ pour $\omega \in [10^2, 10^6]$:

```
> Zp := 20.0*log(abs(Zan))/log(10.0);
> plot(subs(alpha=10,Zp), x=2..6);
```

Au vu du diagramme de Bode, ce filtre est un passe-haut (si $\alpha > 100$), dont la fréquence de coupure est aux alentours de $\omega = 10^5$.

2.6 Perte de charge équirépartie

Les équations du système sont:

```
> eq := {i1 * R*dx + U2 = U1, i1 = i2 + U2*I*C/dx*omega};
```

Pour obtenir (U_2, i_2) en fonction de (U_1, i_1), il suffit encore une fois de résoudre le système par rapport aux bonnes variables:

```
> solve(eq, {i2,U2});
```

Ce qui donne matriciellement

$$\begin{pmatrix} U_2 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -R\,dx \\ -\frac{j\omega C}{dx} & 1+jRC\omega \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ i_1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Autrement dit, $(U_2, i_2)^t = M(U_1, i_1)^t$ avec:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -R\,dx \\ -\frac{j\omega C}{dx} & 1+jRC\omega \end{bmatrix} \tag{7}$$

Pour obtenir (U_3, i_3), il suffit d'écrire:

$$\begin{pmatrix} U_3 \\ i_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} U_2 \\ i_2 \end{pmatrix} = M^2 \begin{pmatrix} U_1 \\ i_1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

La relation générale est donc $(U_k, i_k)^t = M^k(U_1, i_1)^t$. L'application numérique se fait donc immédiatement:

```
> AN := {R=10, C=10^(-7), omega=100*Pi, dx=10^(-2)};
> Man := evalm(subs(AN,M));
> evalm(Man^100);
```

$$\begin{pmatrix} U_{100} \\ i_{100} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5993455957+1.513416745j & -9.180618914-5.174106082j \\ 0.1625493367-0.2884176497j & 0.5830906620+1.542258509j \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ i_1 \end{pmatrix} \tag{9}$$