Décomposition en Série de Fourier

Problème avec correction proposé par Stéphan Tassart
IRCAM, 1 place Igor Stravinsky, 75004 PARIS

tassart@ircam.fr http://www-stud.enst.fr/~tassart/

Janvier 1997

Résumé

La décomposition des fonctions périodiques en série de Fourier est à la base d'un grand nombre d'applications en sciences de l'ingénieur. Il est important en conséquence de bien en saisir les tenants et aboutissants.

Pour toutes les applications numériques et graphiques, on prendra $T = 1$.

1 Questions

1.1 Exemple

On considère la suite de fonctions suivante:

$$h_N = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2k+1} \sin \frac{2\,(2k+1)\,\pi}{T} t \tag{1}$$

- Tracer le graphe de h_N pour $N = 4$, $N = 6$, $N = 10$, puis $N = 16$ sur l'intervalle $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ `[plot]`.
- Vers quelle fonction, pensez vous, tend la suite de fonction h_N.
- Superposer le graphe de la fonction limite h et h_{10}.

1.2 Définitions

La décomposition en série de Fourier correspond mathématiquement à la projection orthogonale d'une fonction complexe périodique de période T sur le sous-espace vectoriel généré par la famille des fonctions périodiques $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. La définition du produit scalaire est la suivante:

$$< f \mid g >= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) g^*(t)\, dt \tag{2}$$

La famille des $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est définie par:

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \varphi_k = t \longmapsto e^{i\frac{2k\pi}{T}t} \tag{3}$$

- Montrer que si $k_1 \neq k_2$ alors $< \varphi_{k_1} \mid \varphi_{k_2} >= 0$ `[int]`.
- Calculer $< \varphi_k \mid \varphi_k >$ `[int]`.

Les relations précédantes montrent que la famille $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une famille de orthogonale, et par conséquent forme une base orthogonale du sous-espace vectoriel engendré par $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. Donc la décomposition en série de Fourier de toute fonction périodique de période T, est décrite par l'ensemble des relations suivantes:

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ c_k = \frac{< f \mid \varphi_k >}{< \varphi_k \mid \varphi_k >} \tag{4}$$

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \varphi_k \tag{5}$$

$$f_N = \sum_{k=-N}^{N} c_k \varphi_k \tag{6}$$

- Écrire les c_k sous forme d'une intégrale.

L'utilisation courante des décompositions en série de Fourier concerne les fonctions à valeurs réelles. On obtient la version réelle des décompositions en série de Fourier en prenant la partie réelle de la version complexe, ce qui donne:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \begin{array}{rclcl} a_k & = & \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\frac{2k\pi}{T}t\, dt & = & c_k + c_{-k} \\ b_k & = & \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\frac{2k\pi}{T}t\, dt & = & i(c_k - c_{-k}) \end{array} \tag{7}$$

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k>0}\left(a_k\cos\frac{2k\pi}{T}t + b_k\sin\frac{2k\pi}{T}t\right) \tag{8}$$

$$f_N = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}\left(a_k\cos\frac{2k\pi}{T}t + b_k\sin\frac{2k\pi}{T}t\right) \tag{9}$$

1.3 Décomposition de la fonction triangle

On définit la fonction triangle g comme suit (pour toutes les applications graphiques et numériques, on prendra T=1):

$$\forall t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right[,\ g(t) = t \tag{10}$$

- Dessiner g sur l'intervalle $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right[$ `[plot]`.
- On note a_k et b_k les coefficients de Fourier de g. Montrer que les coefficients a_k sont nuls,
- calculer les coefficients b_k quand k est pair `[int]`,
- calculer les coefficients b_k quand k est impair `[int]`,
- écrire explicitement les sommes partielles g_N,
- superposer sur le graphe g et g_8 `[plot]`.

1.4 Fonction carrée

On définit la fonction carrée h comme suit (pour toutes les applications graphiques et numériques, on prendra T=1):

$$\forall t \in \left[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\right[,\ h(t) = \mathrm{sgn}(t) \tag{11}$$

- Dessiner h sur l'intervalle $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right[$ `[plot]`.
- On note a_k et b_k les coefficients de Fourier de h. Montrer que les coefficients a_k sont nuls,
- calculer les coefficients b_k `[int]`,
- écrire explicitement les sommes partielles h_N,
- superposer sur le graphe h et h_{10} `[plot]`.

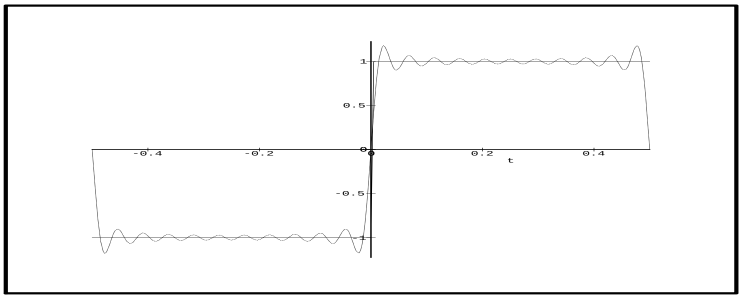

FIG. 1 – *Décomposition en série de Fourier d'une fonction carrée*

2 Solution

2.1 Exemple

On définit dans un premier temps l'expression proposée:

```
> hh:=4/Pi*Sum( 1/(2*k+1)*sin(2*Pi*(2*k+1)/T*t),k=0..N);
```

Pour dessiner cette expression, par exemple, à l'ordre 6, il suffit de substituer N à 6 et T à 1:

```
> plot(subs(T=1,N=6,hh)},t=-1/2..1/2);
```

On a l'impression qu'en augmentant l'ordre du développement, les fonctions tendent vers la fonction carrée qui correspond à la périodisation de la fonction qui vaut -1 pour $t \in \left[-\frac{T}{2}, 0\right[$ et 1 pour $t \in \left]0, \frac{T}{2}\right]$. On superpose la courbe limite avec la somme partielle de la façon suivante:

```
> plot({'x->if x>0 then 1 else -1 fi'(t),
        subs(T=1,N=10,hh)},t=-1/2..1/2);
```

2.2 Définitions

Le produit scalaire a famille est clairement orthogonale, en effet le produit scalaire $< \varphi_{k_1} | \varphi_{k_2} >$ correspond au calcul de l'intégrale $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i\frac{2k_1\pi}{T}t} e^{-i\frac{2k_2\pi}{T}t}\, dt$. Afin d'éviter de retaper constamment les mêmes expressions nous définissons **phi**, **cosphi** et **sinphi** par les expressions suivantes:

```
> phi := exp(I*t*k*2*Pi/T);
> cosphi := cos(t*k*2*Pi/T);
> sinphi := sin(t*k*2*Pi/T);
```

Maintenant, le calcul de l'intégrale se fait très simplement:

```
> int ( subs(k=k1,phi) * subs(k=-k2,phi)
        t=-T/2..T/2):
> simplify(");
```

$$\frac{T \sin \pi(k_1 - k_2)}{\pi(k_1 - k_2)} \tag{12}$$

Ce qui prouve bien que le produit scalaire est nul si $k_1 \neq k_2$ et que si $k_1 = k_2 = k$ alors le produit scalaire vaut T.

Les coefficients $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ s'écrivent explicitement de la façon suivante:

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ c_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\frac{2k\pi}{T}t}\, dt \tag{13}$$

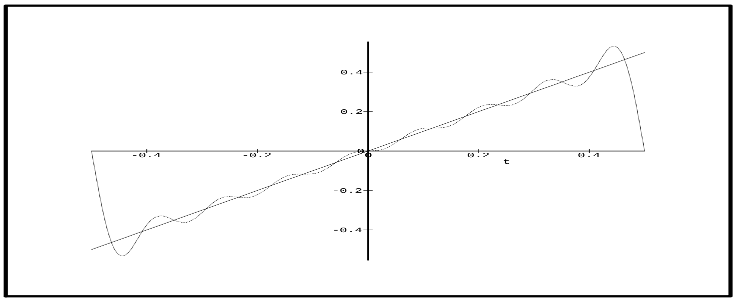

FIG. 2 – *Décomposition en série de Fourier d'une fonction triangle*

2.3 Fonction triangle

Le tracé de la fonction triangle s'obtient en utilisant la fonction [plot]:

```
> plot(t,t=-1/2..1/2);
```

Pour obtenir les coefficients de Fourier de la fonction triangle, il suffit d'expliciter les intégrales suivantes:

```
> a:=int( t * cosphi, t=-T/2..T/2) *2/T;
> b:=int( t * sinphi, t=-T/2..T/2) *2/T;
```

La première intégrale est nulle, donc les coefficients a_k sont bien tous nuls. La seconde donne: $-\frac{T}{k^2\pi^2}\left(-\sin k\pi + k\pi\,\cos k\pi\right)$. Comme k est entier, $\sin(k\pi) = 0$ et $\cos(k\pi) = (-1)^k$.

```
> simplify(subs(sin=0,cos(k*Pi)=(-1)^k,b));
```

$$-\frac{T\,(-1)^k}{k\pi} \tag{14}$$

Ce qui nous permet d'écrire la décomposition suivante:

$$\tilde{g}_N = -\frac{T}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k}{k}\sin\frac{2k\pi}{T}t \tag{15}$$

La superposition des deux courbes s'obtient alors de la façon suivante:

```
> gg:=-T/Pi*Sum( (-1)^k/k*sin(2*Pi*k/T*t),k=1..N);
> plot({t,subs(T=1,N=8,gg)},t=-1/2..1/2);
```

2.4 Fonction carrée

La même procédure permet d'obtenir les résultats suivants:

```
> a := (int (-1*cosphi, t=-T/2..0) + int (1*cosphi, t=0..T/2))*2/T;
> b := (int (-1*sinphi, t=-T/2..0) + int (1*sinphi, t=0..T/2))*2/T;
> simplify(subs(sin=0,cos(k*Pi)=(-1)^k,b));
```

On constate donc que les coefficients a_k sont tous nuls, et que les coefficients b_k valent $-\frac{-2+2\,(-1)^k}{k\pi}$. Si k est pair, alors $(-1)^k$ vaut 1 et b est nul. Si k est impair, alors $(-1)^k$ vaut -1 et b vaut $\frac{4}{k\,\pi}$. Donc la fonction carrée se décompose en série de Fourier celon:

$$h_N = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor}\frac{1}{2k+1}\sin\frac{2\,(2k+1)\,\pi}{T}t \tag{16}$$

Pour obtenir le tracé des sommes partielles successives superposées à la fonction carrée:

```
> hh:=4/Pi*Sum( 1/(2*k+1)*sin(2*Pi*(2*k+1)/T*t),k=0..N);
> plot({'x->if x>0 then 1 else -1 fi'(t),
       subs(T=1,N=10,hh)},t=-1/2..1/2);
```