Étude des Points de Lagrange

Problème avec correction proposé par Stéphan Tassart
IRCAM, 1 place Igor Stravinsky, 75004 PARIS

tassart@ircam.fr http://www-stud.enst.fr/~tassart/

Mai 1996

Résumé

Après que Newton ait résolu le problème du calcul de l'orbite d'une seule planète autour du soleil (ce qui donne une orbite soit elliptique, soit hyperbolique, soit parabolique à la limite), il était naturel de s'attaquer au problème de deux planètes tournant simultanément autour du soleil. Les meilleurs esprits du siècle dernier en mathématique et en physique se sont attelés à cette tâche, autrement connu sous le nom de problème des trois corps.

La première étape consistait à trouver une solution analytique exacte, de la même façon que dans le problème à deux corps on aboutit à des solutions quadratiques pour le mouvement. Il s'est rapidement avéré que le point crucial consistait à déterminer un nombre suffisant de quantités qui se conservaient dans le système, comme par exemple l'énergie, le moment angulaire... Après un certain temps, il a été prouvé que le problème des trois corps ne possédaient pas suffisamment de quantités dites conservatrices pour pouvoir être intégrable. Autrement dit, il était illusoire de vouloir résoudre le problème dans toute sa généralité.

Le problème que nous allons étudier est une simplification du problème original. Nous considérons deux objets relativement massifs, de masses respectives m_1 et m_2, en orbite quasi-circulaire autour de leur centre de gravité commun. On rajoute un troisième corps de masse négligeable par rapport aux deux autres, orbitant celon la même période que les précédants. Nous allons montrer que sous ces hypothèses, il existe 5 positions où les forces gravitationnelles exercées par les deux astres sur le petit contre-balancent exactement la force centrifuge qui s'exercent sur le petit corps. Ces positions s'appellent en Mécanique Céleste les points de Lagrange. Un objet placé en l'un de ces 5 points resterait en place indéfiniment par rapport aux deux astres. L'objet du problème est d'étudier ces points de Lagrange.

1 Problème

1.1 Position du problème

On considère donc deux corps de masse respective m_1 et m_2 en orbite circulaire autour de leur centre de gravité commun O, de période de révolution T. Nous rappelons la troisième loi de Kepler [1], qui permet d'exprimer la période T en fonction des paramètres du système, G dénotant la constante de gravitation universelle:

$$(l_1 + l_2)^3 = G(m_1 + m_2)\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \tag{1}$$

Nous considérons le référenciel tournant autour de O pour lequel les deux corps apparaissent fixes, de coordonnées respectives: $(-l_1, 0)$ et $(l_2, 0)$. O étant le centre de gravité du système, on a:

$$l_1 m_1 = l_2 m_2 \tag{2}$$

Nous noterons à l'occasion $m_1 = kl_2$ et $m_2 = kl_1$ où k est une grandeur caractéristique du système.

Un petit corps m est plongé dans le champ gravitationnel du système décrit précédemment. Nous restreignons le problème à 2 dimensions, sur le plan de rotation du système. Le corps m est alors repéré par ses coordonnées (x, y) dans le repère tournant, et par les vecteurs $\vec{r}$, $\vec{r_1}$ et $\vec{r_2}$ comme décrit sur la figure suivante.

1. La troisième loi de Kepler s'applique de façon plus générale aux orbites elliptiques, où les longueurs considérées représentent les demi-grands axes des ellipses. Ceci dit, dans le cas présent, nous sommes en approximation quasi-circulaire, et les demi-grands axes se réduisent à des rayons.

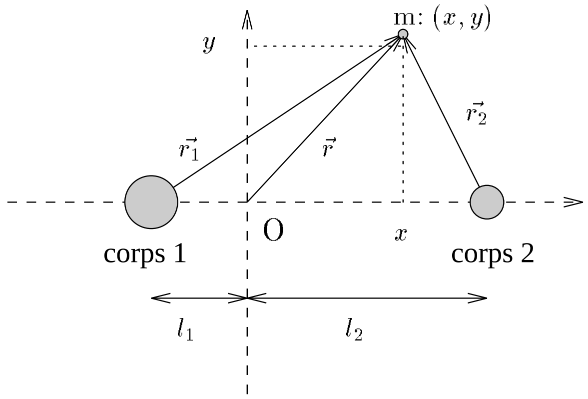

FIG. 1 – *Repérage dans le problème à trois corps simplifié*

1.2 Calcul de l'énergie du système

Énergie potentielle de rotation : On constate que si m est fixe dans un référentiel galiléen lié à O, alors m décrit un mouvement circulaire rétrograde dans le repère tournant. Comme l'énergie mécanique totale du système ne dépend pas du référentiel choisi, l'énergie cinétique dans le référentiel galiléen compense exactement l'énergie potentielle de rotation dans le repère tournant.

Évaluer l'énergie potentielle de rotation emmagasinée par le corps m en fonction de G, l_1, l_2, m_1, m_2 et m et de sa position.

Énergie potentielle gravitationnelle: Donner l'expression du potentiel gravitationnel dû à la présence des corps 1 et 2, en fonction de G, $\vec{r_1}$, $\vec{r_2}$, m_1, m_2 et m.

Énergie potentielle totale: Vérifier que l'énergie potentielle du système peut se mettre sous la forme:

$$U = -\frac{m}{2}\left(\frac{2\pi|\vec{r}|}{T}\right)^2 - G\frac{mm_1}{|\vec{r_1}|} - G\frac{mm_2}{|\vec{r_2}|} \tag{3}$$

Exprimer le rapport $\frac{U}{Gmk}$ en fonction uniquement de x, y, l_1 et l_2.

Application graphique: prendre $m_1 = 4$, $m_2 = 1$, et tracer la surface représentant l'énergie potentielle du système. Il sera sans doute nécessaire de visualiser $\log(\frac{|U|}{Gmk})$ plutôt que U.

Les équilibres du système correspondent à des points pour lesquels les dérivées partielles de l'énergie potentielle s'annullent simultanément (cela correspond aux extréma locaux de la surface), c'est-à-dire:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \tag{4}$$

À partir du dessin de cette surface, déduire les positions qualitatives des 5 points de Lagrange qui annullent simultanément les deux dérivées de U.

Position L_4 et L_5: Prouver par le calcul (à la main) que les seuls points de Lagrange qui ne sont pas alignés avec les deux corps forment un triangle équilatéral. Ces points sont connus sous le nom de L_4 et L_5.

1.3 Dynamique du système autour des points L_4 et L_5

On admet que le mouvement dans le référenciel tournant est régi par le système d'équations différentielles ordinaires suivantes:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{m}\dfrac{\partial U}{\partial x} &= \ddot{x} - 2\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 \dot{y} \\[2ex] -\dfrac{1}{m}\dfrac{\partial U}{\partial y} &= \ddot{y} + 2\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 \dot{x} \end{cases} \tag{5}$$

On choisit un système d'unité dans lequel on peut réécrire (avec $0 < \mu < \frac{1}{2}$):

$$G = 1, \qquad k = 1, \qquad m_1 = 1 - \mu, \qquad m_2 = \mu \tag{6}$$

Les points L_4 et L_5:

- Écrire dans ce système d'unité la nouvelle expression de U, ainsi que le nouveau système d'équations différentiel qui régit le mouvement du système.
- Donner, dans le nouveau système d'unité, les coordonnées $(L_{4/x}, L_{4/y})$ du point L_4 (resp. L_5).
- Évaluer, toujours dans ce système d'unité, les valeurs de $\frac{1}{m}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $\frac{1}{m}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ et $\frac{1}{m}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ aux points L_4 et L_5.

Linéarisation du système: On effectue un changement de repère, utilisant les coordonnées (X, Y), de telle façon que le centre du nouveau repère se trouve en L_4 ou L_5 en posant:

$$L_4 : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & X - L_{4/x} \\ y & = & Y - L_{4/y} \end{array} \right. \qquad \text{(resp. } L_5\text{)} \tag{7}$$

On admet que le mouvement du *système linéarisé* autour du point d'équilibre L_4 (resp. L_5) vérifie le système linéaire d'équations différencielles:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\dfrac{1}{m}\left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial X^2}_{(L_4)} X + \dfrac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y}_{(L_4)} Y\right) & = & \ddot{X} - 2\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 \dot{Y} \\ -\dfrac{1}{m}\left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y}_{(L_4)} X + \dfrac{\partial^2 U}{\partial Y^2}_{(L_4)} Y\right) & = & \ddot{Y} + 2\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 \dot{X} \end{array} \right. \qquad \text{(resp. } L_5\text{)} \tag{8}$$

- Exprimer les équations du mouvement du système linéarisé dans le nouveau système d'unité en fonction de X, Y, et de μ.

Stabilité du système linéarisé: La stabilité du système linéaire est assurée si la partie réelle des valeurs propres de la matrice $A(L_4)$, définie comme suit, sont toutes simultanément négatives ou nulles.

$$A(L_4) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -\frac{1}{m}\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}_{(L_4)} & -\frac{1}{m}\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y}_{(L_4)} \\ -2 & 0 & -\frac{1}{m}\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y}_{(L_4)} & -\frac{1}{m}\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}_{(L_4)} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(resp. } L_5\text{)} \tag{9}$$

- Calculer les valeurs propres de $A(L_4)$ et de $A(L_5)$,
- Trouver l'intervalle de valeur pour μ qui assure la stabilité du système linéarisé.

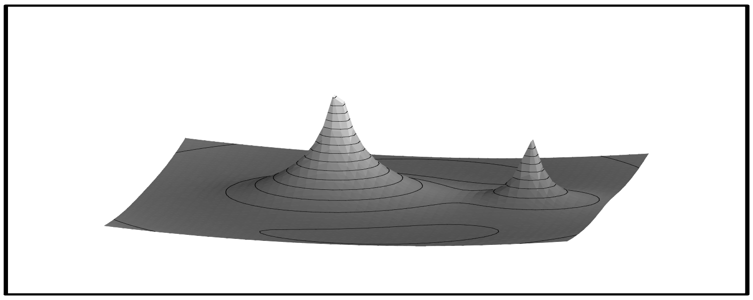

FIG. 2 – *Potentiel gravitationnel du problème à trois corps simplifié*

2 Solution

2.1 Calcul de l'énergie du système

L'énergie cinétique du système vaut:

```
> Ec := 1/2 * m* v^2;
> v := 2*Pi*sqrt(x^2+y^2)/T;
> [solve( (T/2/Pi)^2 * G * (m1 + m2) = (l1 + l2)^3, T)];
> T := simplify(op(1,"));
> eval(Ec);
```

$$\frac{m\,(m1 + m2)\,G}{2\,(l1 + l2)^3}(x^2 + y^2) \tag{10}$$

Le potentiel gravitationnel vaut:

```
> V := - G*m1*m/r1 -G*m2*m/r2;
> r1:=sqrt((x+l1)^2+y^2);
> r2:=sqrt((x-l2)^2+y^2);
```

L'énergie potentielle du système vaut:

```
> U := - Ec + V;
> pre_AN:={m1=k*l2,m2=k*l1};
> expand(subs(pre_AN,U)/G/m/k);
```

Les applications numériques s'obtiennent de la façon suivante:

```
> AN:={l2=m1,l1=m2,m1=4,m2=1,G=1};
> UN_m:=expand(subs(AN,subs(AN,U/m)));
> plot3d(log(abs(UN_m)),x=-6..6,y=-6..6,grid=[20,20]);
> # Representation de la norme du gradient de potentiel
> grad_UN:=diff(UN_m,x)^2+diff(UN_m,y)^2;
> plot3d(log(grad_UN),x=-6..6,y=-6..6,grid=[20,20]);
```

Position de L_4 et L_5: Il est acquis que l'énergie potentielle U vaut:

$$\frac{U}{m} = -\frac{G}{2}\frac{m_1 + m_2}{(l_1 + l_2)^3}|\vec{r}|^2 - G\left(\frac{m_1}{\sqrt{(x + l_1)^2 + y^2}} + \frac{m_2}{\sqrt{(x - l_2)^2 + y^2}}\right) \tag{11}$$

Les dérivées partielles valent:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial x} & = & -G\frac{m_1 + m_2}{(l_1 + l_2)^3}x + G\frac{m_1(x + l_1)}{|\vec{r_1}|^3} + G\frac{m_2(x - l_2)}{|\vec{r_2}|^3} \\ \frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial y} & = & -G\frac{m_1 + m_2}{(l_1 + l_2)^3}y + G\frac{m_1}{|\vec{r_1}|^3}y + G\frac{m_2}{|\vec{r_2}|^3}y \end{array}\right. \tag{12}$$

L'annulation des deux dérivées partielles impose (après simplification par G):

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{m_1 + m_2}{(l_1 + l_2)^3} & = & \dfrac{m_1 l_1}{|\vec{r_1}|^3} + \dfrac{m_2 l_2}{|\vec{r_2}|^3} \\ \\ \dfrac{m_1 l_1}{|\vec{r_1}|^3} & = & \dfrac{m_2 l_2}{|\vec{r_2}|^3} \end{array} \right. \tag{13}$$

De la seconde équation, comme $m_1 l_1 = m_2 l_2$, on tire $r_1 = r_2$. La première équation permet alors de conclure $r_1 = r_2 = l_1 + l_2$ ce qui clot la démonstration.

2.2 Dynamique du système

On définit un nouvelle ensemble de valeur:

```
> OAN  :=  {l2=m1,l1=m2,m1=1-mu,m2=mu,G=1,m=1};
```

Dans ce système d'unité, nous avons:

```
> subs(OAN,subs(OAN,(2*Pi/T)^2));
    1

> V := subs(OAN,subs(OAN,U));
```

$$V := -\frac{(x^2 + y^2)}{2} - \frac{(1-\mu)}{\sqrt{x^2 + 2\,x\mu + \mu^2 + y^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{x^2 - 2\,x\,(1-\mu) + (1-\mu)^2 + y^2}} \tag{14}$$

Donc le nouveau système d'équations différentielles qui régit le système est le suivant (avec V défini par l'expression précédante):

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\dfrac{\partial V}{\partial x} & = & \ddot{x} - 2\dot{y} \\ \\ -\dfrac{\partial V}{\partial y} & = & \ddot{y} + 2\dot{x} \end{array} \right. \tag{15}$$

Les coordonnées des points d'équilibre sont les suivantes:

```
> coors[L4] :={x=-mu + cos(Pi/3),  y=sin(Pi/3)};
> coors[L5] :={x=-mu + cos(-Pi/3), y=sin(-Pi/3)};
```

L'évaluation des dérivées secondes de U en L_4 et L_5 se fait alors très rapidement:

```
> Vxx     := diff(V,x,x);
> Vyy     := diff(V,y,y);
> Vxy     := diff(V,x,y);
> simplify(subs(coors[L4],Vxx));
  simplify(subs(coors[L5],Vxx));
       -3/4     -3/4

> simplify(subs(coors[L4],Vyy));
  simplify(subs(coors[L5],Vyy));
       -9/4     -9/4

> simplify(subs(coors[L4],Vxy));
  simplify(subs(coors[L5],Vxy));
       3/4 * sqrt(3) * (2*mu - 1)
      -3/4 * sqrt(3) * (2*mu - 1)
```

On peut d'ailleurs vérifier au passage que les premières dérivées partielles de U s'annullent:

```
> Vx      := diff(V,x);
> Vy      := diff(V,y);
> simplify(subs(coors[L4],Vx));simplify(subs(coors[L4],Vy));
```

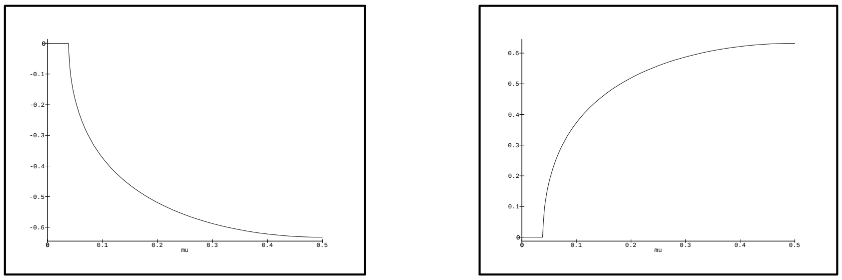

FIG. 3 – *Partie réel des valeurs propres du système en fonction de μ*

```
        0, 0
```

```
> simplify(subs(coors[L5],Vx));simplify(subs(coors[L5],Vy));
        0, 0
```

Il ne reste plus qu'à définir les matrice `A[L4]` et `A[L5]`, puis de calculer les valeurs propres des deux matrices:

```
> A[L4] := [[0,2,-simplify(subs(coors[L4],Vxx)),
  -simplify(subs(coors[L4],Vxy))],
  [-2,0,-simplify(subs(coors[L4],Vxy)),
  -simplify(subs(coors[L4],Vyy))],
  [1,0,0,0],[0,1,0,0]];

> A[L5] := [[0,2,-simplify(subs(coors[L5],Vxx)),
  -simplify(subs(coors[L5],Vxy))],
  [-2,0,-simplify(subs(coors[L5],Vxy)),
  -simplify(subs(coors[L5],Vyy))],
  [1,0,0,0],[0,1,0,0]];

> with(linalg):
> Vals[L4]:=[eigenvals(A[L4])]; Vals[L5]:=[eigenvals(A[L5])];
```

On constate que l'ensemble des valeurs propres des deux matrices sont identiques. En conséquence nous n'étudierons que les variations de `Vals[L4]`. Traçons la courbe représentative de la partie réelle des 4 valeurs propres:

```
> Val1:=Re(op(1,Vals[L4]));Val2:=Re(op(2,Vals[L4]));
> Val3:=Re(op(3,Vals[L4]));Val4:=Re(op(4,Vals[L4]));
> plot(Val1,mu=0..0.5,color=red);plot(Val2,mu=0..0.5,color=red);
> plot(Val3,mu=0..0.5,color=red);plot(Val4,mu=0..0.5,color=red);
```

Approximativement, on constate que les 4 valeurs propres sont simultanément négatives où nulles si et seul si μ est inférieur à une valeur proche de 0.04.

Aux regards des valeurs propres, comme par exemple $-\frac{Re(\sqrt{-1-\sqrt{1+27\,\mu^2-27\,\mu}\sqrt{2}})}{2}$, il apparait que la partie réelle n'est nulle que si $1+27\,\mu^2-27\,\mu>0$:

```
> mu_lims := [solve(1+27*mu^2-27*mu>0,mu)];
```

$$[\left\{\mu<1/2-\frac{\sqrt{69}}{18}\right\},\left\{1/2+\frac{\sqrt{69}}{18}<\mu\right\}] \tag{16}$$

```
> evalf(mu_lims);
```

$$[\{\mu<0.0385208965\},\{0.9614791035<\mu\}] \tag{17}$$

Donc, les points de Lagrange ne sont stables que si le rapport de masse entre les deux corps considérés est inférieure à $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{69}}{18}=0.0385208965$.