Interpolation de Lagrange
Problème proposé par Stéphan Tassart.

Énoncé du problème. Dans un premier temps, il s'agit de trouver une formulation mathématique qui permette de manipuler la famille de polynomes $P_n^h = 1+hX\left(1+\frac{(h-1)}{2}X\left(\ldots\left(1+\frac{(h-n)}{n+1}X\right)\ldots\right)\right)$, puis d'étudier quelques propriétés de cette famille de polynomes. Dans un second temps, l'évaluation de quelques polynomes interpolateur de Lagrange nous conduira à des expressions approchées pour le calcul numérique des dérivées. Il existe un lien que nous ne montrerons pas entre la famille de polynomes P_n^h et les polynomes interpolateurs de Lagrange.

Filtre Interpolateur de Lagrange La famille de polynome apparaît comme une définition récursive. Toutefois la récursion n'est pas très claire, et tel quel, il est impossible de noter sous Maple (ou n'importe quel autre logiciel de calcul formel) ces polynomes. La seule définition récursive (par rapport à l'indice n) naturelle pour la famille P_n^h est la suivante:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall s,\ \ \phi(n,s) = 1 + \frac{(h-n+1)}{n}Xs \tag{1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall s,\ \ \begin{cases} \psi(n,s) = \psi(n-1,\phi(n,s)) & \text{si } n>1 \\ \psi(1,s) = \phi(1,s) & \text{si } n=1 \end{cases} \tag{2}$$

$$P_n^h = \psi(n,1) \tag{3}$$

La traduction en Maple de ce système d'équations se fait alors directement:

```
> psi := proc(n:posint ,s) if n>1 then psi(n-1,phi(n,s)) else
                              phi(1,s) fi end:
> phi:=(n,s)-> 1+(h-n+1)/n*X*s;
> P:=n->psi(n,1);
```

$$\psi \ := \ (n,s) \mapsto 1 + \frac{(h-n+1)\,Xs}{n} \tag{4}$$

$$P \ := \ n \mapsto \psi(n,1) \tag{5}$$

Un exemple d'utilisation nous montre que nous sommes parvenu effectivement à définir récursivement P_n^h:

```
> P(3);
```

$$1 + hX\left(1 + \frac{(h-1)\,X}{2}\left(1 + \frac{(h-2)\,X}{3}\right)\right) \tag{6}$$

On s'apperçoit que cette famille de polynome est en fait le début du développement de Taylor au voisinnage de 0 de la fonction $(1+x)^h$.

```
> Diff_P:=P(5)-(1+X)^h:series(Diff_P,X=0,7):expand("):factor(");
```

$$-\frac{h\,(h-1)\,(h-2)\,(h-3)\,(h-4)\,(h-5)}{720}X^6 + O\left(X^7\right) \tag{7}$$

Notons au passage que 720 n'est autre que 6!

Polynome interplateur de Lagrange . On considère $2N+1$ points équirépartis autour de 0. Par ces $2N+1$ points, il ne passe qu'un seul et unique polynome de degré $2N$.

Prenons par exemple le polynome suivant:

```
> F:=sum(a[i]*X^i,i=0..2);
```

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \tag{8}$$

Nous cherchons à faire passer ce polynome par la famille de points suivante $\begin{pmatrix} -q \\ f(-q) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ f(0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q \\ f(q) \end{pmatrix}$. Il suffit de poser les trois équations, de les résoudre, et d'exprimer la valeur du polynome interpolateur du second degré.

```
> eq_set := {'f(q*i) = subs(X=q*i,F)'$i=-1..1};
```

$$\left\{f(0) = a_0, f(q) = a_0 + a_1 q + a_2 q^2, f(-q) = a_0 - a_1 q + a_2 q^2\right\} \tag{9}$$

```
> solve(eq_set,{'a[i]'$i=0..2});
```

$$\left\{a_0 = f(0), a_1 = -\frac{f(-q) - f(q)}{2\,q}, a_2 = \frac{f(-q) - 2\,f(0) + f(q)}{2\,q^2}\right\} \tag{10}$$

```
> F2:=subs(",F);
```

$$f(0) - \frac{(f(-q) - f(q))\,X}{2\,q} + \frac{(f(-q) - 2\,f(0) + f(q))\,X^2}{2\,q^2} \tag{11}$$

Calcul numérique d'une dérivée. En calcul numérique (i.e. dans un ordinateur), il est impossible de calculer explicitement la valeur de la dérivée en un point. On évalue en fait un approximation de la dérivée à partir d'un ensemble discret de valeurs et par interpolation. Prenons par exemple $2N+1$ points. Sur ces $2N+1$ points, nous approximons la fonction f par le polynome interolateur de degré N qui passe par les $2N+1$ points. La valeur de la dérivée de la fonction est approximée alors par la valeur de la dérivée de l'approximation interpolée.

Par exemple, à partir des calculs précédants, on obtient l'approximation bien connue de la dérivée (que l'on identifie ici à la corde), et de la dérivée seconde: plus comme la dé

```
> subs(X=0,F2);subs(X=0,diff(F2,X));
```

$$-\frac{f(-q) - f(q)}{2\,q} \tag{12}$$

```
> subs(X=0,diff(diff(F2,X),X));
```

$$\frac{f(-q) - 2\,f(0) + f(q)}{q^2} \tag{13}$$

Le report de ces expressions dans un développement de Taylor de f nous donne une idée de l'ordre des approximations faites:

```
> tayl_set:={'f(i*q)=subs(x=i*q,convert(taylor(f(x),x=0,5),`+`))'$i=-2..2}:
> subs(X=0,diff(F2,X)) = expand(subs(tayl_set,subs(X=0,diff(F2,X))));
```

$$-\frac{f(-q) - f(q)}{2\,q} = f'(0) + \frac{q^2 f^{(3)}(0)}{6} + O(q^4) \tag{14}$$

```
> subs(X=0,diff(diff(F2,X),X))) =
  expand(subs(tayl_set,subs(X=0,diff(diff(F2,X),X))));
```

$$\frac{f(-q) - 2\,f(0) + f(q)}{q^2} = f''(0) + \frac{q^2 f^{(4)}(0)}{12} + O(q^3) \qquad (15)$$

Le même raisonnement réalisé avec un polynome interpolateur d'ordre 4 nous conduit aux expressions suivantes:

```
> F:=sum(a[i]*X^i,i=0..4):
> eq_set := {'f(q*i) = subs(X=q*i,F)'$i=-2..2}:
> solve(eq_set,{'a[i]'$i=0..4}):
> F4:=subs(",F):
> subs(X=0,diff(F4,X));
```

$$-\frac{8\,f(-q) - 8\,f(q) + f(2\,q) - f(-2\,q)}{12\,q} \qquad (16)$$

```
> subs(X=0,diff(diff(F4,X),X));
```

$$\frac{16\,f(-q) - 30\,f(0) + 16\,f(q) - f(2\,q) - f(-2\,q)}{12\,q^2} \qquad (17)$$

```
> tayl_set:={'f(i*q)=subs(x=i*q,convert(taylor(f(x),x=0,7),`+`))'$i=-2..2}:
> expand(subs(tayl_set,subs(X=0,diff(F4,X))));
```

$$f'(0) - \frac{q^4 f^{(5)}(0)}{30} + O(q^6) \qquad (18)$$

```
> expand(subs(tayl_set,subs(X=0,diff(diff(F4,X),X))));
```

$$f''(0) - \frac{q^4 f^{(6)}}{90} + O(q^5) \qquad (19)$$