Oscillateurs harmoniques couplés

Solution proposée par Stéphan Tassart
IRCAM, 1 place Igor Stravinsky, 75004 PARIS

tassart@ircam.fr http://www-stud.enst.fr/anciens/anciens/tassart

Mai 1996

Résumé

Le but de cet exercice, extrait d'un problème de mécanique posé à un concours d'entrée aux Grandes Écoles Scientifiques, est d'illustrer le cours de Mécanique Classique du Point, et en particulier le problème du couplage d'oscillateurs harmoniques.

1 Énoncé

On se place dans un référentiel galiléen, on néglige les forces de pesanteur. Nous considérons à présent le système mécanique décrit par figure 1 constitué de trois ressorts de masses négligeables et de constante de raideur respectivement k_1, k et k_2. Les trois ressorts sont reliés entre eux par deux points matériels, B_1 et B_2, de masse respective m_1 et m_2. Les ressorts sont fixés à deux points fixes, A_1 et A_2. Enfin, la longueur au repos de chaque ressort sera considérée comme négligeable. Les dimensions sont indiquées sur la figure. Les longeurs b_1 et b_2 correspondent à l'élongation respective des deux ressort quand le système est à l'équilibre. La longueur L est un paramètre géométrique du système et correspond à l'écartement des deux attaches du système.

Le système à l'équilibre est indiqué par les positions B_1^e et B_2^e. On définit les déplacements de B_1 et B_2 par rapport à l'équilibre par les vecteurs $\vec{u}_1 = \overrightarrow{B_1^e B_1}$ et $\vec{u}_2 = \overrightarrow{B_2^e B_2}$.

1.1 Équilibre du système

- Établir le bilan des forces auxquelles est soumis le point B_1. Déduire un bilan similaire pour le point B_2.
- Prouver qu'à l'équilibre, les points A_1, B_1, B_2 et A_2 sont alignés.
- Calculer les expressions de b_1 et b_2 en fonction des constantes du système quand celui-ci est au repos. `[solve]`

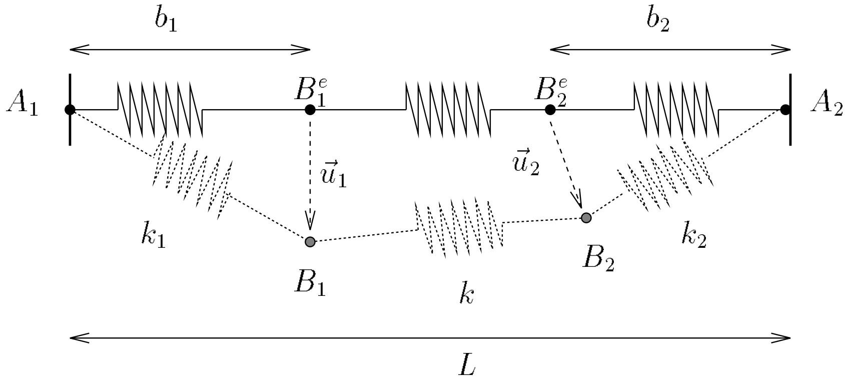

Fig. 1 – *Système de deux oscillateurs couplés*

1.2 Dynamique du système

- Écrire le système de deux équations différentielles ordinaires que vérifient les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. `[diff]`

- En posant symboliquement $U = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)^t$, exprimer le système différentiel précédant sous la forme matricielle suivante $W.U = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ où W est une matrice 2×2. `[with(linalg), evalm]`

1.3 Découplage du système

Dans tout la suite du problème, nous suposerons que le système est symmétrique, c'est-à-dire que $m_1 = m_2 = m$ et $k_1 = k_2 = k_0$. En conséquence nous noterons $\omega^2 = k_0/m$ et $\bar{\omega}^2 = (k_0 + 2k)/m$. `[subs]`

- En tenant compte de la symmétrie du système (et du même coup de W), calculer les vecteurs et les valeurs propres de W. `[with(linalg), eigenvects, eigenvals]`

- En déduire la matrice de passage Ω qui permet de diagonaliser W. Utiliser le changement de variable $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \Omega.(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$ afin pour découpler le système de deux équations différentielles que vérifient $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ (il sera judicieux d'exprimer les deux équations différentielles que vérifient $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$ en fonction des deux pulsations ω et $\bar{\omega}$). `[subs]`

- Intégrer les deux équations différentielles que vérifient $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$. `[dsolve]`

- En déduire les expressions explicites que vérifient $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ en fonction de constantes dépendant des conditions initiales que nous ne demandons pas préciser pour l'instant. `[subs]`

1.4 Applications

- Les points B_1 et B_2 étant placés sans vitesse initiale dans des positions définies par les vecteurs $\vec{u}_1(0)$ et $\vec{u}_2(0)$, décrire le mouvement des deux points. `[subs, diff, solve]`

- Dans le cas particulier où $\vec{u}_1(0)$ et $\vec{u}_2(0)$ sont orthogonaux entre eux ainsi qu'à la direction du vecteur $\overrightarrow{A_1A_2}$, en supposant que $k = \frac{3}{2}k_1 = \frac{3}{2}k_2$, $m_1 = m_2 = m$ et que $|\vec{u}_1(0)| = |\vec{u}_2(0)|$, représenter les trajectoires des deux points B_1 et B_2. `[with(linalg), &*, trace, map, op, plot]`

2 Solution

2.1 Équilibre du système

Il apparait clairement que le bilan des forces pour le point matériel B_1^e est le suivant:

$$k_1\overrightarrow{A_1B_1^e} + k\overrightarrow{B_2^eB_1^e} = 0 \tag{1}$$

Un simple regard sur cette équation permet de dire que les points A_1, B_1^e et B_2^e sont alignés.

Par symmétrie de notation, le bilan des forces pour le point B_2^e se déduit de celui pour le point B_2^e en permutant les indices 1 et 2. En concéquence les points A_2, B_1^e et B_2^e sont également alignés. Au bout du compte nous avons prouvé que les deux points B_1^e et B_2^e était alignés sur l'axe A_1A_2.

Il ne reste plus qu'à traduire ces deux équations vectorielles dans le système de notation adopté par l'énoncé:

```
> equ_1:=-k_1*b1+k*(L-b1-b2)=0;equ_2:=-k_2*b2+k*(L-b2-b1)=0;
> equilibre:={equ_1,equ_2};
```

puis à résoudre le système selon b_1 et b_2:

```
> solve(equilibre,{b1,b2});
```

$$\left\{ b1 = \frac{k\_2\, kL}{k\_2\, k\_1 + k\_2\, k + kk\_1}, b2 = \frac{kLk\_1}{k\_2\, k\_1 + k\_2\, k + kk\_1} \right\} \tag{2}$$

Nous ré-écrivons manuellement cette solution sous une forme vectorielle:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{lk}{k_1k_2 + k(k_1+k_2)} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

2.2 Dynamique du système

Le mouvement de B_1 autour de sa position d'équilibre s'écrit directement à partir de la relation fondamentale de la dynamique que nous avons déjà écrit dans la question précédante (l'équation pour le point B_2 se déduit de la même façon que dans la question précédante en permutant les indices):

$$k_1\vec{u}_1 + k(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) = -m_1\frac{\partial^2\vec{u}_1}{\partial t^2} \tag{4}$$

Nous nous contenterons de traduire ces deux équations en les nommant respectivement `dyn_1` et `dyn_2`:

```
> dyn_1:=k_1*u1(t)+k*(u1(t)-u2(t))=-m_1*diff(diff(u1(t),t),t);
> dyn_2:=k_2*u2(t)+k*(u2(t)-u1(t))=-m_2*diff(diff(u2(t),t),t);
```

Matriciellement, le système d'équation différentielle ordinaire précédant s'écrit de la façon suivante:

$$-\begin{pmatrix} \frac{k_1+k}{m_1} & -\frac{k}{m_1} \\ -\frac{k}{m_2} & \frac{k_2+k}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \end{pmatrix} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Conformément à l'énoncé, nous noterons W la matrice suivante:

```
> with(linalg):
> W := evalm([[-(k+k_1)/m_1, k/m_1],[k/m_2, -(k+k_2)/m_2]]);
```

$$W = \begin{pmatrix} -\frac{k_1+k}{m_1} & \frac{k}{m_1} \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k_2+k}{m_2} \end{pmatrix}$$

2.3 Découplage du système

La simplification des données du problèmes entraine un certain nombre de substitutions dans les différentes équations nous utilisons. En conséquence, nous définissons un ensemble `simple` dont les éléments correspondent à toutes les simplification auxquelles nous allons procéder. L'ensemble `pulse` correspond aux notations ω et $\bar{\omega}$ que nous nommerons respectivement `omega[0]` et `omega[1]` (Maple ne fournit pas facilités pour noter des symboles particuliers telque $\bar{x}$, $\tilde{x}$ etc. C'est pourquoi nous utilisons `omega[0]` pour ω et `omega[1]` pour $bar\omega$).

```
> simple:={k_1=k_0,k_2=k_0,m_1=m,m_2=m};
> pulse:={k_0+2*k=omega[1]^2*m, k_0=omega[0]^2*m};
```

L'ensemble des valeurs et des vecteurs propres de W est obtenue à l'aide de la fonction `eigenvects`.

```
> eigenvects(subs(simple,op(W)));
```

$$[-\frac{k\_0}{m}, 1, \{[1,1]\}], [-\frac{k\_0 + 2\,k}{m}, 1, \{[-1,1]\}] \tag{6}$$

Ce qui s'interprète de la façon suivante: $(1,1)^t$ et $(-1,1)^t$ sont les deux vecteurs propres de W et leurs valeurs propres associées sont respectivement $-k_0/m$ et $-(k_0+2k)/m$.

Nous notons les vecteurs propre $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ de W, et λ_1, λ_2 les valeurs propres associées. Les propriétés des éléments propres de W sont résumées par la relation matricielle:

$$W.(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Si on note Ω la matrice dont les colonnes sont constituées respectivement de $\vec{v}_1$ et de $\vec{v}_2$ (i.e. $\Omega = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$, alors Ω constitue une matrice de passage qui diagonalise W.

$$\Omega^{-1}W\Omega = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Le système différentiel original s'écrit alors:

$$W.(\vec{u}_1, \vec{u}_2)^t = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)^t \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.\Omega^{-1}.(\vec{u}_1, \vec{u}_2)^t = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Omega^{-1}.(\vec{u}_1, \vec{u}_2)^t \tag{9}$$

On pose symboliquement alors $(\vec{w}_1, \vec{w}_2)^t = \Omega^{-1}.(\vec{u}_1, \vec{u}_2)^t$ (i.e. $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)^t = \Omega.(\vec{w}_1, \vec{w}_2)^t$) et le nouveau système differentiel s'écrit:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}(\vec{w}_1, \vec{w}_2)^t = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\vec{w}_1, \vec{w}_2)^t \tag{10}$$

Autrement dit, le système est à présent découplé, c'est-à-dire constitué de deux équations différentielles indépendante l'une de l'autre.

$$\begin{cases} \lambda_1\vec{w}_1 = \frac{\partial^2\vec{w}_1}{\partial t^2} \\ \lambda_2\vec{w}_2 = \frac{\partial^2\vec{w}_2}{\partial t^2} \end{cases} \tag{11}$$

En conclusion, le changement de variable judicieux est celui que nous notons `chang`. Le changement de variable inverse est noté quant à lui `chang_inv`.

```
> chang:={u1(t)=w1(t)+w2(t),u2(t)=w1(t)-w2(t)};
> chang_inv:=solve(chang,{w1(t),w2(t)});
```

Il ne reste qu'à faire apparaître `w1` et `w2` dans les équations différentielles `dyn_1` et `dyn_2`, puis à additionner et soustraire les deux équations pour obtenir le système final:

```
> subs(chang union simple,{dyn_1,dyn_2});
> expand(");
> newdyn:={(op(1,")-op(2,"))/2,(op(1,")+op(2,"))/2};
```

$$\left\{k\_0\ w2(t) + 2\,k w2(t) = -m\frac{d^2}{dt^2}w2(t), k\_0\ w1(t) = -m\frac{d^2}{dt^2}w1(t)\right\}$$

La résolution de ce système différentielle se fait aisément avec la fonction `dsolve`:

```
> dyn_sol:=dsolve(newdyn,{w1(t),w2(t)});
```

$$\left\{ w1(t) = \_C1\, e^{\frac{i\sqrt{k\_0}\,t}{\sqrt{m}}} + \_C2\, e^{-\frac{i\sqrt{k\_0}\,t}{\sqrt{m}}},\, w2(t) = \_C3\, e^{\frac{i\sqrt{k\_0+2\,k}\,t}{\sqrt{m}}} + \_C4\, e^{-\frac{i\sqrt{k\_0+2\,k}\,t}{\sqrt{m}}} \right\}$$

Nous faisons apparaître les pulsations ω et $\bar{\omega}$ par substitution, puis nous reportons ces valeurs calculées dans les expressions de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

```
> subs(pulse,dyn_sol):
> real_dyn_sol:=subs(",chang);
```

$$\{ u2(t) = \_C1\, e^{i\omega_0 t} + \_C2\, e^{-i\omega_0 t} - \_C3\, e^{i\omega_1 t} - \_C4\, e^{-i\omega_1 t}, \tag{12}$$

$$u1(t) = \_C1\, e^{i\omega_0 t} + \_C2\, e^{-i\omega_0 t} + \_C3\, e^{i\omega_1 t} + \_C4\, e^{-i\omega_1 t} \} \tag{13}$$

2.4 Applications

Les conditions initiales correspondent à une vitesse nulle, c'est-à-dire que à l'instant $t = 0$ les dérivées en temps de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont nulles. Une infâme bidouille de Maple permet d'écrire automatiquement le système d'équations vérifiées par les conditions initiales:

```
> real_dyn_sol union diff(real_dyn_sol,t);
> cond_ini:=eval(subs({diff=0,t=0},"));
```

$$\{0 = i\_C1\,\omega_0 - i\_C2\,\omega_0 - i\_C3\,\omega_1 + i\_C4\,\omega_1, \tag{14}$$

$$0 = i\_C1\,\omega_0 - i\_C2\,\omega_0 + i\_C3\,\omega_1 - i\_C4\,\omega_1, \tag{15}$$

$$u2(0) = \_C1 + \_C2 - \_C3 - \_C4, \tag{16}$$

$$u1(0) = \_C1 + \_C2 + \_C3 + \_C4\} \tag{17}$$

Ce système d'équation permet d'obtenir les expressions des constantes d'intégration $\_C1$, $\_C2$, $\_C3$ et $\_C4$ en fonction des conditions initiales. Il suffit de résoudre le système en $\_C1$, $\_C2$, $\_C3$ et $\_C4$, et de reporter les solutions dans le système original (et simplifier pour faire apparaître des cosinus à la place des exponentielles complexes).

```
> solve(cond_ini,{_C1,_C2,_C3,_C4}):
> subs(",real_dyn_sol):
> sol:=simplify(");
```

$$\left\{ u2(t) = -\frac{\cos(\omega_1 t)\, u1(0)}{2} + \frac{\cos(\omega_1 t)\, u2(0)}{2} + \frac{\cos(\omega_0 t)\, u1(0)}{2} + \frac{\cos(\omega_0 t)\, u2(0)}{2}, \right. \tag{18}$$

$$\left. u1(t) = \frac{\cos(\omega_1 t)\, u1(0)}{2} - \frac{\cos(\omega_1 t)\, u2(0)}{2} + \frac{\cos(\omega_0 t)\, u1(0)}{2} + \frac{\cos(\omega_0 t)\, u2(0)}{2} \right\} \tag{19}$$

On obtient le cas particulier où les vecteurs $\vec{u}_1(0)$ et $\vec{u}_2(0)$ sont orthogonaux entre eux ainsi qu'à la direction du vecteur $\overrightarrow{A_1A_2}$ en prenant choisissant un système de coordonées orthogonales dans lequel les vecteurs $\vec{u}_1(0)$ et $\vec{u}_2(0)$ ont comme coordonnées respectivement $(1,0)^t$ et $(0,1)^t$.

```
> sol_vect:=subs( {u1(0)=[[0],[1]], u2(0)=[[1],[0]]} ,sol);
```

Pour obtenir la coordonnée de B_1 selon l'axe $x'Ox$, il suffit de multiplier scalairement $\vec{u}_1$ par le vecteur $(1,0)^t$. La coordonnée selon l'axe $y'Oy$ s'obtient en multipliant scalairement par $(1,0)^t$. L'évaluation du produit scalaire s'obtient dans un premier temps en évaluant le produit matriciel, ce qui donne une matrice 1×1, puis en évaluant la trace de cette matrice 1×1, ce qui donne le scalaire résultant du produit scalaire des deux matrices.

```
> subs(sol_vect,[ [[1,0]]&*u1(t), [[0,1]]&*u1(t)]);
> map(evalm,");
> to_trace_1:=map(trace,");
```

$$[-\frac{\cos(\omega_1 t)}{2} + \frac{\cos(\omega_0 t)}{2}, \frac{\cos(\omega_1 t)}{2} + \frac{\cos(\omega_0 t)}{2}]$$

Rem: L'évaluation du produit scalaire peut également s'obtenir avec la fonction `dotproduct`, mais l'inconvéniant de cette fonction consiste en ce qu'elle ne prend en argument que des objets de type `vector`.

On a édidemment la même procédure pour obtenir les coordonnées du point B_2.

```
> subs(sol_vect,[ [[1,0]]&*u2(t), [[0,1]]&*u2(t)]):
> map(evalm,");
> to_trace_2:=map(trace,");
```

$$[\frac{\cos(\omega_1 t)}{2}+\frac{\cos(\omega_0 t)}{2}, -\frac{\cos(\omega_1 t)}{2}+\frac{\cos(\omega_0 t)}{2}]$$

Le tracé des trajectoires de B_1 et B_2 peut se faire en substituant les valeurs de l'application numériques dans les variables `to_trace_1` et `to_trace_1`. En particulier, dans le cas ou $k = 3/2k_0$, on constate que la pulsation $\bar{\omega}$ est le double de la pulsation ω. La nature de la trajectoire ne dépend que du rapport entre les deux pulsation, donc pour obtenir graphiquement les trajectoire, nous pouvons prendre $\omega = 1$ et $\bar{\omega} = 2$. Il ne reste plus qu'à tracer (voir figure 2):

```
> AN:={omega[1]=2,omega[0]=1};
> plot({[op(subs(AN,to_trace_1)),t=0..Pi], [op(subs(AN,to_trace_2)),t=0..Pi]});
```

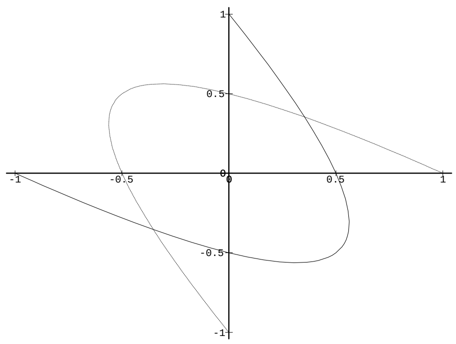

FIG. 2 – *Trajectoires des points B_1 et B_2*