Écoulement d'un fluide autour d'un cylindre

Problème avec correction proposé par Stéphan Tassart
IRCAM, 1 place Igor Stravinsky, 75004 PARIS

tassart@ircam.fr http://www-stud.enst.fr/~tassart/

Nov 1996

Résumé

Ce problème, classique au demeurant, consiste à étudier les lignes de courant d'un fluide incompressible autour d'un cylindre fixe. Les difficultés sont essentiellement calculatoires, en conséquence un calculateur symbolique devrait grandement faciliter la résolution du problème.

1 Problème

1.1 Rappel

Opérateur $\vec{\nabla}$ (nabla) en coordonnées polaires: dans le repère canonique des coordonnées polaires $\vec{u(\theta)}, \vec{v(\theta)}$ (vecteur unitaire radial et tangent), l'opérateur $\vec{\nabla}$ s'exprime de la façon suivante:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{u(\theta)} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{v(\theta)} \tag{1}$$

La notation $\vec{\nabla}$ permet de prendre en compte les opérateurs vectoriels gradient, divergent, rotationnel et laplacien:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \vec{\mathrm{grad}}\phi & = & \vec{\nabla}\phi \\ \mathrm{div}\vec{v} & = & \vec{\nabla}.\vec{v} \\ \vec{\mathrm{rot}}\vec{v} & = & \vec{\nabla} \wedge \vec{v} \end{array} \right. \tag{2}$$

Opérateur $\triangle$ (laplacien) en coordonnées polaires: le laplacien en coordonnées polaires s'exprime de la façon suivante:

$$\triangle = \vec{\nabla}.\vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \tag{3}$$

Équation de conservation de la masse: l'équation de conservation de la masse, s'exprime dans le formalisme de la mécanique des fluides, ρ, $\vec{v}$ correspondant respectivement à la masse volumique et à la vitesse particulaire et ρq représentant les sources de débit, par:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.\left(\rho\vec{v}\right) = \rho q \tag{4}$$

Champs de vecteur dérivant d'un potentiel: si un champs de vecteur est irrotationnel, alors celui-ci est le gradient d'un potentiel scalaire. Autrement dit:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \exists\varphi,\;\; \vec{v} = -\vec{\nabla}\varphi \tag{5}$$

Dans le cas d'un écoulement fluide irrotationnel, le potentiel φ s'appelle le *potentiel des vitesses.*

1.2 Position du problème

On considère un écoulement permanent irrotationnel d'un fluide supposé incompressible autour d'un cylindre de rayon R. Les conditions aux limites à l'infini sont données par la figure 1, c'est-à-dire un champs de vitesse uniforme de direction l'axe des x. La présence du cylindre impose à la vitesse particulaire d'être tangente au cylindre pour tous les points de sa surface.

Équation du système: montrer que sous ces hypothèses, le potentiel φ des vitesses vérifie l'équation différencielle dite de Laplace:

$$\triangle\varphi = 0 \tag{6}$$

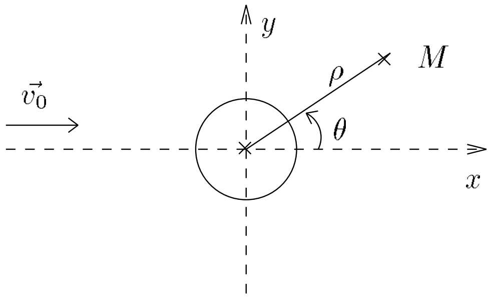

FIG. 1 – *Schéma*

Solution générale du système: on sépare les variables du potentiel: $\varphi(r,\theta) = f(r)g(\theta)$ (g est alors forcément une fonction de période 2π).

- Reconnaître que g est solution d'une équation différentielle du type:
$$g''(\theta) + \omega_{(r)}^2 g(\theta) = 0 \tag{7}$$
- Trouver une condition sur $\omega_{(r)}$ pour que g soit effectivement périodique de période 2π `[dsolve]`.
- Montrer que f vérifie alors une équation du type (où p est entier):
$$r^2 f''(r) + rf'(r) - p^2 f(r) = 0 \tag{8}$$
- Vérifier que φ peut s'écrire `[dsolve]`:
$$\varphi(r,\theta) = \left(Ar^p + \frac{B}{r^p}\right)(\alpha\cos(p\theta) + \beta\sin(p\theta)) \tag{9}$$

Conditions aux limites:

- Vérifier que le potentiel $-v_0 r\cos\theta$ correspond aux conditions aux limites à l'infini (pour ce faire, on convertira l'expression précédante en coordonnées cartésiennes). En déduire les valeurs de p et de β, puis de A et α, dans l'expression générale φ du potentiel des vitesses.
- Calculer le champs des vitesses (en coordonnées polaires)`[diff]`. Considérant que le champs des vitesses doit être tangent au cylindre pour $r = R$, déterminer la valeur de B.

Étude du champs des vitesses: les applications numériques et graphiques se font avec $v_0 = 10$ et $R = 1$, en définissant par exemple l'ensemble `AN:={v0=10,R=1};`

- Tracer le champs de vecteur v (on passera en notation cartésienne) `plots[fieldplot]`. Pour faire disparaître le champs de vecteur à l'intérieur du cylindre, on multipliera le champs de vecteur par l'expression `Heaviside(r^2/R^2-1)` qui vaut 0 à l'intérieur du cylindre et 1 à l'extérieur du cylindre.
- On admettra que les lignes de courant et les lignes isopotentielles sont perpendiculaires. Vérifier que le gradient de la fonction de courant $\psi = v_0(r - \frac{R^2}{r})\sin\theta$ est perpendiculaire au champs des vitesses.
- Les lignes de courant sont définies commes étant les isopotentielles de la fonction de courant ψ. Tracer les lignes de courant.

  On pourra s'aider des instructions suivantes pour le tracé des isopotentielles de ψ:

```
> AN   := {R=1,v0=10}:
> psi  := (r-R^2/r)*sin(theta);
> r_th := solve(psi=cte/5,r);
> r_an1:= subs(AN,r_th[1]): r_an2:= subs(AN,r_th[2]):
> courbe1:={seq([r_an1,theta,theta=0.1..Pi-0.1],cte=0..10)}:cte:='cte':
> courbe2:={seq([r_an2,theta,theta=0.1..Pi-0.1],cte=-10..0)}:cte:='cte':
> plot(courbe1 union courbe2,x=-2..2,y=-2..2,coords=polar);
```

2 Solution

2.1 Équation du système

Les hypothèses du problème permettent de simplifier grandement l'équation de conservation de la masse. Dans un premier temps, l'hypothèse d'écoulement permanent permet d'obtenir $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Ensuite, on suppose implicitement que l'espace ne possède pas de source de débit, donc, $\rho q = 0$. De plus, l'hypothèse d'incompressibilité du fluide permet de simplifier $\vec{\nabla}.(\rho \vec{v})$ en $\rho \vec{\nabla}.\vec{v}$ puisque la masse volumique ne dépend plus d'aucune variable d'espace. Enfin l'hypothèse d'écoulement irrotationnel permet de s'assurer que le champs des vitesses $\vec{v}$ dérive d'un potentiel φ. Au total, l'équation de conservation de la masse se réécrit:

$$\rho \vec{\nabla}.\vec{\nabla}\varphi = 0 \tag{10}$$

Cette équation se simplifie par ρ, et on reconnaît dans $\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\varphi$ la définition du laplacien $\triangle\varphi$.

2.2 Solution du système

On sépare le potentiel des vitesses $\varphi(r,\theta) = f(r)g(\theta)$. L'expression du laplacien en coordonnées polaire permet donc d'écrire directement l'équation différentielle suivante:

$$f''(r)g(\theta) + \frac{1}{r}\left(f'(r)g(\theta) + \frac{1}{r}f(r)g''(\theta)\right) = 0 \tag{11}$$

En regroupant convenablement les termes, on obtient:

$$\omega_{(r)}^2 = \frac{r^2 f''(r) + r f'(r)}{f(r)}, \text{ et } \; g''(\theta) + \omega_{(r)}^2 g(\theta) = 0 \tag{12}$$

Les solutions de l'équation différentielle que vérifie g sont toutes de la forme:

```
> dsolve(diff(g(t),t,t)+w^2*g(t),g(t));
```

$$g(\theta) = \alpha\cos(\omega_{(r)}\theta) + \beta\sin(\omega_{(r)}\theta) \tag{13}$$

Les seules solutions de période 2π s'obtiennent quand $\omega_{(r)}$ est entier. On note alors: $\omega_{(r)} = p$. Dans ces conditions, l'équation que vérifie $f(r)$ correspond à:

$$r^2 f''(r) + r f'(r) - p^2 f(r) = 0 \tag{14}$$

dont les solution générales sont:

```
> dsolve(diff(f(r),r,r)*r^2+diff(f(r),r)*r-p^2*f(r),f(r));
```

$$f(r) = Ar^p + \frac{B}{r^p} \tag{15}$$

Au total on obtient l'expression suivante pour le potentiel des vitesses:

$$\varphi(r,\theta) = \left(Ar^p + \frac{B}{r^p}\right)(\alpha\cos(p\theta) + \beta\sin(p\theta)) \tag{16}$$

2.3 Conditions aux limites

Le potentiel $-v_0 r\cos\theta$ s'écrit en coordonnées cartésiennes $-v_0 x$. Son gradient dans le repère (Oxy) s'écrit $-\vec{\nabla}(-v_0 x) = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ correspond exactement aux conditions aux limites à l'infini. Donc forcément, $p = 1$ et $\beta = 0$. Maintenant, on peut écrire sans perdre de généralité que $\alpha = 1$. Il ne reste plus qu'à indentifier le terme en $Ar\cos\theta$, ce qui nous conduit à $A = -v_0$.

La projection du gradient du champs de vitesses sur le vecteur radial doit s'annuler quand $r = R$, ce qui nous permet d'obtenir B:

```
> phi := (-v0*r+B/r)*cos(theta);
> diff(phi,r);
> solve(subs(r=R,")=0,B);
        -v0 * R^2
```

Donc le potentiel des vitesses φ, compte tenu des conditions aux limites, s'écrit:

$$\varphi = -v_0(r + \frac{R^2}{r})\cos\theta \tag{17}$$

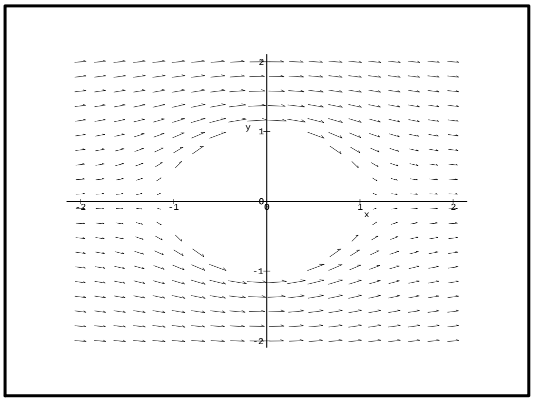

FIG. 2 – *Champs des vitesses*

2.4 Étude du champs des vitesses

Le tracé du champs de vecteur s'obtient par exemple:

```
> phi :=  - v0* (r + R^2 / r) * x/r;
> cyl := Heaviside(r^2/R^2-1);
> r   := sqrt(x^2+y^2);
> phi := expand(phi):
> AN  := {v0=10,R=1}:
> phi_an := subs(AN,phi);
> cyl_an := subs(AN,cyl);
> v_an   := simplify([-diff(phi_an,x)*cyl_an, -diff(phi_an,y)*cyl_an]):
> with(plots):
> fieldplot(v_an,x=-4..4,y=-4..4);
```

Pour obtenir la perpendicularité des gradients de φ et de ψ il suffit de vérifier que leur produit scalaire est nul:

```
> psi :=  - expand(v0* (r - R^2 / r) * y/r);
> diff(phi,x)*diff(psi,x) + diff(phi,y)*diff(psi,y);
> simplify(");
                  0
```

Le tracé des isopotentiels s'obtient comme décrit dans le texte du sujet, en prenant bien garde de *désaffecter* la variable `r` en faisant:

```
> r:='r';
```

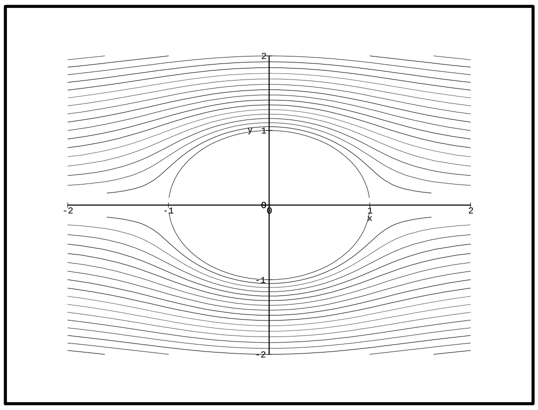

FIG. 3 – *Lignes de courant*