Interférences optiques

Problème avec correction proposé par Stéphan Tassart
IRCAM, 1 place Igor Stravinsky, 75004 PARIS

tassart@ircam.fr   http://www-stud.enst.fr/~tassart/

Décembre 1996

Résumé

Ce problèmeest très classique et vise à mettre *en lumière* quelques propriétés caractéristiques des interféromètres. L'expérience des trous de Young consiste à superposer deux sources lumineuses cohérentes entre-elles. La superposition des deux sources fait apparaître généralement des bandes lumineuses, des franges lumineuse qui succèdent à des franges sombres. Tout le dispositif consiste à obtenir les deux sources cohérentes et synchrones. Pour se faire, on dédouble une source unique à partir du dispositif expérimental schématiser en figure 1.

1 Problème des Fentes de Young

On considère le schéma expérimental présenté en figure 1. Les deux fentes infiniment petites sont éclairées par une source large. Chaque élément de surface de la source large caractérisé par le vecteur de position $\vec{x}$ agit comme une source élémentaire. Chaque source élementaire éclaire l'écran en un point caractérisé par son vecteur de position $\vec{y}$ selon deux chemins différents (comme précisé sur la figure 1). L'éclairement total au point $\vec{y}$ est la somme des éclairements pour tous les éléments de la source. On suppose que les grandeurs $\vec{x}$, $\vec{y}$ et a sont infiniment petites devant d_1 et d_2.

1.1 Source ponctuelle

On restreint le problème à un problème exclusivement plan. La source est constituée d'un seul élément de nombre d'onde k situé au point repéré par son vecteur position $\vec{x}$, en l'occurence, le scalaire x. Les points de l'écran sont repérés par leur vecteur de position, $\vec{y}$, qui se réduit dans le cas scalaire à y.

- Calculer la longueur des deux chemins reliant $\vec{x}$ à $\vec{y}$.
- Déduire de la différence de marche calculée précédemment, l'amplitude de l'onde résultant de la superposition des ondes provenant des deux chemins.

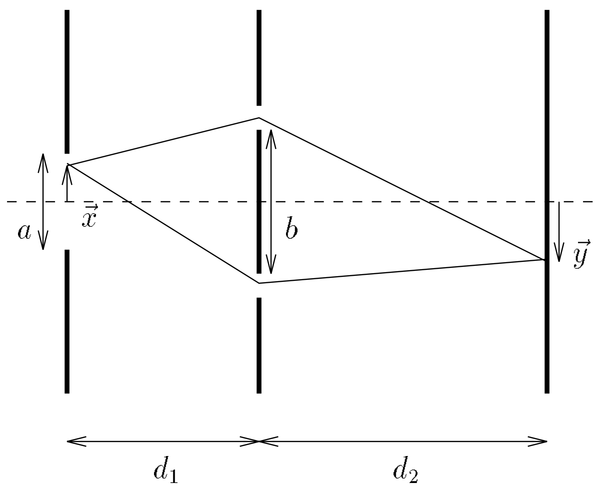

FIG. 1 – *Expérience des fentes de Young*

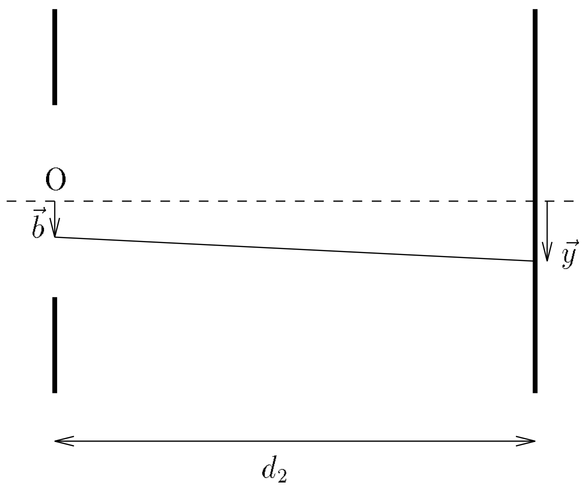

FIG. 2 – *Expérience de diffraction d'un motif par une source cohérente*

- Calculer l'éclairement (l'intensité lumineuse) obtenu sur l'écran résultant de la superposition des deux ondes.
- Représenter graphiquement l'éclairement obtenu sur l'écran situé à $d_2 = 10$ par diffraction d'une source cohérente (laser) à l'infini sur deux fentes espacée de $b = 10^{-4}$, de nombre d'onde situé dans le rouge i.e $k = 966 \cdot 10^4$ (pour $y \in [-5 \cdot 10^{-2}, 5 \cdot 10^{-2}]$).

1.2 Source étendue

Le problème est toujours restreint à sa version plane, mais à présent la source est étendue, de largeur a, et à priori, non-cohérente. Chaque élément de surface agit comme une source élémentaire qui éclaire l'écran selon deux chemins différents. L'intensité totale sur l'écran est la somme des éclairements pour tous les éléments de la source (car la source n'est pas cohérente).

- À partir de la section précédante, calculer l'éclairement élémentaire $dI(k, \vec{x}, \vec{y})$ obtenu sur l'écran en $\vec{y}$ provenant de l'éclairement $I(k, \vec{x})$ correspondant à la source élémentaire situé en $\vec{x}$ (de nombre d'onde k).
- Calculer l'expression de l'éclairement de l'écran $I(k, \vec{y})$ en fonction de l'éclairement de la source $I(k, x)$ sous la forme d'une intégrale.
- On suppose que la source est monochromatique et que son éclairement total I_0 est réparti uniformément. En déduire la densité d'éclairement $I(k, \vec{x})$, puis celle de l'écran $I(k, \vec{y})$ (on pourra introduire un sinus pseudo-cardinal: $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$).
- On prend $a = 10^{-3}$, $b = 10^{-4}$, $d_1 = 10^{-1}$, $d_2 = 10$ et $k = 966 \cdot 10^4$ (limite du rouge). Représenter graphiquement $I(k, \vec{y})$. Mesurer la largeur des interfranges. Comparer avec le cas de l'éclairement par une source cohérente. Même question pour $k = 146 \cdot 10^5$ (limite du violet). Conclure sur la visibilité des franges.

1.3 Fentes non ponctuelles

On considère maintenant une version simplifiée du problème précédant: une source de lumière (de nombre d'onde k) cohérente éclaire perpendiculairement un motif plan dont le coefficient de transmission lumineuse est décrit par $r(\vec{b})$. Le motif diffracte la lumière et le résultat de l'interférence lumineuse est recueilli sur l'écran. Chaque point $\vec{b}$ du motif agit comme une source lumineuse ponctuelle, en phase avec tous les autres points du motif. On restreint le problème à un problème plan, c'est-à-dire que tous les vecteurs positions sont en fait des scalaires.

- Calculer la longueur $l(\vec{b}, \vec{y})$ qui sépare les points $\vec{b}$ et $\vec{y}$.
- Utiliser la formule des accroissements finis pour obtenir une expression décrivant la longueur $l(\vec{b}, \vec{y})$ quand $\vec{b}$ est au voisinage du centre O.

- Déduire des questions précédante que l'amplitude complexe de l'onde résultant de la diffraction du motif peut s'écrire à l'aide de la transformée de Fourier de $r(\vec{b})$. On rappelle que la transformée de Fourier de la fonction $f(x)$ est la fonction $F(\omega)$ définit comme suit:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix\omega}\, dx \tag{1}$$

- Tracer la courbe d'intensité correspondant à l'interférence par une source cohérente de nombre d'onde $k = 966 \cdot 10^4$ (limite du rouge) d'un fente rectangulaire de largeur $\delta = 10^{-3}$ sur un écran situé toujours à $d_2 = 10$.

On admet que les résultats obtenus à la question précédante se généralisent en deux dimensions: la figure de diffraction obtenue en lumière cohérente correspond (à un coefficient multiplicatif près) à la transformée de Fourier (à deux dimensions) du motif diffractant:

$$I_{\text{écran}}(\vec{y}) = \left| R\left(\frac{k}{2l(0,\vec{y})}\vec{y}\right)\right|^2 \tag{2}$$

- Dans le cas d'une fente rectangulaire de coté $\delta_1 \times \delta_2$, évaluer l'intensité du motif d diffraction $I_{\text{écran}}(\vec{y})$.

- Représenter graphiquement le motif de diffraction pour $\delta_1 = 5 \cdot 10^{-4}$ et $\delta_2 = 2 \cdot 10^{-3}$.

2 Solution

2.1 Source ponctuelle

La longueur qui relie les deux chemins s'obtient facilement:

```
Sp := ((x-b/2)^2 + d1^2)^(1/2) + ((y-b/2)^2 + d2^2)^(1/2);
Sm := ((x+b/2)^2 + d1^2)^(1/2) + ((y+b/2)^2 + d2^2)^(1/2);
```

Pour les besoins du problème, pour indiquer au système de calcul symbolique que d_1 et d_2 sont tout deux simultanément grands par rapport aux autres grandeurs, nous définissons $d_1 = wD_1$ et $d_2 = wD_2$ ou w est grand.

```
hyp := {d1 = w * D1, d2 = w * D2}; hyp_inv := solve(hyp,{D1,D2});
```

La différence de marche dS s'obtient en faisant un développement au premier ordre de la différence des deux longueurs.

```
dS :=expand( subs(hyp_inv,series(subs(hyp,Sp - Sm), w=infinity, 2)));
```

$$dS := -\frac{yb}{d2} - \frac{xb}{d1} + O(w^{-3}) \tag{3}$$

Cette différence de marche correspond à une différence de phase entre les deux ondes. En conséquence, la superposition des deux ondes aboutit à l'amplitude complexe suivante: $1 + e^{ik\,dS}$. L'amplitude de l'oscilation est $|1 + e^{-ik\,dS}|$. L'intensité lumineuse correspond au carré de l'amplitude, i.e. $|1 + e^{-ik\,dS}|^2 = 2(1 + \cos(kdS))$, c'est à dire, à un coefficient multiplicatif près:

$$I(k,x,y) = I(k,x) + I(k,x)\cos\left(kb\left(\frac{x}{d_1} + \frac{y}{d_2}\right)\right) \tag{4}$$

Dans le cas de la diffraction d'une source cohérente, on fait tendre d_1 vers l'infini, et on obtient:

$$I(k,y) = I_0\left(1 + \cos\frac{kby}{d_2}\right) \tag{5}$$

L'application numérique est immédiate:

```
In1 := eval(1+cos(k * subs(O=0,dS)));
AN := {d2=10, b=1/1000, k=966E4};
InAN1 := limit(subs(AN,In1),d1=infinity);
plot(InAN1,y=-5E-2..5E-2);
```

2.2 Source étendue

Le problème de la source étendu se traite simplement en sommant (en intégrant) les intensités élémentaires pour toutes les sources élémentaires:

$$I(k,y) = \int_{x\in S} dI(k,x,y)\;dx = I_0 + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cos\left(kb\left(\frac{x}{d_1} + \frac{y}{d_2}\right)\right) I(k,x)\;dx \tag{6}$$

Dans le cas d'une répartition uniforme, $I(k,x) = \frac{I_0}{a}$ et l'intégrale précédante se calcule:

```
dI := I0*eval((1+cos(k * subs(O=0,dS))))/a;
I_res := collect(expand(int(dI,x=-a/2..a/2)),I0);
```

ce qui donne (après ré-écriture manuelle):

$$I_{\mathrm{res}} := I0\left(1 + 2\frac{d_1\cos\frac{kby}{d_2}\sin\frac{1}{2}\frac{kba}{d_1}}{akb}\right) = I0\left(1 + \cos\frac{kby}{d_2}\mathrm{sinc}\frac{kba}{2d_1}\right) \tag{7}$$

L'application numérique suit immédiatement:

```
sinc := x-> sin(x)/x;
I_res := 1 + cos(k*y*b/d2) * sinc(a*k*b/2/d1);
AN := {a=1/1000, d1=1/10, d2=10, b=1/1000, k=966E4};
I_AN := subs(AN,I_res);
plot({InAN1,I_AN},y=-5E-2..5E-2);
AN := {a=1/1000, d1=1/10, d2=10, b=1/1000, k=146E5};
```

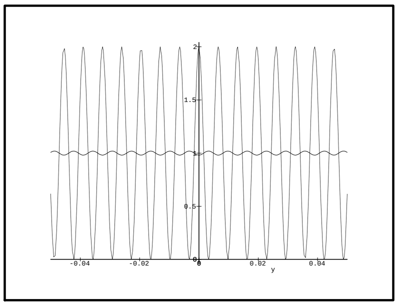

FIG. 3 – *Franges d'interférences obtenues avec lumière cohérente, et sans lumière cohérente*

2.3 Fentes larges

La distance qui sépare les deux chemins vaut exactement $l(b,y) = \sqrt{(y-b)^2 + d_2^2}$. Le calcul de la dérivée partielle par rapport à b s'obtient astucieusement de la façon suivante:

$$l^2 = (y-b)^2 + d_2^2 \quad \Rightarrow \quad 2l\frac{\partial l}{\partial b} = 2(b-y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial l}{\partial b}(b,y) = \frac{b-y}{l(b,y)} \tag{8}$$

Donc le développement au premier ordre de $l(b,y)$ aboutit à:

$$l(b,y) = l(0,y) + \frac{\partial l}{\partial b}(0,y)b + o(b) = l(0,y) - \frac{yb}{l(0,y)} + o(b) \tag{9}$$

L'amplitude complexe de l'onde résulte de la superposition de toutes les ondes qui ayant parcourues la distance $l(b,y)$, sont déphasées de $kl(b,y)$ par rapport à l'oscillation de l'original. Donc:

$$r\text{écran}(y) = \int r(b)e^{ikl(b,y)} = e^{ikl(0,b)} \int r(b)e^{-i\frac{ybk}{l(0,y)}}\, db \tag{10}$$

On introduit l'expression de la transformées de Fourier $R(\omega)$ de $r(b)$:

$$r\text{écran}(y) = e^{ikl(0,b)} R\left(\frac{yk}{l(0,y)}\right) \tag{11}$$

Donc la luminosité obtenue sur l'écran est directement proportionnelle à la norme de la transformée de Fourier du motif diffractant.

Dans le cas d'une fente rectangulaire de largeur δ:

```
expand(convert(int(exp(-I*y*b*k/l0)/delta,b=-delta/2..delta/2),trig));
```

$$r\text{écran}(y) = 2\, l_0\, \frac{\sin(\frac{k\delta y}{2\, l_0})}{yk} = \text{sinc}\left(\frac{k\delta y}{2\, l_0}\right) \tag{12}$$

L'application numérique suit immédiatement:

```
lg := sqrt((y-b)^2+d2^2);
In := (sinc(y * delta * k / 2 / subs(b=0,lg)))^2;
AN := {k=966E4, delta=1E-3, d2=10};
In_AN := subs(AN,In);
plot(In_AN,y=-5E-2..5E-2);
```

La généralisation à deux dimensions ne posent pas de problème. En conséquence, l'amplitude résultant de la superposition des rayon provenant d'une fente rectangulaire vaut:

```
R:=expand(convert(int(int(exp(-I*y1*b1*k/l0)*
   exp(-I*y2*b2*k/l0)/delta[1]/delta[2],b1=-delta[1]/2..delta[1]/2),
   b2=-delta[2]/2..delta[2]/2),trig));
```

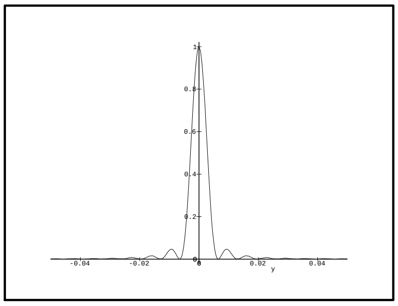

FIG. 4 – *Franges d'interférences dues à la largeur de la fente*

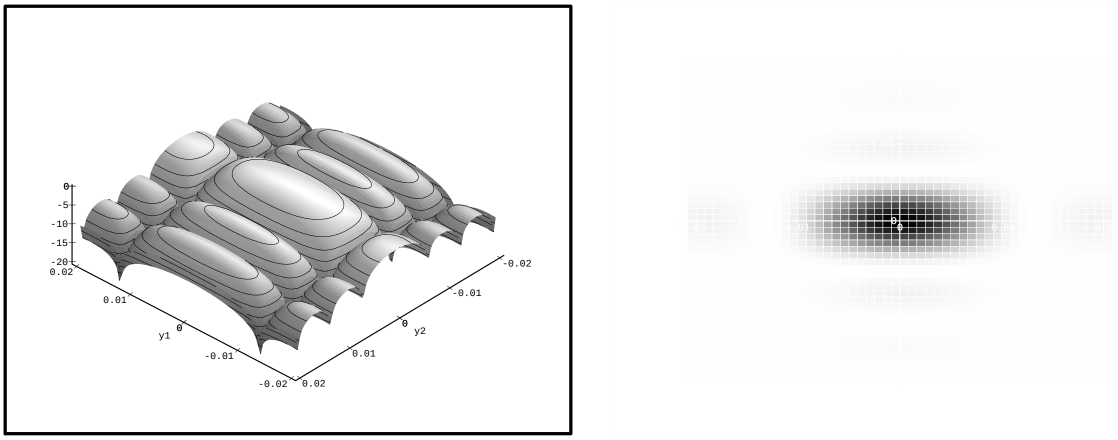

FIG. 5 – *Franges d'interférences bidimensionnelles dues à la largeur de la fente*

Ce qui donne pour l'intensité, après manipulation manuelle:

$$I_{\text{écran}}(y_1, y_2) = \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k\delta_1 y_1}{2l_0}\right)\operatorname{sinc}^2\left(\frac{k\delta_2 y_2}{2l_0}\right) \tag{13}$$

```
Ires :=(sinc(k*delta[1]*y1/2/d2)*sinc(k*delta[2]*y2/2/d2))^2;
AN := {k=966E4, delta[1]=5E-4, delta[2]=1E-3, d2=10};
Iran:=subs(AN,Ires);
with(plots):
plot3d(Iran,y1=-2E-2..2E-2,y2=-2E-2..2E-2);
```