Développement asymptotique

Solution proposée par Stéphan Tassart
IRCAM, 1 place Igor Stravinsky, 75004 PARIS

`tassart@ircam.fr` `http://www-stud.enst.fr/anciens/anciens/tassart`

Nov 1996

Résumé

Le but de cet exercice consiste à montrer comment le calcul symbolique permet d'obtenir le développement asymptotique d'une suite qui n'est pas facile à traiter autrement.

1 Énoncé

1.1 Définition

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme étant la solution dans l'intervalle $](n-\frac{1}{2})\pi, (n+\frac{1}{2})\pi[$ de l'équation $\tan(u_n) = u_n$. Le but de cet exercice vise à obtenir un développement asymptotique de cet suite.

1.2 Questions

- Calculer numériquement les valeurs de u_1, u_2, u_3, u_4, u_{10}. ... `[fsolve]`
- Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- On pose $v_n = n\pi - \frac{\pi}{2} - u_n$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.
- On suppose que $u_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{a_1}{n} - \frac{a_2}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$. Prévoir l'ordre du développement asymptotique de $\tan(u_n)$. Évaluer le développement asymptotique de $\tan(u_n)$. Identifier le résultat avec u_n et déterminer les coefficients a_1 et a_2 `[series]`, `[collect]`, `[solve]`, `[subs]`.
- On suppose à présent que $u_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{4} \frac{a_k}{n^k} + o(\frac{1}{n^4})$. Prévoir l'ordre du développement asymptotique de $\tan(u_n)$. Évaluer le développement asymptotique de $\tan(u_n)$. Déterminer les coefficients a_3 et a_4.
- Calculer le développement à l'ordre 12 de u_n.
- Comparer la valeur numérique de u_{10} obtenue en résolvant numériquement l'équation $\tan x = x$ puis en utilisant le développement limité.

2 Solution

Le calcul numérique des solution peut se faire par exemple en définissant une fonction qui, pour chaque n, évalue numériquement la solution de l'équation $\tan(x) = x$ dans l'intervalle $](n-\frac{1}{2})\pi, (n+\frac{1}{2})\pi[$. La syntaxe est la suivante:

```
> u:=n->fsolve(tan(x)=x, x,(n-1/2)*Pi..(n+1/2)*Pi);
```

Il ne reste plus qu'à évaluer cette fonction en 1, 2, 3, 4 et en 10.

```
> [u(1),u(2),u(3),u(4), u(10)];

      [4.493409458, 7.725251837, 10.90412166, 14.06619391, 32.95638904]
```

Le développement en série entière de u_n est un peu plus technique. Dans un premier temps nous définissons l'expression p qui correspond à l'ordre du développement. La variable u est ensuite utilisée pour définir le développement symbolique:

```
> p:=4; u:= n*Pi + Pi/2 - sum(a[k]/n^k,k=1..p);
```

La suite correspond à l'identification du développement asymptotique de u avec $\tan(u)$ (enfin plus exactement avec $\tan(u - n * \pi)$ qui est identique à $\tan(u)$):

```
> collect(eval(subs(O=0,series(tan(u-n*Pi)-u,n=infinity,p-1))),n);
```

Il suffit de résoudre le système correspondant à tous les coefficients à 0:

```
> solve({coeffs(",n)},{a[k]$k=1..p});
```

Pour obtenir l'expression finale de u, il suffit d'introduire dans u la solution obtenue précédemment:

```
> subs(",u);
```

Ce calcul mené pour $p = 12$ donne:

$$
\begin{aligned}
u_n \quad = \quad & n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\,\pi\,n^2} - \frac{8+3\,\pi^2}{12\,\pi^3 n^3} + \frac{8+\pi^2}{8\,\pi^3 n^4} - \frac{208+240\,\pi^2+15\,\pi^4}{240\,\pi^5 n^5} + \frac{208+80\,\pi^2+3\,\pi^4}{96\,\pi^5 n^6} \\
& - \frac{9344+21840\,\pi^2+4200\,\pi^4+105\,\pi^6}{6720\,\pi^7 n^7} + \frac{9344+7280\,\pi^2+840\,\pi^4+15\,\pi^6}{1920\,\pi^7 n^8} \\
& - \frac{315\,\pi^8+784896\,\pi^2+305760\,\pi^4+23520\,\pi^6+199936}{80640\,\pi^9 n^9} \\
& + \frac{35\,\pi^8+261632\,\pi^2+61152\,\pi^4+3360\,\pi^6+199936}{17920\,\pi^9 n^{10}} \\
& - \frac{415800\,\pi^8+98968320\,\pi^2+10090080\,\pi^6+64753920\,\pi^4+3465\,\pi^{10}+16719872}{3548160\,\pi^{11} n^{11}} \\
& + \frac{46200\,\pi^8+32989440\,\pi^2+1441440\,\pi^6+12950784\,\pi^4+315\,\pi^{10}+16719872}{645120\,\pi^{11} n^{12}} + o(\frac{1}{n^{12}})
\end{aligned}
$$

Ce qui, évalué numériquement pour $n = 10$, donne la même valeur que nous avions obtenue au début par une résolution numérique de l'équation $\tan(u) = u$:

```
> evalf(subs(n=10,"));
    32.95638904
```