

ACADÉMIE DE PARIS

THÈSE DE DOCTORAT  
DE  
L'UNIVERSITÉ PARIS 6

Spécialité: ACOUSTIQUE PHYSIQUE

présentée par

Régis Msallam

pour obtenir le grade de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 6

MODÈLES ET SIMULATIONS NUMÉRIQUES DE L'ACOUSTIQUE  
NON-LINÉAIRE DANS LES CONDUITS.

APPLICATION À L'ÉTUDE DES EFFETS NON-LINÉAIRES DANS LE  
TROMBONE ET À LA SYNTHÈSE SONORE PAR MODÈLE PHYSIQUE.

Soutenue le 4 décembre 1998

devant le jury composé de :

M.	P. BLANC-BÉNON	<i>Rapporteur</i>
M.	M. CAMPBELL	<i>Rapporteur</i>
M.	R. CAUSSÉ	<i>Examineur</i>
M.	F. DUBOIS	<i>Examineur</i>
M.	J. GILBERT	<i>Examineur</i>
M.	P.Y. HENNION	<i>Président</i>
M.	A. HIRSCHBERG	<i>Examineur</i>
M.	P.Y. LAGRÉE	<i>Examineur</i>

*Renverser l'écoute pour entendre la nature propre*

Shurangama Sutra

# Remerciements

Je tiens à remercier René Caussé qui a accepté de m'accueillir à l'IRCAM au sein de l'équipe acoustique instrumentale et m'a supporté pendant cinq longues années. Je remercie Mico Hirschberg et Joël Gilbert qui m'ont aidé à redresser la barre à la fin de la première et dont le soutien par la suite a été précieux.

J'adresse mes remerciements à François Dubois de l'Institut Aérotechnique de Saint-Cyr qui a assisté mes pas maladroits dans le calcul scientifique et s'est montré toujours intéressé par mes travaux.

Je remercie Xavier Pelorson qui m'a accueilli quelques jours au sein de l'ICP à Grenoble et m'a aidé à implanter un modèle de lèvres.

J'adresse mes remerciements à Samuel Dequidt qui a fourni un travail important sur ce modèle et m'a permis d'aller de l'avant pour la synthèse.

J'adresse mes remerciements à Ludovic Menguy pour nos fructueux échanges scientifiques.

Je remercie Monsieur Philippe Blanc-Benon et Monsieur Murray Campbell d'avoir accepté d'être rapporteurs et de relire ce document, ainsi que Messieurs Pierre-Yves Hennion et Pierre-Yves Lagrée qui ont accepté d'être membre du jury.

Je tiens à remercier mes collègues thésards de l'IRCAM, Philippe Derogis, Marc-Pierre Verge et Stephan Tassart qui élèvent maintenant des caribous en Gaspésie. Puisse leur entreprise prospérer. Je souhaite bon courage à tous les autres thésards.

Je remercie Marie-Hélène Serra, Sylvie Benoit pour leur aide et Gerard Bertrand pour sa bonne humeur.

J'adresse mes remerciements aux "matheux" de Saint-Cyr, à Marielle Verges et Bruno Quinnez qui m'ont aidé en début de thèse avec ces maudites équations d'Euler, à Abdel avec qui on a refait le monde tant de fois, à Françoise et ses éléments finis, à Marie-Thérèse et ses gâteaux, à Olivier et son cerf-volant, à Claude et son Raï, à Michel et ses "Sobolev", Stéphanie, à Mustapha, Pascal et à Philippe Destuyinder qui m'a accueilli au sein du bureau de calcul. A défaut de me souvenir des éléments finis, je n'oublierai pas les gâteaux et les parties de ping-pong.

Je remercie mes parents qui m'ont poussé à finir cette thèse et m'ont aidé moralement et financièrement.

Enfin, je remercie mes amis du Dharma sans qui ce monde serait bien sombre.

# Abstract

At high levels of playing, the trombone produces a typical brilliant timbre called “brassy sound” due to an enrichment of the high frequencies of the spectrum. In this study, we show that this character can be essentially explained by significant nonlinear acoustical propagation effects which lead to waves distortions through the bore of the instrument. These cumulating effects can produce shock waves as we verified experimentally.

In order to study and to model this, we mention the linear acoustical propagation principles in the pipes then those of nonlinear propagation. Then, based on a dimensionless analysis, we integrate the “quasi-monodimensional” equations taking in account the nonlinear propagation effects and the visco-thermal effects of the boundary layer. This problem is very similar to the aerodynamic one of coupling a perfect fluid with a boundary layer. Finally, we will discuss the general validity of the approximations which have been done and their implementation for the trombone. The choosen mathematical formula is convenient for numerical resolution. Based on a classical resolution scheme, we elaborate a simulation tool able to simulate classical phenomena of linear propagation in pipes and nonlinear propagation. Applied to a propagation at a high level in the slide of the trombone, we notice that the wave deformation is essentially due to the combination of the visco-thermal losses at the walls and the nonlinear distortion.

From the experimental and numerical results, and simplified hypothesis, we propose and compare two simple physical models for the synthesis of sound including the nonlinear distortion of propagation and a basic model of lips vibration. These self-oscillator models allow to simulate some realistic trombone sounds whose timbre varies with amplitude and in particular the “brassy” timbre at high amplitude.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>5</b>
1.1	Physique et modèles d'instruments de la famille des cuivres: rappel historique	5
1.2	Mise en évidence de non-linéarités de propagation . . . . .	6
1.3	Structure de la thèse . . . . .	13
	<b>Bibliographie</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>Notions de base de la propagation acoustique linéaire et non-linéaire dans les conduits</b>	<b>17</b>
2.1	Hypothèses et équations de base . . . . .	18
2.1.1	Variables . . . . .	18
2.1.2	Hypothèses . . . . .	18
2.1.3	Forme intégrale des équations de conservation . . . . .	19
2.1.4	Forme différentielle des équations de conservation . . . . .	19
2.1.5	Equations d'état et relations thermodynamiques . . . . .	19
2.2	Propagation linéaire en milieu dissipatif . . . . .	20
2.2.1	Théorie de Kirchhoff . . . . .	20
2.2.2	Approche de Lighthill . . . . .	24
2.3	Propagation non-linéaire en fluide non dissipatif . . . . .	25
2.3.1	Forme caractéristique . . . . .	25
2.3.2	Ondes simples . . . . .	27
2.3.3	Ondes de choc . . . . .	28
2.4	Propagation non-linéaire dans les conduits: influence des pertes viscothermiques	30
	<b>Bibliographie</b>	<b>31</b>
<b>3</b>	<b>Modèle théorique de la propagation non-linéaire dans les conduits</b>	<b>35</b>
3.1	Approche aérodynamique de l'acoustique . . . . .	36
3.1.1	Géométrie . . . . .	36
3.1.2	Hypothèses . . . . .	37
3.1.3	Equations de base . . . . .	38

3.1.4	Adimensionnement des équations de base . . . . .	38
3.1.5	Simplification des équations . . . . .	43
3.2	Intégration des équations quasi-monodimensionnelles du mouvement oscillant	46
3.2.1	hypothèses . . . . .	46
3.2.2	Equations quasi-monodimensionnelles du mouvement . . . . .	49
3.3	Extension au guide d'onde axisymétrique . . . . .	53
3.4	Simplification des équations du mouvement . . . . .	55
3.4.1	Approximation des équations de propagation . . . . .	55
3.4.2	Approximation des équations de couche limite . . . . .	57
3.4.3	Système couplé . . . . .	59
3.4.4	Comparaison avec les équations de Chester . . . . .	61
3.5	Conditions de validité des équations de propagation . . . . .	62
3.6	Application au trombone . . . . .	64
<b>Bibliographie</b>		<b>67</b>
<b>4</b>	<b>Modèle et simulations numériques</b>	<b>69</b>
4.1	Résolution numérique . . . . .	70
4.1.1	Méthodes numériques appliquées à la résolution des équations d'Euler	70
4.1.2	Schéma de Lax-Wendroff . . . . .	72
4.1.3	Viscosité artificielle . . . . .	76
4.1.4	Traitement numérique des noyaux de convolution . . . . .	77
4.1.5	Conditions limites . . . . .	78
4.2	Validation et simulations numériques . . . . .	83
4.2.1	Onde simple en fluide parfait: comparaison avec la méthode des caractéristiques . . . . .	83
4.2.2	Onde linéaire avec pertes visco-thermiques: comparaison avec la théorie de Kirchhoff . . . . .	86
4.2.3	Effets combinés des pertes visco-thermiques et de la non-linéarité de propagation . . . . .	87
4.2.4	Influence des conditions limites . . . . .	87
4.3	Application au trombone . . . . .	88
4.3.1	Hypothèse d'onde simple . . . . .	89
4.3.2	Propagation non-linéaire dans la coulisse . . . . .	91
<b>Bibliographie</b>		<b>94</b>
<b>5</b>	<b>Modèle physique simple du trombone</b>	
<b>Application à la synthèse sonore</b>		<b>97</b>
5.1	Modèle physique du trombone . . . . .	98
5.1.1	Modèle à non-linéarité de propagation extrinsèque . . . . .	98

5.1.2	Modèle à non-linéarité de propagation intrinsèque . . . . .	99
5.1.3	Propagation non-linéaire . . . . .	99
5.1.4	Pavillon linéaire . . . . .	104
5.1.5	Embouchure . . . . .	104
5.1.6	Excitateur non-linéaire . . . . .	104
5.1.7	Schéma des modèles complets pour la synthèse . . . . .	108
5.2	Résultats numériques . . . . .	110
5.2.1	Influence de la fonction d'aire . . . . .	110
5.2.2	Problèmes d'inversion de débit . . . . .	112
5.2.3	Influence de la non-linéarité de propagation . . . . .	112
 <b>Bibliographie</b>		 <b>121</b>
 <b>6 Conclusion générale</b>		 <b>127</b>
 <b>Annexes</b>		 <b>128</b>
 <b>A Approche Aérodynamique</b>		 <b>129</b>
A.1	Géométrie . . . . .	129
A.2	Hypothèses . . . . .	130
A.3	Equations de base . . . . .	130
A.4	Adimensionnement des équations de base . . . . .	131
A.4.1	Ecoulement secondaire (couche limite) . . . . .	131
A.4.2	Ecoulement principal . . . . .	134
A.5	Simplification des équations . . . . .	135
A.5.1	Hypothèses . . . . .	136
A.5.2	Approximations dans la couche limite . . . . .	136
A.5.3	Approximations dans l'écoulement principal ( $S_h \ll 1$ ) . . . . .	137
 <b>B Intégration des équations de propagation</b>		 <b>141</b>
B.1	Intégration de la masse . . . . .	141
B.2	Intégration de l'impulsion . . . . .	142
B.3	Intégration de l'énergie . . . . .	144
 <b>C Détermination des profils</b>		 <b>147</b>
 <b>D Vecteurs propres de la matrice de Riemann</b>		 <b>151</b>
D.1	Equations linéarisées . . . . .	151
D.2	Vecteurs et valeurs propres de la matrice de Riemann . . . . .	151
 <b>Bibliographie</b>		 <b>152</b>





---

# Chapitre 1

## Introduction générale

### 1.1 Physique et modèles d'instruments de la famille des cuivres: rappel historique

La plupart des instruments à vent fonctionnent grâce à une excitation de type “valve” contrôlée en pression [1]. Les mouvements d’une structure mécanique (anche ou lèvres) déstabilisée par les variations de la pression de l’air l’environnant, provoquent des fluctuations de la section d’entrée du résonateur acoustique (la colonne d’air de l’instrument) modulant ainsi le débit d’air correspondant (source de débit acoustique). L’ensemble du système mécanique couplé peut alors auto-osciller et produire des régimes permanents périodiques.

Une des premières études à ce propos remonte à Helmholtz le célèbre physicien dont la théorie est évoquée dans la référence [3]. Ce dernier distingue pour une anche deux types de comportements, le premier dit “inward” désignant une anche qui sous l’effet de la surpression d’alimentation tend à se fermer (anche de clarinette par exemple) et le second dit “outward” s’appliquant à une anche tendant au comportement opposé (comme les lèvres du tromboniste à première vue). Helmholtz montre alors théoriquement à partir d’un modèle simplifié (anche à un degré de liberté, résonateur décrit par son impédance d’entrée) que dans le cas “inward” la fréquence d’auto-oscillation (“fréquence de jeu”) est inférieure à la fréquence propre de l’anche et à la fréquence de résonance du résonateur, et, vice-versa pour le modèle outward. Ces considérations ont suscitées de nombreux travaux qui visent à étudier l’auto-oscillation des instruments à vents à partir d’un modèle simple comprenant une non-linéarité localisée (résultant en général du couplage entre la structure mécanique et l’écoulement du fluide) et un système à linéarité répartie, le résonateur acoustique [3, 4, 5, 6].

Dans le cas des cuivres, le modèle “outward” semble avoir les faveurs de la plupart des auteurs bien que des résultats expérimentaux avec des instrumentistes [7] et des mesures récentes sur une bouche artificielle semblent indiquer que le fonctionnement des lèvres ne peut être réduit à cette classification simpliste [8], en particulier si l’on s’intéresse au fonctionnement

sur tout le registre<sup>1</sup>. D'autres questions se profilent donc [3, 9, 8].

Ainsi la validité d'un modèle à un degré de liberté est questionnée. En effet, les visualisations du mouvement des lèvres indiquent clairement que l'on ne peut réduire ce dernier à un simple mouvement à un degré de liberté [10]. De plus, dans le cas des cordes vocales dont le fonctionnement présente des similitudes avec celui des lèvres, un modèle à un degré de liberté n'est pas suffisant car alors le couplage acoustique avec le résonateur n'est pas assez fort pour provoquer des auto-oscillations satisfaisantes, d'où la préférence donnée en parole aux modèles à deux degrés de liberté ("modèle à deux masses") [11, 12, 13].

De même, la description de l'écoulement hydrodynamique autour des cordes vocales est remise en question. Ainsi, une description plus réaliste du jet entre ces dernières (point de décollement variable, instationnarité . . .) modifie l'auto-oscillation [12].

Cependant, dans le cas des "cuivres", le simple modèle à un degré de liberté permet grâce au fort couplage avec le résonateur d'obtenir des régimes permanents satisfaisants pour la synthèse de sons [14, 15, 16].

Toutes les considérations précédentes portent sur la non-linéarité localisée et son couplage avec le résonateur. Un autre champ d'investigation réside en l'étude du rayonnement à l'extérieur de l'instrument. Cependant dans cet ouvrage, nous ne nous focaliserons pas sur les aspects précédents (hormis quelques modifications apportées au modèle à une masse, voir chapitre V) mais remettons en cause l'hypothèse de linéarité acoustique dans le résonateur!

## 1.2 Mise en évidence de non-linéarités de propagation

En effet, pour de fortes amplitudes de jeu (nuances "forte" et plus dans la trompette ou le trombone par exemple), les hypothèses classiques de l'acoustique linéaire (perturbations "infinitésimales") ne sont plus nécessairement vérifiées. Il peut en résulter un effet non-négligeable de distorsion non-linéaire des ondes qui se cumule sur la distance de propagation. Cette distorsion peut s'accompagner d'un transfert d'énergie des basses fréquences vers les hautes avec l'apparition de partiels aigus. Ce phénomène pourrait expliquer le timbre "cuivré" [17] car comme l'a remarqué Risset dès la fin des années soixante [18], la caractéristique du timbre "cuivré" n'est pas un spectre fixe mais plutôt une loi de variation du spectre, celui-ci s'enrichissant en partiels aigus quand l'intensité augmente.

Cependant, des mesures sur une trompette artificiellement soufflée [19] indiquent une fonction de transfert essentiellement linéaire entre la pression mesurée dans l'embouchure et celle à l'extérieur de l'instrument. L'enrichissement en harmoniques proviendrait ici plutôt de la non-linéarité localisée (l'excitateur).

Pourtant, dans le cas du trombone (en situation de jeu) Beauchamp [20] mesure une dépendance de la fonction de transfert avec l'amplitude de jeu. Bien qu'ayant des doutes sur la validité de ses mesures, il évoque alors l'éventualité d'une non-linéarité de propagation.

---

1. D'ailleurs le modèle de lèvres à un degré de liberté lui-même (couplé à un écoulement simplifié à l'extrême) ne peut se réduire à cette classification [2]

Ceci est confirmé dans les articles suivants [21] (voir ci-contre) et [22] où l'existence de fortes non-linéarités de propagation dans le trombone pouvant entraîner la formation d'ondes de choc a été expérimentalement mis en évidence.

Dans l'article qui suit, nous présentons des mesures de pression ainsi que des visualisations effectuées au laboratoire de dynamique des gaz et d'aéroacoustique de l'université technique d'Eindhoven. Les résultats indiquent la formation d'ondes de choc dans l'instrument pour de fortes nuances de jeu. Ces ondes de choc proviennent de la distorsion non-linéaire des ondes acoustiques se propageant dans le corps de l'instrument. En vue des applications à la synthèse sonore, nous proposons un moyen simple permettant de prendre en compte ce phénomène dans un modèle physique de trombone.

## Shock waves in trombones

A. Hirschberg

Eindhoven University of Technology, W&S, P.O. Box 513, 5600 MB Eindhoven, The Netherlands

J. Gilbert

Lab. d'Acoustique Université du Maine, URA CNRS 1101, BP 535 Av. O. Messiaen, 72017 Le Mans Cedex, France

R. Msallam

IRCAM/Centre Pompidou, 1 place Stravinsky, 75004 Paris, France and IAT/CNAM, 15 rue Marat, 78210 St-Cyr l'Ecole, France

A. P. J. Wijnands

Eindhoven University of Technology, W&S, P.O. Box 513, 5600 MB Eindhoven, The Netherlands

Received 20 March 1995; revised 18 September 1995; accepted 10 October 1995

Based on physical models of musical instruments and of the human voice, a new generation of sound synthesizers is born: virtual instruments. The models used for wind instruments are simple feedback loops in which a nonlinear sound source drives a linear filter representing the pipe of the instrument. While very rewarding musical sounds have been obtained with these models, it has become obvious that some essential phenomena escape such a description. In particular the brightness of the sound generated by trombones is expected to be due to the essential nonlinearity of the wave propagation in the pipe. At fortissimo levels this leads to shock wave formation observed in our experiments both from pressure measurements and flow visualization. A modest modification of the physical model could already take this phenomenon into account. The key idea is that the nonlinear effect is essential for the transfer of sound from the source toward the listener, but can be ignored in a model of the generation of the pipe oscillations. © 1996 Acoustical Society of America.

PACS numbers: 43.75.Fg

Wind instruments are currently described as feedback systems in which a nonlinear amplifier, the sound source, drives a linear filter, the pipe.<sup>1</sup> Highly simplified physical models of the clarinet and of the violin based on the method proposed by Mc Intyre *et al.*<sup>2</sup> have demonstrated that musically interesting signals could be obtained by caricatures which require only a modest computational power to produce sound in real time. The first commercial “virtual instruments” based on this principle were welcomed last year as musically very rewarding.<sup>3</sup> These models are obviously also useful as design tools for the craftsmen of conventional musical instruments. Even more simplified “source/filter” models, in which the feedback from the filter toward the source is ignored, allow a considerable data compression of the speech signal in telecommunication. Better physical models of both wind instruments and of the human voice production would certainly be welcome for a wide range of applications.

The nonlinearity of the oscillator is a key aspect which is essential to reach steady oscillations in a feedback system and to determine the perceptive quality of the sound.<sup>1</sup> We focus in this paper on the hypothesis of a linear response of the pipe which has already been subject to controversy in the recent past. Backus and Hundley<sup>4</sup> report an essentially linear transfer function between the mouthpiece pressure fluctuations of an artificially blown trumpet and the radiated sound field at the listener position. Only a few percent second harmonic generation by nonlinear distortion were observed at the highest levels. These results were contradicted by later

measurements of the amplitude dependency of the transfer function of a trombone by Beauchamp.<sup>5,6</sup> Beauchamp<sup>7</sup> had some doubt about his data, in particular the analog tape recorder which had been used.

The trombone used in our experiments is shown in Fig. 1. In particular we indicate the position of the microphones. The first microphone is placed in the mouthpiece. The second microphone is placed at the end of the cylindrical part of the pipe. The third microphone is placed at the horn exit. We used piezoelectric gauges Kistler 603-A with corresponding charge amplifiers Kistler-type 5007, bandwidth 1 Hz  $f$  180 kHz for the internal pressure measurements and a 1/8-in. BK condenser microphone with corresponding electronics outside the pipe. This in combination with modern electronic registration guarantees the linearity and the bandwidth necessary in order to observe shock waves. Our experimental results, shown in Figs. 2 and 3, confirm a violent nonlinear behavior of a trombone and provide an indication for the cause of the brightness of related brass instruments played at fortissimo levels. We observe the formation of stepwise pressure jumps. For the fortissimo level  $ff$  of the higher note shown in Fig. 3 b, the pressure-rise time corresponds to the travel time of the wave on the surface of the microphone.

As we will explain further on, the nonlinearity in the transfer function depends crucially on a primary nonlinearity of the source. The flow control by the lip–mouthpiece combination results in a particularly sharp pressure rise during

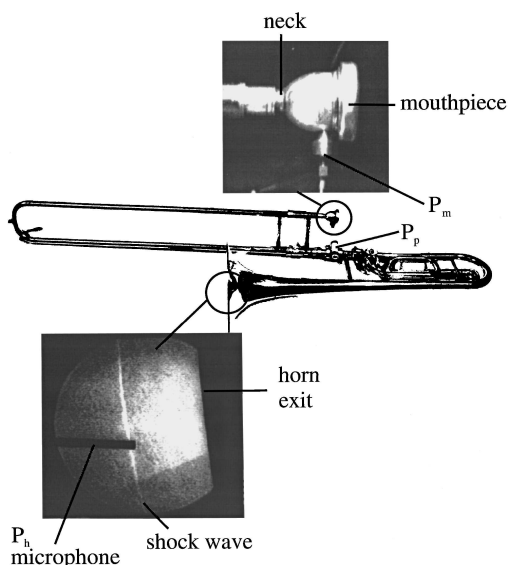


FIG. 1. A schematic representation of the trombone used in our experiments A. Courtois trombone type 155, A. Courtois mouthpiece type 10 PM with an indication of the position of the microphones. A typical flow visualization of a shock wave at the exit of the horn is shown. The mouthpiece geometry is specified. The pressures  $p_m$  in the mouthpiece and  $p_p$  at the end of the cylindrical pipe section have been measured by means of acceleration compensated piezoelectrical gages Kistler 603-A coated with a 0.1-mm silicone layer to avoid thermal effects. The bandwidth of the filters of the charge amplifiers was  $1 \text{ Hz} < f < 180 \text{ kHz}$ . An additional condenser microphone with a comparable bandwidth BK 1/8 in. measures the acoustical pressure  $p_h$  at 4.5 cm from the horn exit on the axis.

the oscillation. It is this compression phase which by nonlinear wave propagation generates a shock wave. We now try to understand why this occurs in a trombone while it does not occur in most instruments.

A simple explanation for the generation of this highly nonsinusoidal mouthpiece pressure  $p_m$  has been proposed for the trumpet by Backus and Hundley<sup>4</sup> and for the trombone by Elliot and Bowsher.<sup>8</sup> As shown in Fig. 2 for a low pitch, the observed mouthpiece pressure signal  $p_m$  is rather constant during much of the cycle, remaining close to the players driving pressure. This is due to the fact that the aperture between the lips is large compared to the neck of the mouthpiece shown in Fig. 1: the neck controls the flow. The pressure varies suddenly during the short time intervals in which the lips take the flow control over because they close completely. This results in the characteristic strong negative pressure pulses observed in Fig. 2. This effect becomes stronger with increasing playing level. The details of the collision of the lips at closure is certainly critical. In voiced speech production<sup>9</sup> or in double-reed instruments<sup>10</sup> most of the radiated high-frequency sound is generated in the closing phase of the “reed” movement. In contrast to this we will see that for the trombone the crucial phase of the cycle is the opening of the lips, corresponding to the compression phase in  $p_m$ .

It appears that Backus and Hundley’s mouthpiece pres-

sure signals are dominated by much lower frequencies than our signals. Their signals do not display such high-pressure rise rates  $(p_m/t)_{\max}$  as the signals we have measured. The 160-dB mouth pressure amplitudes reported by Backus and Hundley in their experiments, correspond to oscillation amplitudes of about 3 kPa. This is much lower than our pressure fluctuations as shown in Figs. 2 and 3. Also Backus and Hundley report measurements on a trumpet which can have a much shorter pipe than our trombone.

Now we can also rationalize the behavior of the pipe of the clarinet which we described earlier.<sup>11</sup> The reed channel of a clarinet is always much smaller than the pipe cross-sectional area. The flow therefore is always controlled by the reed movement. In addition to this, the lay of the mouthpiece of a clarinet is curved in such a way that the reed closes gradually, the flow is never interrupted abruptly. This results in a fairly sinusoidal oscillation of the pressure in the mouthpiece, even at fortissimo levels. Even though the oscillation amplitudes were comparable to those found in the trombone, we found a very reasonable prediction of a linear model for the transfer of sound from the pipe to the listener in the case of a clarinet.<sup>11</sup> We could not even observe the nonlinearities which certainly occur, for low pitches at fortissimo levels as a result of vortex shedding at the pipe end and tone holes.<sup>12</sup>

The very strong nonlinearity of the acoustical drive of the trombone already explains much of the observed difference between the sounds of the clarinet and of the trombone. Simple models as proposed by Strong<sup>13</sup> already generate typical brass sounds but certainly not the specific brightness of the sound at fortissimo levels. This effect is controlled by the nonlinear wave propagation in the pipe which we discuss now.

Since the most relevant high frequencies are very efficiently radiated away at the horn, we neglect reflection at the pipe termination. We therefore can assume the propagation of a simple wave into a uniform region. Starting from the measured mouthpiece pressure  $p_m(t)$  and assuming a frictionless simple wave propagation along a pipe of uniform cross section, we can obtain an analytical prediction of the wave distortion. The calculation is based on the classical method of characteristics.<sup>14</sup> Due to the increase in speed of sound  $c$  with the temperature and the convective effects, the top of the compression side of a wave tend to catch up with the foot of the wave. It appears that the ratio of the pressure fluctuations  $p_m$  to the mean atmospheric pressure  $P_{\text{at}}$  is not the relevant parameter to judge the severity of the nonlinear steepening. Theory predicts that for distance  $x$  larger than the critical distance  $x_s$ , given by

$$x_s = \frac{2 P_{\text{at}} c}{1 - p_m / t_{\max}}, \quad 1$$

where 1.4 is the Poisson constant, a shock wave is formed. The pressure profile predicted by integration along characteristics becomes multiple valued. The position and strength of this shock can be estimated from this multiple valued solution within the framework of a frictionless theory as, for example, the weak shock theory.<sup>14,15</sup> The shock path in a  $(x,t)$  diagram is along the bisectrix of the angle formed by two characteristics of the same family which intersect in

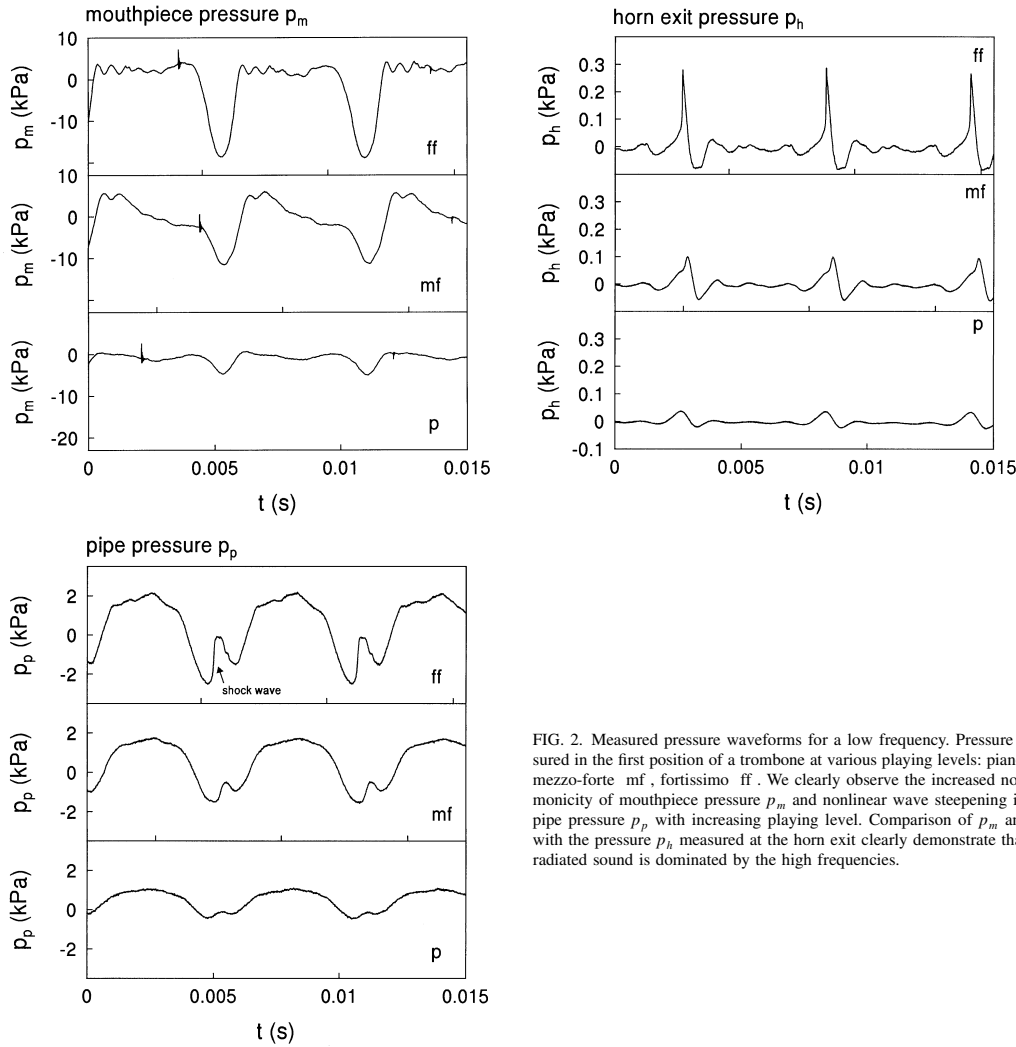


FIG. 2. Measured pressure waveforms for a low frequency. Pressure measured in the first position of a trombone at various playing levels: piano  $p$ , mezzo-forte  $mf$ , fortissimo  $ff$ . We clearly observe the increased nonharmonicity of mouthpiece pressure  $p_m$  and nonlinear wave steepening in the pipe pressure  $p_p$  with increasing playing level. Comparison of  $p_m$  and  $p_p$  with the pressure  $p_h$  measured at the horn exit clearly demonstrate that the radiated sound is dominated by the high frequencies.

the region of multiple value solutions. The weak shock speed is the mean value of the speed of the two intersecting characteristics. Equation 1 gives the first point of the shock path from which the shock path can be integrated numerically.

Even for the weak shocks which we expect here, shock waves certainly correspond to a dramatic amount of high frequencies in the radiated sound: a bright “metallic” sound. As  $x_s$  is determined by  $(p_m/t)_{max}$  we understand the importance of the initial nonlinearity of the source which we discussed above.

Using data shown in Figs. 2 and 3 we see by using the formula for  $x_s$  that shock waves can be expected at the fortissimo level because the cylindrical pipe segment in the trombone 2 to 3 m is longer than  $x_s$ . Indeed in Fig. 3 we see pressure discontinuities in the pressure signal measured at the end of this cylindrical pipe segment. Schlieren flow

visualization obtained with a Nanolite spark discharge 80 ns indicates again a very sharp wave front at exit of the horn see Fig. 1. This wave of at most a millimeter thickness corresponds to the sharp pulse in the pressure signal  $p_h$  detected by the microphone see Fig. 3. Shock waves are certainly formed in a trombone under typical playing conditions. We also expect that nonlinear wave propagation is musically relevant for the trumpet.

It is interesting to note that “bright” instruments such as the trumpet and the trombone are different from brass instruments such as Saxhorns or Flügelhorns. The bright instruments have a cylindrical pipe segment just downstream of the mouthpiece. The conical bore of the Saxhorns implies a faster decay of the wave which reduces the nonlinear wave steepening. This seems to confirm that the brightness is associated with shock wave formation.

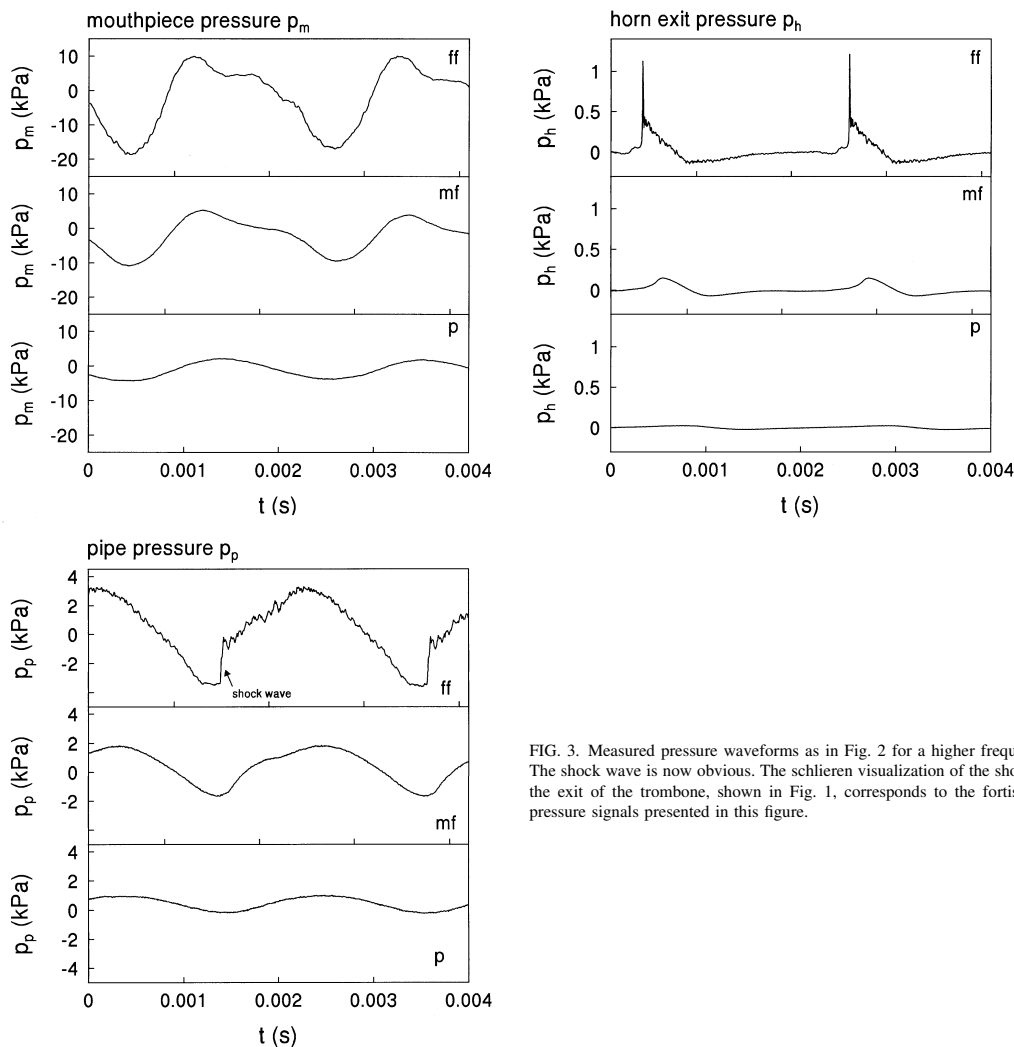


FIG. 3. Measured pressure waveforms as in Fig. 2 for a higher frequency. The shock wave is now obvious. The schlieren visualization of the shock at the exit of the trombone, shown in Fig. 1, corresponds to the fortissimo pressure signals presented in this figure.

The essential role of the cylindrical portion of the bore and the strong increase of radiation efficiency with the frequency are the important components in a simple explanation of this effect. As high frequencies are not reflected at the pipe termination they do not contribute to the regeneration of the lip oscillation. We expect that a simple linear model of the pipe taking into account at least the eight first resonances should be able to describe the lip oscillation. Once the lip movement is known, the calculated mouthpiece pressure could be used for a nonlinear propagation model. In this model the mouthpiece pressure would drive a simple wave into a cylindrical bore. Weak shock theory can be used to predict the shock wave, if relevant. The calculated pressure signal at the end of the cylindrical bore would then be radiated away by a linear model of the horn. Filtering would be used to keep the relevant audio range of frequency and to

avoid numerical problems with the shock waves. This type of caricature is simple enough so that it could be implemented in a virtual instrument.

#### ACKNOWLEDGMENTS

This collaboration between various institutes has been made possible by the support of the French Research Council CNRS, the Dutch Research Council NWO and the French Embassy in Den Haag.

<sup>1</sup>N. H. Fletcher and T. D. Rossing, *The Physics of Musical Instruments* Springer-Verlag, New York, 1991.

<sup>2</sup>M. E. McIntyre, R. T. Schumacher, and J. Woodhouse, "On the oscillations of musical instruments," *J. Acoust. Soc. Am.* **74**, 1325–1345 1983.

<sup>3</sup>E. Rideout, "Yamaha VL1 virtual acoustic synthesizer," *Keyboard* **20**, 104–118 June 1994.

- <sup>4</sup>J. Backus and T. C. Hundley "Harmonic generation in the trumpet," *J. Acoust. Soc. Am.* **49**, 509–519 1971 .
- <sup>5</sup>J. Beauchamp, "Analysis of simultaneous mouthpiece and output waveforms," Audio Engineering Society preprint No. 1626 1980 .
- <sup>6</sup>J. Beauchamp, "Wind instrument transfer response," paper presented at the ASA meeting, Seattle 1990 .
- <sup>7</sup>J. Beauchamp private communication, 1990 .
- <sup>8</sup>S. J. Elliott and J. M. Bowsher, "Regeneration in brass wind instruments," *J. Sound Vib.* **83**, 181–217 1982 .
- <sup>9</sup>X. Pelorson, A. Hirschberg, R. R. van Hassel, A. P. J. Wijnands, and Y. Auregan, "Theoretical and experimental study of quasisteady-flow separation within the glottis during phonation," *J. Acoust. Soc. Am.* **96**, 3416–3431 1994 .
- <sup>10</sup>A. Ya. Gokhshtein, "Self-vibration of finite amplitude in a tube with a reed," *Sov. Phys. Dokl.* **24**, 739–741 1979 .
- <sup>11</sup>A. Hirschberg, J. Gilbert, A. P. J. Wijnands, and A. M. C. Valkering, "Musical aero-acoustics of the clarinet," *J. Phys. IV, Colloq.* **C5**, 559–568 1994 .
- <sup>12</sup>J. H. M. Disselhorst and L. van Wijngaarden, "Flow in the exit of open pipes during acoustic resonance," *J. Fluid Mech.* **99**, 293–319 1980 .
- <sup>13</sup>W. J. Strong and D. J. Dudley, "Simulation of a player-trumpet system," in *Proceedings of the Stockholm Musical Acoustics Conference SMAC 93* Royal Swedish Academy of Music, Stockholm, 1994 , No. 79, pp. 520–524.
- <sup>14</sup>A. D. Pierce, *Acoustics* Acoustical Society of America, Woodbury, NY, 1989 , 2nd ed.
- <sup>15</sup>D. Crighton, A. P. Dowling, J. E. Ffowcs Williams, M. Heckl, and F. G. Leppington, *Modern Mathematical Methods in Acoustics* Springer-Verlag, London, 1992 .



## 1.3 Structure de la thèse

La méthode des caractéristiques telle qu'elle est proposée dans le précédent article s'appuie sur l'hypothèse d'un fluide non-visqueux. Or, dans les théories linéaires classiques de la propagation en tuyau droit, la déformation de l'onde propagative est essentiellement guidée par l'effet cumulatif des pertes visco-thermiques aux parois. L'étude de l'influence de ces dernières dans le fonctionnement des instruments à vents à fait l'objet de nombreux travaux [23, 24, 25]. Ceux ci doivent donc être complétés dans le cas des cuivres par l'étude des effets combinés de la propagation non-linéaire et des pertes visco-thermiques et dans cet ouvrage, nous tenterons donc d'apporter une pierre à la compréhension de ces mécanismes.

Ainsi, dans le premier chapitre, nous rappelons tout d'abord les théories de l'acoustique linéaire en conduite puis les théories classiques de l'acoustique non-linéaire.

Dans le second chapitre, suivant une analyse phénoménologique nous réécrivons les équations non-linéaires quasi-unidimensionnelles de propagation nous ramenant à une formulation de type "couplage fluide parfait-couche limite". Nous discutons l'importance des différents termes négligés et la validité de ces équations pour décrire le champ acoustique dans les instruments à vent.

Dans le chapitre suivant, nous proposons un modèle numérique classique pour la résolution directe de ces équations que nous validons sur des cas d'école simples. Nous appliquons modestement ensuite nos travaux à l'étude de la propagation non-linéaire dans le trombone.

A partir des hypothèses et conclusions de l'article [21] et des chapitres précédents, nous proposons et étudions dans le dernier chapitre deux modèles physiques simples de trombone incluant les non-linéarités localisée (modèle de lèvres) et répartie. Le premier dit "extrinsèque", s'appuyant sur une hypothèse de l'article précédent, ne prend pas en compte la non-linéarité de propagation dans l'auto-oscillation du système contrairement au second qui sera dit "intrinsèque". Ces deux modèles seront comparés au modèle linéaire quant à leurs résultats numériques et sonores.



# Bibliographie

- [1] Benade A.H. *Fundamentals of Musical Acoustics*. Oxford University Press, 1976.
- [2] Campbell M. Greated C. *The Musician's Guide to Acoustics*. Schirmer Books, 1987.
- [3] Elliot S.J. and Bowsher J.M. Regeneration in brass wind instruments. *Journal of Sound and Vibration*, 83:181–217, 1982.
- [4] Adashi S. and Sato M. Trumpet sound simulation using a two-dimensional lip vibration model. *J. Acoust. Soc. Am.*, 99(2):1200–1209, 1996.
- [5] Jorno D. Etude théorique et expérimentale de l'auto-oscillation des lèvres en présence d'un couplage acoustique. rapport DEA ATIAM, ICP Grenoble, 1996.
- [6] Juin F. Simulations numériques d'instruments de type cuivre. rapport DEA d'Acoustique Appliquée de l'université du Maine, Le Mans, 1996.
- [7] Chen F.C. and Weinreich G. Nature of the lip reed. *J. Acoust. Soc. Am.*, 99(3):1227–1233, 1996.
- [8] Gilbert J., Ponthus S., and Petiot J.F. Artificial buzzing lips and brass instruments: experimental results. *J. Acoust. Soc. Am.* to appear.
- [9] Rodet X. One and two mass model oscillations for voice and instruments. In *Proc. ICMC 95*, Banff, 1995.
- [10] Copley D.C. and Strong W.J. A stroboscopic study of lip vibrations in a trombone. *J. Acoust. Soc. Am.*, 99(2):1219–1226, 1996.
- [11] Ishisaka K. and Flanagan J.L. Synthesis of voiced sounds from a two-mass model of the vocal cords. *Bell System Technical Journal*, 51:1233–1268, 1972.
- [12] Pelorson X., Hirschberg A., van Hassel R.R., and Wijnands A.P.J. Theoretical and experimental study of quasisteady-flow separation within the glottis during phonation. application to a modified two-mass model. *J. Acoust. Soc. Am.*, 96(6):3416–3430, 1994.
- [13] Pelorson X., Msallam R., Gilbert J., and Hirschberg A. Fluid dynamic aspects of human voice and brass instruments: implications for sound synthesis. *Proceedings of the 16<sup>th</sup> International Congress on Acoustics and 135<sup>th</sup> Meeting of the Acoustical Society of America*, Seattle, 1998.
- [14] Dietz P. and Amir N. Synthesis of trumpet tones by physical modeling. In *Proc. International Symposium on Musical Acoustics*, Dourdan, 1995.

- [15] Vergez C. and Rodet X. Model of trumpet functioning: real time simulation and experiment with an artificial mouth. In *Proceedings of the Institut of Acoustics, ISMA'97*, Edimbourgh, 1997.
- [16] Msallam R., Dequidt S., Tassart S., and Caussé R. Physical model of the trombone including non-linear propagation effects. In *Proceedings of the Institut of Acoustics, ISMA'97*, Edimbourgh, 1997.
- [17] Gilbert J. and Msallam R. Choc cuivrés. *Pour la Science*, fevrier 1998.
- [18] Risset J.C. Son musical et perception auditive. *Pour la Science*, novembre 1986.
- [19] Backus J. and Hundley T.C. Harmonic generation in the trumpet. *J. Acoust. Soc. Am.*, 49:509–519, 1971.
- [20] Beauchamp J. Wind instrument transfer response. Paper presented at the ASA meeting, 1990.
- [21] Hirschberg A., , Gilbert J., Msallam R., and Wijnands A. Shock waves in trombones. *J. Acoust. Soc. Am.*, 99(3):1754–1758, 1996.
- [22] Gilbert J. and Petiot J.F. Brass instruments, some theoretical and experimental results. In *Proceedings of the Institut of Acoustics, ISMA'97*, Edimbourgh, 1997.
- [23] Nederveen K. *Acoustical aspects of woodwind instruments*. Fritz Knuf Publications, Amsterdam, 1969.
- [24] Caussé R., Kergomard J., and Lurton X. Input impedance of brass instruments-comparison with experiment and numerical models. *J. Acoust. Soc. Am.*, 75(1):241–254, 1984.
- [25] Kergomard J. *champ interne et champ externe des instruments à vents*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, 1981.

---

## Chapitre 2

# Notions de base de la propagation acoustique linéaire et non-linéaire dans les conduits

### Introduction

Dans le cas de la propagation acoustique linéaire “classique” dans un fluide, les perturbations sont supposées d’amplitude si faible que l’on néglige les termes non-linéaires dans les équations du mouvement (les équations de Navier-Stokes). Le milieu est en général aussi supposé linéaire et les équations d’état du fluide sont linéarisées. En dérivant les équations du mouvement, on retrouve alors l’équation des ondes qui est à la base des méthodes de résolution de la plupart des problèmes de propagation acoustique.

Dans les conduits, Kirchhoff a ainsi montré [1] que la déformation en cours de propagation d’une onde plane (absorption linéaire et dispersion) obéit essentiellement aux effets cumulatifs des couches limites visco-thermiques aux parois.

Cependant, à forte amplitude cette description n’est pas toujours suffisante car elle ne rend pas compte d’effets non-linéaires qui par accumulation au cours de la propagation peuvent engendrer des phénomènes de distorsion pouvant aller entraîner la formation d’onde de choc [2] ou l’apparition d’écoulement moyen (“acoustic streaming”) [1]. L’étude de tels phénomènes nous fait entrer dans le domaine de l’acoustique non-linéaire, ce qui nécessite un retour aux équations de base de la dynamique des gaz (que l’on rappellera en début de chapitre) afin d’inclure des termes négligés auparavant. En simplifiant et manipulant ces équations, il est possible de déterminer des équations d’onde généralisées analogues des équations de Lighthill (de l’aéro-acoustique) [3] mais ces équations ne sont pas toujours adaptées et on préfère souvent travailler directement sur les équations de la dynamique des gaz (aux dérivées partielles d’ordre inférieur).

Ainsi l’équation des ondes laisse la place aux équations du type “Burgers” et aux formes ca-

caractéristiques couramment utilisées en dynamique des gaz (et dans la plupart des problèmes de transport [4]). Dans quelques cas simples il existe des solutions analytiques, par exemple pour une onde plane progressive en fluide parfait (onde simple) [5] [4].

Dans le cas de la propagation dans les conduits, les effets cumulatifs de paroi et de distorsion non-linéaire entrent en compétition. Chester [7] a établi des équations de propagation sous forme caractéristique en intégrant les pertes visco-thermiques linéaires (de volume et de paroi). On peut en déduire ainsi une équation de Burgers généralisée pour une onde propagative. Des équations similaires sont utilisées pour décrire la propagation dans des milieux où d'autres mécanismes d'absorption ne sont pas négligeables [3].

## 2.1 Hypothèses et équations de base

### 2.1.1 Variables

Les variables caractéristiques du fluide sont les suivantes :

- Les variables d'espace tridimensionnel,  $x_i$  désignant la  $i^{eme}$  variable.
- La densité  $\rho$ .
- Les trois composantes du vecteur vitesse,  $u_i$  désignant la  $i^{eme}$  composante.
- $n_j$  la normale extérieure à la surface d'un élément de fluide suivant la  $j^{eme}$  direction.
- La pression  $p$ .
- L'énergie interne du fluide  $e$  défini par unité de masse.
- La température  $T$ .
- Les viscosités dynamique  $\mu$ , volumique  $\mu_v$  et le coefficient de dilatation  $\beta = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_\rho$ .
- La viscosité cinématique  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ .
- La conductivité thermique  $K$ .
- Les capacités calorifiques  $c_v = \left( \frac{\partial e}{\partial T} \right)_V$  et  $c_p = \left( \frac{\partial e}{\partial T} \right)_p$ .

### 2.1.2 Hypothèses

Voici les principales hypothèses menant aux équations de base de constitution et de mouvement :

- Fluide newtonien.
- On néglige les phénomènes de relaxation (hypothèse de Stokes [8]).
- Il n'y a ni force de volume ni source interne de chaleur.
- Le gaz vérifie la loi des gaz parfaits à capacités calorifiques constantes.
- On suppose  $\mu$  et  $\beta$  constants. On exclut ainsi des variations de température trop importantes (supérieures à  $50^\circ C$ ) [8].

### 2.1.3 Forme intégrale des équations de conservation

On considère alors les équations de conservation dans leur forme intégrale pour un volume  $V$  arbitraire de fluide, délimité par une surface  $S$  [4].

On adopte la convention de sommation sur les indices répétés.

Equation de conservation de la masse :

$$d_t \int_V \rho dV + \int_S \rho n_j u_j dS = 0 \quad (2.1)$$

Equation de conservation de l'impulsion :

$$d_t \int_V \rho u_i dV + \int_S (\rho u_i n_j u_j - \tau_{ij} n_j) dS = 0 \quad (2.2)$$

Equation de conservation de l'énergie :

$$d_t \int_V \left( \frac{\rho u_i^2}{2} + \rho e \right) dV + \int_S \left[ \left( \frac{\rho u_i^2}{2} + \rho e \right) n_j u_j - u_i \tau_{ji} n_j + n_j q_j \right] dS = 0 \quad (2.3)$$

Avec le tenseur des contraintes :

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} - \frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \mu_v \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \quad (2.4)$$

et le flux de chaleur aux frontières du domaine :

$$q_j = -K \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (2.5)$$

### 2.1.4 Forme différentielle des équations de conservation

En supposant que le volume  $V$  est indépendant de  $t$ , que les variables fluides sont continûment différentiables et en utilisant le théorème de la divergence afin de transformer les intégrales de surface en intégrales de volume, on peut faire tendre le volume arbitraire vers 0 et obtenir ainsi la forme différentielle des équations de conservation :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0 \quad \text{masse} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j - \tau_{ij}) = 0 \quad \text{impulsion} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{u_i^2}{2} + \rho e \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \frac{\rho u_i^2}{2} + \rho e \right) u_j - u_i \tau_{ji} + q_j \right\} = 0 \quad \text{énergie} \quad (2.8)$$

### 2.1.5 Equations d'état et relations thermodynamiques

L'hypothèse de gaz parfait à capacités calorifiques constantes nous permet d'écrire :

$$p = \mathcal{R} \rho T \quad (2.9)$$

$$e = c_v T \quad (2.10)$$

avec  $\mathcal{R} = (c_p - c_v) = c_v(\gamma - 1)$  et  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ .

## 2.2 Propagation linéaire en milieu dissipatif

### 2.2.1 Théorie de Kirchhoff

On va brièvement rappeler la théorie de Kirchhoff dans sa formulation la plus générale (temporelle et fréquentielle) [9]. Les équations de départ sont les équations tridimensionnelles de conservation et les équations d'état du fluide qui sont linéarisées autour d'une position d'équilibre, l'état de repos défini par les grandeurs de référence  $\rho_0$ ,  $P_0$ ,  $T_0$  et  $u_0 = 0$ .

Les équations de conservation se réduisent alors à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u_j}{\partial x_j} &= 0 \\ \rho_0 \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} - \mu \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \mu_v \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right\} \\ \rho_0 c_p \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} &= K \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} \end{aligned}$$

et l'équation d'état linéarisée :

$$\frac{p}{P_0} = \frac{\rho}{\rho_0} + \frac{T}{T_0}$$

où les variables physiques (densité, pression, température et vitesse) représentent ici des **fluctuations** autour de l'état de référence du fluide.

Après décomposition classique du champ de vitesse en une **vitesse irrotationnelle** superposée à une **vitesse à divergence nulle** et diverses manipulations, on obtient l'équation de propagation suivante pour l'écart de température :

$$\left[ \frac{1}{c_0} \partial_t - \frac{\Gamma - R}{2} \left( \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{-1} \Delta \right] \left[ \frac{1}{c_0} \partial_{tt}^2 - \frac{\Gamma + R}{2} \Delta \right] T = 0$$

avec  $\Delta$  l'opérateur Laplacien,  $c_0 = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$  la célérité du son et les opérateurs linéarisés

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma - R}{2} &= l_h \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\Gamma + R}{2} &= 1 + [l_v + (\gamma - 1)l_h] \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}$$

où  $l_v = (\frac{4}{3}\mu + \mu_v)/\rho_0 c_0$  et  $l_h = \frac{K}{\rho_0 c_0 c_p}$  désignent respectivement les longueurs caractéristiques des effets visqueux et thermiques.

Le champ de température est ensuite décomposé en un champ acoustique  $T_a$  et d'un champ entropique  $T_h$  tels que  $T = A_a T_a + A_h T_h$ .



Considérons maintenant un guide cylindrique tel que la vitesse et les écarts de température soient nuls à la paroi. Soit une onde propagative dans le sens des  $x$  croissants, en régime harmonique de vitesse angulaire  $w$ , axisymétrique et de signature  $A(r)e^{jwt}e^{-jk'x}$  où  $r$  désigne la coordonnée radiale,  $A$  l'amplitude de l'onde et  $k'$  le nombre d'onde. La température vérifie alors des équations de Bessel dont les solutions s'écrivent ( $J_0$  désignant la fonction de Bessel d'ordre 0):

$$\begin{aligned} T_h &= J_0\left(r\sqrt{k_h^2 - k'^2}\right) e^{-jk'x} e^{jwt} \\ T_a &= J_0\left(r\sqrt{k_a^2 - k'^2}\right) e^{-jk'x} e^{jwt} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} k_h^2 &= -\frac{jw}{c_0 l_h}, \\ k_a^2 &= \frac{k^2}{1+jkl_{vh}} \text{ où } k = \frac{w}{c_0} \end{aligned}$$

et

$l_{vh} = l_v + (\gamma - 1)l_h$  une longueur caractéristique des effets viscothermiques.

A ce stade, on peut effectuer les **hypothèses** suivantes :

- $k_h^2 \gg k'^2$  soit la longueur caractéristique de la diffusion thermique est très petite devant la longueur d'onde (de même pour la diffusion visqueuse  $k_v^2 \gg k'^2$ ).
- $\sqrt{kl_{vh}} \ll 1$  soit  $k_a \approx k$
- $r\sqrt{k^2 - k'^2} \ll 1$

soit en utilisant au voisinage de zéro :  $J_0(X) \approx 1 - \frac{X^2}{4}$ , on obtient :

$$T = \left\{ \left[ 1 - \frac{1}{4}(k^2 - k'^2)r^2 \right] A_a + J_0(k_h r) A_h \right\} e^{-jk'x} e^{jwt}$$

De même à l'aide des équations de base, on obtient :

$$\begin{aligned} p &= \left( \frac{\rho_0 c}{jw} \right) A_a T_a = \left( \frac{\rho_0 c}{jw} \right) A_a \left[ 1 - \frac{1}{4}(k^2 - k'^2)r^2 \right] \\ u_x &= A_0 u_{vx} + u_{lx} = A_0 u_{vx} - jk' \left( \frac{1}{k^2} A_a T_a + \frac{\gamma - 1}{k_h^2} A_h T_h \right) \\ u_r &= A_0 u_{vr} + u_{lr} = \frac{r}{2} \left[ -jk' K(k_v r) A_0 u_{vx} + \left( 1 - \frac{k'^2}{k^2} \right) A_a T_a - (\gamma - 1) K(k_h r) A_h T_h \right] \end{aligned}$$

où  $u_v$  et  $u_l$  désignent respectivement les composantes indivergente et irrotationnelle de la vitesse  $u$  de projection radiale  $u_r$  et longitudinale  $u_x$  avec  $u_{vx} = J_0(k_v r) e^{-jk'x} e^{jwt}$ .  $K(X) = \frac{2J_1(X)}{XJ_0(X)}$  désigne la fonction de Kelvin et  $A_0$ ,  $A_a$ ,  $A_h$  trois constantes à déterminer grâce aux

conditions limites, c'est à dire à la paroi en  $r = R$ ,  $T(R) = 0$  et  $u_x(R) = u_r(R) = 0$ .

On obtient finalement la célèbre **équation de dispersion** (équation de Kirchhoff) :

$$k'^2 = k^2 \left[ \frac{1 + (\gamma - 1)K(k_h R)}{1 - K(k_v R)} \right] \quad (2.11)$$

avec  $k_h^2 = -\frac{jw}{c l_h}$  et  $k_v^2 = -\frac{jw}{c l_v}$  où  $l_v = \frac{\mu}{\rho_0 c}$  est une longueur caractéristique des effets visqueux.

On en déduit la constante de propagation, conjugué du nombre d'onde ( $\Gamma = jk'$ ) :

$$\Gamma = j \frac{w}{c} \sqrt{\frac{1 + (\gamma - 1)K(k_h R)}{1 - K(k_v R)}} \quad (2.12)$$

Par intégration sur la section du guide d'onde, on déduit la vitesse axiale moyenne :

$$\bar{u}_x = \frac{k'}{\rho_0 w} \bar{p} [1 - K(k_v R)] = \frac{1}{\rho_0 c} \bar{p} \sqrt{1 + (\gamma - 1)K(k_h R)} \sqrt{1 - K(k_v R)} \quad (2.13)$$

où  $\bar{p}$  désigne la valeur moyenne de la pression dont la variation relative de l'axe  $r = 0$  à la paroi  $r = R$  est de l'ordre de  $(k^2 - k'^2)R^2 \ll 1$ , on considère alors que la pression est quasi-uniforme suivant la section, soit que  $\bar{p} = p$ . On retrouve cette propriété de **quasi-uniformité** pour la température acoustique  $T_a$  et pour la composante irrotationnelle de la vitesse axiale. On en déduit que la dépendance radiale de cette dernière provient essentiellement de sa composante tourbillonnaire  $u_{vx}$ .

On peut dire alors que le **profil de vitesse** axiale est déterminé essentiellement par les effets de la viscosité (de même que le profil de température est déterminé par les effets de la conduction thermique).

Connaissant la constante de propagation et l'admittance itérative ( $\frac{\bar{u}_x}{\bar{p}}$ ), on peut déduire une impédance linéique série et une admittance linéique parallèle de la ligne de transmission équivalente à la propagation acoustique et donc retrouver un formalisme courant chez les acousticiens.

L'approche de Kirchhoff permet donc de décrire la solution sur l'ensemble de la section d'un problème de propagation en guide d'onde cylindrique dans un large domaine de fréquence et de rayon.

On peut simplifier la solution par développement asymptotique dans deux cas extrêmes :

- Cas des **"tuyaux étroits"** :  $k_v R \ll 1$  et  $k_h R \ll 1$

C'est le cas où l'ordre de grandeurs des épaisseurs de couche limite est plus grand que le rayon du tube. On renvoie aux références [10] [11] pour une analyse de ce cas.

- Cas des **"tuyaux larges"** :  $k_v R \gg 1$  et  $k_h R \gg 1$

On utilise le développement au premier ordre de la fonction K :  $K(X\sqrt{-j}) = \frac{\sqrt{2}}{X}(1-j)$

Soit pour les effets visqueux (idem pour les effets thermiques)

$$K(k_v R) = K \left( \sqrt{\frac{w}{c l_v}} R \sqrt{-j} \right) = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2c l_v}{w}} (1-j)$$

On peut simplifier de la sorte l'ensemble des grandeurs déterminées précédemment, en

particulier la constante de propagation qui s'écrit alors :

$$\Gamma = j \frac{w}{c} + \alpha \quad (2.14)$$

avec le coefficient d'amortissement

$$\alpha = \left( \sqrt{l'_v} + (\gamma - 1) \sqrt{l_h} \right) \frac{1}{R} \frac{w}{2c} \quad (2.15)$$

et une vitesse du son apparente (relation de dispersion)

$$c' = c \left[ 1 - \left( \sqrt{l'_v} + (\gamma - 1) \sqrt{l_h} \right) \frac{1}{R} \frac{c}{2w} \right] \quad (2.16)$$

## Bilan

Dans le cas des tuyaux larges, nous avons donc effectué un développement au premier ordre du paramètre  $\sqrt{\frac{w}{c l'_v}} R$  supposé très grand devant 1, ce que l'on peut écrire :

$$\frac{1}{R} \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0 w}} \ll 1 \quad (2.17)$$

de même pour les effets thermiques :

$$\frac{1}{R} \sqrt{\frac{K}{\rho_0 c_p w}} \ll 1 \quad (2.18)$$

Les solutions vérifiant ces conditions sont telles que les effets viscothermiques sont concentrés près des parois [10] en de fines épaisseurs appelées **couches limites** visqueuse et thermique dont l'ordre de grandeur est respectivement :

$$\delta_v = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0 w}} \quad (2.19)$$

$$\delta_h = \sqrt{\frac{K}{\rho_0 c_p w}} \quad (2.20)$$

Ainsi les conditions 2.17 et 2.18 signifient que l'épaisseur de couche limite est très petite devant le rayon du tuyau. Dans le cas de l'air, on vérifie que les couches limites visqueuse et thermique sont du même ordre de grandeur ( $\frac{\mu}{c_p K} = 0.72 \Rightarrow \delta_v \approx \delta_h$ ).

En amont de l'hypothèse "tuyaux larges", nous pouvons alors écrire la condition de quasi-uniformité  $(k^2 - k'^2) R^2 \ll 1$  comme suit :

$$\frac{wR}{c} \sqrt{\frac{w\mu}{\rho_0 c^2}} \ll 1 \quad (2.21)$$

et de même la condition  $\sqrt{k l_{vh}} \ll 1$  s'écrit :

$$\sqrt{\frac{w\mu}{\rho_0 c^2}} \ll 1 \quad (2.22)$$

Les solutions générales de Kirchhoff ont donc été simplifiées dans le cas où les pertes sont concentrées près des parois en une fine couche limite viscothermique.

### 2.2.2 Approche de Lighthill

Pour aboutir aux solutions simplifiées précédentes, on aurait pu dès le départ faire l'hypothèse de couche limite et simplifier les équations de base linéarisées. C'est l'approche de Lighthill [2] qui mène à la relation de dispersion au premier ordre de Kirchhoff [12].

Suivant Lighthill, nous négligeons ici les effets de conductivité thermique. Soit un écoulement incompressible le long d'une plaque plane (placée en  $y = 0$ ) soumis à une fluctuation sinusoïdale de gradient de pression uniforme suivant  $x$ . L'écoulement cisailé correspondant dit "couche limite de Stokes" obéit à l'équation de diffusion suivante :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p_e}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

avec les conditions limites

$$u|_{y=0} = 0 \text{ et } u|_{y \rightarrow \infty} = u_e$$

Soit pour une dépendance du gradient de pression en  $e^{i\omega t}$ , on obtient le profil de vitesse :

$$u(y, \omega) = (\rho i \omega)^{-1} (-\partial_x p_e) \left( 1 - e^{-y \left( \frac{i\omega}{\nu} \right)^{\frac{1}{2}}} \right) \text{ avec } \nu \text{ la viscosité dynamique.}$$

à l'extérieur  $u_e = (\rho i \omega)^{-1} (-\partial_x p_e)$  soit :

$$u - u_e = -u_e e^{-\sqrt{\frac{\nu}{2\omega}} \left( \frac{1+i}{2} \right) y}$$

On peut vérifier alors que l'ordre de grandeur de l'épaisseur de couche limite est :

$$\delta = \sqrt{\frac{\nu}{\omega}}$$

Cette dernière n'étant définie qu'arbitrairement, on peut choisir pour l'estimer plus précisément la distance à la paroi pour laquelle la vitesse longitudinale vaut 99% de la valeur de la vitesse extérieure [13].

En intégrant suivant  $y$ , on obtient le défaut de débit du à la couche limite :

$$\int_0^\infty (u_e - u) dy = (\rho i \omega)^{-1} (-\partial_x p_e) \sqrt{\frac{\nu}{i\omega}} = u_e \sqrt{\frac{\nu}{i\omega}}$$

Dans le cas d'un tuyau cylindrique dont le rayon est très grand devant l'épaisseur de couche limite, la couche limite acoustique visqueuse peu différente d'une couche de Stokes induit une modification du flux acoustique au travers de la section  $S$ . Ceci se traduit dans l'équation de la masse intégrée sur la section par l'apparition d'un défaut de débit masse corrigeant le terme de flux :  $S \partial_t \rho_e + \rho_0 \partial_x (S u_e - 2\pi R \int_0^\infty (u_e - u) dy) = 0$  où  $y$  désigne la distance normale aux parois du tuyau.

La conservation de la masse peut s'écrire alors dans le domaine fréquentiel :

$$(i\omega) \rho_e + \rho_0 (-ki) u_e = \rho_0 \frac{2}{R} \partial_x u_e \sqrt{\frac{\nu}{i\omega}} \tag{2.23}$$

On pourrait de la même façon intégrer des effets de couche limite thermique [12], ce qui se traduirait dans la conservation de la masse en une correction de la masse linéique par un défaut de masse et retrouver les formules de Kirchhoff au premier ordre pour les pertes viscothermiques dans un "tuyau large".

## 2.3 Propagation non-linéaire en fluide non dissipatif

### 2.3.1 Forme caractéristique

Dans le cas d'un fluide parfait à une dimension, la viscosité et la conductivité étant négligées, les équations de conservation s'écrivent :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0 \\ \partial_t(\rho \frac{u^2}{2} + \rho e) + \partial_x \left\{ (\rho \frac{u^2}{2} + \rho e) u + up \right\} = 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

soit sous une forme non-conservative :

$$\begin{cases} (\partial_t \rho + u \partial_x \rho) + \rho \partial_x u = 0 \\ \rho(\partial_t u + u \partial_x u) + \partial_x p = 0 \\ (\partial_t s + u \partial_x s) = 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

Après quelques manipulations [4], on obtient la forme caractéristique :

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} + \rho c \frac{du}{dt} = 0 & \quad \text{sur } C_+ : \frac{dx}{dt} = u + c \\ \frac{dp}{dt} - \rho c \frac{du}{dt} = 0 & \quad \text{sur } C_- : \frac{dx}{dt} = u - c \\ \frac{ds}{dt} = 0 & \quad \text{sur } P : \frac{dx}{dt} = u \end{aligned}$$

avec  $s$  l'entropie, la vitesse du son :  $c^2 = \gamma \frac{P}{\rho}$   
 et les dérivées particulières  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial}{\partial x}$  avec  $\lambda_i$  une vitesse le long d'une courbe caractéristique. Les caractéristiques  $C^\pm$  qui transportent des informations acoustiques dans les deux directions de l'espace sont des courbes du plan d'espace temps dont la pente est la vitesse du son relativement à la vitesse locale du fluide. Le long des caractéristiques  $P$  de pente la vitesse locale du fluide, l'entropie est conservée.

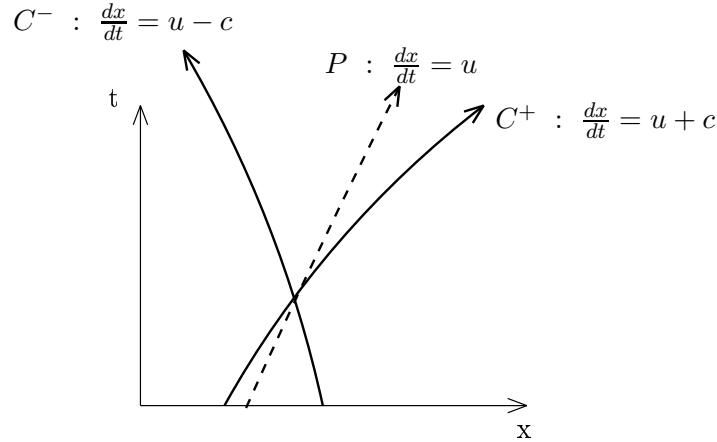


FIG. 2.1 – Courbes caractéristiques dans le plan \$(x,t)\$

Dans le cas d'un gaz idéal à capacités calorifiques constantes et pour un écoulement isentropique, on obtient pour les ondes acoustiques par intégration :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + (u \pm c) \frac{\partial}{\partial x} \right] \left( u \pm \frac{2c}{\gamma - 1} \right) = 0 \tag{2.26}$$

soit les célèbres invariants de Riemann :

$$\frac{2}{\gamma - 1} c \pm u = \text{constante} \quad \text{sur} \quad \frac{dx}{dt} = u \pm c \tag{2.27}$$

Les invariants sont donc des quantités qui se conservent le long des caractéristiques.

**Remarque :**

La notion de caractéristique ne s'applique pas uniquement à la dynamique des gaz et s'insère dans des théories mathématiques plus générales, en particulier la théorie des systèmes hyperboliques [4].

Ainsi, on peut écrire la formulation non-conservative sous la forme :

$$\partial_t W + G(W) \partial_x W = 0$$

avec le vecteur  $W = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ s \end{pmatrix}$  et la matrice  $G(W) = \begin{pmatrix} \rho & u & 0 \\ \frac{c^2}{\rho} & u & \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}$

où on a utilisé  $c^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$

Dans le cas isentropique, on peut vérifier [14] que les trois valeurs propres de la matrice G sont  $\lambda_1 = u - c$ ,  $\lambda_2 = u$ ,  $\lambda_3 = u + c$ , c'est à dire les vitesses de transport.

Les vecteurs propres associés sont :  $\Phi_1 = \begin{pmatrix} \rho \\ -c \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\Phi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -c^2 \end{pmatrix}$ ,  $\Phi_3 = \begin{pmatrix} \rho \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$

Les vecteurs propres étant linéairement indépendants et les valeurs propres réelles, on se trouve dans le cas d'un système hyperbolique.

### 2.3.2 Ondes simples

Dans le cas d'une propagation d'onde unidirectionnelle, on peut construire une solution simplement.

On se place dans le cas où le pied des caractéristiques  $C^+$  est issu de l'axe des temps (voir figure 2.2). Initialement, le gaz est au repos, soit  $u = 0$ ,  $c = c_0$  et  $S = S_0$ . Puisque l'entropie est constante le long de chaque caractéristique, elle le sera dans tout l'écoulement. Les caractéristiques  $C^-$  sont toutes issues de l'axe des  $x$  dans la zone uniforme. Les invariants s'écrivent donc :

$$\frac{2}{\gamma-1}c - u = \frac{2}{\gamma-1}c_0 \quad (2.28)$$

$$\frac{2}{\gamma-1}c + u = \text{constante} \quad \text{sur} \quad \frac{dx}{dt} = u + c \quad (2.29)$$

On vérifie alors :

$$u = \text{constante} \quad \text{sur} \quad C^+ : \quad \frac{dx}{dt} = c_0 + \frac{\gamma+1}{2}u \quad (2.30)$$

Pour une vitesse  $u$  donnée en  $x = 0$ , la pente est constante, les caractéristiques  $C^+$  sont donc des droites.

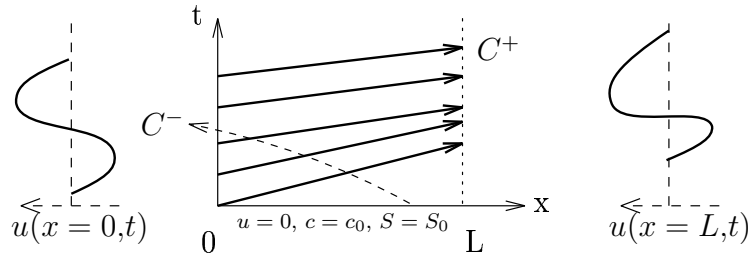


FIG. 2.2 - Droites caractéristiques dans le plan  $(x,t)$

La vitesse de propagation est donc fonction uniquement de la vitesse locale du fluide  $u(0,t)$  et le délai de propagation peut s'écrire pour tout  $x > 0$  :

$$d^+(t) = \frac{x}{u+c} = \frac{x}{c_0 + \frac{(\gamma+1)}{2}u(0,t)} \quad (2.31)$$

Dans le cas d'une excitation monochromatique de vitesse  $u(0,t) = u_0 \sin(\omega t)$ , on a :

$$u(x,t+d^+) = u_0 \sin(\omega t)$$

On peut vérifier alors que la solution implicite s'écrira :

$$u(x,t) = u_0 \sin \left( w \left[ t - \frac{x}{c_0 + \frac{(\gamma+1)}{2}u(x,t)} \right] \right) \quad (2.32)$$

La solution explicite nécessite une méthode de résolution numérique. Cependant dans le cas où  $(1 + \frac{\gamma+1}{2})\frac{u}{c_0} \ll 1$ , un développement au premier ordre permet de déterminer la solution de Fubini [5]:

$$u(x,t) = u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\sigma} J_n(n\sigma) \sin[n(\omega t - kx)] \text{ pour } \sigma < 1 \quad (2.33)$$

avec  $\sigma = \frac{x}{\bar{x}}$  l'abscisse  $x$  adimensionnée par la distance  $\bar{x}$  de la première intersection de deux caractéristiques  $C^+$  (distance de formation d'une onde de choc):

$$\bar{x} = \frac{2c_0}{(\gamma + 1)ku_0} \quad (2.34)$$

L'isentropie permet d'introduire la variable de pression en utilisant :

$$c = c_0 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \quad (2.35)$$

### 2.3.3 Ondes de choc

La méthode des caractéristiques, appliquée au cas d'une onde simple, mène à une solution multivaluée non physique lors de l'intersection des caractéristiques  $C^+$  (figure 2.3). Au basculement de l'onde correspond en réalité un front d'onde quasi discontinu, l'onde de choc. Dans une théorie de fluide parfait, on peut souvent approcher ce front d'onde par une discontinuité. Les équations différentielles de base (voir le paragraphe 2.1.4) s'appuyant sur l'hypothèse de la continuité des variables ne sont plus valables, il faut revenir alors à la forme intégrale pour inclure la discontinuité. Dans le cas de "chocs faibles", c'est à dire si le saut de pression de part et d'autre du choc est modéré ( $\frac{\Delta p}{p} \ll 1$ ), la théorie des ondes simples est toujours valide et la vitesse  $U$  de propagation de la discontinuité peut être approximée par :

$$U = \frac{(u + c)_1 + (u + c)_2}{2} = c_0 + \frac{u_1 + u_2}{2} \quad (2.36)$$

où les indices 1 et 2 désignent les valeurs de part et d'autre du choc (respectivement avant et après). La loi des "aires égales" permet de construire géométriquement le choc, la discontinuité délimitant la zone multivaluée en deux lobes d'aire égale [4] (figure 2.4).



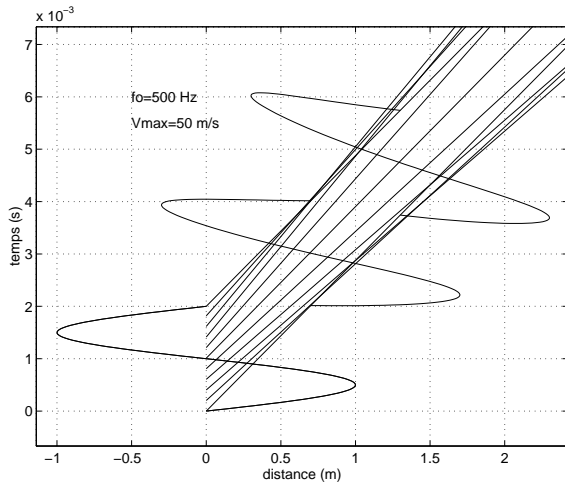


FIG. 2.3 – Intersection de caractéristiques

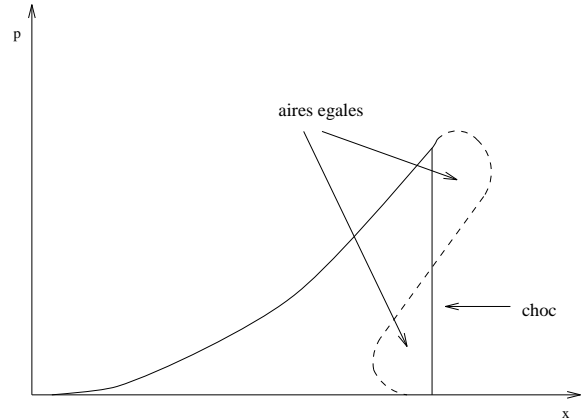


FIG. 2.4 – Construction géométrique du choc

Dans le cas de l'onde simple monochromatique, la solution de Fubini peut être étendue quand  $\sigma \geq 1$  grâce à la théorie des chocs faibles [5]. La solution s'écrira alors sous la forme :

$$u(\sigma, y) = u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{n\pi} V_2 + \frac{2}{n\pi\sigma} \int_{\phi_{min}}^{\pi} \cos n(\phi - \sigma \sin \phi) d\phi \right) \sin(ny) \quad (2.37)$$

avec la phase  $y = w(t - \frac{x}{c_0})$ ,  $V_2 = \frac{u_2}{u_0} = \sigma^{-1} j_0^{-1}(\sigma^{-1}) H(\sigma - 1)$  où  $j_0$  désigne la fonction de Bessel sphérique et  $H$  la fonction de Heaviside et :

$\phi_{min} = 0$  pour  $0 < \sigma < 1$  et  $\phi_{min} = \text{Arcsin} V_2$  pour  $\sigma > 1$ .

Quand  $\sigma < 1$ , on retrouve l'équation de Fubini. Si  $\sigma \gg 1$ , on tend vers la solution en dents de scie :

$$\frac{u}{u_0} = \begin{cases} \frac{1}{1+\sigma}(\pi - y) & \text{pour } 0 < y < \pi \\ \frac{1}{1+\sigma}(-\pi - y) & \text{pour } -\pi < y < 0 \end{cases} \quad (2.38)$$

Des solutions similaires existent dans le cas de la propagation d'une onde simple en fluide dissipatif [6, 3]. L'onde de choc n'apparaît plus comme une discontinuité et est alors étalée sur une certaine épaisseur. Pour de grande distance de propagation les effets dissipatifs l'emportent sur les effets non-linéaires. Les solutions sont obtenues à partir de l'**équation de Burgers** approchée qui s'obtient par changement d'échelle et s'écrit dans le cas où l'on néglige les effets de conduction thermique de la façon suivante:

$$\partial_x u - \frac{\gamma + 1}{2c_0^2} u \partial_\tau u = \frac{2}{3} \frac{\mu}{\rho_0 c_0^3} \partial_{xx} u \quad (2.39)$$

avec  $\tau = t - \frac{x}{c_0}$ .

## 2.4 Propagation non-linéaire dans les conduits : influence des pertes viscothermiques

Dans les conduits, les effets de la propagation non-linéaire se combinent aux effets des pertes visco-thermiques (paragraphe 2.2.1). Dans la plupart des cas les pertes sont concentrées près des parois en de fines couches limites. Une théorie permettant de prendre en compte ces effets en non-linéaire a été établie par Chester [7]. Ce dernier fait dès le départ l'hypothèse d'une couche limite fine, la paroi étant considérée localement plane. L'hypothèse suivante est de linéariser les équations de couche limite, donc de supposer des couches limites de type "Stokes" (voir 2.2.2). Plutôt que d'intégrer sur la section complète du tuyau comme Lighthill en linéaire, Chester détermine la valeur de la vitesse transversale à la frontière de la couche limite agissant comme source de matière dans l'équation de conservation de la masse du fluide principal moyennée sur sa section. Cette approche rejoint des méthodes de l'aérodynamique où les effets de couche limite sont parfois pris en compte par une vitesse de transpiration à la paroi [13]. De même que le champ de vitesse obéit à une équation de diffusion visqueuse suivant la perpendiculaire à la paroi, le champ de température obéit à une équation de diffusion thermique. La résolution de ces équations dans le domaine temporel permet d'obtenir les équations de la masse et l'impulsion pour le fluide principal dont la section est supposée peu différente de la section du tuyau :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_e u_e)}{\partial x} = \rho_e \frac{2}{R} \left(1 + \frac{\gamma-1}{\sqrt{Pr}}\right) \frac{\partial u_e}{\partial x} * \sqrt{\frac{\nu_0}{\pi t}} \\ \frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + c_0^2 \left(\frac{\rho_e}{\rho_0}\right)^{\gamma-1} \frac{1}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial x} = \nu \left(\frac{4}{3} + \frac{\mu_v}{\mu} + \frac{\gamma-1}{Pr}\right) \frac{\partial^2 u_e}{\partial x^2} \end{cases} \quad (2.40)$$

avec le nombre de Prandtl  $Pr = \frac{\mu c_p}{K}$ .

Dans la masse, \* désigne le produit de convolution et le terme  $\partial_x u_e * \sqrt{\frac{\nu_0}{\pi t}}$  est l'équivalent en temporel du terme  $\partial_x u_e \sqrt{\frac{\nu}{iw}}$  de l'équation 2.23. On retrouve des dérivées fractionnaires d'ordre  $\frac{1}{2}$  typiques des phénomènes d'absorption aux parois [3, 11].

La dérivée d'ordre 2 dans l'équation de l'impulsion vient de la prise en compte par Chester des pertes visco-thermiques de volume.

En introduisant la célérité du son définit dans le cas isentropique par l'équation 2.35 et en combinant les deux équations de conservation, on obtient la forme caractéristique suivante :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + (u \pm c) \frac{\partial}{\partial x} \right] \left( u \pm \frac{2c}{\gamma-1} \right) = \delta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \pm c_0 \beta \frac{\partial u}{\partial x} * \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (2.41)$$

avec

$$\begin{aligned} \delta &= \nu \left( \frac{4}{3} + \frac{\mu_v}{\mu} + \frac{\gamma-1}{Pr} \right) \\ \beta &= \frac{2}{R} \sqrt{\frac{\nu_0}{\pi}} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{\sqrt{Pr}} \right) \end{aligned}$$

En oubliant les pertes de volume, il est possible d'écrire une **équation de Burgers généralisée** [3, 15]:

$$\partial_x u - \frac{\gamma + 1}{2c_0^2} u \partial_\tau u = -c_0 \beta \frac{\partial u}{\partial x} * \frac{1}{\sqrt{\tau}} \quad (2.42)$$

La résolution de cette équation nécessite l'emploi de méthodes numériques [15, 16]. En étendant l'ordre de la dérivée fractionnaire, il est possible de décrire les effets des mécanismes d'absorption dans le cas de tuyaux à parois élastiques, la propagation dans un milieu visco-élastique [3]. . . On observe alors l'importance des équations de Burgers généralisée en acoustique non-linéaire.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté des éléments de base des théories de la propagation acoustique linéaire et non-linéaire dans les conduits. Certains des résultats que nous avons présentés ici seront utilisés par la suite. Ainsi, les solutions de la théorie linéaire de Kirchhoff et les solutions de la théorie non-linéaire des ondes simples seront données comme solutions analytiques de référence dans le quatrième chapitre consacré aux méthodes numériques et appliquées dans le cadre d'un modèle simplifié de trombone dans le cinquième chapitre.



# Bibliographie

- [1] Rayleigh J.W.S. *Theory of Sound 2nd ed. (1896)*. reprinted by Dover, 1945.
- [2] Lighthill M.J. *Waves in Fluids*. Cambridge University Press, 1978.
- [3] Makarov S. and Ochmann M. Nonlinear and thermoviscous phenomena in acoustics, part II. *Acta Acustica*, 83:197–222, 1997.
- [4] Whitham G.B. *Linear and Nonlinear Waves*. Wiley-Interscience Publication, 1974.
- [5] Otero D. et Poirée B. L'acoustique non-linéaire dans les fluides. *Revue du CETHEDEC*, (46), 1976.
- [6] Blackstock D.T. Thermoviscous attenuation of plane, periodic, finite-amplitude sound waves. *J.A.S.A.*, 34(1), 1964.
- [7] Chester W. Resonant oscillations in closed tubes. *J. Fluid Mech.*, 18(44), 1964.
- [8] Schlichting H. *Boundary-Layer Theory*. McGraw-Hill Ed., 1968.
- [9] M. Bruneau, P. Herzog, J. Kergomard and J.D. Polack. General formulation of the dispersion equation in bounded visco-thermal fluid, and application to some simple geometries. *Wave Motion*, 11, 1989.
- [10] Kergomard J. *champ interne et champ externe des instruments à vents*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, 1981.
- [11] J. D. Polack. Time domain solution of Kirchhoff's equation for sound propagation in viscothermal gases: a diffusion process. *J.Acoustique*, 4:47–67, 1991.
- [12] A. Hirschberg and S. W. Rienstra. Elements of aeroacoustics. Chapter of the Lectures Notes of Von Karman Lecture, 1994.
- [13] Cousteix J. *Couche limite laminaire*. Epadues- Editions, 1988.
- [14] Dubois F. Communication personnelle, 1996.
- [15] Sugimoto N. Burgers equation with a fractional derivative: hereditary effect on nonlinear acoustic waves. *J. Fluid Mech.*, 225:631–653, 1991.
- [16] Menguy L. et Gilbert J. Propagation acoustique faiblement non linéaire dans les guides cylindriques, modélisation et solutions (numériques). In *Actes du 4<sup>ème</sup> Congrès Français d'Acoustique*, volume 2, Marseille, 1997.



---

## Chapitre 3

# Modèle théorique de la propagation non-linéaire dans les conduits

### Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons rappelé les équations de propagation dérivées des équations de base et quelques solutions analytiques pour des cas simples. Dans des cas plus complexes, on doit en général faire appel à des méthodes numériques de résolution.

D'ailleurs, les progrès des outils informatiques et des méthodes de calcul scientifique permettent maintenant d'envisager la résolution directe des équations de la dynamique mais nécessite la mise en oeuvre de moyens informatiques très importants dans les cas multidimensionnels (en particulier en terme de maillage) d'autant plus qu'il existe une disproportion d'échelle entre les effets locaux (petite échelle) comme ceux de couche limite et la distance de propagation (échelle grande) [1, 2]. Ainsi à une fréquence de  $1000\text{Hz}$  dans un tuyau de diamètre de l'ordre du centimètre ( $10^{-2}m$ ), l'ordre de grandeur d'une couche limite acoustique est mille fois plus petit ( $10^{-5}m$ ) alors que l'on peut propager dans un instrument de musique sur des distances de l'ordre du mètre ( $10^0m$ ).

C'est pourquoi nous préférons nous ramener (par intégration sur la section des équations de conservation de la dynamique des gaz simplifiées) à un modèle unidimensionnel de propagation acoustique non-linéaire incluant des effets de couche limite et des variations lentes en espace de la section. Notre approche s'inspire ainsi de l'article historique de Chester [3] quant à la prise en compte des effets de couche limite, mais la formulation choisie [4, 5] nous rapproche aussi de la problématique du couplage fluide parfait fluide visqueux (Euler-couche limite) des aérodynamiciens et mécaniciens des fluides [6]. En effet, on peut établir des approximations différentes pour les équations du mouvement près des parois et dans le gros du conduit.

Afin d'évaluer l'ordre de grandeur des termes que l'on néglige, nous travaillerons sur les équations de base adimensionnées suivant une procédure classique en mécanique des fluides [7],

les approximations étant quantifiées par des nombres sans dimension typiques du problème traité [8] (afin de souligner l'analogie avec l'aérodynamique, on pourra se reporter en annexe A où le cas d'un écoulement non oscillant le long d'une plaque est traité).

Après obtention d'un modèle quasi monodimensionnel par intégration sur la section du tube et sa simplification, nous discuterons la nature des phénomènes physiques négligés, du domaine de validité du modèle et de son application au trombone. Enfin, nous évoquerons les généralisations envisageables.

## 3.1 Approche aérodynamique de l'acoustique

Dans le chapitre précédent, nous avons rappelé les équations de Burgers généralisées couramment utilisées en acoustique non-linéaire pour décrire la propagation acoustique dans les tuyaux. Ces équations obtenus par changement d'échelle découle de la théorie de Chester. Nous aurions pu travailler sur ces équations mais dès le début de nos travaux sur ce sujet, notre attention s'est plutôt portée sur une formulation se rapprochant de celles utilisées en aérodynamique et en dynamique des gaz, en particulier la formulation conservative des équations d'Euler couplées à des équations de couche limite [10, 11].

Considérons maintenant un écoulement instationnaire de type oscillant, ou champ acoustique dans une conduite. L'évolution spatio-temporelle d'un tel écoulement est essentiellement déterminée par les termes instationnaires des équations de Navier-Stokes mais nous avons vu qu'on ne peut pas toujours négliger les termes non linéaires et les pertes visco-thermiques aux parois. Nous supposons que le champ acoustique peut être décomposé en un écoulement principal défini dans le gros de la section du tuyau et un écoulement secondaire défini près des parois, la couche limite. On se rapproche donc du problème aérodynamique du couplage d'un fluide principal et d'une couche limite [6].

Nous adimensionnons alors classiquement les équations [7] afin de faire apparaître des nombres sans dimension qui renseignent sur l'ordre de grandeur des différents termes des équations et des simplifications possibles dans chacune des deux zones. On peut alors montrer que l'écoulement principal est du type fluide parfait contrairement à celui de couche limite où l'on doit prendre en compte la viscosité et la conduction thermique. Les grandeurs de référence que l'on utilisera pour adimensionner les équations seront celles d'une onde plane sinusoïdale obéissant localement aux lois de l'acoustique linéaire<sup>1</sup> [12, 8].

### 3.1.1 Géométrie

Quand une des longueurs caractéristiques du problème tridimensionnel étudié est très grande devant les deux autres, on peut en général se ramener à l'étude d'un problème à deux dimensions et simplifier les équations de conservation.

Soit un fluide compressible oscillant entre deux parois fixes distantes d'une épaisseur  $2h$  et

---

1. Nous supposons qu'il n'y a pas d'écoulement moyen



de longueur  $L$ , ces deux dimensions étant très petites devant la largeur des plaques (figure 3.1).

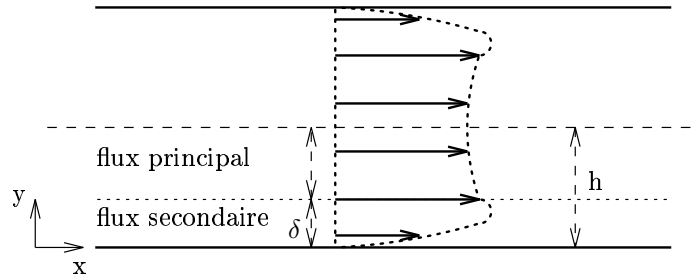


FIG. 3.1 – Vitesse axiale entre deux plaques planes

### 3.1.2 Hypothèses

- Champ acoustique bidimensionnel soit deux variables d'espace,  $x$  longitudinale et  $y$  transversale.
- Écoulement moyen négligeable.
- Vitesse nulle à la paroi.
- Température donnée aux parois qui sont supposées bonnes conductrices de la chaleur.

Les deux dernières hypothèses nous permettent d'envisager l'existence de deux zones distinctes d'écoulement. Soit un flux secondaire comprenant deux zones pariétales à forts gradients de température et de vitesse suivant  $y$ , respectivement "couche limite thermique" d'épaisseur  $\delta_T$  et "couche limite visqueuse" d'épaisseur  $\delta_v$ . Ces deux régions permettant le raccord entre la valeur de la vitesse et de la température à la paroi et leur valeur dans la troisième zone dite "champ acoustique principal" (figure 3.1).

On ajoutera les hypothèses restrictives suivantes :

- Les couches limites visqueuse et thermique sont du même ordre de grandeur (ce qui en général est vérifié pour l'air).
- Pas de turbulence (couches limites laminaires).
- Symétrie suivant l'axe longitudinal du conduit.
- Les modes supérieurs du guide d'onde sont évanescents, soit  $f < f_c$  avec  $f_c = \frac{c_0}{4h}$  la fréquence de coupure, ce qui est équivalent à:  $\frac{h}{\lambda} < \frac{1}{4}$  où  $\lambda$  désigne la longueur d'onde.

### 3.1.3 Equations de base

Soit les équations de Navier-Stokes pour un fluide bidimensionnel compressible à viscosité et conductivité thermique constantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) + \partial_y(\rho v) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) + \partial_y(\rho uv) = -\partial_x p + \mu \left( \left( \frac{4}{3} + \frac{\mu_v}{\mu} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho uv) + \partial_y(\rho v^2) = -\partial_y p + \mu \left( \left( \frac{4}{3} + \frac{\mu_v}{\mu} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \\ \partial_t(\rho E) + \partial_x[(\rho E u + p u)] + \partial_y[(\rho E v + p v)] = \varphi + K \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

avec la densité d'énergie totale, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie interne :

$$\rho E = \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) + \rho e$$

et une fonction de dissipation :

$$\begin{aligned} \varphi = & \mu \left( \partial_x \left[ \left( \frac{4}{3} + \frac{\mu_v}{\mu} \right) u \partial_x u - \frac{2}{3} u \partial_y v + v \partial_y u + v \partial_x v \right] \right. \\ & \left. + \partial_y \left[ u \partial_y u + u \partial_x v - \frac{2}{3} v \partial_x u + \left( \frac{4}{3} + \frac{\mu_v}{\mu} \right) v \partial_y v \right] \right) \end{aligned}$$

On ajoute aux équations du mouvement les relations thermodynamiques suivantes (gaz parfait) :

$$\left\{ \begin{array}{l} p = R \rho T \\ e = c_v T \end{array} \right. \quad (3.2)$$

### 3.1.4 Adimensionnement des équations de base

Nous gardons la forme conservative des équations et allons les adimensionner afin d'évaluer l'importance des différents termes dans chacune des deux zones, écoulement principal et écoulement secondaire.

On doit tout d'abord évaluer l'ordre de grandeur des différentes variables afin de faire apparaître des variables adimensionnées d'ordre de grandeur 1 et des nombres sans dimension qui nous renseigneront sur les propriétés de l'écoulement et les éventuelles simplifications à effectuer. Nous reprenons donc le principe d'adimensionnement de l'aérodynamique mais les grandeurs de référence ne sont plus les mêmes. Ces dernières sont en effet déterminées en supposant que le champ est peu différent localement de celui d'une onde linéaire plane sinusoïdale de pulsation  $w$ . Notons que les variables considérées ici ne sont pas des perturbations acoustiques mais les grandeurs totales de l'écoulement, ce qui diffère de l'approche classique s'appuyant sur un développement asymptotique [9]. Il faut donc faire attention lors de l'adimensionnement des gradients à la composante statique.

## Écoulement secondaire

On notera les variables adimensionnées en surligné.

- grandeurs de référence et adimensionnement des variables et gradients :

$$\lambda = \frac{c_0}{f} \approx \frac{c_0}{w} \text{ longueur d'onde de référence.}$$

$$\delta = \delta_v \text{ (ou } \delta_T) \text{ épaisseurs de couche limite.}$$

$$u_a = c_0 M \text{ amplitude de la vitesse longitudinale source}$$

$$t_a = \frac{1}{f} \approx \frac{1}{w} \text{ temps de référence}$$

$$\rho_a \approx \rho_0 + \rho_0 \frac{u_a}{c_0} = \rho_0(1 + M) \text{ densité dans l'axe.}$$

$$p_a \approx P_0(1 + \gamma \frac{u_a}{c_0}) \approx \rho_0 c_0^2(1 + M) \text{ pression dans l'axe.}$$

$$T_a \approx T_0 \left( 1 + (\gamma - 1) \frac{u_a}{c_0} \right) \approx \frac{c_0^2}{c_p}(1 + M) \text{ température dans l'axe.}$$

$$v_{cl} \approx ? \text{ une vitesse transversale de référence (à évaluer).}$$

où on a introduit le **nombre de Mach** acoustique qui mesure l'amplitude des oscillations :

$$M = \frac{u_a}{c_0} \tag{3.3}$$

soit l'adimensionnement des dérivées temporelles et spatiales (pour les grandeurs subissant une condition à la paroi)

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} = \lambda \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{y}} = \delta \frac{\partial}{\partial y} \text{ application aux vitesses, température et différents flux.}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}} = t_a \frac{\partial}{\partial t}$$

Nous allons tout d'abord déterminer l'ordre de grandeur de la vitesse transversale dans la couche limite ( $v_{cl}$ ) grâce à la conservation de la masse linéarisée :

$$\underbrace{\partial_t \rho}_{w \rho_0 M} + \underbrace{\rho_0 \partial_x u}_{w \rho_0 M} + \underbrace{\rho_0 \partial_y v}_{\rho_0 \frac{v_{cl}}{\delta}} = 0 \text{ soit } v_{cl} \approx \delta w M \approx \frac{\delta}{\lambda} c_0 M = \bar{\delta} c_0 M$$

La pression ne subissant pas de condition à la paroi, on fait appel alors à l'équation de l'impulsion transverse linéarisée pour déterminer l'ordre de grandeur du gradient de pression transverse :

$$\rho_0 \partial_t v \approx \partial_y p \quad \text{soit} \quad (\partial_y p)_{ref} \approx \rho_0 c_0 w \bar{\delta} M$$

En remarquant que pour un gaz parfait  $\rho e = \frac{p}{\gamma-1}$ , on en déduit directement les gradients de densité d'énergie interne de référence.

Les variables et gradients adimensionnés principaux (d'ordre 1) vérifient donc :

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0(1 + M)\bar{\rho} \\ u &= c_0 M \bar{u} \\ v &= \bar{\delta} c_0 M \bar{v} \\ p &= \rho_0 c_0^2 (1 + M) \bar{p} \\ T &= \frac{c_0^2}{c_p} (1 + M) \bar{T} \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho_0 c_0 w M \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \rho_0 c_0 w M \bar{\delta} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{c_0 w}{c_p \bar{\delta}} M \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \end{aligned}$$

- Equations adimensionnées dans la couche limite :

En simplifiant par  $M$  de part et d'autre des signes d'égalité<sup>2</sup> (soit  $M \neq 0$ ), les équations de Navier-Stokes s'écrivent :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + (1 + M) \left( \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}}{\partial y} \right) &= 0 \\ (1 + M) \left( \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}}{\partial t} + M \left[ \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{v}}{\partial y} \right] \right) &= -\frac{\bar{\partial p}}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \left( \frac{4}{3} + \frac{\mu_v}{\mu} \right) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{1}{\bar{\delta}^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial y} \right) \\ (1 + M) \left( \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}}{\partial t} + M \left[ \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}^2}{\partial y} \right] \right) &= -\frac{\bar{\partial p}}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \left( \frac{4}{3} + \frac{\mu_v}{\mu} \right) \frac{1}{\bar{\delta}^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{\bar{\delta}^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y} \right) \\ \frac{1}{\gamma-1} \left( \frac{\partial \bar{\rho} \bar{e}}{\partial t} + (1 + M) \left( \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{e}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v} \bar{e}}{\partial y} \right) \right) + \bar{\chi} + \bar{\psi} &= \bar{\varphi} + \frac{1}{Pr Re} \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \frac{1}{\bar{\delta}^2} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \right. \quad (3.4)$$

avec pour l'énergie cinétique :

$$\bar{\chi} = M(1 + M) \left( \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} \bar{\rho} (\bar{u}^2 + \bar{\delta}^2 \bar{v}^2) \right] + M \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2} (\bar{u}^2 + \bar{\delta}^2 \bar{v}^2) \bar{\rho} \bar{u} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{2} (\bar{u}^2 + \bar{\delta}^2 \bar{v}^2) \bar{\rho} \bar{v} \right] \right\} \right)$$

le travail des forces de pression :

$$\bar{\psi} = (1 + M) \left( \frac{\partial \bar{p} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p} \bar{v}}{\partial y} \right)$$

et la fonction de dissipation :

$$\bar{\varphi} = \frac{M}{Re} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{4}{3} + \frac{\mu}{\mu_v} \right) \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{2}{3} \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{\delta}^2 \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{\bar{\delta}^2} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{2}{3} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \left( \frac{4}{3} + \frac{\mu}{\mu_v} \right) \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right] \right)$$

---

2. A un terme d'ordre  $M$  dans les équations correspond donc un terme non-linéaire.

Nous avons fait apparaître l'épaisseur de couche limite adimensionnée ( $\bar{\delta} = \frac{\delta}{\lambda}$ ) et les nombres sans dimension suivants :

$$\begin{aligned} R_e &= \frac{\rho_0 c_0^2}{\mu w} \quad \text{le nombre de Reynolds acoustique} \\ P_r &= \frac{\nu}{a} \quad \text{le nombre de Prandtl} \end{aligned} \quad (3.5)$$

avec la viscosité cinématique ( $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ ) et la diffusivité thermique ( $a = \frac{K}{\rho_0 c_p}$ ).

Le nombre de Reynolds  $R_e$  mesure l'importance des effets instationnaires par rapport aux effets visqueux.

Le nombre de Prandtl,  $P_r$  qui mesure la viscosité cinématique par rapport à la diffusivité thermique, est un indicateur de l'importance de la diffusion de l'impulsion sous l'effet de la viscosité devant la diffusion de la chaleur.

On peut aussi adimensionner les équations d'état qui s'écrivent alors :

$$\bar{p} = (1 + M)\bar{\rho}\bar{T} \quad (3.6)$$

$$\bar{e} = \bar{T} \quad (3.7)$$

### Écoulement principal

Nous suivons la même procédure pour l'écoulement principal.

Les grandeurs de références seront les mêmes que pour la couche limite (valeurs dans l'axe, longueur d'onde) sauf pour les dimensions et gradients caractéristiques transverses.

Nous choisissons alors comme hauteur de référence la demi épaisseur  $h$ .

Les gradients transverses s'écriront :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{y}} = h \frac{\partial}{\partial y}$$

Puisque  $v_a = 0$  par axisymétrie, la vitesse transverse de référence est la même que dans la couche limite.

Le gradient de pression transverse est donc du même ordre que dans la couche limite et s'écrit donc :

$$\partial_y p \approx \rho_0 c_0 w \bar{\delta} = \frac{\rho_0 c_0^2 M \bar{\delta}^2}{\delta} = \frac{\bar{\delta}^2}{S_h} \frac{\Delta p}{h}$$

où l'on a introduit le “**shear number**” (nombre de cisaillement), rapport de l'épaisseur de couche limite sur la demi épaisseur de la conduite :

$$S_h = \frac{\delta_v}{h} \quad (3.8)$$

Par contre, la température et la densité ne subissant pas de condition limite, l'adimensionnement de leur gradient transverse respectif n'est pas évident.

En linéarisant et dérivant la relation thermodynamique  $p = R\rho T \Rightarrow \frac{\partial_y p}{P_0} = \frac{\partial_y T}{T_0} + \frac{\partial_y \rho}{\rho_0}$ , nous obtenons les ordres de grandeur des gradients transverses de température et de densité :

$$\partial_y T \approx \frac{c_0 w \bar{\delta}}{c_p} M = \frac{\bar{\delta}^2 c_0^2 M}{S_h c_p h} \quad \text{et} \quad \partial_y \rho \approx \frac{\rho_0 w \bar{\delta}}{c_0} M = \frac{\bar{\delta}^2 \rho_0 M}{S_h h}$$

De même, on peut vérifier que  $\partial_y u \approx \frac{c_0 M \bar{\delta}}{\lambda}$ .

Nous obtenons finalement les ordres de grandeur suivants des gradients transverses de pression, de vitesse longitudinale, de température et de densité :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\bar{\delta}^2 \rho_0 c_0^2 M}{S_h h} = \frac{\bar{\delta}^2 \Delta p}{S_h h} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\bar{\delta}^2 c_0 M}{S_h h} = \frac{\bar{\delta}^2 u_a}{S_h h} \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\bar{\delta}^2 c_0^2 M}{S_h c_p h} = \frac{\bar{\delta}^2 \Delta T}{S_h h} \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} &= \frac{\bar{\delta}^2 \rho_0 M}{S_h h} = \frac{\bar{\delta}^2 \Delta \rho}{S_h h} \end{aligned}$$

• Equations adimensionnées dans le flux principal :

Les équations de Navier-Stokes s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + (1 + M) \left( \frac{\partial \bar{p}u}{\partial x} + S_h \frac{\partial \bar{p}v}{\partial y} \right) &= 0 \\ (1 + M) \left( \frac{\partial \bar{p}u}{\partial t} + M \left( \frac{\partial \bar{p}u^2}{\partial x} + S_h \frac{\partial \bar{p}uv}{\partial y} \right) \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{1}{R_e} \left( \left( \frac{4}{3} + \frac{\mu_v}{\mu} \right) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + S_h \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial y} \right) \right) \\ (1 + M) \left( \frac{\partial \bar{p}v}{\partial t} + M \left( \frac{\partial \bar{p}uv}{\partial x} + S_h \frac{\partial \bar{p}v^2}{\partial y} \right) \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{1}{R_e} \left( \left( \frac{4}{3} + \frac{\mu_v}{\mu} \right) \frac{S_h^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y} \right) \\ \frac{1}{(\gamma-1)} \left( \frac{\partial \bar{p}e}{\partial t} + (1 + M) \left( \frac{\partial \bar{p}ue}{\partial x} + S_h \frac{\partial \bar{p}ve}{\partial y} \right) \right) + \bar{\chi} + \bar{\psi} &= \bar{\varphi} + \frac{1}{P_r R_e} \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + S_h \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \right. \quad (3.9)$$

avec

$$\bar{\chi} = M(1 + M) \left( \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} \bar{\rho} (\bar{u}^2 + \delta^2 \bar{v}^2) \right] + M \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2} (\bar{u}^2 + \delta^2 \bar{v}^2) \bar{\rho} u \right] + S_h \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{2} (\bar{u}^2 + \delta^2 \bar{v}^2) \bar{\rho} v \right] \right\} \right)$$

$$\bar{\psi} = (1 + M) \left( \frac{\partial \bar{p}u}{\partial x} + S_h \frac{\partial \bar{p}v}{\partial y} \right)$$

et  $\bar{\varphi}$  la fonction de dissipation :

$$\bar{\varphi} = \frac{M}{R_e} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{4}{3} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{2}{3} S_h \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{\delta}^2 \left( \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right] + S_h \frac{\partial}{\partial y} \left[ \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{2}{3} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{4}{3} S_h \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right] \right)$$

et les équations d'état :

$$\begin{aligned} \bar{p} &= (1 + M) \bar{\rho} \bar{T} \\ \bar{e} &= \bar{T} \end{aligned}$$

Nous retrouvons les mêmes nombres sans dimension ( $M$ ,  $R_e$ ,  $P_r$ ) que dans la couche limite et le "shear number" défini précédemment.

### 3.1.5 Simplification des équations

Simplifions maintenant les équations dans les deux zones considérées.

Pour cela, on doit donner un ordre de grandeur des nombres sans dimension que l'on a fait apparaître.

#### Hypothèses

- Le nombre de Reynolds est grand ( $R_e \gg 1$ ). Nous voyons alors que l'épaisseur de couche limite visqueuse  $\delta$  est de l'ordre de  $\frac{\lambda}{\sqrt{R_e}}$  [14], soit :

$$\bar{\delta} \approx \frac{1}{\sqrt{R_e}} \quad \text{avec} \quad \bar{\delta} \ll 1 \quad (3.10)$$

- Le nombre de Prandtl est d'ordre 1 (pour l'air,  $P_r \approx 0.72$ ). De plus, nous voyons [7] que le nombre de Prandtl vérifie :

$$\frac{\delta_v^2}{\delta_T^2} \approx P_r \quad (3.11)$$

soit  $\bar{\delta}_T \approx \bar{\delta}_v \ll 1$

- Nous pouvons distinguer (comme dans le cas aérodynamique et en acoustique linéaire) deux cas extrêmes pour le “shear number”, le cas  $S_h \geq 1$ , l'épaisseur de couche limite est de l'ordre de la demi épaisseur de la conduite ou plus grande et le cas  $S_h \ll 1$  où l'épaisseur de couche limite est très petite devant la demi-épaisseur de la conduite.
- Le nombre de Mach est petit devant un:  $M \ll 1$ .
- Nous négligeons la viscosité de volume.

#### Approximations dans la couche limite

Nous allons négliger les termes d'ordre 2 et plus en  $\bar{\delta}$  dans les équations.

On obtient alors les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + (1 + M) \left( \frac{\partial \bar{\rho} u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} v}{\partial y} \right) = 0 \\ (1 + M) \left( \frac{\partial \bar{\rho} u}{\partial t} + M \left[ \frac{\partial \bar{\rho} u^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} u v}{\partial y} \right] \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + O\left(\frac{1}{R_e}\right) \\ (1 + M) \left( \frac{\partial \bar{\rho} v}{\partial t} + M \left[ \frac{\partial \bar{\rho} u v}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} v^2}{\partial y} \right] \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y} + O\left(\frac{1}{R_e}\right) \\ \frac{1}{\gamma - 1} \left( \frac{\partial \bar{\rho} e}{\partial t} + (1 + M) \left( \frac{\partial \bar{\rho} u e}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} v e}{\partial y} \right) \right) + \bar{\chi} + \bar{\psi} = \bar{\varphi} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} + O\left(\frac{1}{R_e}\right) \end{array} \right. \quad (3.12)$$

avec

$$\bar{\chi} = M(1 + M) \left( \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} \bar{\rho} u^2 \right] + M \left( \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2} \bar{u}^2 \bar{\rho} u \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{2} \bar{u}^2 \bar{\rho} v \right] \right) \right)$$

$$\bar{\psi} = (1 + M) \left( \frac{\partial \bar{\rho} u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} v}{\partial y} \right)$$

et la fonction de dissipation qui se réduit à :

$$\bar{\varphi} = M \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left[ \frac{4}{3} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right]$$

On remarque que l'équation de l'impulsion transverse ne fait intervenir que des termes d'ordre 1 ou plus en  $\frac{1}{\sqrt{Re}}$ . Le gradient de pression est petit mais pas nécessairement négligeable au premier abord.

En raisonnant sur son ordre de grandeur déterminé précédemment,

$$\partial_y p \approx \frac{\rho_0 c_0^2 M \bar{\delta}^2}{\delta} \approx \frac{(\Delta p)_y}{\delta} \approx \frac{1}{Re} \frac{\Delta p}{\delta}$$

nous obtenons alors  $(\Delta p)_y$  l'ordre de grandeur des variations transverses de la pression dans la couche limite en fonction de  $\Delta p$  l'ordre de grandeur des variations longitudinales :

$$(\Delta p)_y = \frac{1}{Re} \Delta p$$

Les variations transversales de la pression sont donc négligeables au regard des variations longitudinales et la pression peut donc être considérée **uniforme** suivant l'épaisseur et égale à la pression à la frontière de la couche limite.

En revenant aux variables dimensionnées, nous retrouvons les

**équations conservatives de couche limite :**

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) + \partial_y(\rho v) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) + \partial_y(\rho uv) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho uv) + \partial_y(\rho v^2) = -\partial_y p + \mu \left( \frac{4}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \\ \partial_t(\rho E) + \partial_x[(\rho E u + p u)] + \partial_y[(\rho E v + p v)] = \frac{4}{3} \mu \frac{\partial}{\partial y} \left[ u \frac{\partial u}{\partial y} \right] + K \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{array} \right. \quad (3.13)$$

avec l'énergie totale simplifiée :  $\rho E = \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e$

L'équation de conservation de la masse n'a pas été modifiée.

Dans l'équation de l'impulsion longitudinale, on néglige les termes de diffusion longitudinale pour ne conserver que la diffusion suivant l'épaisseur ( $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ).

Dans le bilan de l'énergie, on néglige l'énergie cinétique associée à la vitesse transversale  $v$  (énergie totale simplifiée), les termes longitudinaux pour la production de température par friction (fonction de dissipation simplifiée) et la conduction thermique longitudinale ( $K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ ).

Les relations thermodynamiques ne sont pas modifiées.

Nous retrouvons donc les **mêmes équations** que dans le cas aérodynamique car nous n'avons pas encore simplifié de termes relatifs au nombre de Mach  $M$ .

### Approximations dans l'écoulement principal ( $S_h \ll 1$ )

Effectuons les mêmes approximations dans l'écoulement principal (termes en  $\bar{\delta}^{-2}$  négligés) et négligeons aussi les termes du second ordre en  $S_h$ .



Les équations adimensionnées s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} + (1 + M) \left( \frac{\partial \bar{\rho u}}{\partial \bar{x}} + S_h \frac{\partial \bar{\rho v}}{\partial \bar{y}} \right) = 0 \\ (1 + M) \left( \frac{\partial \bar{\rho u}}{\partial \bar{t}} + M \left( \frac{\partial \bar{\rho u}^2}{\partial \bar{x}} + S_h \frac{\partial \bar{\rho u v}}{\partial \bar{y}} \right) \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + O\left(\frac{1}{Re}\right) \\ \left( (1 + M) \left( \frac{\partial \bar{\rho v}}{\partial \bar{t}} + M \left[ \frac{\partial \bar{\rho u v}}{\partial \bar{x}} + S_h \frac{\partial \bar{\rho v}^2}{\partial \bar{y}} \right] \right) \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + O\left(\frac{1}{Re}, S_h^2\right) \\ \frac{1}{(\gamma-1)} \left( \frac{\partial \bar{\rho e}}{\partial \bar{t}} + (1 + M) \left( \frac{\partial \bar{\rho u e}}{\partial \bar{x}} + S_h \frac{\partial \bar{\rho v e}}{\partial \bar{y}} \right) \right) + \bar{\psi} + \bar{\chi} = O\left(\frac{1}{Re}, S_h^2\right) \end{array} \right. \quad (3.14)$$

avec pour l'énergie cinétique

$$\bar{\chi} = M(1 + M) \left( \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left[ \frac{1}{2} \bar{\rho u}^2 \right] + M \left( \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[ \frac{1}{2} \bar{u}^2 \bar{\rho u} \right] + S_h \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left[ \frac{1}{2} \bar{u}^2 \bar{\rho v} \right] \right) \right)$$

$$\text{et} \\ \bar{\psi} = (1 + M) \left( \frac{\partial \bar{\rho u}}{\partial \bar{x}} + S_h \frac{\partial \bar{\rho v}}{\partial \bar{y}} \right)$$

Comme dans la couche limite, l'équation de l'impulsion transverse ne fait intervenir que des termes petits mais non négligeables à cet ordre d'approximation. Ainsi, le gradient de pression n'est pas nécessairement nul.

En revenant aux variables dimensionnées, on obtient **comme dans le cas aérodynamique** les équations d'Euler :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) + \partial_y(\rho v) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) + \partial_y(\rho u v) = -\partial_x p \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho u v) + \partial_y(\rho v^2) = -\partial_y p \\ \partial_t(\rho E) + \partial_x[(\rho E u + p u)] + \partial_y[(\rho E v + p v)] = 0 \end{array} \right. \quad (3.15)$$

avec l'énergie totale simplifiée :  $\rho E = \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e$

Remarques :

- A cet ordre d'approximation, rien ne permet d'affirmer que l'écoulement principal est monodimensionnel. Mais si nous étendons l'approximation aux termes d'ordre 1 en  $S_h$ , soit puisque  $h < \lambda$  aussi aux termes en  $\frac{1}{\sqrt{Re}}$ , l'écoulement principal devient monodimensionnel, la vitesse et le gradient de pression transverses négligeables dans la couche limite. Mais on verra plus loin que l'on annihile alors le couplage avec le flux acoustique principal.
- Par contre, nous avons vu en 3.1.4 que les variables  $W$  caractéristiques du flux principal (pression, vitesse longitudinale, densité, température) vérifient :

$$\partial_y W = \frac{\bar{\delta}^2}{S_h} \frac{\Delta W}{h} = \frac{1}{Re S_h} \frac{\Delta W}{h} = \frac{(\Delta W)_y}{h}.$$

L'ordre de grandeur  $(\Delta W)_y$  des variations transverses des quantités  $W$  dans le flux

principal vérifie donc:

$$(\Delta W)_y = \frac{1}{ReS_h} \Delta W$$

avec  $\Delta W$  l'ordre de grandeur des variations longitudinales.

En supposant que  $\frac{1}{ReS_h} \ll 1$ , nous pouvons négliger les variations transverses de  $W$  devant ses variations longitudinales et le flux principal peut être considéré quasi-uniforme suivant l'épaisseur. Nous retrouvons ainsi une hypothèse similaire à celle d'onde quasi plane de l'acoustique linéaire (paragraphe 2.2.1).

## 3.2 Intégration des équations quasi-monodimensionnelles du mouvement oscillant

Nous allons maintenant nous ramener à des équations quasi-monodimensionnelles par intégration sur l'épaisseur de la conduite des équations locales simplifiées obtenues précédemment.

Notre approche diffère ainsi de celle de Chester [3] reprise par L. Menguy [8] qui moyennent les équations du flux principal sur sa section (soit l'épaisseur  $2(h - \delta)$  dans notre cas). L'intégration sur la demi-épaisseur complète  $h$  permet d'éliminer les termes relatifs à la vitesse transversale qui est nulle aux bornes du domaine d'intégration. On rejoint ainsi l'approche de Disselhorst [15] qui moyenne sur la section complète du tuyau et bien entendu l'approche de Kirchhoff en linéaire.

### 3.2.1 hypothèses

Nous introduisons de nouvelles hypothèses qui vont nous permettre d'intégrer les équations locales de propagation pour un guide d'onde à épaisseur lentement variable en espace (voir figure 3.2).

- On se place dans le cas où  $S_h \ll 1$ .
- Le conduit bidimensionnel est à paroi fixe, d'épaisseur  $2h(x)$  variant lentement en espace tel que  $\sin\theta \ll 1$  et  $\varepsilon \ll 1$  avec  $\varepsilon = \frac{\omega}{c} \Delta x \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \approx \frac{\omega}{c} \Delta x \left(\frac{\Delta h}{\Delta x}\right)^2$ .  
 $\varepsilon$  est l'erreur de phase relative à l'hypothèse permettant de considérer les fronts d'ondes plans dans un tronç de cône [16].

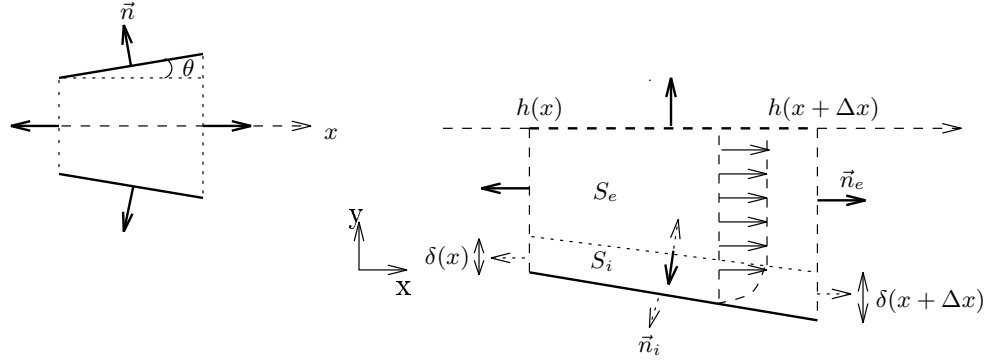


FIG. 3.2 – surface d'intégration

Distinguons deux domaines, l'un “externe” d'aire  $S_e$  et l'autre “interne” d'aire  $S_i$ , avec les variables internes et externes  $W_i$  et  $W_e$  et les normales extérieures aux deux domaines respectivement  $\vec{n}_i$  et  $\vec{n}_e$ .

- Continuité des grandeurs et de leur gradient à l'interface entre les deux domaines. On peut ainsi sortir les dérivées temporelles du signe intégrale, soit pour la variable dimensionnée vérifiant  $W_i|_\delta = W_e|_\delta$  :

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta(t)} \partial_t W_i dy + \int_{\delta(t)}^h \partial_t W_e dy &= d_t \left[ \int_0^\delta W_i dy \right] - d_t[\delta] \cdot W_i|_\delta + d_t \left[ \int_\delta^h W_e dy \right] \\ &\quad + d_t[\delta] \cdot W_e|_\delta \\ &= d_t \left[ \int_0^\delta W_i dy + \int_\delta^h W_e dy \right] \end{aligned}$$

Cette remarque s'applique à toutes les variables, en particulier la vitesse transversale vérifie bien le raccordement entre les deux domaines.

Les termes de flux sont simplifiés en utilisant la formule de Stokes qui nous permet de transformer les intégrales de surface en intégrales de contour :

$$\int_S (\text{div} \vec{W}) dS = \int_{\partial S} \vec{W} \cdot \vec{n} d(\partial S) = \int_{\partial S_i} \vec{W}_i \cdot \vec{n}_i d(\partial S_i) + \int_{\partial S_e} \vec{W}_e \cdot \vec{n}_e d(\partial S_e)$$

On a donc deux domaines caractérisés par deux systèmes d'équations et on décomposera les autres intégrales de surface de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \int_S \overline{W} dS &= \int_x^{x+\Delta x} \left( \int_0^{S_h} \overline{W}_i dy_e + \int_{S_h}^1 \overline{W}_e dy_e \right) dx \\ &= \int_x^{x+\Delta x} \left( S_h \int_0^1 \overline{W}_i dy_i + \int_{S_h}^1 \overline{W}_e dy_e \right) dx \end{aligned}$$

avec  $y_e = \frac{y}{h} = S_h y_i$

- Nous négligeons dans l'écoulement principal les termes en  $\frac{1}{Re S_h}$  et la cylindricité du front d'onde, on peut donc confondre la valeur des grandeurs avec leur moyenne sur

l'épaisseur et écrire alors<sup>3</sup> :

$$\int_{S_h}^1 W_e dy \approx W_e(1 - S_h) + O\left(\frac{1}{R_e S_h}, \varepsilon\right)$$

En particulier, la pression est uniforme sur toute l'épaisseur du tube et on écrira :

$$p = p_e + O\left(\frac{1}{R_e}, \frac{1}{R_e S_h}, \varepsilon\right)$$

Les détails des calculs menant aux équations quasi-monodimensionnelles du mouvement sont présentés en annexe B.

---

3. Par commodité d'écriture, nous écrirons maintenant les variables adimensionnées sans surlignement.

### 3.2.2 Equations quasi-monodimensionnelles du mouvement

Nous pouvons donc décrire la propagation dans un guide par le système d'équations intégrées adimensionnées suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \partial_t \left[ \rho_e - S_h \int_0^1 (\rho_e - \rho_i) dy \right] + (1 + M) \partial_x \left[ \rho_e u_e - S_h \int_0^1 (\rho_e u_e - \rho_i u_i) dy \right] = 0 \\
 \text{masse} \\
 \\
 (1 + M) \partial_t \left[ \rho_e u_e - S_h \int_0^1 (\rho_e u_e - \rho_i u_i) dy \right] \\
 + \\
 M(1 + M) \partial_x \left[ \rho_e u_e^2 - S_h \int_0^1 (\rho_e u_e^2 - \rho_i u_i^2) dy \right] = -\partial_x p_e - S_h \partial_y u_i|_{y=0} \\
 \text{impulsion} \\
 \\
 \frac{1}{\gamma-1} \partial_t \left[ \rho_e e_e - S_h \int_0^1 (\rho_e e_e - \rho_i e_i) dy \right] \\
 + \\
 \frac{1}{\gamma-1} (1 + M) \partial_x \left[ \rho_e e_e u_e - S_h \int_0^1 (\rho_e e_e u_e - \rho_i e_i u_i) dy \right] \\
 + \\
 (1 + M) \partial_x \left[ p_e u_e - S_h p_e \int_0^1 (u_e - u_i) dy \right] \\
 + \\
 M(1 + M) \partial_t \left[ \frac{1}{2} \rho_e u_e^2 - S_h \int_0^1 \frac{1}{2} (\rho_e u_e^2 - \rho_i u_i^2) dy \right] \\
 + \\
 M^2(1 + M) \partial_x \left[ \frac{1}{2} \rho_e u_e^3 - S_h \int_0^1 \frac{1}{2} (\rho_e u_e^3 - \rho_i u_i^3) dy \right] = -S_h \partial_y T_i|_{y=0} \\
 \text{énergie}
 \end{array} \right. \quad (3.16)$$

Nous retrouvons dans les équations adimensionnées intégrées du mouvement le nombre de Mach et le nombre de cisaillement  $S_h$ , le premier mesurant l'importance des non-linéarités, le second mesurant l'importance des effets viscothermiques aux parois.

Les termes d'ordre  $S_h$  associés précédemment à l'existence d'une vitesse transverse dans le flux principal caractérisent ici le couplage avec la couche limite. Ainsi, supprimer les termes en  $S_h$  revient à annuler cette vitesse transverse et à annihiler le couplage.

Naturellement, des termes d'ordre  $M$ ,  $M^2$  et  $M^3$  apparaissent respectivement dans l'équation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie.

Des termes combinant les deux nombres sans dimension soit respectivement  $MS_h$ ,  $M^2S_h$  et  $M^3S_h$  apparaissent aussi. Ces termes associés précédemment aux flux non linéaires transverses dans le champ acoustique principal caractérisent ici l'influence des non-linéarités de couche limite sur la propagation non-linéaire.

En revenant aux grandeurs dimensionnées et en remarquant que suite à l'intégration les grandeurs sont définies par unité de longueur (par exemple à  $\overline{\rho_e}$  correspond  $h\rho_e$  une masse

linéique), on obtient les trois équations intégro-différentielles locales suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \partial_t \left[ h\rho_e - \int_0^\delta (\rho_e - \rho_i) dy \right] + \partial_x \left[ h\rho_e u_e - \int_0^\delta (\rho_e u_e - \rho_i u_i) dy \right] = 0 \\
 \text{masse} \\
 \\
 \partial_t \left[ h\rho_e u_e - \int_0^\delta (\rho_e u_e - \rho_i u_i) dy \right] \\
 + \\
 \partial_x \left[ h\rho_e u_e^2 - \int_0^\delta (\rho_e u_e^2 - \rho_i u_i^2) dy + hp_e \right] = p_e \partial_x h - \mu \left. \frac{\partial u_i}{\partial y} \right|_{y=0} \\
 \text{impulsion} \\
 \\
 \partial_t \left[ h\rho_e E_e - \int_0^\delta (\rho_e E_e - \rho_i E_i) dy \right] \\
 + \\
 \partial_x \left[ h\rho_e E_e u_e - \int_0^\delta (\rho_e E_e u_e - \rho_i E_i u_i) dy + hp_e u_e - p_e \int_0^\delta (u_e - u_i) dy \right] \\
 = -K \left. \frac{\partial T_i}{\partial y} \right|_{y=0} \\
 \text{énergie}
 \end{array} \right. \quad (3.17)$$

où  $\mu \left. \frac{\partial u_i}{\partial y} \right|_{y=0}$  désigne la **contrainte visqueuse** à la paroi et  $K \left. \frac{\partial T_i}{\partial y} \right|_{y=0}$  le **flux de chaleur pariétal**.

Les termes intégrales désignent les défauts des différentes variables et leur défaut de débit, en particulier le **défaut de masse**  $\int_0^\delta (\rho_e - \rho_i) dy$  et le **défaut de débit masse**  $\int_0^\delta (\rho_e u_e - \rho_i u_i) dy$ .

### Remarques :

1. On retrouverait les mêmes équations dimensionnées dans le cas de l'aérodynamique.
2. On peut relier les défauts des différentes quantités à des épaisseurs fictives [6].

Soit  $\delta$  l'épaisseur de la couche limite, quel est le déplacement virtuel  $d$  des parois en fluide parfait qui permet d'obtenir le même flux de masse que dans la couche limite?

La figure 3.3 schématise le principe de transformation du fluide visqueux en fluide parfait équivalent.

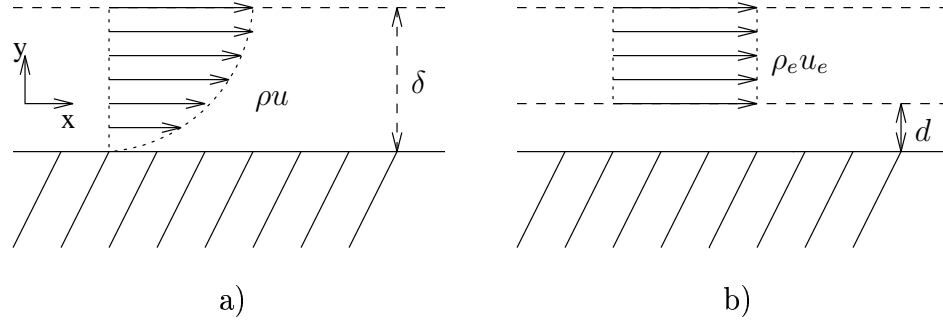


FIG. 3.3 – a) couche limite b) fluide parfait équivalent

En supposant que l'on extrapole le champ externe jusqu'à la paroi virtuelle, l'égalisation des flux s'écrit :

$$\int_0^\delta \rho_i u_i dy = \int_d^\delta \rho_e u_e dy = \int_0^\delta \rho_e u_e dy - \int_0^d \rho_e u_e dy = \int_0^\delta \rho_e u_e dy - d \rho_e u_e$$

soit  $\rho_e u_e d = \int_0^\delta (\rho_e u_e - \rho_i u_i) dy$

Nous pouvons effectuer le même raisonnement avec les quantités de mouvement et d'énergie.

La notion de déplacement est fréquemment utilisée en aérodynamique stationnaire pour coupler la couche limite et le fluide parfait. Elle est aussi parfois utilisée dans le cas du couplage des équations de couche limite compressible avec les équations d'Euler [10]. L'épaisseur de déplacement est alors interprétée comme une fluctuation effective de la géométrie du problème. Pour cela, les auteurs utilisent les équations d'Euler quasi-monodimensionnelles pour une géométrie pulsante que l'on peut obtenir en intégrant les équations différentielles du fluide parfait sur un volume (ou une surface en 2D) variant lentement en espace et en temps [17]. Les équations de couche limite sous forme intégrale sont simplifiées moyennant la connaissance semi empirique des profils de vitesse dans la couche limite (méthode de Von Karman-Pohlhausen [6]), les inconnues étant les défauts des quantités physiques (reliés aux différentes épaisseurs) et la contrainte pariétale. L'idée est donc de bouger les parois du fluide parfait via l'épaisseur de déplacement.

Ainsi, nous avons donc essayé dans un premier temps d'intégrer les effets de couche limite en utilisant les équations d'Euler quasi-monodimensionnelles pour une section pulsante [10]. Nous avons eu alors des difficultés à identifier l'épaisseur de déplacement comme une pulsation effective des parois. Pour donner une idée des difficultés rencontrées, considérons l'équation de la masse pour un tuyau droit quand il y a des pertes visco-thermiques:

$$\partial_t \left[ \rho_e - \frac{2}{R} \int_0^\delta (\rho_e - \rho_i) dy \right] + \partial_x \left[ \rho_e u_e - \frac{2}{R} \rho_0 \int_0^\delta (u_e - u_i) dy \right] = 0$$

L'équation de la masse pour un tuyau droit quand il y a des mouvements de paroi

s'écrit:

$$\partial_t [S\rho_e] + \partial_x [S\rho_e u_e] = 0$$

avec  $S = \pi(R - d)^2 \approx \pi(R^2 - 2Rd)$  soit

$$\partial_t \left[ \rho_e - \frac{2}{R} d \rho_e \right] + \partial_x \left[ \rho_e u_e - \frac{2}{R} \rho_0 u_e d \right] = 0 \quad (3.18)$$

Maintenant, oublions les effets thermiques et considérons uniquement l'effet de la viscosité. Alors pour la couche limite visqueuse, on écrit:

$$\partial_t [\rho_e] + \partial_x \left[ \rho_e u_e - \frac{2}{R} \rho_0 \int_0^\delta (u_e - u_i) dy \right] = 0$$

Si on écrit  $u_e d_v = \int_0^\delta (u_e - u_i) dy$ , on a:

$$\partial_t [\rho_e] + \partial_x \left[ \rho_e u_e - \frac{2}{R} \rho_0 u_e d_v \right] = 0 \quad (3.19)$$

Si on identifie cette équation avec l'équation obtenue dans le cas de mouvements de parois (equation 3.18), on voit qu'il y a un problème pour l'identification des termes en  $\partial_t(d\rho_e)$ . Des difficultés du même type apparaissent pour les équations de l'impulsion et de l'énergie.

3. Dans le cas où  $S_h \geq 1$ , on peut obtenir par intégration un modèle quasi-monodimensionnel pour la vitesse axiale, cette approche se retrouve dans des problèmes d'écoulements sanguins (propagation d'onde de pouls) [19].



### 3.3 Extension au guide d'onde axisymétrique

Soit un guide d'onde axisymétrique à géométrie lentement variable en espace, de rayon  $R$  et de section  $S(x) = \pi R(x)^2$ .

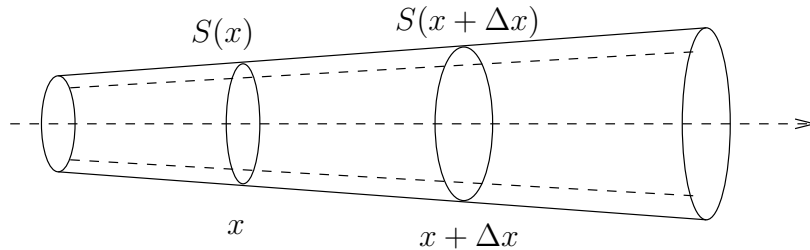


FIG. 3.4 – guide à section lentement variable

Pour traiter ce cas, nous devons repartir des équations de base exprimées en coordonnées cylindriques, l'invariance par rotation permettant de ne conserver que deux variables  $(x, r)$  avec  $x$  coordonnée longitudinale et  $r$  coordonnée radiale (origine sur l'axe de symétrie).

Dans ce cas, la principale différence avec le cas bidimensionnel plan vient des expressions de la divergence d'un vecteur et du laplacien d'un scalaire :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot W &= \frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r W_r) = \frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_r}{\partial r} + \frac{W_r}{r} \\ \nabla^2 W &= \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial W}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r}\end{aligned}$$

Dans les équations de base (3.13, 3.15), les termes de flux transverses, les contraintes visqueuses et le flux de chaleur seront donc modifiés.

Les termes de flux transverses s'écriront  $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (W v)$ . La vitesse  $v$  étant nulle à la paroi et dans l'axe, ces termes ne fourniront pas de contribution aux équations intégrées sur la section du conduit.

De même au regard des adimensionnements précédents, en définissant maintenant le nombre de cisaillement sur la base du rayon du conduit,

$$S_h = \frac{\delta}{R}$$

nous vérifions que la cylindricité fait apparaître dans les équations de couche limite adimensionnées précédentes (3.12) des termes d'ordre  $S_h$  (contrainte visqueuse et flux de chaleur) qui par intégration sur la section deviendront des termes en  $S_h^2$  dans les équations de propagation.

Négliger ces termes du second ordre revient donc à négliger la cylindricité (termes d'ordre  $S_h$ ) dans les équations de la couche limite, l'épaisseur de cette dernière étant suffisamment

petite devant le rayon du conduit pour utiliser les équations du problème plan.

A l'intégration sur la surface dans le cas du problème plan correspond maintenant une intégration sur un volume :

$$\begin{aligned} \int_V \overline{W} dV &= \int_x^{x+\Delta x} \left( \int_{S_i} \overline{W}_i dS_i + \int_{S_e} \overline{W}_e dS_e \right) dx \\ &= \int_x^{x+\Delta x} \left( \int_{1-S_h}^1 \overline{W}_i 2\pi r_e dr_e + \int_0^{1-S_h} \overline{W}_e 2\pi r_e dr_e \right) dx \end{aligned}$$

avec

$$\int_0^{1-S_h} \overline{W}_e 2\pi r_e dr_e = \pi(1-S_h)^2 \overline{W}_e \approx \pi(1-2S_h) \overline{W}_e + O(S_h^2)$$

et en effectuant le changement de variable  $y_e = 1 - r_e$  et en se rappelant que  $y_e = S_h y_i$ , on obtient

$$\int_{1-S_h}^1 \overline{W}_i 2\pi r_e dr_e = \int_0^{S_h} \overline{W}_i 2\pi(1-y_e) dy_e = 2\pi S_h \int_0^1 \overline{W}_i dy_i + O(S_h^2)$$

Nous pouvons maintenant en déduire les équations quasi-monodimensionnelles de propagation dans le cas d'un guide axisymétrique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \left[ \rho_e - 2S_h \int_0^1 (\rho_e - \rho_i) dy_i \right] + (1+M) \partial_x \left[ \rho_e u_e - 2S_h \int_0^1 (\rho_e u_e - \rho_i u_i) dy_i \right] = 0 \\ \quad \text{masse} \\ (1+M) \partial_t \left[ \rho_e u_e - 2S_h \int_0^1 (\rho_e u_e - \rho_i u_i) dy_i \right] \\ \quad + \\ M(1+M) \partial_x \left[ \rho_e u_e^2 - 2S_h \int_0^1 (\rho_e u_e^2 - \rho_i u_i^2) dy_i \right] = -\partial_x p_e - 2S_h \partial_y u_i|_{y_i=0} \\ \quad \text{impulsion} \\ \frac{1}{\gamma-1} \partial_t \left[ \rho_e e_e - 2S_h \int_0^1 (\rho_e e_e - \rho_i e_i) dy_i \right] \\ \quad + \\ \frac{1}{\gamma-1} (1+M) \partial_x \left[ \rho_e e_e u_e - 2S_h \int_0^1 (\rho_e e_e u_e - \rho_i e_i u_i) dy_i \right] \\ \quad + \\ (1+M) \partial_x \left[ p_e u_e - 2S_h p_e \int_0^1 (u_e - u_i) dy_i \right] \\ \quad + \\ M(1+M) \partial_t \left[ \frac{1}{2} \rho_e u_e^2 - 2S_h \int_0^1 \frac{1}{2} (\rho_e u_e^2 - \rho_i u_i^2) dy_i \right] \\ \quad + \\ M^2(1+M) \partial_x \left[ \frac{1}{2} \rho_e u_e^3 - 2S_h \int_0^1 \frac{1}{2} (\rho_e u_e^3 - \rho_i u_i^3) dy_i \right] = -2S_h \partial_y T_i|_{y_i=0} \\ \quad \text{énergie} \end{array} \right. \quad (3.20)$$

en négligeant des termes d'ordre  $\frac{1}{Re}, Sh^2, \frac{1}{Re Sh}$  et  $\sin\theta$ .

Soit en revenant aux variables dimensionnées :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \partial_t \left[ S\rho_e - 2\pi R \int_0^\delta (\rho_e - \rho_i) dy \right] + \partial_x \left[ S\rho_e u_e - 2\pi R \int_0^\delta (\rho_e u_e - \rho_i u_i) dy \right] = 0 \\
 \text{masse} \\
 \\
 \partial_t \left[ S\rho_e u_e - 2\pi R \int_0^\delta (\rho_e u_e - \rho_i u_i) dy \right] \\
 + \\
 \partial_x \left[ S\rho_e u_e^2 - 2\pi R \int_0^\delta (\rho_e u_e^2 - \rho_i u_i^2) dy + Sp_e \right] = p_e \partial_x S - 2\pi R \mu \partial_y u_i|_{y=0} \\
 \text{impulsion} \\
 \\
 \partial_t \left[ S\rho_e E_e - 2\pi R \int_0^\delta (\rho_e E_e - \rho_i E_i) dy \right] \\
 + \\
 \partial_x \left[ S\rho_e E_e u_e - 2\pi R \int_0^\delta (\rho_e E_e u_e - \rho_i E_i u_i) dy + Sp_e u_e - p_e 2\pi R \int_0^\delta (u_e - u_i) dy \right] \\
 = \\
 -2\pi R K \partial_y T_i|_{y=0} \\
 \text{énergie}
 \end{array} \right. \quad (3.21)$$

## 3.4 Simplification des équations du mouvement

### 3.4.1 Approximation des équations de propagation

Jusqu'à maintenant, les termes d'ordre 2 en  $\frac{1}{\sqrt{Re}}$ ,  $S_h$  et les termes combinés en  $\frac{1}{Re S_h}$  ont été négligés. On va maintenant s'intéresser aux termes combinant le nombre de Mach et le "shear number". Nous avons vu précédemment que ces termes caractérisent l'influence de la couche viscothermique sur les équations locales de propagation. Ainsi, négliger les termes en  $M^0 S_h$  revient à tuer le couplage. On peut faire cette approximation quand les effets de pertes viscothermiques sont négligeables devant les effets non linéaires de propagation. Cependant, dans la plupart des problèmes de propagation acoustique en conduit, on doit prendre en compte les pertes viscothermiques pour leurs effets d'atténuation et de dispersion. L'idée est donc de conserver les termes en  $M^0 S_h$  mais de négliger les termes d'ordre  $M^1 S_h$  et plus, ce qui revient à simplifier les défauts des diverses quantités (défaut de débit d'impulsion ...) dans les équations.

Les équations adimensionnées s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \partial_t \left[ \rho_e - 2S_h \int_0^1 (\rho_e - \rho_i) dy_i \right] + \partial_x \left[ (1 + M) \rho_e u_e - 2S_h \int_0^1 (\rho_e u_e - \rho_i u_i) dy_i \right] \\
 \qquad \qquad \qquad = \\
 \qquad \qquad \qquad O(MS_h, S_h^2, \frac{1}{ReS_h}) \\
 \qquad \qquad \qquad \text{masse} \\
 \\
 \partial_t \left[ (1 + M) \rho_e u_e - 2S_h \int_0^1 (\rho_e u_e - \rho_i u_i) dy_i \right] + \partial_x \left[ M(1 + M) \rho_e u_e^2 \right] \\
 \qquad \qquad \qquad = \\
 \qquad \qquad \qquad -\partial_x p_e - 2S_h \partial_y u_i|_{y_i=0} + O(MS_h, S_h^2, \frac{1}{ReS_h}) \\
 \qquad \qquad \qquad \text{impulsion} \\
 \\
 \frac{1}{\gamma-1} \partial_t \left[ \rho_e e_e - 2S_h \int_0^1 (\rho_e e_e - \rho_i e_i) dy_i \right] \\
 \qquad \qquad \qquad + \\
 \frac{1}{\gamma-1} \partial_x \left[ (1 + M) \rho_e e_e u_e - 2S_h \int_0^1 (\rho_e e_e u_e - \rho_i e_i u_i) dy_i \right] \\
 \qquad \qquad \qquad + \\
 \partial_x \left[ (1 + M) p_e u_e - 2S_h p_e \int_0^1 (u_e - u_i) dy_i \right] \\
 \qquad \qquad \qquad + \\
 \partial_t \left[ M(1 + M) \frac{1}{2} \rho_e u_e^2 \right] + \partial_x \left[ M^2 (1 + M) \frac{1}{2} \rho_e u_e^3 \right] \\
 \qquad \qquad \qquad = -2S_h \partial_y T_i|_{y_i=0} + O(MS_h, S_h^2, \frac{1}{ReS_h}) \\
 \qquad \qquad \qquad \text{énergie}
 \end{array} \right. \tag{3.22}$$

Nous avons ainsi éliminé les défauts de flux de quantité de mouvement, d'énergie cinétique et de flux d'énergie cinétique.

Pour revenir aux variables dimensionnées, nous allons simplifier les défauts restants en remarquant que négliger les termes en  $MS_h$  dans les équations de propagation revient à linéariser les défauts de débit.

Les équations simplifiées quasi-monodimensionnelles du mouvement pour les variables dimensionnées s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \left[ S\rho_e - 2\pi R \int_0^\delta (\rho_e - \rho_i) dy \right] + \partial_x \left[ S\rho_e u_e - 2\pi R \rho_0 \int_0^\delta (u_e - u_i) dy \right] = 0 \\ \text{masse} \\ \\ \partial_t \left[ S\rho_e u_e - 2\pi R \rho_0 \int_0^\delta (u_e - u_i) dy \right] + \partial_x \left[ S\rho_e u_e^2 + Sp_e \right] = p_e \partial_x S - 2\pi R \mu \partial_y u_i|_{y=0} \\ \text{impulsion} \\ \\ \partial_t \left[ S\rho_e E_e \right] + \partial_x \left[ S(\rho_e E_e + p_e)u_e - (\rho_0 E_0 + P_0)2\pi R \int_0^\delta (u_e - u_i) dy \right] \\ = -2\pi R K \partial_y T_i|_{y=0} \\ \text{énergie} \end{array} \right. \quad (3.23)$$

Nous observons qu'il n'y a plus de défaut de quantité d'énergie totale, ce qui n'est pas étonnant car on a négligé le défaut d'énergie cinétique et le défaut de quantité d'énergie interne qui est proportionnel à un défaut négligeable de pression (uniforme suivant la section). On peut exprimer cela autrement en disant qu'en négligeant le défaut d'énergie cinétique, à pression constante par épaisseur, les défauts de masse et de température se compensent dans le bilan d'énergie totale.

Nous avons donc linéarisé l'ensemble des contributions de la couche limite dans les équations locales de propagation. Les équations d'état ne sont pas modifiées, soit :

$$p_e = R\rho_e T_e = (\gamma - 1) \left( \rho_e E_e - \frac{(\rho_e u_e)^2}{2\rho_e} \right) \quad (3.24)$$

### 3.4.2 Approximation des équations de couche limite

Pour fermer le système d'équations, on doit déterminer la contrainte visqueuse et le flux de chaleur à la paroi. De même qu'en aérodynamique, la connaissance des profils de vitesse et de température dans la couche limite est donc nécessaire.

Pour cela, nous allons simplifier les équations de couche limite en remarquant que négliger les termes en  $MS_h$  dans les équations de propagation revient à négliger les termes d'ordre  $M$  et plus dans les équations de couche limite.

Les équations de couche limite adimensionnées s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) + \partial_y(\rho v) = O(S_h, M) \\ \\ \partial_t(\rho u) = -\partial_x p + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + O(R_e^{-1}, S_h, M) \\ \partial_t(\rho v) = -\partial_y p + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + O(R_e^{-1}, S_h, M) \\ \\ \frac{1}{\gamma-1} [\partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho u e) + \partial_y(\rho v e)] + \partial_x(pu) + \partial_y(pv) = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + O(R_e^{-1}, M, S_h) \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Les équations sans dimension d'état se réduisent à :

$$p = \rho T + O(M) \quad (3.26)$$

En revenant aux grandeurs dimensionnées, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \rho_0 (\partial_x u + \partial_y v) = 0 \\ \rho_0 \partial_t u = -\partial_x p + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \rho_0 \partial_t v = -\partial_y p + \frac{4}{3} \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \partial_t (\rho_0 e + e_0 \rho) + \frac{\gamma}{\gamma-1} P_0 (\partial_x u + \partial_y v) = K \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{array} \right. \quad (3.27)$$

et

$$p + P_0 = R(\rho_0 T + T_0 \rho) \quad (3.28)$$

Soit en oubliant l'équation de l'impulsion transverse qui ne nous est pas utile, en injectant la masse et l'équation d'état linéarisée dans l'équation de l'énergie, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial p_e}{\partial x} \\ \rho_0 c_p \frac{\partial T}{\partial t} - K \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial p_e}{\partial t} \end{array} \right. \quad (3.29)$$

Nous vérifions alors qu'au premier ordre les distributions transversales de vitesse et de température obéissent à de simples équations linéaires de diffusion dont le terme source est donné par la pression extérieure. On retrouve ainsi une équation de couche limite de Stokes (voir 2.2.2) pour les effets de viscosité et son analogue pour les effets thermiques.

### 3.4.3 Système couplé

Nous pouvons donc écrire maintenant le **système couplé** suivant :

#### Propagation

$$\begin{cases} \partial_t (S\bar{\rho}) + \partial_x (S\bar{\rho}u) = 0 \\ \partial_t (S\bar{\rho}u) + \partial_x [S\bar{\rho}u^2 + Sp] = p \partial_x S - 2\pi R\mu \partial_y u_i|_{y=0} \\ \partial_t (S\bar{\rho}E) + \partial_x [S\bar{\rho}Eu + S\bar{p}u] = -2\pi R K \partial_y T_i|_{y=0} \end{cases}$$

#### Diffusion

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} - \nu_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial T_i}{\partial t} - a_0 \frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho_0 c_p} \frac{\partial p}{\partial t} \end{cases}$$

#### Etat

$$p = (\gamma - 1) \left[ \bar{\rho}E - \frac{1}{2}\bar{\rho}u^2 \right] = \mathcal{R}(\rho_0 T_i + T_0 \rho_i) - P_0$$

avec la viscosité cinématique  $\nu_0 = \frac{\mu}{\rho_0}$ , la diffusivité thermique  $a_0 = \frac{K}{\rho_0 c_p}$ .

Les quantités surlignées désignent ici des **valeurs moyennées** sur la section :

$$\begin{aligned} S\bar{\rho} &= S\rho_e - 2\pi R \int_0^R (\rho_e - \rho_i) dy && \text{la masse linéique} \\ S\bar{\rho}u &= S\rho_e u_e - 2\pi R \rho_0 \int_0^R (u_e - u_i) dy && \text{le débit de masse} \\ S\bar{\rho}u^2 &= S\rho_e u_e^2 && \text{le débit d'impulsion} \\ S\bar{\rho}E &= S\rho_e E_e && \text{la quantité d'énergie} \\ S\bar{\rho}Eu &= S\rho_e E_e u_e - 2\pi R \rho_0 E_0 \int_0^R (u_e - u_i) dy && \text{le débit de quantité d'énergie} \\ S\bar{p}u &= Spu_e - 2\pi R p_0 \int_0^R (u_e - u_i) dy && \text{le travail de la force de pression} \end{aligned}$$

où nous avons éliminé l'épaisseur de couche limite en étendant les bornes des intégrales au rayon complet, les variables vérifiant la continuité à l'interface et l'uniformité transverse dans le flux principal.

Le système est bien un système couplé puisque pour calculer les grandeurs linéiques, on a besoin de la contrainte visqueuse et du flux de chaleur à la paroi, ces dernières quantités étant déterminées par les équations de couche limite dont la résolution nécessite la connaissance

de la pression dans le flux principal ...

On peut exprimer les équations de propagation uniquement en fonction des trois variables conservatives  $S\bar{\rho}$ ,  $S\bar{\rho}u$  et  $S\bar{\rho}E$ .

Pour cela, nous devons exprimer  $p$ ,  $\overline{\rho u^2}$ ,  $\overline{\rho E u}$ , et  $\overline{p u}$  en fonction des trois variables moyennées.

Soit en écrivant sans dimension ( $D_W$  désignant le défaut de la variable  $W$ ) la quantité :

$$\begin{aligned} \frac{(S\bar{\rho}u)^2}{2S\bar{\rho}} &\implies \frac{[(1+M)M\rho_e u_e - M(1+M)S_h D_{\rho u}]^2}{2[(1+M)\rho_e - (1+M)S_h D_\rho]} \\ &= \frac{[(1+M)^2 M^2 (\rho_e u_e)^2 + O(MS_h, MS_h^2 \dots)]}{2(1+M)\rho_e} (1 + S_h D_\rho + O(S_h^2)) \\ &= \frac{(1+M)M^2 \rho_e u_e^2}{2} + O(MS_h, MS_h^2 \dots) \end{aligned}$$

on vérifie que :

$$\frac{\overline{\rho u^2}}{2} \approx \frac{(\overline{\rho u})^2}{2(\bar{\rho})}$$

d'où on tire :

$$p = (\gamma - 1) \left[ \overline{\rho E} - \frac{1}{2} \overline{\rho u^2} \right] \approx (\gamma - 1) \left[ \overline{\rho E} - \frac{\overline{\rho u^2}}{2\bar{\rho}} \right]$$

De même, on vérifie que :

$$\begin{aligned} \overline{p u} &= p \frac{\overline{\rho u}}{\bar{\rho}} \\ \overline{\rho E u} &= \overline{\rho E} \frac{\overline{\rho u}}{\bar{\rho}} \end{aligned}$$



Nous écrivons alors le système couplé de la façon suivante :

**Propagation**

$$\begin{cases} \partial_t(S\bar{\rho}) + \partial_x(S\bar{\rho}u) = 0 \\ \partial_t(S\bar{\rho}u) + \partial_x \left[ (3 - \gamma) \frac{(S\bar{\rho}u)^2}{2(S\bar{\rho})} + (\gamma - 1)(S\bar{\rho}E) \right] = p\partial_x S - 2\pi R \mu \partial_y u_i|_{y=0} \\ \partial_t(S\bar{\rho}E) + \partial_x \left[ \frac{(S\bar{\rho}u)}{(S\bar{\rho})} \left( \gamma(S\bar{\rho}E) - (\gamma - 1) \frac{(S\bar{\rho}u)^2}{2(S\bar{\rho})} \right) \right] = -2\pi R K \partial_y T_i|_{y=0} \end{cases}$$

(3.31)

**Diffusion**

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} - \nu_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial T_i}{\partial t} - a_0 \frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho_0 c_p} \frac{\partial p}{\partial t} \end{cases}$$

**Etat**

$$p = \frac{(\gamma-1)}{S} \left[ S\bar{\rho}E - \frac{(S\bar{\rho}u)^2}{2S\bar{\rho}} \right]$$

### 3.4.4 Comparaison avec les équations de Chester

En annexe C, nous avons montré que les équations de diffusion du système 3.31 possèdent des solutions analytiques décrivant les profils de vitesse et de température dans la couche limite.

Soit le **profil de vitesse**:

$$u_i(y,t) = - \int_0^t \frac{1}{\rho_0} \partial_x p(t_0) \operatorname{erf} \left( \frac{y}{\sqrt{4\nu_0(t-t_0)}} \right) dt_0 \quad (3.32)$$

Le **profil de température**:

$$T_i(y,t) - T_0 = \frac{1}{\rho_0 c_p} \int_0^t \partial_{t_0} p \operatorname{erf} \left( \frac{y}{\sqrt{4a_0(t-t_0)}} \right) dt_0 \quad (3.33)$$

dont nous avons déduit la contrainte pariétale :

$$\mu \frac{\partial u_i}{\partial y} \Big|_{y=0} = - \int_0^t \partial_x p(t-\tau) \sqrt{\frac{\nu_0}{\pi\tau}} d\tau \quad (3.34)$$

et le flux de chaleur à la paroi :

$$K \frac{\partial T_i}{\partial y} \Big|_{y=0} = \int_0^t \partial_\tau p(\tau) \sqrt{\frac{a_0}{\pi(t-\tau)}} d\tau \quad (3.35)$$

Nous retrouvons alors les dérivées fractionnaires d'ordre  $\frac{1}{2}$  caractéristiques des effets d'absorption aux parois.

Les équations de propagation s'écrivent maintenant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(S\bar{\rho}) + \partial_x(S\bar{\rho}u) = 0 \\ \partial_t(S\bar{\rho}u) + \partial_x \left[ (3 - \gamma) \frac{(S\bar{\rho}u)^2}{2(S\bar{\rho})} + (\gamma - 1)(S\bar{\rho}E) \right] = p\partial_x S + 2\pi R \partial_x p * \sqrt{\frac{\nu_0}{\pi t}} \\ \partial_t(S\bar{\rho}E) + \partial_x \left[ \frac{(S\bar{\rho}u)}{(S\bar{\rho})} \left( \gamma(S\bar{\rho}E) - (\gamma - 1) \frac{(S\bar{\rho}u)^2}{2(S\bar{\rho})} \right) \right] = -2\pi R \partial_t p * \sqrt{\frac{a_0}{\pi t}} \end{array} \right. \quad (3.36)$$

Pour comparer nos équations avec celles de Chester, nous reformulons l'équation de conservation de la masse du système 3.23 dans le cas d'un tuyau droit en faisant intervenir les défauts de masse et de débit :

$$\partial_t \left[ \rho_e - \frac{2}{R} \int_0^\delta (\rho_e - \rho_i) dy \right] + \partial_x \left[ \rho_e u_e - \frac{2}{R} \rho_0 \int_0^\delta (u_e - u_i) dy \right] = 0$$

soit

$$\partial_t \rho_e + \partial_x (\rho_e u_e) = \frac{2}{R} \left( \partial_t \left[ \int_0^\delta (\rho_e - \rho_i) dy \right] + \rho_0 \partial_x \left[ \int_0^\delta (u_e - u_i) dy \right] \right)$$

En intégrant sur le rayon les profils de vitesse et de température (3.32, 3.33), on vérifie que :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (u_e - u_i) dy &= u_e d_v = u_e * \sqrt{\frac{\nu_0}{\pi t}} \\ \int_0^\infty (\rho_e - \rho_i) dy &= \rho_0 d_T = -(\gamma - 1) \rho_e * \sqrt{\frac{a_0}{\pi t}} \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_e + \partial_x (\rho_e u_e) &= \frac{2}{R} \left[ -(\gamma - 1) \partial_t \rho_e * \sqrt{\frac{a_0}{\pi t}} + \rho_0 \partial_x u_e * \sqrt{\frac{\nu_0}{\pi t}} \right] \\ &\approx \frac{2}{R} \rho_0 \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{Pr}} \right) \partial_x u_e * \sqrt{\frac{\nu_0}{\pi t}} \end{aligned}$$

Nous retrouvons la même équation de conservation de la masse que Chester (voir paragraphe 2.4) sauf pour le terme de pertes de volume que nous avons négligé.

### 3.5 Conditions de validité des équations de propagation

Pour obtenir le système 3.31, nous avons négligé dans les équations adimensionnées des termes en  $\frac{1}{Re}$ ,  $\frac{1}{ReSh}$ ,  $Sh^2$ ,  $MSh \dots$

La validité de ces approximations est donnée par les conditions suivantes :

- $\frac{1}{\sqrt{Re}} \ll 1$

Cette condition est équivalente à la condition 2.22 de la théorie de Kirchhoff (voir 2.2.1).

C'est l'hypothèse de ne conserver dans les équations que les termes de diffusion visqueuse et de conduction thermique suivant la coordonnée transverse à la propagation. Cela n'implique pas toujours la décomposition du champ en un flux principal de type fluide parfait et un flux secondaire de type visco-thermique près des parois car les effets visco-thermiques peuvent agir sur toute l'épaisseur du conduit.

- $\frac{1}{ReSh} \ll 1$

Cette condition est similaire à la condition 2.21 de la théorie de Kirchhoff. C'est donc la condition justifiant l'hypothèse d'une pression quasi-uniforme suivant la section transversale du conduit. Dans le cas d'une fine couche limite près des parois, on étend l'approximation de quasi-uniformité à l'ensemble des variables dans le flux principal.

- $Sh \ll 1$

Cette condition est équivalente à la condition 2.17 de la théorie de Kirchhoff. On se place donc dans le cas d'une couche limite fine près des parois (hypothèse "tuyau large"). Dans le cas du tuyau cylindrique, négliger les termes en  $Sh^2$  dans les équations de propagation (c.a.d  $Sh$  dans les équations de couche limite) revient à supposer localement qu'à l'échelle de la couche limite, la paroi est plane. Plus l'épaisseur de couche limite devient grande, moins les termes de géométrie seront négligeables.

Les trois conditions précédentes sont donc à peu près équivalentes à celles de l'acoustique linéaire mais se retrouvent aussi dans le cas de l'aérodynamique (avec les nombres de Reynolds et de shear analogues).

- $M \ll 1$

l'analyse dimensionnelle qui suppose localement un champ acoustique peu différent de celui donné par la théorie linéaire s'appuie sur cette condition. Cependant les termes d'ordre  $M^2$  et plus ne sont pas négligés dans les équations de propagation. De plus, les interactions non-linéaires entre les ondes aller et retour (d'ordre  $M$  et plus [20]) sont prises en compte et les résonances à fortes amplitudes peuvent être décrites plus précisément [21].

- $MSh \ll 1$

En négligeant les termes d'ordre  $MSh$  dans les équations non-linéaires de propagation (c.a.d les termes d'ordre  $M$  dans les équations de couche limite), on néglige les non-linéarités de couche limite, ce qui permet de se ramener à une propagation non-linéaire suivant la coordonnée axiale couplée à une diffusion (linéaire) visqueuse et thermique suivant la coordonnée perpendiculaire à la paroi. On exclut alors la génération par

le champ acoustique d'écoulement moyen ("acoustic streaming"), d'éventuels décollements de couche limite ou l'apparition de turbulence possible à très forte amplitude [18].

- $\varepsilon \ll 1$

C'est la condition classique justifiant l'approximation d'ondes planes dans les troncs de cône.

**Remarques:**

- On doit garder à l'esprit que des termes localement plus faibles peuvent par accumulation sur la distance devenir dominants. L'erreur commise en négligeant des termes d'ordre élevé peut alors devenir plus importante que ne le laisse supposer l'analyse dimensionnelle qui est locale. Une analyse dimensionnelle intégrant la distance de propagation donnera donc plus d'informations (analyse en échelles multiples) [8].
- Il faut envisager l'apparition de turbulence dans les couches limites pour de très fortes oscillations. Dans ce cas, la plupart des considérations précédentes sont à revoir, en particulier le modèle de couche limite linéaire.

**Exemple numérique**

Soit un tuyau cylindrique infini de rayon  $7cm$  rempli d'air initialement au repos et dans lequel se propage une onde simple de pression monochromatique d'amplitude  $10kPa$  et de fréquence  $300Hz$ , les petits paramètres par ordre croissant d'importance sont :

$$\frac{1}{\sqrt{Re}} \approx 10^{-4}, Sh \approx 10^{-3}, M \approx 10^{-2}$$

et les termes négligés :

$$\frac{1}{Re} \approx 10^{-7}, S_h^2 \approx 10^{-6}, MSh \approx 10^{-4}, \frac{1}{ReSh} \approx 10^{-4}.$$

Dans ce cas, pour des distances de propagation suffisantes, nous pouvons prévoir une distorsion de l'onde qui sera régie par les effets non-linéaires de propagation et dans une moindre mesure par les pertes visco-thermiques aux parois.

### 3.6 Application au trombone

Pour la même fréquence ( $300Hz$ ) et la même amplitude ( $10kPa$ ), dans un tuyau cylindrique de rayon  $0.7cm$ , c'est à dire pour des grandeurs se rapprochant de celles mesurées dans la coulisse d'un trombone pour une note jouée fortissimo, nous avons:

$$\frac{1}{\sqrt{Re}} \approx 10^{-4}, Sh \approx 10^{-2}, M \approx 10^{-2}$$

et les termes négligés :

$$\frac{1}{Re} \approx 10^{-7}, \frac{1}{ReSh} \approx 10^{-5}, S_h^2 \approx 10^{-4}, MSh \approx 10^{-3}.$$

Les trois conditions équivalentes à celles de l'acoustique linéaire qui établissent la validité de l'hypothèse d'ondes quasi planes dans la coulisse sont vérifiées ( $\frac{1}{\sqrt{Re}} \ll 1$ ;  $\frac{1}{ReSh} \ll 1$ ;  $Sh \ll 1$ ). L'essentiel des pertes visco-thermiques est donc concentré dans la couche limite près des parois. Ceci a été établi et vérifié pour la plupart des instruments à vent depuis longtemps (voir par exemple [16]).

Mais intégrons maintenant dans la discussion les effets de propagation non-linéaire. Dans la coulisse, les termes d'ordre  $M$  et  $Sh$  (distorsion non-linéaire et pertes visco-thermiques) dominant et seront les principaux responsables de la déformation de l'onde en cours de propagation.

Cependant, nous avons conservé les termes d'interaction non-linéaire d'ordre  $M$ , localement d'ordre supérieur aux termes en  $Sh^2$  (influence de la géométrie) qui ont été négligés. Pourtant ces derniers devraient engendrer des effets cumulatifs plus importants que les premiers [8].

Notons aussi que les termes d'ordre  $MSh$  sont négligés localement mais que l'apparition d'écoulement moyen ("acoustic streaming") peut parfois donner lieu à des effets de dissipation et de dispersion cumulatifs [22]. Il semble difficile d'établir expérimentalement si de tels effets existent dans la coulisse du trombone.

De même, les amplitudes de jeu sont ici suffisamment importantes pour que l'apparition de turbulence soit envisageable. Ceci a d'ailleurs été supposé pour des amplitudes de jeu extrêmes où l'apparition de turbulence a bien été observée dans la coulisse de l'instrument [23].

Enfin, nous avons supposé dès le début qu'il n'y avait pas d'écoulement moyen. Hors, il semble probable que le débit aérodynamique des lèvres génère un écoulement moyen dans la coulisse de l'instrument (nous n'avons malheureusement pas évalué son importance) . La prise en compte d'interactions entre le champ acoustique et l'écoulement pourrait s'avérer nécessaire [18]. Dans les deux derniers cas évoqués, les pertes viscothermiques peuvent devenir essentiellement non-linéaires [13] et notre modèle ne pourra décrire de tels effets.

Nos conclusions devraient rester valables pour l'ensemble du registre de l'instrument sauf pour l'extrême grave où les longueurs d'onde mises en jeu peuvent devenir plus grandes que la longueur de la coulisse, ce qui va limiter la distorsion non-linéaire en cours de propagation.

## Conclusion

Dans ce chapitre, en nous appuyant sur une analyse dimensionnelle, nous avons dérivé un modèle de propagation-diffusion acoustique non-linéaire dans les guides d'onde à section lentement variable en espace. Dans le cas de conduits plans ou axi-symétriques de type "tuyau large", la formulation 3.31 fait apparaître les équations d'Euler quasi-monodimensionnelles couplées à des équations de couche limite se réduisant à de simples équations linéaires de diffusion transverse pour la vitesse axiale et la température. Les profils de vitesse et de température sont connus analytiquement et on retrouve alors dans les équations de propagation en tuyau "large" les termes classiques d'absorption aux parois sous forme de dérivées fractionnaires. La généralisation de la formulation quelque soit le rayon nécessite la prise en compte de termes de géométrie supplémentaires. Pour le conduit plan, l'extension est plus aisée.

Inclure la dissipation dans le volume (comme le fait Chester) est aisé mais parfois (voir les exemples précédents), il pourrait être plus judicieux d'inclure en priorité les effets d'"acoustic streaming" c'est à dire prendre en compte des termes d'ordre supérieur dans les équations de couche limite [24] ou la turbulence des couches limites (un modèle simple quasi-stationnaire est envisageable [13]).

De même, la formulation établie s'appuie sur une hypothèse de propagation acoustique en présence d'écoulement moyen nul. En présence d'un écoulement stationnaire quasi-monodimensionnel, s'il n'y a pas d'interaction avec les couches limites acoustiques, le modèle est encore valide. Dans le cas contraire, il faudrait reprendre l'analyse dimensionnelle en combinant l'approche aérodynamique et l'approche acoustique afin de prendre en compte les couches limites aérodynamiques et acoustiques et leurs éventuelles interactions [18].

# Bibliographie

- [1] C. W. Tam. Computational aeroacoustics: issues and methods. *AIAA journal*, 33(10):1788–1796, 1995.
- [2] Botteldooren D. Numerical model for moderately nonlinear sound propagation in three-dimensional structures. *J. Acoust. Soc. Am.*, 100(3):1357–1367, 1996.
- [3] Chester W. Resonant oscillations in closed tubes. *J. Fluid Mech.*, 18(44), 1964.
- [4] Msallam R., Menguy L., Causse R., and Hirschberg A. Nonlinear wave propagation in trombones. In *Nonlinear acoustics in perspective 1996 (14th ISNA)*. Nanjing University Press, Nanjing, 1996.
- [5] Msallam R., Dequidt S., Dubois F., and Caussé R. Modèle et simulations numériques de la propagation non-linéaire dans les conduits (text in french). In *Actes de Colloques du 4<sup>ème</sup> Congrès Français d’Acoustique*, pages 699–702, Marseille, 1997.
- [6] Cousteix J. *Couche limite laminaire*. Epadues- Editions, 1988.
- [7] Schlichting H. *Boundary-Layer Theory*. McGraw-Hill Ed., 1968.
- [8] Menguy L. Gilbert J. Propagation acoustique faiblement non linéaire dans les guides cylindriques, modélisation et solutions (numériques). In *Actes du 4<sup>ème</sup> Congrès Français d’Acoustique*, volume 2, Marseille, 1997.
- [9] Coulouvrat F. On the equations of nonlinear acoustics. *J. Acoustique*, 5:321–359, 1992.
- [10] T. W. Swafford. Computation of unsteady supersonic quasi-one-dimensional viscous-inviscid interacting internal flowfields. *AIAA journal*, 31(2):404–408, 1992.
- [11] M. Verges. Modélisations unidimensionnelles de fluide. Mémoire d’ingénieur CNAM en acoustique, Paris, 1994.
- [12] Otero D. Poirée B. L’acoustique non-linéaire dans les fluides. *Revue du CETHEDEC*, (46), 1976.
- [13] A. Hirschberg. Communication personnelle, 1997.
- [14] Lighthill M.J. *Waves in Fluids*. Cambridge University Press, 1978.
- [15] Disselhorst J.H.M. *Acoustic resonance in open tubes*. PhD thesis, Twente University of Technology, Enschede, 1978.
- [16] Kergomard J. *champ interne et champ externe des instruments à vents*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, 1981.
- [17] Dubois F. Communication personnelle, 1996.

- [18] A. Hirschberg and S. W. Rienstra. Elements of aeroacoustics. Chapter of the Lectures Notes of Von Karman Lecture, 1994.
- [19] Lagrée P.Y. Rossi M. Étude de l'écoulement du sang dans les artères : effets nonlinéaires et dissipatifs. *CRAS*, t 332 Série II b., 1996.
- [20] Menguy L. Gilbert J. Nonlinear acoustic propagation in cylindrical air-filled tubes; solutions and experiments to appear, 1999.
- [21] Makarov S. Ochmann M. Nonlinear and thermoviscous phenomena in acoustics, part III. *Acta Acustica*, 83:827–846, 1997.
- [22] Makarov S. Ochmann M. Nonlinear and thermoviscous phenomena in acoustics, part I. *Acta Acustica*, 82:579–606, 1996.
- [23] Gilbert J. and Petiot J.F. Brass instruments, some theoretical and experimental results. In *Proceedings of the Institut of Acoustics, ISMA'97*, Edimbourg, 1997.
- [24] Harris J.G. Qi Q., Johnson R.E. Boundary layer attenuation and acoustic streaming accompanying plane-wave propagation in a tube. *J. Acoust. Soc. Am.*, 97(3):1499–1509, 1995.



---

# Chapitre 4

## Modèle et simulations numériques

### Introduction

Le système 3.36 du précédent chapitre ne peut se résoudre analytiquement et sera donc résolu numériquement. Depuis une vingtaine d'années, la "dynamique des fluides numérique" a connu de grands développements en particulier dans ses applications à l'aérodynamique [1]. Cependant, les applications à l'acoustique ne se développent que depuis quelques années seulement, essentiellement dans le domaine de l'aéroacoustique [2, 3]. L'une des principales difficultés réside en la gestion des différences d'échelle entre des effets locaux comme des décollements de couche limite ou des structures turbulentes, et les distances de propagation acoustique en général beaucoup plus grandes. Le problème de la dispersion et dissipation numérique est aussi crucial sachant que les schémas numériques classiques d'ordres faibles (ordre deux par exemple) demandent en général un minimum de 20 points par longueur d'onde pour une propagation linéaire acceptable sur une centaine de longueurs d'onde. Ceci n'est pas acceptable en terme de coût de calcul pour des applications industrielles en général multi-dimensionnelles. Dans ce cadre, des schémas d'ordre élevé ont donc été conçus permettant de se limiter à environ 8 points par longueur d'onde [3, 4]. Cependant, de telles méthodes n'ont été que peu validées et utilisées en acoustique non-linéaire (et toujours dans des contextes différents du notre [6, 7]). C'est pourquoi au regard de nos objectifs, nous nous contenterons dans cette étude de valider et d'appliquer à notre problème d'acoustique non-linéaire une méthode de résolution numérique classique des équations d'Euler s'appuyant sur le célèbre schéma de Lax-Wendroff [10].

## 4.1 Résolution numérique

### 4.1.1 Méthodes numériques appliquées à la résolution des équations d'Euler

Tout d'abord présentons quelques principes classiques qui apparaissent dans les méthodes de résolution des équations d'Euler [1]. Il est possible de classer ces dernières en schémas "centrés" et schémas "décentrés" pour l'intégration en espace. Quant à l'intégration en temps, elle peut se diviser en schémas de type "explicite" ou "implicite".

A titre d'exemple considérons l'équation d'avection suivante:

$$\partial_t u + a \partial_x u = 0 \tag{4.1}$$

où  $a$  désigne une célérité constante.

Gardant une représentation continue en temps, nous désirons discrétiser cette équation en espace cherchant des valeurs approchées de la solution  $u$  au point  $x_j = j\Delta x$  où  $\Delta x$  est le pas d'espace.

Nous écrivons alors l'équation 4.1 de la façon suivante:

$$\partial_t u_j(t) = -a \partial_x u(x_j) \tag{4.2}$$

Pour se ramener à une équation différentielle ordinaire du type  $\partial_t u_j(t) = f(u_j)$ , on peut utiliser différentes méthodes pour discrétiser la dérivée spatiale.

#### Schémas décentrés

Les schémas décentrés s'appuient sur une approximation décentrée des dérivées.

En décentrant à gauche, on écrit:

$$\partial_x u(x_j) \approx \frac{1}{\Delta x} (u_j - u_{j-1})$$

en décentrant à droite:

$$\partial_x u(x_j) \approx \frac{1}{\Delta x} (u_{j+1} - u_j)$$

#### Schémas centrés

Les schémas centrés s'appuient sur une approximation du type:

$$\partial_x u(x_j) \approx \frac{1}{2\Delta x} (u_{j+1} - u_{j-1})$$

Considérons maintenant la discrétisation en temps. Les exemples les plus simples s'appuient sur des développements en temps tronqués.

### Schémas explicites

Au premier ordre, nous développons la solution  $u^{n+1}$  au temps  $(n+1)\Delta t$  autour de la solution  $u^n$  au temps  $n\Delta t$ :

$$u^{n+1} \approx u^n + \Delta t f(u^n)$$

Ce schéma est dit explicite car si  $u^n$  est connu,  $u^{n+1}$  est calculé aisément à partir de celui-ci et de la fonction  $f$ .

### Schémas implicites

En développant maintenant autour de la solution  $u^{n+1}$ , nous obtenons un schéma implicite:

$$u^{n+1} - \Delta t f(u^{n+1}) = u^n$$

Ce schéma est dit implicite car il faut résoudre une équation en  $u^{n+1}$  (généralement à l'aide d'une méthode numérique).

Nous avons présenté ces techniques de discrétisation dans leur forme la plus simple. Il est bien sûr possible de pousser les développements de Taylor pour obtenir des schémas plus précis. De même, la discrétisation spatiale peut faire intervenir un plus grand nombre de points. Il existe ainsi une multitude de schémas et de variantes. Il n'est pas aisé de faire un choix dans cette "jungle". Nous devons observer les propriétés des différentes classes de schémas et procéder par élimination en fonction de leur capacité à traiter notre problème physique et de leur complexité d'implémentation.

Ainsi, les schémas décentrés en espace sont à éliminer car ils sont difficiles à mettre en oeuvre. En effet, le décentrage induit un sens de propagation privilégié. Pour simuler correctement la propagation d'onde dans les deux directions de l'espace monodimensionnelle, il est nécessaire de traiter séparément les modes acoustiques (voir schéma de godounov [5]). Les schémas d'intégration en temps implicites possèdent des qualités puissantes comme celle de stabilité inconditionnelle et la possibilité de travailler avec des pas de temps grands. Cependant, ils sont complexes à traiter et entraînent des coûts de calcul plus élevés que les schémas explicites. Ce dernier point peut être compensé en prenant des pas de temps grands mais alors une forte dissipation numérique rend ces schémas inexploitable en "haute fréquence". Nous avons donc plutôt choisi un schéma centré en espace et explicite en temps. Le problème de la dissipation numérique se pose aussi dans ce cas. Nous avons vu dans l'introduction que des schémas ont été conçus et optimisés pour en limiter les effets [3]. Cependant, ces derniers pouvant être limités en adaptant le maillage, et au regard de nos objectifs modestes dans le domaine du calcul scientifique, nous préférons faire appel à un schéma classique d'ordre faible (ordre deux en espace et en temps) mais néanmoins robuste, le célèbre schéma de Lax-Wendroff [10].

### 4.1.2 Schéma de Lax-Wendroff

Nous présentons ici quelques généralités sur ce schéma.

Le système à résoudre s'écrit sous forme compacte:

$$\partial_t W + \partial_x G(W) = F(W) \quad (4.3)$$

$$\text{avec } W = \begin{pmatrix} S\rho \\ S\rho u \\ S\rho E \end{pmatrix}, \quad G(W) = \begin{pmatrix} S\rho u \\ \frac{3-\gamma}{2} \frac{(S\rho u)^2}{S\rho} + (\gamma-1)S\rho E \\ \frac{(S\rho u)}{S\rho} \left( \gamma(S\rho E) - (\gamma-1) \frac{(S\rho u)^2}{2S\rho} \right) \end{pmatrix}$$

$$\text{et } F(W) = (\gamma-1) \begin{pmatrix} 0 \\ p\partial_x S + 2\pi R \partial_x p * \sqrt{\frac{p_0}{\pi t}} \\ -2\pi R \partial_t p * \sqrt{\frac{p_0}{\pi t}} \end{pmatrix}$$

où la pression est une fonction des trois composantes conservatives de  $W$  (voir l'équation d'état du système 3.30).

#### Schéma en espace et en temps

Le schéma de Lax-Wendroff s'appuie sur un développement de Taylor au second ordre en temps du vecteur solution  $W$  [1]:

$$W(M, t^k + \Delta t) = W(M, t^k) + \Delta t \partial_t W(M, t^k) + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_{tt}^2 W(M, t^k)$$

avec  $M$  un point de l'espace,  $\Delta t$  le pas de temps et  $t_k = k\Delta t$  où  $k$  est un entier.

Soit la solution au temps  $(k+1)\Delta t$  et en un point (d'indice  $j$ ) de l'espace discrétisé:

$$W_j^{k+1} = W_j^k + \Delta t \partial_t W_j^k + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_{tt}^2 W_j^k \quad (4.4)$$

Les dérivées en temps s'expriment à partir de l'équation 4.3, soit:

$$\begin{aligned} \partial_t W &= F(W) - \partial_x G(W) \\ \partial_{tt}^2 W &= d_t F(W) - \partial_x [d_t G(W)] \end{aligned}$$

avec  $d_t G(W) = \partial_W G(W) \partial_t W$  et  $d_t F(W, t) = \partial_W F(W, t) \partial_t W + \partial_t F(W, t)$

Pour l'intégration en espace, nous considérons un domaine à une dimension d'espace, de longueur  $L$ , divisé en  $m$  intervalles de longueur  $\Delta x = \frac{L}{m}$ . Nous désignerons par  $W_j$  la solution au point  $x_j = j\Delta x$  (voir figure 4.1). En approximant la dérivée spatiale par une simple formule de différences finies sur trois points, nous écrivons:

$$\partial_t W_j^k = F(W)_j^k - \frac{G(W)_{j+1}^k - G(W)_{j-1}^k}{2\Delta x}$$

et pour la dérivée d'ordre 2:

$$\partial_{tt}^2 W_j^k = [d_t F(W)]_j^k - \frac{[\partial_W G(W) \partial_t W]_{j+1}^k - [\partial_W G(W) \partial_t W]_{j-1}^k}{2\Delta x}$$

que l'on écrit parfois aussi:

$$\partial_{tt}^2 W_j^k = [d_t F(W)]_j^k - \frac{[\partial_w G(W) \partial_t W]_{j+\frac{1}{2}}^k - [\partial_w G(W) \partial_t W]_{j-\frac{1}{2}}^k}{\Delta x}$$

Il semble que cette dernière forme faisant intervenir les valeurs aux points milieux soit stable alors que la précédente impliquant un étalement du schéma sur 5 points ne l'est pas [12].

Les valeurs aux points milieux sont calculées simplement en utilisant:

$$\partial W_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\partial W_{j+1} + \partial W_{j-1})$$

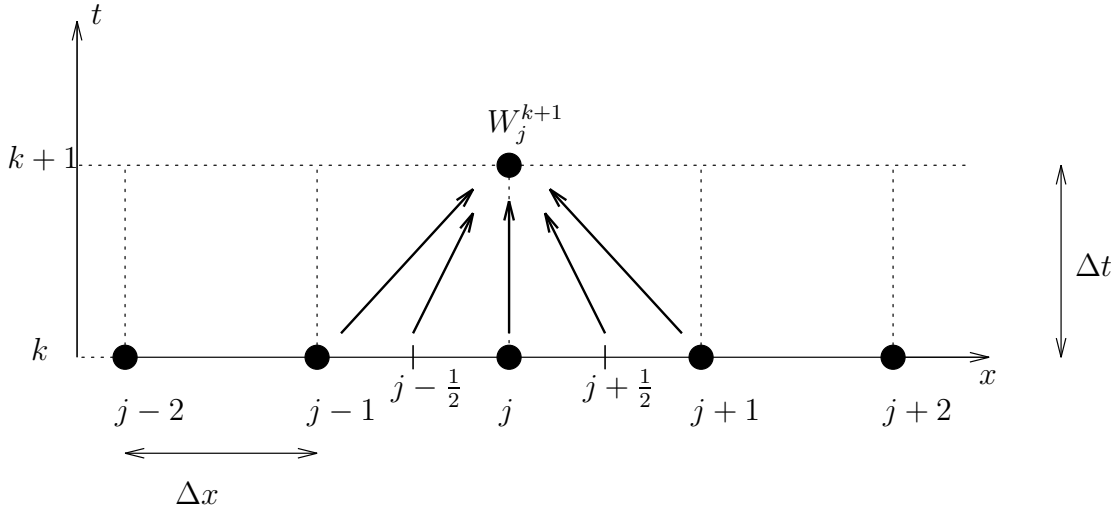


FIG. 4.1 – Principe du schéma étalé sur trois points

### Propriétés du schéma

L'étude des propriétés de ce schéma va se limiter au cas linéaire et n'a pas à notre connaissance été réalisée en non-linéaire. Nous allons de plus négliger les termes sources soit les pertes visco-thermiques et le changement de section. L'équation 4.3 est ensuite réduite à une simple équation d'advection de type:

$$\partial_t W + c \partial_x W = 0 \quad (4.5)$$

où  $c$  désigne une célérité constante.

Le schéma s'écrit alors:

$$W_j^{n+1} = W_j^n - c \frac{\Delta t}{2\Delta x} (W_{j+1}^n - W_{j-1}^n) + c^2 \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} (W_{j+1}^n - 2W_j^n + W_{j-1}^n) \quad (4.6)$$

L'étude du schéma inclut l'étude de sa stabilité et de la dispersion numérique [1]. L'analyse de stabilité par analyse de Fourier revient à injecter une onde simple harmonique et à observer le comportement du schéma. Soit à l'instant  $t^n$ , une onde sinusoïdale de nombre d'onde  $k$ :

$$W_j^n = \overline{W}(k) e^{ikj\Delta x}$$

en l'injectant dans le schéma 4.6, nous obtenons:

$$W_j^{n+1} = g_a(k\Delta x, \sigma) W_j^n$$

où  $\sigma = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$  (parfois appelé "cfl" ou nombre de Courant-Friedrichs-Levy) et  $g_a$  est le coefficient d'amplification numérique du schéma.

La stabilité est assurée lorsque que:

$$|g_a(k\Delta x, \sigma)| \leq 1 \quad \forall k, 0 \leq k\Delta x < 2\pi$$

Pour le schéma de Lax-Wendroff, nous vérifions que:

$$g_a(k\Delta x, \sigma) = 1 - i\sigma \sin(k\Delta x) + \sigma^2(\cos(k\Delta x) - 1)$$

Il est aisé de montrer que la stabilité est assurée pour:

$$|\sigma| = \left| c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1 \tag{4.7}$$

L'étape suivante est l'étude de la distorsion numérique du schéma. L'amortissement numérique est cumulatif avec la distance de propagation. Celui doit donc être évalué en fonction des distances typiques de propagation qui nous concernent [3]. Pour cela, observons le coefficient d'amplification numérique pour une composante donnée de nombre d'onde  $k_p$  après un nombre d'échantillons en temps  $\tau_N = N \frac{\Delta x}{c\Delta t}$  correspondant à une distance de propagation sur une longueur de  $N$  mailles:

$$g_a^{\tau_N} = |g_a|^{\tau_N} e^{i\tau_N \arg(g_a)} = \alpha_N e^{i\theta_N}$$

L'amortissement numérique est donc égal à:

$$\begin{aligned} \alpha_N &= [(1 + \sigma^2(\cos(k_p\Delta x) - 1))^2 + (\sigma \sin(k_p\Delta x))^2]^{\frac{\tau_N}{2}} \\ &= [1 - \sigma^2(1 - \sigma^2)(1 - \cos(k_p\Delta x))]^{\frac{N}{2\sigma}} \end{aligned}$$

Soit  $X_p = \frac{\lambda_p}{\Delta x}$  le nombre de points par longueur d'onde  $\lambda_p$ , alors nous avons:

$$\alpha_N = \left[ 1 - \sigma^2(1 - \sigma^2) \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi}{X_p} \right) \right)^2 \right]^{\frac{N}{2\sigma}} \tag{4.8}$$

Pour une longueur de propagation de l'ordre de  $2m$ , en fixant le pas d'espace à  $1mm$  soit  $N = 2000$ , nous pouvons tracer sur la figure 4.2 l'évolution de l'amortissement numérique en  $dB$  en fonction du rapport du nombre total de mailles et du nombre de mailles par longueur d'onde  $(\frac{N}{X_p})$  pour différents  $\sigma$  donnés:

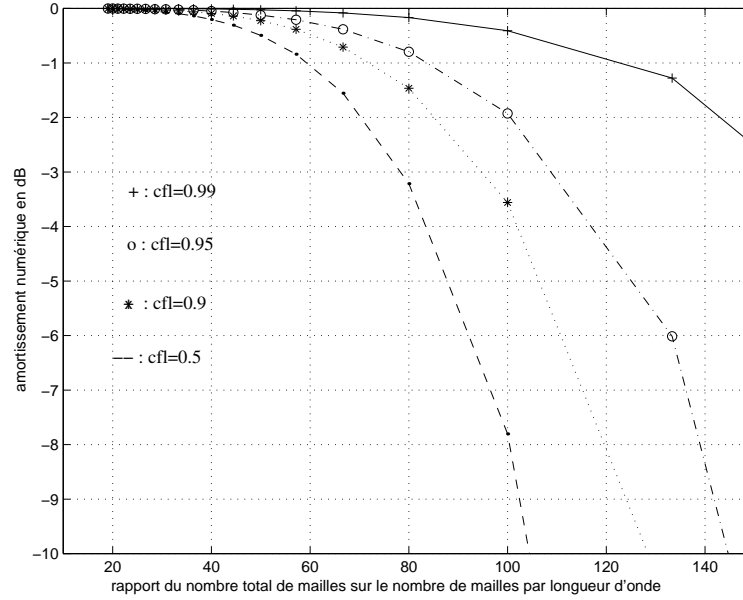


FIG. 4.2 – Amortissement numérique

Nous voyons que pour  $\sigma$  (noté “cfl” sur la figure) variant de 0.5 à 1, l’amortissement varie de  $-8dB$  à  $0dB$  pour  $\frac{N}{X_p} = 100$ , c’est à dire pour une onde se propageant sur 100 fois sa longueur d’onde, étant elle même discrétisée sur 20 mailles (il n’y pas d’amortissement pour  $cfl = 1$  quelque soit  $\frac{N}{X_p}$ ). Ainsi dans cet exemple, pour  $\sigma < 0.95$ , les fréquences supérieures à  $17kHz$  subiront un amortissement numérique (cumulé sur la distance) supérieur à  $2dB$ . Nous effectuons le même raisonnement pour la phase, soit

$$\theta_N = \frac{N}{\sigma} \text{Arctg} \left( \frac{-\sigma \sin \left( \frac{2\pi}{X_p} \right)}{1 + \sigma^2 \left( \cos \left( \frac{2\pi}{X_p} \right) - 1 \right)} \right) \quad (4.9)$$

Sur la figure 4.3, nous observons l’évolution de l’erreur de phase  $\theta_N - N \frac{2\pi}{X_p}$  pour différents  $\sigma$ .

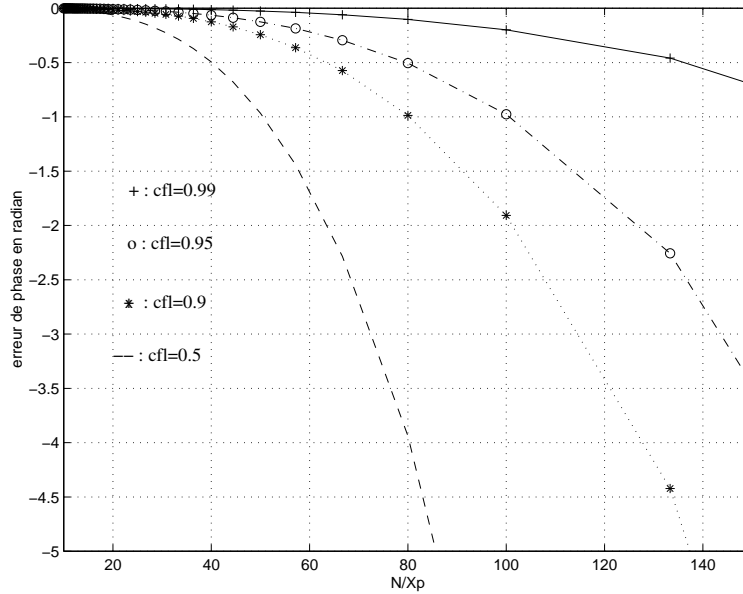


FIG. 4.3 – Dispersion numérique

Pour  $\sigma < 0.95$ , les fréquences supérieures à  $17kHz$  subiront un déphasage numérique (cumulé sur la distance) supérieur à 1 radians. En fonction du problème considéré, de la plage fréquentielle étudiée, les effets de la distorsion numérique conditionneront donc le choix du maillage.

### 4.1.3 Viscosité artificielle

Quand il y a formation d’ondes de choc, les schémas numériques de la famille “Lax-wendroff” présentent des oscillations parasites autour de la discontinuité [1]. De plus, les effets de la distorsion non-linéaire peuvent induire l’apparition d’ondes de fréquences aigus que le maillage ne peut décrire, provoquant ainsi un phénomène de repliement spectral. La dissipation propre au schéma n’étant pas suffisante pour remédier à ce problème, il est classique d’introduire de la dissipation artificielle, en s’inspirant des effets dissipatif de la viscosité physique à l’échelle du maillage. En effet, les effets de la viscosité physique tendent à étaler la discontinuité des ondes de choc sur une certaine épaisseur [17]. Nous avons ainsi utilisé la dissipation artificielle de MacCormack et Baldwin [1] qui corrige la solution  $W_i$  de la façon suivante:

$$W_i^{vis} = W_i + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ D_{i+\frac{1}{2}}(W_{i+1} - W_i) - D_{i-\frac{1}{2}}(W_i - W_{i-1}) \right] \quad (4.10)$$



où  $W_i^{vis}$  désigne la solution obtenue par correction du flux numérique,  $D$  la viscosité artificielle correctrice qui s'écrit:

$$D = \epsilon(\Delta x)^2 \frac{|u| + c}{p} \left| \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right| \quad (4.11)$$

avec  $\epsilon$  un paramètre à ajuster. Nous avons discrétisé ce dernier terme de la façon suivante:

$$D_{i+\frac{1}{2}} = \epsilon \frac{(|u| + c)_{i+1} + (|u| + c)_i}{2} \frac{2|p_{i+2} - p_{i+1} - p_i + p_{i-1}|}{(p_{i+2} + 3(p_{i+1} + p_i) + p_{i-1})}$$

Dans les simulations dont nous présentons les résultats par la suite, nous plaçant avant la distance de formation d'une onde de choc, nous n'avons pas jugé utile d'utiliser la viscosité artificielle.

#### 4.1.4 Traitement numérique des noyaux de convolution

Nous devons discrétiser le noyau intégral type suivant:

$$X(t) = \int_0^t W(t - \tau) \frac{1}{\sqrt{\tau}} d\tau \quad (4.12)$$

Si l'on discrétise cette formule de façon explicite, nous écrivons:

$$X^{n+1} = \sqrt{\Delta t} \sum_{k=0}^n W(n - k) \frac{1}{\sqrt{k + 1}} \quad (4.13)$$

Nous avons implanté cette formule et l'avons confrontée avec une solution analytique dans le domaine fréquentiel (voir chapitre 2.2.2). Les résultats n'étant pas satisfaisants, nous avons utilisé une autre formule de discrétisation.

Pour cela, nous écrivons la solution au temps  $(n + 1)\Delta t$  sous une forme semi-discrète:

$$X^{n+1} = \sum_{k=0}^n \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} W((n + 1)\Delta t - \tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \quad (4.14)$$

En vérifiant que

$$\int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} = \frac{2\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{k} + \sqrt{k + 1}}$$

considérant cet intégrande comme une mesure et en appliquant la formule des trapèzes, nous obtenons:

$$\begin{aligned} X^{n+1} &= \sum_{k=0}^n \frac{W^{n+1-(k+1)} + W^{n+1-k}}{2} \frac{2\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{k} + \sqrt{k + 1}} \\ &= \sqrt{\Delta t} \sum_{k=0}^n \frac{W^{n+1-k} + W^{n-k}}{\sqrt{k} + \sqrt{k + 1}} \end{aligned}$$

Soit

$$X^{n+1} = \sqrt{\Delta t} \sum_{k=0}^n (W^{n+1-k} + W^{n-k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \quad (4.15)$$

Nous avons vérifié par la simulation que cette approximation mène à des résultats numériques satisfaisants. Une étude plus poussée de cette formulation (une étude paramétrique) serait nécessaire mais nous n'avons pas eu le temps de nous y atteler. Nous renvoyons à la validation du schéma complet pour des résultats confirmant la validité de notre approximation.

### 4.1.5 Conditions limites

Le schéma étant centré en espace, le problème du calcul de la solution aux points à la frontière du domaine se pose. L'utilisation de dérivées décentrées mène à des schémas instables. C'est pourquoi nous avons opté pour une formulation classique du problème frontière par la méthode des caractéristiques [1]. Nous renvoyons au paragraphe 2.3.1 du deuxième chapitre pour un rappel de ces notions.

La figure 4.4 décrit le principe de l'utilisation des caractéristiques aux frontières du domaine.

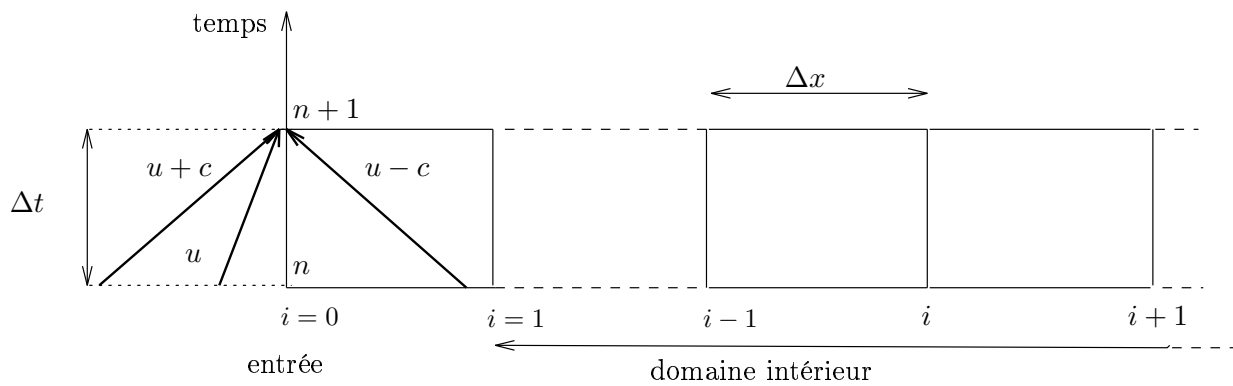


FIG. 4.4 – Méthode des caractéristiques aux limites

L'idée est donc de décomposer la solution frontière à un instant donné comme la combinaison de trois ondes, une onde aller se transportant à la vitesse  $u + c$ , une onde retour voyageant à la vitesse  $u - c$  et une composante d'écoulement se déplaçant à la vitesse du fluide  $u$ .

### Approche linéaire

En général, une linéarisation du problème est effectuée de la façon suivante [11]: Le vecteur  $W$  solution à la frontière de l'équation 4.3 supposé ne varier que faiblement autour

d'une solution de référence  $W_{ref}$  à la frontière s'écrit:

$$W = W_{ref} + \delta W \quad (4.16)$$

où  $\delta W$  désigne la fluctuation de la solution.

En annulant le second membre du système (pas de pertes ni de changement de section aux conditions limites) et en injectant la solution dans l'équation 4.3, nous obtenons les équations du mouvement linéarisées ("équations d'Euler linéarisées"):

$$\partial_t(\delta W) + \partial_W G(W_{ref}) \partial_x \delta W = 0 \quad (4.17)$$

où il est supposé que  $\partial_t W_{ref} = 0$ , c'est à dire que le champ autour duquel on linéarise est uniforme et stationnaire.

De même que pour le cas non-linéaire (voir la remarque au paragraphe 2.3.1 du second chapitre), il est possible pour nos équations conservatives linéarisées de déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice  $\partial_W G(W_{ref})$ . On retrouve bien entendu des valeurs propres qui correspondent aux célérités des trois types d'onde,  $\lambda_1 = u_{ref} + c_{ref}$  pour l'onde acoustique aller,  $\lambda_2 = u_{ref}$  pour la composante d'écoulement et  $\lambda_3 = u_{ref} - c_{ref}$  pour l'onde acoustique retour.

Il est alors possible de décomposer la solution à un instant donné en une combinaison linéaire de ces trois ondes. Soit exprimé plus mathématiquement [1], décomposer la solution sur la base des vecteurs propres  $\Phi$  de la matrice de Riemann  $R = \partial_W G(W_{ref})$  (les vecteurs propres sont présentés en annexe D):

$$\delta W = \sum_{i=1,2,3} \alpha_i \Phi_i \quad (4.18)$$

où les  $\alpha_i$  désignent les variables caractéristiques de la solution dans la base considérée (similaires aux invariants de Riemann).

A l'entrée du domaine, deux composantes entrantes (relatives à l'onde aller et à une éventuelle composante d'écoulement) sont à définir en fonction de ce que l'on veut imposer alors que la composante sortante (relative à l'onde retour) sera déterminée en fonction du champ acoustique interne (figure 4.5).

A la sortie du domaine (figure 4.6), il faudra calculer les composantes des ondes qui sortent du domaine de calcul (soit l'onde aller et la composante d'écoulement) et en fonction de la condition limite désirée se donner la composante de l'onde entrante (onde retour).

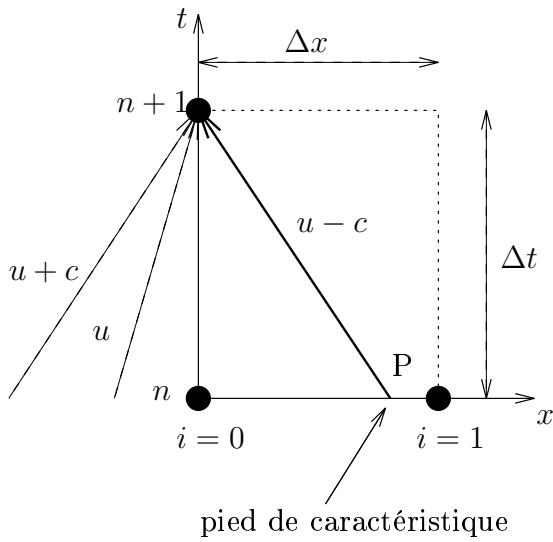


FIG. 4.5 – caractéristiques à l'entrée

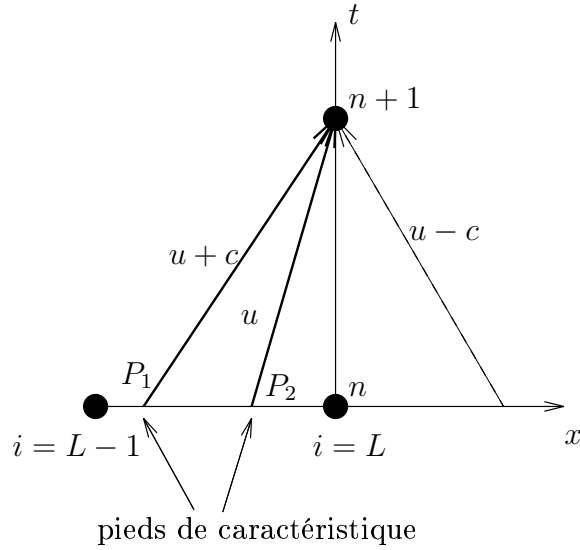


FIG. 4.6 – caractéristiques en sortie

Le calcul à la frontière au temps  $(n+1)\Delta t$  des contributions provenant du champ interne s'appuie sur la détermination du vecteur solution au pied de la caractéristique au temps  $n\Delta t$ . La solution  $\delta W_P^n$  sera obtenue par interpolation linéaire des solutions au noeud frontière et au noeud intérieur voisin.

Ainsi, à l'entrée nous écrivons:

$$\delta W_P^n = -(u_{ref} - c_{ref}) \frac{\Delta t}{\Delta x} \delta W_1^n + \left( 1 + (u_{ref} - c_{ref}) \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \delta W_0^n$$

Nous pouvons alors calculer la composante acoustique sortante  $\alpha_3$  (invariante le long de la caractéristique) par recombinaison suivant les vecteurs propres à gauche correspondants  $(\Phi_3^*)$  de la matrice de Riemann (c.a.d. les vecteurs propres de la matrice transposée):

$$\alpha_3 = \sum_{j=1,2,3} (\delta W_P^n(j), \Phi_3^*(j)) \quad (4.19)$$

Connaissant la composante de l'onde sortante, il est aisé d'imposer à l'entrée un débit donné ou une pression en calculant la composante acoustique entrante au domaine.

Ainsi, à partir des composantes caractéristiques entrantes et sortantes qui s'écrivent:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \rho_{ref} \delta u + \frac{\delta p}{c_{ref}} \\ \alpha_3 &= -\rho_{ref} \delta u + \frac{\delta p}{c_{ref}} \end{aligned}$$

nous pouvons calculer la composante acoustique  $\alpha_1$  relative à l'onde entrante de manière à imposer à la frontière à l'instant  $(n+1)\Delta t$  une fluctuation de pression  $p_{imp}^{n+1}$  en fonction de

$\alpha_3$  composante sortante calculée au pied de la caractéristique:

$$\alpha_1^{n+1} = 2 \frac{p_{imp}^{n+1}}{c_{ref}} - \alpha_3$$

La formule 4.18 nous permet alors de recomposer la solution complète à l’instant considéré. La même méthode peut être utilisée en sortie du domaine de calcul. Pour simuler une condition de sortie “non réfléchissante”, il suffit de calculer les composantes des ondes sortantes au domaine et d’annuler la composante acoustique entrante. Il est possible aussi de simuler des conditions réfléchissantes de type “tuyau ouvert” ou “fermé”.

Nous n’avons pas encore discuté du choix de la solution autour de laquelle nous linéarisons les équations. Supposant que localement l’écoulement ne diffère que peu de la solution au repos, nous pouvons choisir les grandeurs de références relatives à cet état. Cette approximation n’est valable cependant que si localement les effets non-linéaires restent faibles, ce qui sera en général vrai dans le cadre de nos applications.

### Approche non-linéaire

Cependant, en non-linéaire, pour des amplitudes élevées ou dans le cas d’apparition d’ondes de choc, les conditions limites linéarisées peuvent induire des erreurs numériques et des réflexions parasites. Dans la référence [13], une méthode de traitement d’une condition limite non réfléchissante fortement non-linéaire est proposée, s’appuyant sur la résolution d’un problème de Riemann [14]. L’approche non-linéaire des conditions limites est un sujet de recherche d’actualité dans la communauté du calcul scientifique.

Nous proposons modestement ici d’appliquer la méthode des caractéristiques en non-linéaire pour traiter ce problème.

Nous allons pour cela supposer que localement (c’est à dire au niveau de la maille frontière) les caractéristiques sont des droites et appliquer les relations invariantes de Riemann que l’on a vu au second chapitre (relations 2.27).

A l’entrée du domaine, nous écrivons:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\gamma - 1}c + u &= \frac{2}{\gamma - 1}c_e + u_e \\ \frac{2}{\gamma - 1}c - u &= \frac{2}{\gamma - 1}c_p - u_p \end{aligned}$$

où les indices  $p$  et  $e$  désignent respectivement les valeurs au pied de la caractéristique sortante et de la caractéristique entrante (voir figure 4.5).

Nous ajoutons une relation isentropique du type:

$$p = \rho_0 \left( \frac{c}{c_0} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$$

En combinant les formules précédentes en fonction du type de condition limite que nous désirons, nous pouvons construire le vecteur solution à l'entrée. Notons que nous devons imposer sur la caractéristique entrante la célérité du son (ou la pression) et la vitesse locale du fluide, ce qui ne semble pas évident a priori quand on travaille avec des données expérimentales.

Ainsi, dans le paragraphe 4.3, nous utiliserons comme donnée d'entrée, une onde de pression aller  $\delta p_e$  estimée à partir de mesures. Nous devons donc à partir de cette unique donnée évaluer la célérité et la vitesse du fluide sur la caractéristique entrante. Nous écrivons pour cela:

$$c_e = c_0 + \delta c_e = c_0 + \frac{\gamma - 1}{2} u_e = c_0 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\delta p_e}{\rho_0 c_0}$$

Nous avons donc assumé ponctuellement une relation linéaire ( $\delta p_e = \rho_0 c_0 u_e$ ) entre la vitesse entrante et la pression correspondante. De même, nous écrivons :

$$\rho_e = \rho_0 + \delta \rho_e = \rho_0 + \frac{\delta p_e}{c_0^2}$$

Nous pouvons alors calculer la solution (totale) pour les variables non conservatives en entrée à partir des données au pied de la caractéristique sortante (onde retour) et des valeurs imposées sur la caractéristique entrante:

$$u = \frac{1}{\gamma - 1} (c_e - c_p) + \frac{u_e + u_p}{2}$$

$$c = \frac{c_e + c_p}{2} + \frac{\gamma - 1}{4} (u_e - u_p)$$

$$p = (P_0 + \delta p_e) \left( \frac{c}{c_e} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$\rho = \rho_e \left( \frac{p}{p_e} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

De même, à la sortie du domaine, pour une condition limite non réfléchissante (voir le paragraphe 2.3.2), nous écrivons respectivement pour la caractéristique sortante  $C^+$  et la caractéristique entrante  $C^-$ :

$$\frac{2}{\gamma - 1} c + u = \frac{2}{\gamma - 1} c_p + u_p$$

$$\frac{2}{\gamma - 1} c - u = \frac{2}{\gamma - 1} c_0$$

soit la solution (totale) en sortie pour la vitesse du fluide et la célérité:

$$u = \frac{1}{\gamma - 1} (c_p - c_0) + \frac{u_p}{2}$$

$$c = \frac{c_p + c_0}{2} + \frac{\gamma - 1}{4} u_p$$

Combinées avec les formules isentropiques, ces équations permettent de construire la solution (sous forme conservative) en entrée et en sortie du domaine connaissant la solution (obtenue par interpolation linéaire) au pied des caractéristiques sortantes respectives.

### Changement de section et pertes visco-thermiques

Nous avons supposé qu'aux limites du domaine la section est uniforme et nous avons négligé les pertes viscothermiques. La prise en compte de ces effets peut s'avérer nécessaire. La forme caractéristique de Chester incluant les pertes visco-thermiques et la section variable  $S(x)$  s'écrit:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + (u \pm c) \frac{\partial}{\partial x} \right] \left( u \pm \frac{2c}{\gamma - 1} \right) = \mp cu \frac{\partial_x S}{S} \pm c_0 \beta \left( \frac{\partial u}{\partial x} * \frac{1}{\sqrt{t}} \right)$$

où  $\beta$  est défini au chapitre deux (voir 2.4).

A la sortie du domaine de calcul, on utilisera les relations suivantes:

$$u + \frac{2c}{\gamma - 1} = u_p + \frac{2c_p}{\gamma - 1} + \int_{C^+} \left( -cu \frac{\partial_x S}{S} + c_0 \beta \frac{\partial u}{\partial x} * \frac{1}{\sqrt{t}} \right) dC$$

$$u - \frac{2c}{\gamma - 1} = ?$$

où l'on doit intégrer le long de la caractéristique sortante  $C^+$  les termes sources ce qui n'est pas difficile numériquement (en approximant la caractéristique par une droite et en utilisant une formule de quadrature pour l'intégrale). Par contre la relation le long de la caractéristique entrante  $C^-$  est à définir en fonction du type de condition désirée et cela semble plus délicat. Nous n'avons d'ailleurs pas finalisé ce travail et ne présenterons par la suite aucun résultat de simulation numérique à ce sujet.

## 4.2 Validation et simulations numériques

Nous allons dans un premier temps présenter des résultats de simulations pour des cas simples pour lesquels des solutions analytiques existent.

### 4.2.1 Onde simple en fluide parfait: comparaison avec la méthode des caractéristiques

Nous avons rappelé dans le second chapitre (voir 2.3.2) la théorie des ondes simples. Soit un onde simple se propageant en fluide parfait, La solution de Fubini permet à partir d'une onde sinusoïdale d'obtenir une solution approchée sous la forme d'une série de Fourier. Mais nous allons plutôt utiliser directement la méthode des caractéristiques qui permet de construire la solution de référence. Considérons un signal discret (à pas d'échantillonnage

uniforme) à l'abscisse  $x = 0$  (voir figure 4.7). La construction du signal en  $x = L$  mène à un signal distordu à pas de temps non-uniforme.

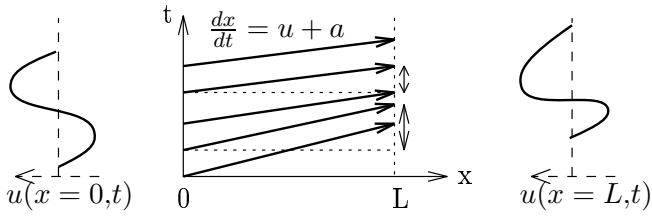


FIG. 4.7 – Entrée à pas de temps fixe

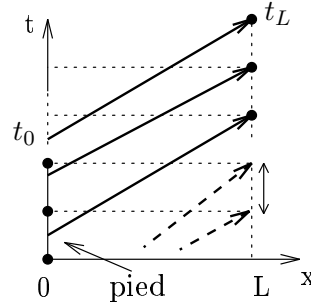


FIG. 4.8 – Sortie à pas de temps fixe

Pour obtenir un signal à pas de temps uniforme, il est alors nécessaire d'interpoler. Nous préférons donc calculer directement la valeur des échantillons également répartis en  $x = L$  (voir figure 4.8) en remontant au pied de la caractéristique (en  $x = 0$ ). Ce dernier sera déterminé grâce à un algorithme itératif de Newton [20]. L'équation 2.31 du second chapitre nous permet d'écrire pour une source de vitesse  $u$  quelconque:

$$f(t_0) = L - (t_L - t_0) \left( c_0 + \frac{(\gamma + 1)}{2} u(0, t_0) \right) = 0 \tag{4.20}$$

avec  $t_L$  une date pour une perturbation se trouvant en  $x = L$  et  $t_0$  la date au pied de la caractéristique à déterminer. Pour résoudre cette équation, nous écrivons l'itération de Newton suivante [21]:

$$t_0^{n+1} = t_0^n - \frac{f(t_0^n)}{f'(t_0^n)}$$

Le calcul est initialisé en prenant  $t_0^0 = t_L - \frac{x}{c_0}$ . Nous choisissons comme vitesse d'entrée une sinusoïde  $u(t) = U_{max} \sin(2\pi f_0 t)$ . Les dates  $t_L$  en sortie seront espacées régulièrement avec un pas de temps suffisamment petit de façon à éviter les éventuels phénomènes de repliement spectral.

Pour une fréquence de  $f_0 = 500 Hz$  et une amplitude de vitesse de  $U_{max} = 10 m.s^{-1}$ , nous pouvons en utilisant la formule 2.34 (chapitre deux) prédire la formation d'un choc à la distance  $\bar{x} = 3.2 m$ .

Nous allons comparer alors les résultats donnés par la méthode des caractéristiques et ceux du code numérique Euler (en fluide parfait). Les conditions limites de ce dernier sont vitesse imposée à l'entrée et condition de sortie non réfléchissante. Le nombre "cff" déterminé à partir de la vitesse de propagation acoustique maximale de l'onde ( $cfl = (u + c)_{max} \frac{\Delta t}{\Delta x}$ ) est de 0.95. Le nombre de points par période de signal est de 400.



Observons tout d'abord sur la figure 4.9 l'allure des signaux temporels pour trois abscisses différents adimensionnés par la distance de formation de l'onde de choc  $s = \frac{x}{x_0}$ :

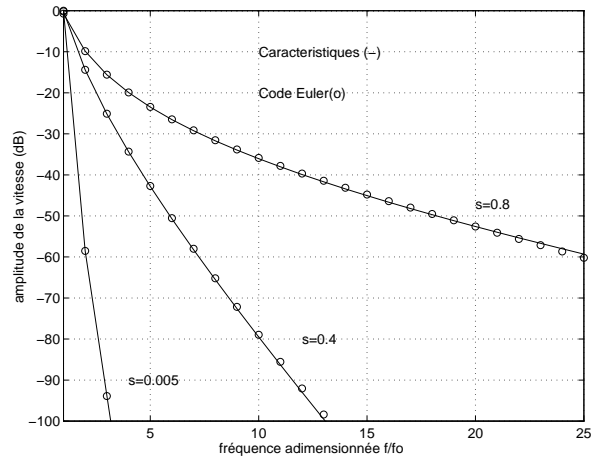
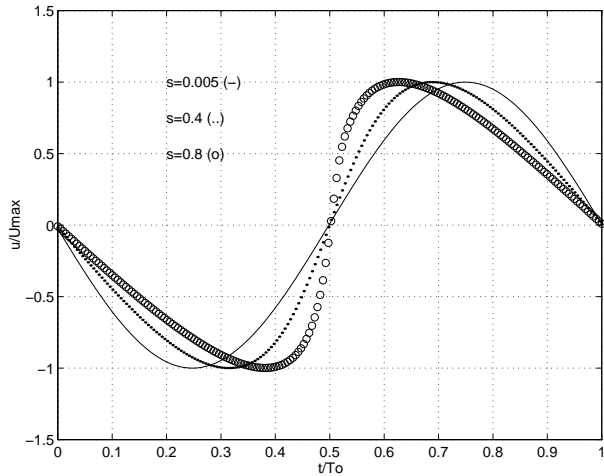


FIG. 4.9 – Signal calculé pour trois abscisses      FIG. 4.10 – Module de la FFT correspondant

Nous retrouvons la transformation progressive de l'onde sinusoidale en une onde distordue à front d'onde raide et enrichie en harmoniques supérieures. La figure 4.10 compare le module du spectre fréquentiel des signaux aux trois abscisses calculés par l'algorithme de Newton (méthode des caractéristiques) et le code Euler. Les résultats du code sont satisfaisants (jusqu'à la 25<sup>ème</sup> harmonique au moins soit  $12500Hz$ ) pour l'onde la plus distordue, ce qui est confirmé par la figure 4.11 qui compare l'allure temporelle des deux signaux.

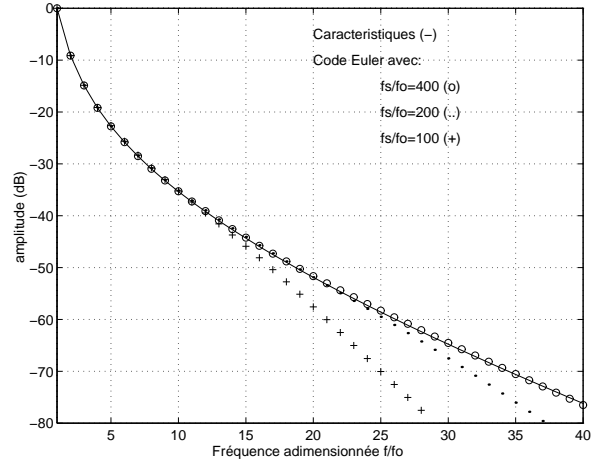
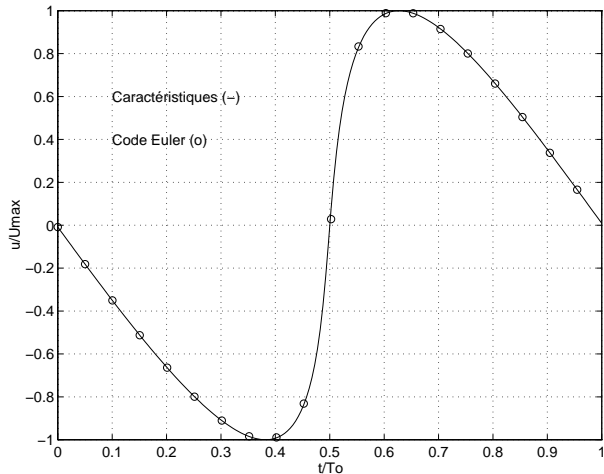


FIG. 4.11 – Signal calculé à l'abscisse  $s = 0.8$       FIG. 4.12 – Influence du pas de temps

Cette précision est bien entendu fonction de la discrétisation. En effet, plus le maillage

sera fin (à cfl fixé), plus la précision sur les harmoniques générées par distorsion non-linéaire sera grande. La figure 4.12 met ainsi en évidence l’effet de la dissipation numérique sur la précision du spectre résultant ( $f_s$  désigne la fréquence d’échantillonnage). Nous observons que pour une discrétisation de 100 points par période ( $f_s/f_0 = 100$ ) la solution se dégrade à partir de la 15<sup>ème</sup> harmonique (soit à peu près 7 points par période de cette harmonique) alors que pour 200 points par période elle se dégrade à partir de la 25<sup>ème</sup> (8 points par période). Nous obtenons des résultats similaires pour la phase des signaux.

De même qu’en linéaire, la dissipation numérique va donc affecter la précision des résultats en haute fréquence et limiter l’enrichissement en harmoniques induit par la distorsion non-linéaire. Il faudra donc adapter le maillage en fonction du problème considéré.

### 4.2.2 Onde linéaire avec pertes visco-thermiques: comparaison avec la théorie de Kirchhoff

Dans le second chapitre (voir 2.2.1), nous avons rappelé la théorie linéaire de Kirchhoff qui se simplifie dans le cas des “tuyaux larges”. Nous allons donc comparer les résultats de cette théorie classique au premier ordre et ceux du code non-linéaire avec couches limites visco-thermiques pour de faibles amplitudes, c’est à dire lorsque les effets de propagation non-linéaire sont négligeables.

Pour cela, plaçons nous dans un conduit cylindrique de rayon  $7mm$  dont la longueur est de l’ordre du mètre (coulisse d’un trombone). Nous observons sur la figure 4.13 l’erreur relative sur l’amplitude calculée par le code (la solution de référence est celle de la théorie linéaire) en fonction du nombre de points par longueur d’onde. La dissipation numérique induit une erreur relative qui dépasse 5% pour un maillage inférieur à 20 points par longueur d’onde. Nous observons sur la figure 4.14 des résultats similaires pour la phase.

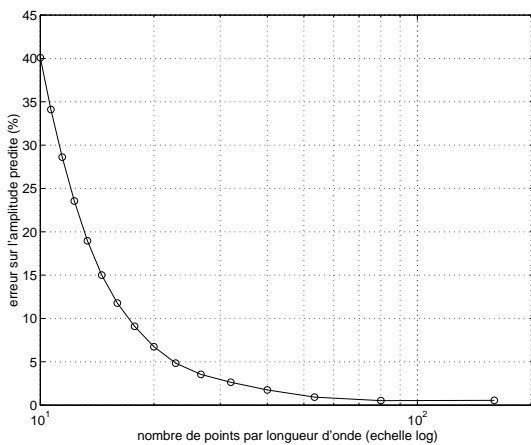


FIG. 4.13 – Erreur relative sur l’amplitude

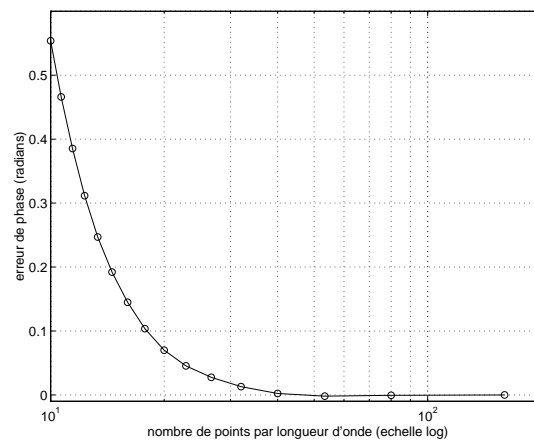


FIG. 4.14 – Erreur sur la phase

Nous retrouvons ainsi les phénomènes d’amortissement et de dispersion numériques en

“haute fréquence”, précédemment étudiés dans le cas linéaire sans perte (paragraphe 4.1.2). Dans le cas présent, ces effets se superposent à l’amortissement et à la dispersion “physiques”.

### 4.2.3 Effets combinés des pertes visco-thermiques et de la non-linéarité de propagation

Pour de fortes amplitudes, la déformation de l’onde en cours de propagation résulte de la combinaison des effets de couche limite et de la distorsion non-linéaire. La figure 4.15 présente l’évolution du signal à trois abscisses différents pour le même signal d’entrée que sur la figure 4.9. Nous observons l’amortissement de l’onde en cours de propagation.

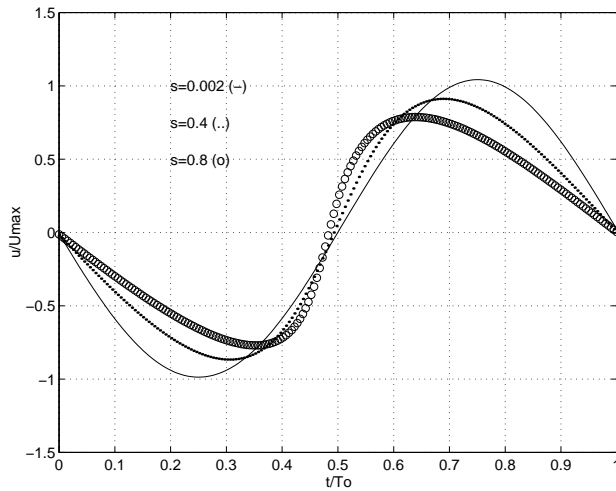


FIG. 4.15 – Code avec pertes

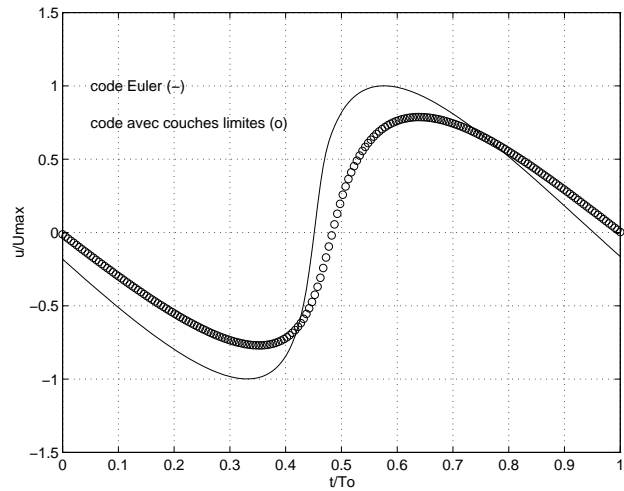


FIG. 4.16 – Comparaison avec et sans pertes

La comparaison avec le signal calculé à l’abscisse  $s = 0.8$  dans le cas sans pertes (figure 4.16) confirme l’importance de l’amortissement dû aux pertes visco-thermiques. Ces dernières limitent la pente maximale du signal d’où un front d’onde moins raide. La dispersion induite par les pertes se caractérise par un retard dans la propagation de l’onde que l’on peut observer sur la figure 4.16 au niveau du passage par la valeur nulle du front qui est retardé par rapport au cas sans pertes.

Les résultats du code numérique avec pertes recourent des résultats obtenus par la méthode de Burgers généralisée [16].

### 4.2.4 Influence des conditions limites

Nous allons comparer en sortie du domaine l’erreur relative sur les solutions calculées à forte amplitude en sortie, avec les conditions limites non-réfléchissantes linéaire ( $W_{ref} = W_0$ ) et non-linéaire, dans le cas sans perte. La solution de référence est la solution donnée par

le schéma (intérieur) de Lax-Wendroff au même point (donc en prenant un domaine de calcul plus grand). La figure 4.17 montre que l'erreur induite par la condition limite est plus importante dans le cas de l'approche linéaire. La figure 4.18 compare le pourcentage de réflexion vu au niveau de l'entrée dans les deux cas. Nous observons que la condition de sortie non-linéaire induit beaucoup moins de réflexions parasites. Notons tout de même que dans le cas linéaire, les erreurs restent faibles.

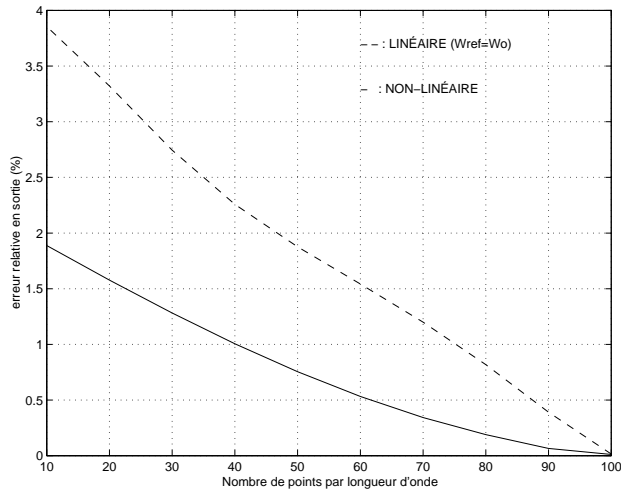


FIG. 4.17 – Erreur relative en sortie

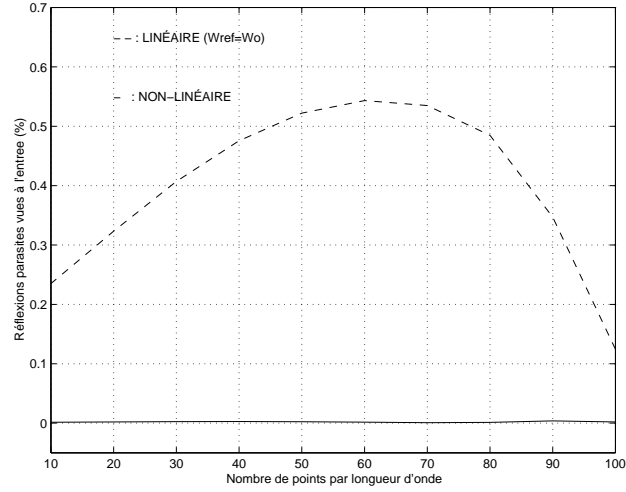


FIG. 4.18 – Réflexions parasites

Nous avons vérifié aussi que dans le cas du code avec pertes visco-thermiques, l'approximation locale de fluide parfait au niveau des conditions limites ne provoque que des erreurs minimes.

### 4.3 Application au trombone

Dans le cas de simulations numériques de l'acoustique dans un trombone, nous distinguons deux situations différentes. Si nous étudions l'auto-oscillation de l'instrument, nous nous intéresserons surtout aux "basses fréquences", c'est à dire des fréquences inférieures à 1500Hz environ pour cet instrument [15]). Le maillage devra être alors adapté de façon à minimiser la dispersion numérique afin d'obtenir pour les pics de résonance des valeurs correctes (fréquences et amplitudes).

Par contre, si l'on étudie la propagation et la dispersion des ondes dans l'instrument ou le son rayonné vers l'extérieur, nous aurons certainement à observer des fréquences plus aigües et il faudra donc utiliser un maillage plus fin. Dans ce cas, les effets d'amortissement et de dispersion numériques deviendront alors complètement négligeables en basse fréquence mais il faudra tenir compte des limitations induites par la dissipation numérique dans l'aigu.

C'est ce dernier cas qui nous intéresse. Nous allons en effet simuler la propagation d'une onde

aller dans la coulisse de l'instrument. Le signal que nous allons utiliser a été évalué expérimentalement par nos collègues du LAUM [18]. Le dispositif expérimental utilisé comprend un véritable trombone et une bouche artificielle. Un système à deux microphones rapprochés mesurant la pression en début de coulisse permet après coup de séparer les ondes aller et les ondes retour moyennant une approximation linéaire locale. La longueur de la coulisse est de  $2.06m$  (quatrième position) et son rayon de  $7mm$ , la note jouée est un sol médium ( $192Hz$ ). La méthode à deux microphones étant très sensible et au regard des diverses approximations, seuls les premiers harmoniques de l'onde aller ont été estimés. L'estimation n'est pas assez fiable pour envisager une comparaison quantitative entre les expériences et les simulations. Nous avons tout de même vérifié qu'en recomposant la pression totale à partir des ondes aller et retour estimées sur quatre harmoniques, l'allure du signal temporel est très proche d'un signal de trombone mesuré (figure 4.19). Nous allons donc utiliser cette onde aller comme signal d'entrée du code numérique.

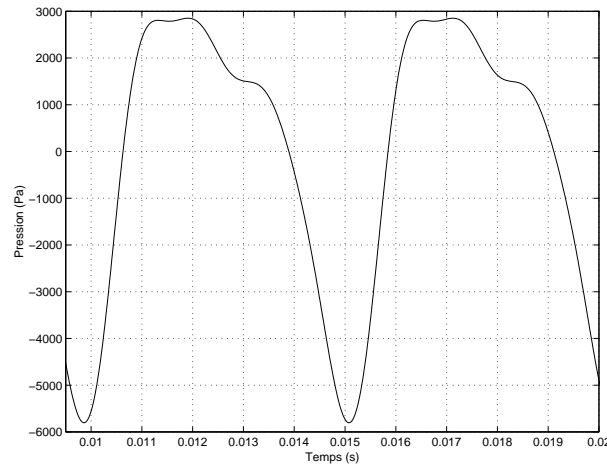


FIG. 4.19 – *Onde de pression aller estimée*

### 4.3.1 Hypothèse d'onde simple

Nous désirons propager ce signal “type” dans la coulisse en appliquant en sortie une condition non réfléchissante. Cela revient à supposer que cette onde se propage comme une onde simple et qu'elle n'est pas influencée par les ondes retour en cours de propagation. Cependant, à forte amplitude, des interactions non-linéaires entre ondes peuvent survenir. Nous avons vu dans la discussion à la fin du chapitre précédent (voir 3.6) que ces interactions sont supposées ne pas se cumuler sur la distance et peuvent être alors négligées.

Pour le vérifier, nous proposons l'expérience numérique décrite par la figure suivante (figure 4.20):

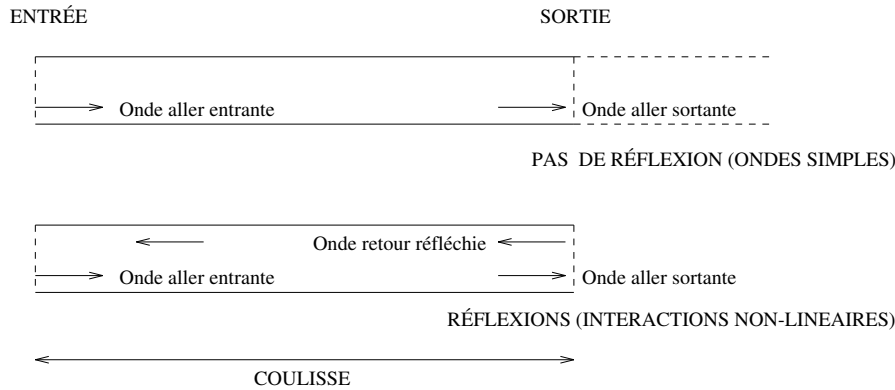


FIG. 4.20 – *Évaluation des interactions non-linéaires*

Dans un premier temps (cas d’une onde simple), nous calculons la solution à la sortie du domaine de calcul pour une condition non réfléchissante. Dans le second, nous simulons l’effet d’un pavillon en implémentant en sortie du domaine une fonction de réflexion calculée par une théorie mono-dimensionnelle linéaire (voir au chapitre suivant 5.1.4). Nous calculons ainsi en sortie la composante acoustique aller (sortant du domaine) et les ondes réfléchies qui vont interagir avec l’onde propagative aller imposée à l’entrée.

La figure 4.21 présente l’erreur relative sur l’amplitude des harmoniques de l’onde aller (en sortie) calculée dans le cas de la solution en onde simple, la solution avec interactions non-linéaires étant prise comme référence.

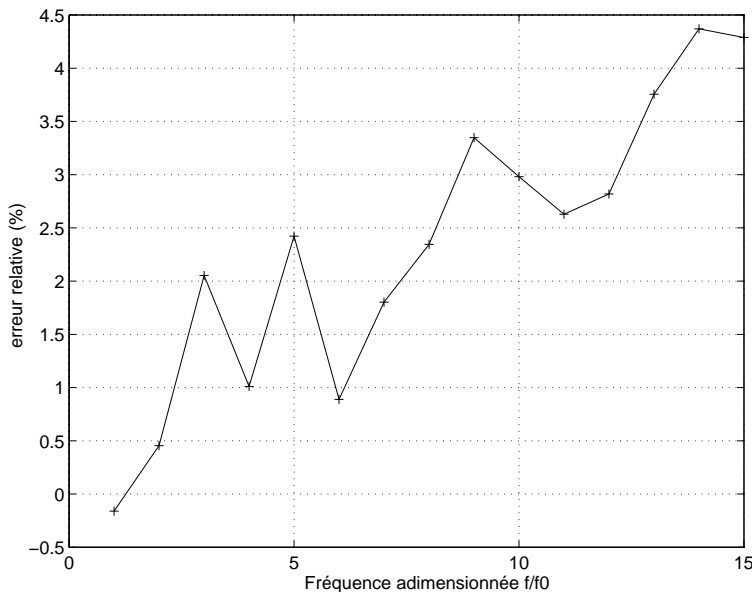


FIG. 4.21 – *Erreur relative sur l’onde incidente en sortie*

Nous observons que l'erreur reste inférieure à 5% jusqu'au 15<sup>ème</sup> harmonique (jusqu'au 30<sup>ème</sup> en fait), ce qui semble confirmer que les interactions non-linéaires ne se cumulent pas sur la distance et peuvent être négligées devant les effets dominants de la distorsion non-linéaire et des pertes visco-thermiques.

### 4.3.2 Propagation non-linéaire dans la coulisse

#### Cas sans pertes

Nous allons donc propager cette onde simple type dans la coulisse et comparer sur la figure 4.22 les résultats calculés en fin de coulisse en linéaire (courbe avec des cercles) et en non-linéaire sans pertes (traits hachurés).

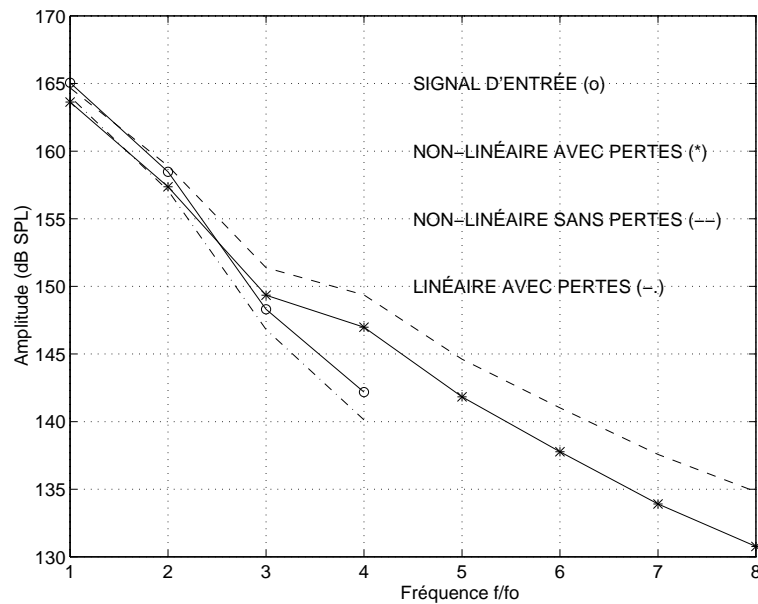


FIG. 4.22 – *Spectre d'amplitude de l'onde aller de pression en sortie de coulisse*

Nous observons un transfert d'énergie des premiers harmoniques vers les harmoniques supérieures typique des effets de distorsion non-linéaire.

#### Influence des pertes visco-thermiques

Sur la même figure (4.22), en trait plein, nous observons les résultats obtenus lorsque les effets non-linéaires se combinent aux effets de couche limite. Ces derniers tempèrent l'enrichissement du spectre qui reste néanmoins spectaculaire. La différence avec la solution non-linéaire sans perte augmente avec la fréquence pour dépasser  $4dB$  au delà du huitième harmonique. Nous vérifions ainsi l'importance des pertes visco-thermiques pour la définition

du spectre. Ces dernières, distribuées le long de la coulisse, entrent localement en compétition avec la distorsion non-linéaire.

Dans la théorie linéaire, il est possible dans un tuyau droit de concentrer les pertes en un point du domaine de calcul en appliquant aux ondes propagées un filtrage passe-bas conforme à la théorie de Kirchhoff [19]. Dans une théorie non-linéaire, il n'est pas aussi évident de découpler les pertes viscothermiques de la distorsion non-linéaire. Nous allons vérifier cela en comparant la solution non-linéaire avec pertes distribuées, la solution non-linéaire sans perte avec un filtrage préalable de l'onde imposée à l'entrée (filtrage amont donc) et la solution non-linéaire sans perte filtrée en sortie (filtrage aval).

Les résultats de la figure 4.23 montrent que l'amplitude des premiers harmoniques n'est pas beaucoup affectée par le découplage en particulier dans le cas du filtrage en amont. L'erreur augmente avec la fréquence pour dépasser un ou deux  $dB$  à partir du dixième harmonique. Au delà, l'erreur devient de plus en plus importante.

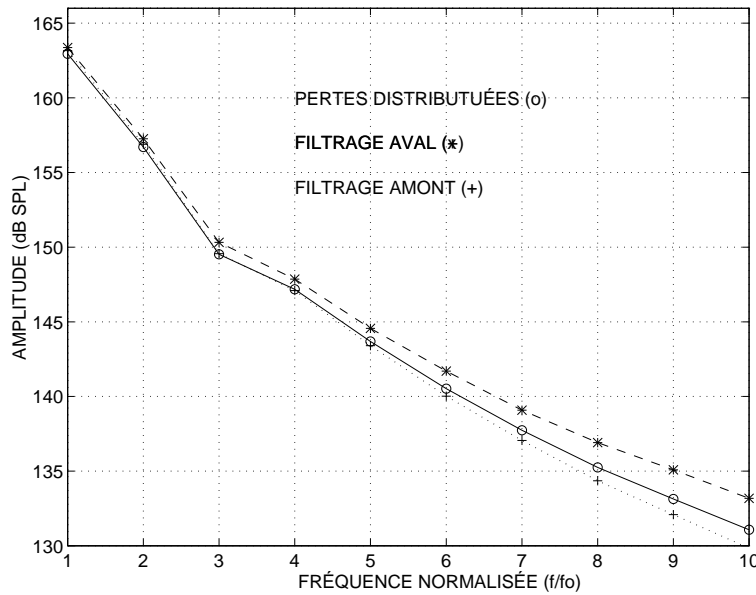


FIG. 4.23 – Spectre d'amplitude de l'onde aller de pression en sortie de coulisse

Bien que nous n'ayons pas fait une étude systématique sur ce thème, d'un point de vue théorique il n'est pas possible de découpler les pertes de la distorsion non-linéaire (quand ces deux effets sont du même ordre). Cependant, il semble que le découplage avec un filtrage en amont ne provoque pas des erreurs trop importantes en basse fréquence, conclusion qui pourra nous être utile dans l'élaboration d'un modèle simplifié au chapitre suivant.



## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un modèle de résolution numérique du système d'équations 3.36 en vue d'applications pour la propagation non-linéaire dans les conduits. Au regard de nos objectifs, nous avons choisi un schéma de résolution simple et classique. Les tests numériques ont montré que ce modèle permet de retrouver des solutions classiques de l'acoustique. Une validation plus poussée avec des tests systématiques pourrait être nécessaire en vue d'applications et de développements industriels mais cela ne faisait pas partie de nos objectifs prioritaires. Nous n'avons pas non plus cherché à minimiser le coût de calcul qui s'avère être important en raison de l'ordre faible du schéma et des convolutions numériques intervenant dans la prise en compte des pertes visco-thermiques. Pour remédier à cela, il serait peut-être intéressant d'adapter au problème non-linéaire avec pertes visco-thermiques les techniques d'optimisation de schéma numérique proposées par Tam [3]. Le traitement des conditions limites est lui aussi un champ d'études à part entière de la mécanique des fluides numériques et nous n'avons pu que l'aborder modestement.

Nous avons ensuite appliqué notre outil de simulation au cas de la propagation acoustique à forte amplitude dans le trombone. Nous avons alors retrouvé par la simulation les effets de distorsion non-linéaire typiques du trombone à fort niveau de jeu et mis en évidence l'influence des pertes visco-thermiques. La aussi, une étude plus systématique serait nécessaire ainsi que des confrontations avec des mesures expérimentales. Nous avons par contre pu produire avec le code de calcul non-linéaire (à partir de signaux mesurés en entrée de coulisse) des sons "cuivrés" typiques du trombone, ce qui constitue une application à la synthèse sonore coûteuse mais néanmoins originale. L'objectif du chapitre suivant sera d'élaborer des modèles plus simples pour de telles applications.



# Bibliographie

- [1] Hirsch C. *Numerical Computation of Internal and External Flows*. John Wiley & Sons, 1990.
- [2] Hardin J. An overview of computational aeroacoustics in aerodynamics. Von Karman Institute for Fluids Dynamics, 1992, 7-9 december.
- [3] C. W. Tam. Computational aeroacoustics: issues and methods. *AIAA journal*, 33(10):1788–1796, 1995.
- [4] Guivarch M. Méthodes numériques pour la propagation acoustique en écoulement. In *Actes de Colloques du 4<sup>ème</sup> Congrès Français d'Acoustique*, pages 995–998, Marseille, 1997.
- [5] Godlewsky E. and Raviart P.A. *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*. Applied Mathematical Sciences, Springer, 1990.
- [6] Makarov S. and Ochmann M. Nonlinear and thermoviscous phenomena in acoustics, part II. *Acta Acustica*, 83:197–222, 1997.
- [7] Yano T. and Inoue Y. Strongly nonlinear waves of nonplanar mode in a two-dimensional waveguide. In *Nonlinear acoustics in perspective 1996 (14th ISNA)*. Nanjing University Press, Nanjing, 1996.
- [8] Msallam R., Menguy L., Causse R., and Hirschberg A. Nonlinear wave propagation in trombones. In *Nonlinear acoustics in perspective 1996 (14th ISNA)*. Nanjing University Press, Nanjing, 1996.
- [9] Msallam R., Dequidt S., Dubois F., and Caussé R. Modèle et simulations numériques de la propagation non-linéaire dans les conduits (text in french). In *Actes de Colloques du 4<sup>ème</sup> Congrès Français d'Acoustique*, pages 699–702, Marseille, 1997.
- [10] Wendroff B. and Lax P.D. Systems of conservation laws. *CPAM*, 13:217–237, 1960.
- [11] M. Verges. Modélisations unidimensionnelles de fluide. Mémoire d'ingénieur CNAM en acoustique, Paris, 1994.
- [12] Quinnez B. *Modélisation des phénomènes aéroélastiques basée sur une linéarisation des équations d'Euler*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale, Paris, 1995.
- [13] Dubois F., and Le Floch P. Boundary Conditions for Nonlinear Hyperbolic Systems of Conservation Laws. *Journal of Differential Equations*, 71(1):93–122, 1988.
- [14] Whitham G.B. *Linear and Nonlinear Waves*. Wiley-Interscience Publication, 1974.

- [15] Caussé R., Kergomard J., and Lurton X. Input impedance of brass instruments-comparison with experiment and numerical models. *J. Acoust. Soc. Am.*, 75(1):241–254, 1984.
- [16] Menguy L. Gilbert J. Propagation acoustique faiblement non linéaire dans les guides cylindriques, modélisation et solutions (numériques). In *Actes du 4<sup>ème</sup> Congrès Français d'Acoustique*, volume 2, Marseille, 1997.
- [17] Chester W. Resonant oscillations in closed tubes. *J. Fluid Mech.*, 18(44), 1964.
- [18] Gilbert J and Petiot J.F. Non-linéarités dans les instruments de type cuivre: résultats expérimentaux (text in french). In *Actes du 4<sup>ème</sup> Congrès Français d'Acoustique*, volume 1, Marseille, 1997.
- [19] Smith J.O. Physical modeling using digital waveguides. *Computer Music J.*, 4(74), 1992. Special issue: Physical Modelling of Musical Instruments.
- [20] Dequidt S. Propagation non-linéaire dans les conduits cylindriques: Application aux instruments de musique à vent. Rapport DEA d'Acoustique Appliquée de l'Université du Maine, Le Mans, 1996.
- [21] Lascaux P. et Theodor R. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur*. Masson, 1986.

---

## Chapitre 5

# Modèle physique simple du trombone Application à la synthèse sonore

### Introduction

Le fonctionnement d'un instrument de la famille des cuivres est décrit habituellement [1] par un modèle physique simple comprenant :

- Une source d'énergie, c'est à dire la pression d'alimentation fournie par le musicien.
- Une non-linéarité localisée incluant un oscillateur mécanique correspondant aux lèvres (l'anche lippale) couplé à l'écoulement hydrodynamique les traversant (couplage aéro-élastique).
- Un résonateur acoustique (linéarité répartie) correspondant à l'instrument même, piloté par la source non-linéaire mais agissant aussi sur elle (couplage mécano-acoustique).

L'ensemble constituant un système non-linéaire couplé capable d'auto-osciller.

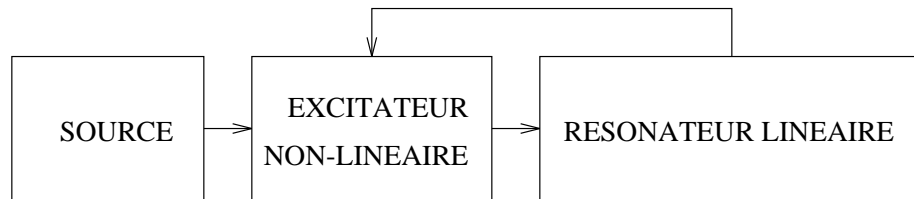


FIG. 5.1 – Schéma de fonctionnement d'un cuivre

L'excitateur non-linéaire est souvent modélisé comme un système de valve en pression : un oscillateur mécanique à un ou deux degrés de liberté (modèle à une ou deux masses) est ainsi couplé à un écoulement hydrodynamique quasi-statique ou simplement soumis aux forces de pression acoustique [1, 2].

L'excitateur est ensuite couplé à un résonateur linéaire où se propagent des ondes quasi-planes.

Cependant l’hypothèse d’une propagation acoustique linéaire a été réfutée expérimentalement dans le cas du trombone [3] pour les nuances fortissimo. D’importants effets de distorsion non-linéaire apparaissent pouvant entraîner parfois la formation d’onde de choc. Ces résultats ont été confirmés par d’autres mesures [4] et des simulations numériques [5]. L’enrichissement du spectre accompagnant la distorsion non-linéaire est à l’origine du son brillant (“cuivré”) typique du trombone à fort niveau de jeu [6].

La prise en compte d’un tel phénomène non-linéaire [3] est donc de premier intérêt dans les modèles physiques pour la synthèse<sup>1</sup> qui sont en plein essor [8].

En résumé, l’objectif est de notre travail donc de prendre en compte les non-linéarités de propagation dans un modèle physique simple auto-oscillant du trombone en vue d’une application à la synthèse sonore tout en essayant de conserver une description suffisamment réaliste afin d’enrichir notre connaissance du fonctionnement de l’instrument.

## 5.1 Modèle physique du trombone

Nous distinguerons deux modèles physiques incluant la non-linéarité de propagation. Dans le premier dit “extrinsèque” cette dernière n’intervient pas dans la boucle d’auto-oscillation [3] contrairement au second modèle dit “intrinsèque”.

### 5.1.1 Modèle à non-linéarité de propagation extrinsèque

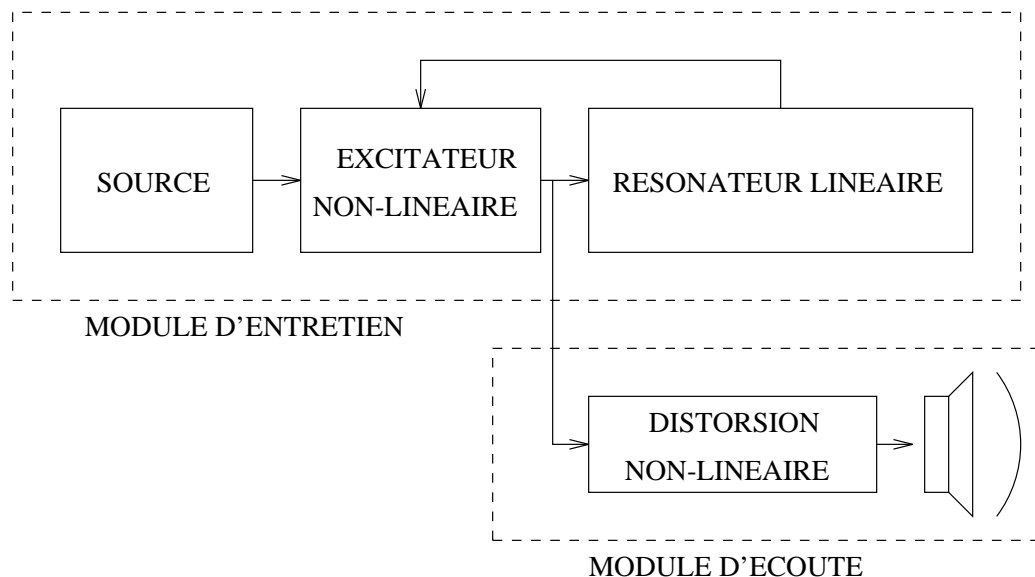
Le pavillon se comportant comme un filtre passe-haut, l’essentiel des harmoniques générés par distorsion est rayonné vers l’extérieur du trombone [3].

De plus, les effets de propagation non-linéaire sont supposés aussi de moindre importance pour les ondes réfléchies du pavillon vers les lèvres que pour les ondes se propageant des lèvres vers le pavillon car les premières subissent des pertes en amplitude et surtout un changement de signe pour la pression.

La propagation non-linéaire ne doit donc participer que faiblement à l’entretien du son. Nous proposons donc dans un premier temps de conserver dans le modèle physique (figure 5.1) le module classique d’auto-oscillation (à résonateur linéaire) et d’ajouter un module extrinsèque d’écoute [3] où la distorsion non-linéaire est appliquée à un signal prélevé au niveau de l’embouchure de l’instrument (figure 5.2).

---

1. Nous comprenons mieux maintenant pourquoi les techniques de synthèse sonore s’appuyant sur la distorsion non-linéaire (non physique) d’ondes sinusoïdales (“wave shapping”) donnent des résultats intéressants pour la production de sons cuivrés [7].

FIG. 5.2 – *Modèle à non-linéarité extrinsèque*

### 5.1.2 Modèle à non-linéarité de propagation intrinsèque

Il est difficile d'établir expérimentalement l'importance de la distorsion pour les ondes réfléchies. Bien que plus faible que pour les ondes incidentes, des simulations indiquent qu'elle peut être non-négligeable. De plus, une modification de la géométrie du pavillon (ajout d'une sourdine, modification de la perce ...) peut modifier la nature des ondes réfléchies vers l'embouchure et donc l'influence de la propagation non-linéaire sur l'auto-oscillation. Dans ce cas, il peut être intéressant d'inclure dans le modèle une non-linéarité de propagation intrinsèque, c'est à dire de prendre en compte cette dernière dans la boucle d'auto-oscillation. Le résonateur linéaire de la figure 5.1 sera donc remplacé par un résonateur non-linéaire.

### 5.1.3 Propagation non-linéaire

Nous avons vu dans les chapitres précédents que dans les conduites, les effets de pertes visco-thermiques aux parois liées à l'existence de couches limites se combinent à la distorsion non-linéaire. Quand la turbulence est négligeable, ces pertes peuvent être décrites par une théorie du premier ordre (en linéarisant les équations de couche limite).

A partir de ces hypothèses, nous avons intégré dans les équations de conservation pour obtenir des équations de propagation type équations d'Euler avec pertes visco-thermiques que l'on peut résoudre numériquement (voir le chapitre précédent et la référence [5]).

De telles simulations sont cependant trop coûteuses pour une application à la synthèse sonore et nous préférons donc faire des simplifications qui mènent à une théorie plus simple [9].

### Hypothèses simplificatrices

- La première consiste à négliger dans l’embouchure les effets de propagation non-linéaires (qui se cumulent sur la distance) au regard de ses dimensions<sup>2</sup>.
- Dans la partie fortement évasée du pavillon où la diminution de l’amplitude due à l’élargissement de la section est l’effet cumulatif dominant, on négligera aussi la distorsion non-linéaire. En étendant l’approximation à l’ensemble du pavillon, on concentre la non-linéarité de propagation sur la coulisse du trombone, c’est à dire la partie la plus longue et cylindrique de l’instrument.
- En suivant Chester [11], le champ acoustique dans la coulisse sera décrit comme combinaison linéaire des ondes incidentes et réfléchies (ce qui n’est pas si évident que cela dans une théorie non-linéaire) [9]. Des considérations théoriques [12] et des simulations numériques (voir le paragraphe 4.3.1 du chapitre précédent) semblent aller dans le sens de cette hypothèse, les interactions non-linéaires ne se cumulant pas sur la distance.
- L’hypothèse suivante consiste à découpler la distorsion non-linéaire des pertes viscothermiques et donc à traiter la non-linéarité en fluide parfait. Cette hypothèse est certainement audacieuse car les pertes sont distribuées le long du tuyau et entrent localement en compétition avec la non-linéarité. Cependant, nous avons vu dans le chapitre précédent (paragraphe 4.3.2) que des simulations numériques indiquent que lorsque l’on utilise pour les pertes un filtrage linéaire ponctuel des ondes préalablement à leur propagation non-linéaire, l’erreur commise reste faible en basse fréquence [9]. L’approximation nous permettant donc de traiter la distorsion dans le cas sans perte ne devrait donc pas trop influencer l’auto-oscillation et l’effet d’enrichissement du spectre sera conservé.

### Propagation sans pertes : méthode des caractéristiques

Nous désirons appliquer la méthode des caractéristiques pour décrire la distorsion non-linéaire dans la coulisse du trombone en essayant de retrouver une formulation de type “ligne à retard”.

#### • Théorie

Nous considérons dorénavant la propagation sans perte d’ondes planes. Dans le second chapitre (paragraphe 2.3.2), nous avons rappelé la théorie des ondes simples. Soit pour une onde se propageant dans une seule direction ( $x$  positif par exemple), dans un milieu uniforme, isentropique et initialement au repos, les invariants de Riemann qui relient la vitesse locale du fluide  $u$  et la vitesse du son  $a$  mènent à la relation suivante :

$$u = \text{constante sur chaque droite } C^+ \text{ de pente : } \frac{dx}{dt} = c = a_0 + \frac{\gamma + 1}{2}u \quad (5.1)$$

---

2. Par contre, un autre type de non-linéarité cette fois ci localisée y est envisageable. En effet, au regard de l’amplitude des déplacements acoustiques dans le grain, un décollement de couche limite est possible [10].



avec  $a_0$  la vitesse du son pour le fluide uniforme au repos.

Les caractéristiques  $C^+$  sont donc des droites dans le plan  $(x,t)$  (figure 5.3) le long desquelles l'information acoustique est transportée. Pour une source placée en  $x = 0$  (toutes les  $C^+$  sont donc issues de l'axe des temps) la vitesse de propagation acoustique  $c = u + a$  est alors fonction de la vitesse locale du fluide  $u(0,t)$ . Dans le cas d'une distance de propagation fixe  $L$ , ceci correspond à un délai de propagation variable :

$$d^+(t) = \frac{L}{c(t)} = \frac{L}{a_0 + \frac{(\gamma+1)}{2}u(0,t)} = g(u(0,t)) \quad (5.2)$$

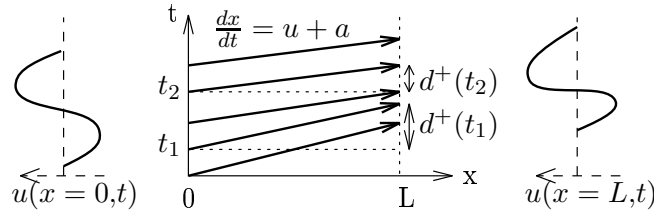


FIG. 5.3 – Droites caractéristiques et distorsion non-linéaire

Or dans une formulation de type “ligne à retard”, on définit dans le domaine continu le retard variable de propagation  $d^-$  tel que :

$$s(t) = e(t - d^-(t)) \quad (5.3)$$

Avec  $e$  le signal d'entrée et  $s$  celui de sortie.

Aspirant à retrouver en non-linéaire une formulation de ce type, nous remarquons que la définition de  $d^+$  (équation 5.2) implique :

$$e(t) = s(t + d^+(t)) \quad (5.4)$$

En combinant les formules 5.3 et 5.4, on obtient des équations implicites reliant  $d^+$  et  $d^-$  :

$$d^+(t) = d^-(t + d^+(t)) \quad (5.5)$$

$$d^-(t) = d^+(t - d^-(t)) \quad (5.6)$$

Le retard  $d^-$  est donc obtenu à partir des  $d^+$  par un filtre à retard variable, le retard étant contrôlé par la propre sortie du filtre (figure 5.4) [13].

Une fois le retard  $d^-(t)$  déterminé, on peut en déduire la valeur de la vitesse  $u$  à la sortie en inversant la fonction  $g$  (formule 5.2) :

$$u(L,t) = g^{-1}(d^-(t)) \quad (5.7)$$

La ligne complète de propagation est schématisée sur la figure 5.5.

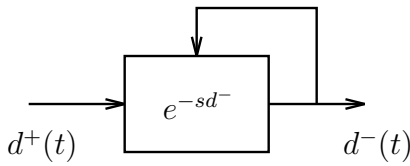


FIG. 5.4 – filtre non-linéaire

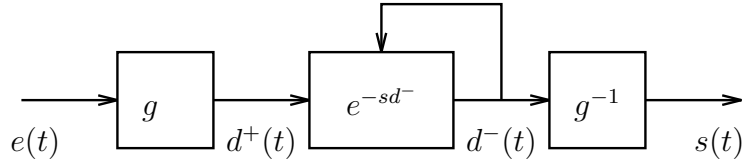


FIG. 5.5 – Ligne à retard variable

Notons que la méthode des caractéristiques mène à une solution multivaluée non-physique lors de l’intersection des droites. La théorie des chocs faibles permet de construire (suivant la loi des aires égales) l’onde de choc qui est supposée d’épaisseur si fine que l’on peut la représenter par une discontinuité [14]. En réalité, l’épaisseur du choc est donnée par différents mécanismes de pertes [11] (pertes aux parois, phénomènes de relaxation ...) que nous avons négligés.

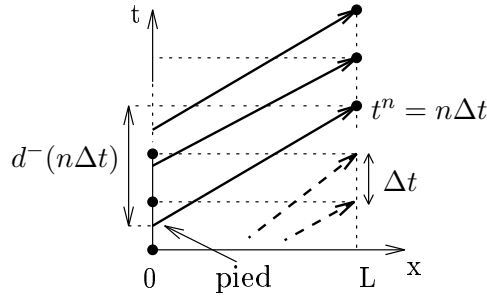
### • Traitement numérique

Considérons maintenant en entrée (en  $x = 0$ ) un signal discret à échantillons uniformément espacés en temps. Le délai variable  $d^+$  implique un signal de sortie (en  $x = L$ ) à échantillons non-uniformement espacés (figure 5.3). La reconstruction exacte d’un signal de sortie à pas de temps uniforme n’est pas aisée [15]. En se contentant d’une interpolation classique, on peut néanmoins approcher le signal.

L’idée de la formulation en ligne à retard est donc de calculer au temps  $t = n\Delta t$  le signal de sortie  $s(t)$  correspondant en fonction de l’entrée  $e$  passée.

Une première approche consiste à déterminer à l’entrée d’où sont issues les droites caractéristiques passant par les points régulièrement espacés en sortie, soit “remonter au pied de la caractéristique” (figure 5.6).

En interpolant linéairement le signal d’entrée (ici les  $d^+$ ) au pied de la caractéristique, la solution du problème implicite discret est aisée (équation du premier degré en  $d^-$ ).

FIG. 5.6 – *Sortie à pas de temps régulier*

Une interpolation d'ordre supérieur  $k$  nécessitera la résolution d'une équation d'ordre  $k$  en  $d^-$  et un nombre de points d'entrée adéquate.

S. Tassart [13] propose plutôt de discrétiser le problème continu décrit par la figure 5.4 en faisant apparaître un filtre à délai fractionnaire.

Dans le cadre de notre application sonore, nous supposons que la structure du choc n'est pas primordiale pour le timbre perçu par l'auditeur et que seule la distorsion globale du signal compte. Nous nous contenterons donc d'éviter la formation d'onde de choc en repérant l'intersection de caractéristiques et en ralentissant les échantillons qui se propagent trop vite. Nos travaux sur ce sujet n'ont pas vraiment abouti faute de temps et la méthode programmée induit des déformations du signal peu satisfaisantes. L'application directe (à un signal temporel discret) de la méthode de construction des ondes de chocs suivant la loi des aires égales n'est pas si évidente [16]. Une solution élégante consisterait peut-être à supposer lors de l'intersection de caractéristiques que le signal ne se déforme plus et se propage donc à la vitesse du son  $a_0$ .

Dans le même ordre d'idée, la propagation non-linéaire peut provoquer l'apparition de hautes fréquences qui peuvent se replier lorsque l'on travaille à fréquence d'échantillonnage fixe (critère de Shannon non-respecté). Nous observons un tel phénomène pour de fortes distorsions. Ainsi, les schémas numériques proposés ne garantissent pas l'absence d'"aliasing". Un sur-échantillonnage du signal de délai de sortie permettrait de limiter ce phénomène mais au détriment du coût de calcul.

Dans notre étude, nous ne nous focaliserons pas plus sur les aspects traitement du signal relatifs à ces méthodes pour traiter la distorsion non-linéaire et par la suite, nous nous contenterons d'une simple interpolation linéaire en gardant à l'esprit qu'une interpolation plus élaborée et le respect du critère de Shannon donnerait certainement des résultats sonores meilleurs en hautes fréquences et serait donc nécessaire pour un modèle de synthèse performant [17].

### Pertes visco-thermiques

Les considérations précédentes s'appliquent dans le cas où les pertes viscothermiques sont négligées. Cependant, suivant l'hypothèse du découplage de la propagation non-linéaire et de

ces dernières, nous les approximerons simplement par un pré-filtrage des ondes préalablement à leur distorsion. Au regard de l’hypothèse précédente, nous nous contenterons d’approcher la théorie des pertes (voir le paragraphe 2.2.1) en utilisant un filtre IIR de faible ordre [18].

### 5.1.4 Pavillon linéaire

Le pavillon est entièrement décrit par une théorie linéaire. Pour l’auto-oscillation, il sera modélisé de façon classique par une fonction de réflexion déterminée par transformée de Fourier inverse du coefficient de réflexion [19] calculé à l’entrée d’un pavillon à géométrie simplifiée [20] (pavillon de Bessel de longueur d’environ  $1.1m$ ). L’impédance d’entrée correspondante a été préalablement calculée par une méthode d’impédance ramenée [21].

Pour l’écoute, la pression totale en fin de coulisse sera filtrée par un filtre passe-haut approchant une fonction de transfert en pression d’un pavillon.

### 5.1.5 Embouchure

Comme nous l’avons vu précédemment les effets de distorsion non-linéaires de propagation sont négligeables dans l’embouchure qui sera décrite d’une façon simpliste par deux portions de cylindre symbolisant la cuvette et la queue (figure 5.1.5) dont le volume est ajusté de façon à retrouver une résonance propre de l’ordre de  $500Hz$  se rapprochant de la “popping frequency” d’une embouchure de trombone [21].

La propagation linéaire y est simplement traitée comme un retard entier de propagation (en guide d’onde numérique [22]). Aux interfaces, nous calculons classiquement les ondes réfléchies via le coefficient de réflexion et les ondes transmises via le coefficient de transmission.

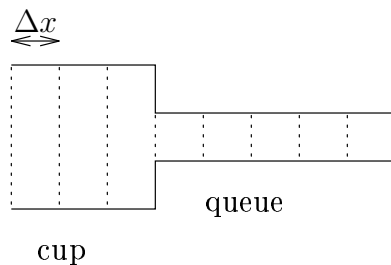


FIG. 5.7 – Embouchure simpliste (coupe)

### 5.1.6 Excitateur non-linéaire

Contrairement à la propagation non-linéaire qui se répartie sur la longueur, le système d’entretien du son s’appuie sur une non-linéarité localisée.

La source d’énergie est la surpression d’alimentation dans la bouche que l’on assimile à un réservoir de pression statique (générateur parfait de pression statique).

## Oscillateur mécanique

Plusieurs types d'oscillateurs mécaniques ont été proposés dans la littérature. Ceux-ci s'inspirent des modèles d'anche de clarinette et des modèles de cordes vocales. Ainsi, un modèle de base souvent utilisé [1] est le classique "modèle à une masse" (masse, ressort, frottement) qui n'est rien d'autre que l'un des premiers modèles de corde vocale [23]. Les lèvres (ou les cordes vocales) y sont décrites comme une simple valve en pression à un degré de liberté qui oscille transversalement à la direction principale de propagation acoustique (axe longitudinal de l'instrument).

Le modèle est plan (figure 5.8) car il est supposé que l'ouverture  $h_1$  des lèvres reste petite devant leur longueur  $L_1$  (figure 5.9)

Cependant, des visualisations du mouvement des lèvres indiquent qu'un modèle à un degré de liberté est une grosse approximation [24, 25]. En effet, la protusion, c'est à dire le déplacement de ces dernières suivant l'axe longitudinal du tuyau (de la lèvre supérieure surtout), se superpose au mouvement d'ouverture. Un oscillateur à deux degrés de liberté est plus apte à décrire un tel mouvement [26]. Le classique modèle à deux masses [27] est aussi un bon candidat [1, 4] mais le choix et le contrôle des paramètres mécaniques n'est pas aisé. De plus, nous souffrons d'un manque cruel de données expérimentales sur les lèvres tant la mise en oeuvre de mesures est difficile [28]. Un espoir réside en l'utilisation de bouche artificielle [29] [30]. C'est pourquoi, pour la synthèse sonore, on retiendra simplement le modèle à une masse avec lequel des résultats satisfaisants ont déjà été obtenus [30, 31].

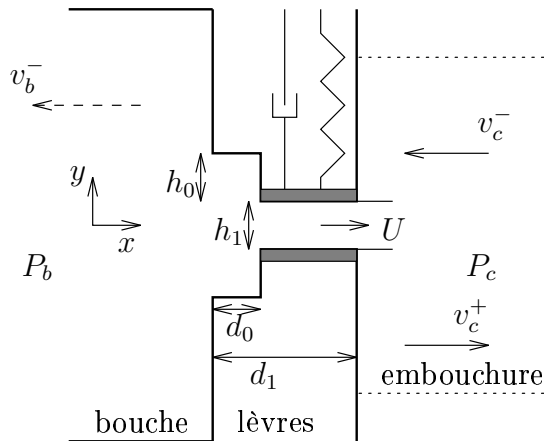


FIG. 5.8 – Modèle à une masse (vue de profil)

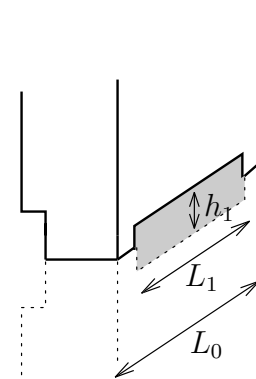


FIG. 5.9 – Lèvres (vue de trois-quarts)

L'oscillateur obéit alors à la simple équation :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = F \quad (5.8)$$

où  $m$  désigne la masse oscillante des lèvres,  $r$  leur amortissement,  $k$  la raideur et  $F$  la force hydrodynamique appliquée.

Le choix des paramètres n'est pas aisé et nous nous appuyons sur les données de la littérature [1, 26].

Soit la fréquence propre des lèvres  $f_L$ , on exprime les paramètres mécaniques comme suit :

$$\begin{aligned} m &= \frac{\alpha}{4\pi^2 f_L^2} \\ k &= \alpha f_L \\ r &= \frac{\sqrt{km}}{Q_L} \end{aligned}$$

avec  $\alpha$  une constante et  $Q_L$  le facteur de qualité. La fréquence des lèvres sera donnée et les facteurs  $\alpha$  (de l'ordre de 1) et  $Q_L$  ajustables (de l'ordre de 10).

### Écoulement

Le modèle de base comprend donc un oscillateur mécanique à un degré de liberté couplé à un écoulement d'air incompressible. Ce dernier est supposé quasi-statique, c'est à dire que l'on suppose qu'il a le temps de s'établir pour chaque nouvelle position des lèvres. Un jet de débit  $U$  est formé à la sortie des lèvres (figure 5.8). A partir de la différence de pression  $\Delta P$  entre la bouche et l'embouchure, on peut déduire le débit d'air en appliquant la relation de Bernouilli (écoulement stationnaire non-visqueux) [2]. Des pertes de charge dues à la viscosité du fluide (écoulement de poiseuille entre les lèvres) et à l'inertie du fluide sont en général ajoutées [32]. En négligeant les effets de cette dernière, nous écrivons alors :

$$\Delta P = \frac{1}{2}\rho_0 \left( \frac{U}{L_1 h_1} \right)^2 + \Delta P_v \quad (5.9)$$

avec la perte de charge par viscosité  $\Delta P_v = \frac{12\mu}{L_1} \left( \frac{L_1 d_0}{L_0(h_1+2h_2)^3} + \frac{d_1-d_0}{h_1^3} \right) U$ .

Un effet d'entrée (pertes de charges par vena contracta à l'angle droit à l'entrée des lèvres) est souvent proposé mais sa vraisemblance a été réfutée [32].

Nous supposons que le débit aérodynamique est converti en débit acoustique dans la cuvette de l'embouchure d'aire  $A_c$ . Le champ acoustique étant décomposable localement en ondes aller et retour, on a :

$$U = A_c(v_c^+ + v_c^-) = \frac{A_c}{\rho_0 c_0} (p_c^+ - p_c^-) \quad (5.10)$$

En combinant les équations 5.9 et 5.10, connaissant à un instant donné l'onde de pression retour  $p_c^-$  dans la cuvette, on peut en déduire le débit instantané  $U$  et la valeur de l'onde de pression aller  $p_c^+$  émise dans l'embouchure.

Notons que les niveaux de pression dans l'embouchure d'un cuivre sont suffisamment élevés pour qu'une inversion du gradient de pression de part et autre des lèvres soit possible

[1]. Nous envisageons alors soit d'annuler artificiellement le débit, soit de le laisser changer de signe. Le premier cas peut générer des accidents dans le signal de débit lors des inversions. Nous laissons donc le débit changer de signe ce qui nous rappelle qu'une partie de ce dernier est transmis dans la bouche, ce qui a été évoqué depuis longtemps [1]. Pour prendre cela en compte simplement, nous négligerons les résonances de la cavité buccale d'aire  $A_b$  en supposant qu'une onde de pression retour  $p_b^-$  se superpose à la pression d'alimentation. L'équation 5.9 sera modifiée de la façon suivante :

$$P_b + p_b^- - P_c = \frac{1}{2}\rho_0 \left( \frac{U}{L_1 h_1} \right)^2 + \Delta P_v \quad (5.11)$$

avec la fluctuation de pression  $p_b^- = -\frac{\rho_0 c_0}{A_b} U$ .

Les forces hydrodynamiques résultantes sont calculées par intégration le long du canal :

$$F = L_0 \int_0^{d_0} P(x) dx + L_1 \int_{d_0}^{d_1} P(x) dx \quad (5.12)$$

avec

$$P(x) = P_b + p_b^- - \frac{1}{2}\rho_0 \left( \frac{U(x)}{A(x)} \right)^2 - \Delta P_v(x) \quad (5.13)$$

Nous avons négligé les effets de l'inertie de l'air entre les lèvres. Ces effets peuvent être importants pour de faibles ouvertures à l'ouverture et à la fermeture. Classiquement, cet effet est modélisé par la prise en compte d'un terme instationnaire dans l'équation de Bernouilli [27]. Mais il semble alors nécessaire de prendre en compte l'injection de volume due aux mouvements des parois dans l'équation de la conservation de la masse [33]. Ceci compliquant singulièrement le modèle, au regard des autres approximations faites (géométrie, écoulement ...) il nous semble plus cohérent de négliger l'inertie.

### Collision et grandes ouvertures

Dans le cas de grandes oscillations, les deux lèvres rentrent en contact par les coins lors de la fermeture et obturent progressivement le canal. Lorsque la fermeture est complète, la pression dans la bouche induit une force qui tend à ouvrir les lèvres, ceci étant possible dans notre modèle grâce à l'existence du palier de hauteur  $h_0$  (figure 5.8).

Du point de vue structurel, la collision est prise en compte simplement par une modification des paramètres mécaniques de l'oscillateur. En dessous d'un certain seuil d'ouverture, on fait varier polynomialement la raideur et l'amortissement des lèvres de la valeur "lèvres ouvertes" à la valeur "lèvres closes" [32] (amortissement doublé et raideur multipliée par 5).

De même, on limite l'ouverture en augmentant progressivement la raideur (facteur maximum 1.5) et l'amortissement (facteur 4) des lèvres au delà d'un seuil d'ouverture (de l'ordre de 4 ou 5 mm).

**Fonction d'aire**

La longueur des lèvres est en général supposée constante. L'aire de ces dernières varie donc linéairement avec l'ouverture. Cependant, les visualisations montrent que la longueur effective oscillante diminue progressivement avec la hauteur d'ouverture. Dans le cas des plosives, le rapport entre l'ouverture et la longueur reste constant [24]. La constante est choisie de façon à respecter l'hypothèse 2D. Soit :

$$\frac{L_1}{h_1} = \text{constante} \gg 1 \tag{5.14}$$

En assumant une telle relation dans notre cas, nous prenons en compte un effet 3D dans un modèle 2D simplement (figure 5.9).

Notons que les pertes de charges laminares dues à l'effet de la viscosité qui prennent de l'importance pour de très faibles ouvertures deviennent négligeables devant l'effet de cette fonction d'aire quadratique.

**5.1.7 Schéma des modèles complets pour la synthèse**

• **Modèle de synthèse à non-linéarité extrinsèque**

Le modèle de synthèse à non-linéarité extrinsèque complet est décrit par le schéma de la figure 5.10.

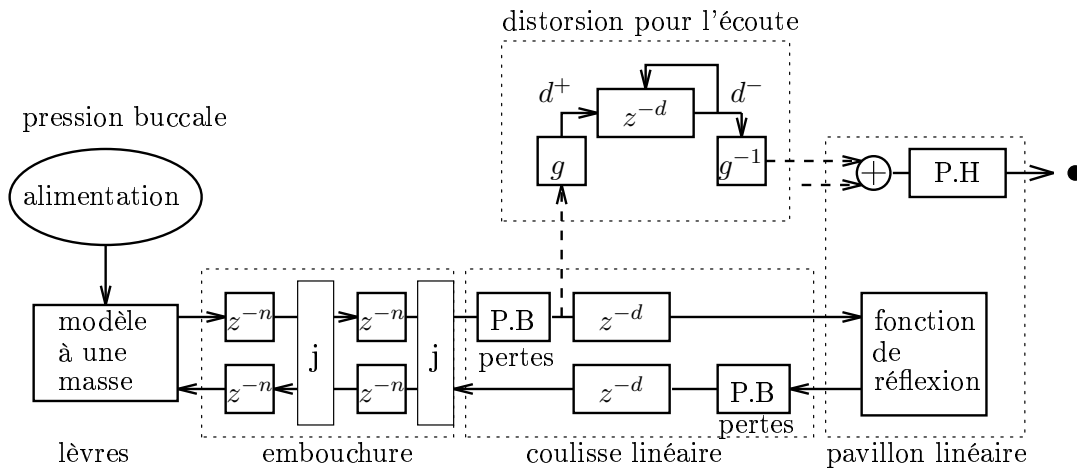


FIG. 5.10 – *Modèle extrinsèque*

où “j” désigne les jonctions entre les différents troncs de cylindre , P.B le filtre passe-bas approchant les pertes visco-thermiques dans la coulisse et P.H le filtre passe-haut approchant une fonction de transfert d'un pavillon pour l'écoute.



• **Modèle de synthèse à non-linéarité intrinsèque**

Le modèle à non-linéarité intrinsèque où la distorsion non-linéaire est appliquée sur les ondes aller et retour dans la coulisse, est décrit par le schéma de la figure 5.11.

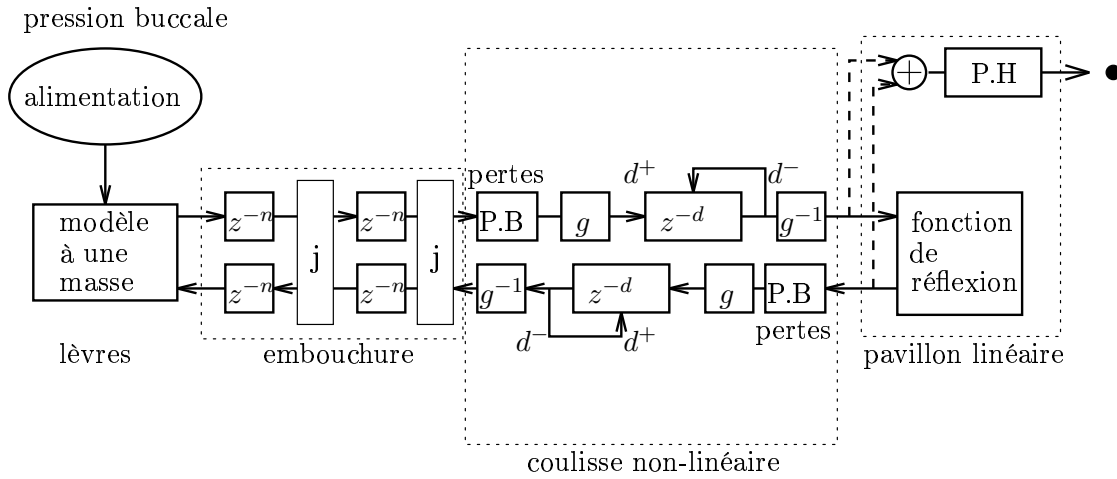


FIG. 5.11 – *Modèle intrinsèque*

## 5.2 Résultats numériques

L'équation différentielle 5.8 est résolue par un schéma classique de discrétisation temporelle de type Euler explicite.

Dans un premier temps, nous nous contenterons de simulations en linéaire afin de nous concentrer sur l'influence du modèle de lèvres. En effet, ce dernier définit le signal d'entrée qui sera propagé non-linéairement.

A titre indicatif, nous présentons sur la figure 5.12 le module de l'impédance d'entrée de notre modèle numérique de trombone.

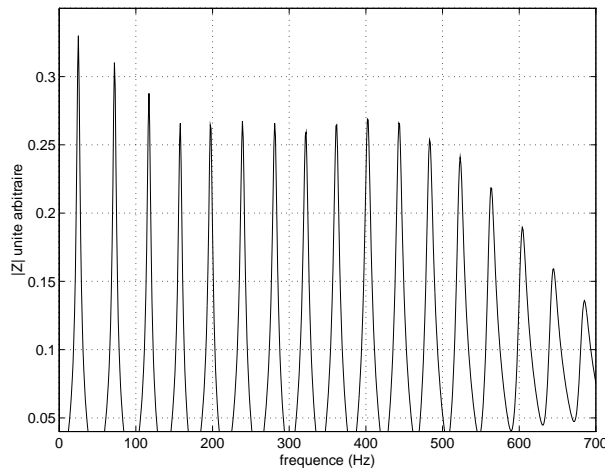


FIG. 5.12 – Module de l'impédance d'entrée du modèle

Notons que l'obtention de régimes de jeu stables n'est pas aisé avec ce modèle, ce qui pourrait être lié à son inharmonicité. En jouant sur le volume de l'embouchure, nous pouvons palier cet inconvénient.

### 5.2.1 Influence de la fonction d'aire

A longueur de lèvres constante, le signal d'excitation calculé n'est pas satisfaisant quand il y a fermeture complète des lèvres. Ceci se vérifie sur la figure 5.13 qui montre la présence de discontinuités dans la dérivée du débit des lèvres (qui caractérise l'excitation). Ceci s'explique car le débit est proportionnel au produit de l'ouverture par la vitesse de l'écoulement et cette dernière est fonction de la pression acoustique à la sortie des lèvres (à pression d'alimentation constante). Or, en supposant pour le besoin du raisonnement que cette pression est quasiment constante pour les quelques échantillons suivant la période d'obturation du conduit, nous voyons que le débit varie alors quasi linéairement avec l'ouverture à partir d'une valeur nulle (il est nul pendant l'obturation). Sa dérivée passe donc brutalement de zéro à une valeur non nulle (et vice versa à la fermeture). Il en résulte l'apparition de partiels élevés dans le signal

d'excitation acoustique mais le résultat sonore n'en est pas pour autant "cuivré" mais plutôt irréaliste.

En imposant un rapport constant ( $\approx 6$ ) entre la longueur et l'ouverture (équation 5.14), c'est à dire une fonction d'aire quadratique, la dérivée du débit suivra une évolution quasi linéaire à partir de la valeur nulle correspondant à l'obturation (figure 5.14). Le signal d'excitation correspondant est alors moins riche en partiels aigus et le résultat sonore (calculé en linéaire) plus réaliste (bien que peu "cuivré").

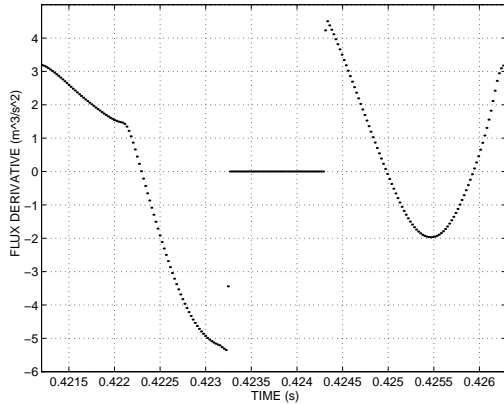


FIG. 5.13 – Dérivée du débit heurtée

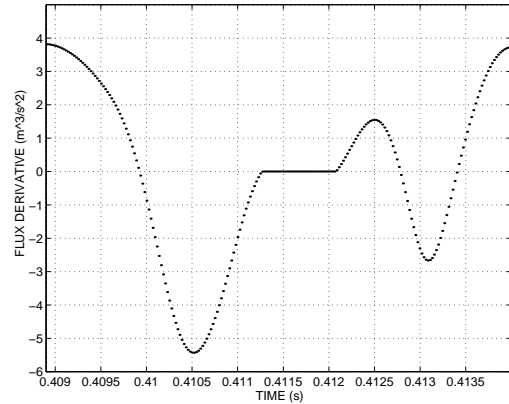


FIG. 5.14 – Dérivée du débit lisse

La fonction d'aire quadratique permet lors des simulations de retrouver des ouvertures de lèvres en fonction de l'aire (figure 5.15) similaires à celles mesurées par Copley [25].

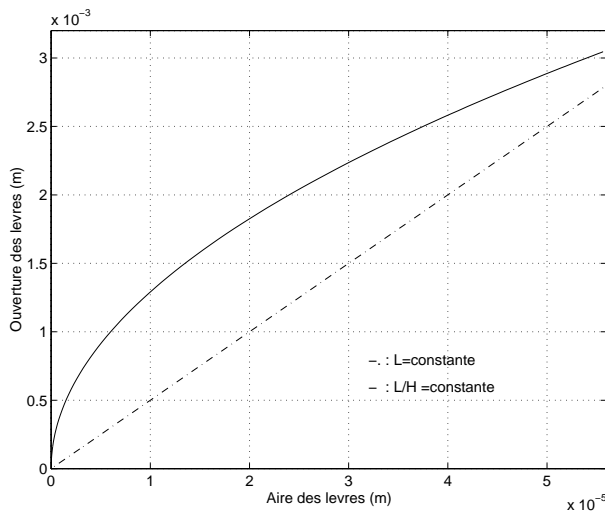


FIG. 5.15 – Ouverture en fonction de l'aire des lèvres

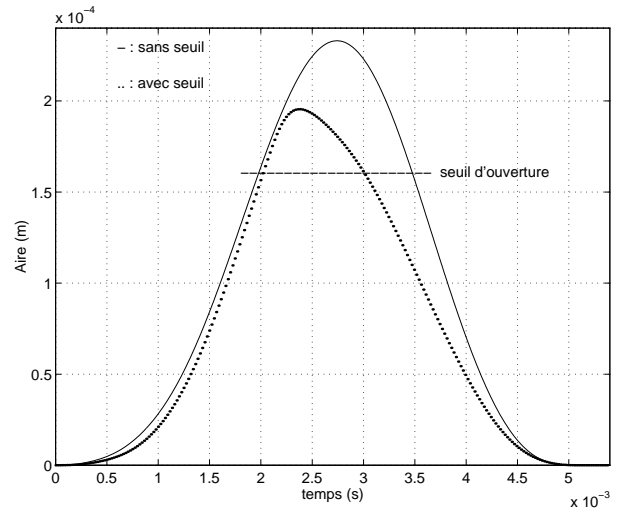


FIG. 5.16 – Evolution temporelle de l'aire des lèvres à forte amplitude

L'augmentation progressive de la raideur et de l'amortissement au delà d'un seuil supérieur d'ouverture permet de limiter cette dernière et de retrouver des signaux d'aires moins symétriques à forte amplitude qu'à faible. La figure 5.16 compare ainsi pour un  $Fa \# 2$  fortissimo simulé (pression d'alimentation de  $7000Pa$ ) l'évolution temporelle de l'aire des lèvres obtenue avec et sans seuil. Ce dernier a limité l'aire maximum et la phase de fermeture est alors plus longue que la phase d'ouverture, ce qui semble aller dans le sens des résultats expérimentaux de Copley [25]. Pour des notes graves pour lesquelles la génération d'harmoniques par propagation non-linéaire est limitée, il en résultera une génération d'harmoniques à la source qui enrichira les sons de synthèse<sup>3</sup> [34].

### 5.2.2 Problèmes d'inversion de débit

Parfois la pression dans l'embouchure devient supérieure à celle d'alimentation. Le débit devient alors négatif. Le forcer à zéro provoque alors une transition brutale de la dérivée du débit générant des hautes fréquences irréalistes. En ne prenant pas en compte les ondes émises vers la cavité buccale, nous voyons apparaître des oscillations autour de  $3000Hz$  (la fréquence d'oscillation semblant liée au volume de la cuvette), ceci menant à forte amplitude à des instabilités numériques. La prise en compte des ondes émises dans la bouche donne des résultats plus acceptables pour des inversions de gradient modérées et le son correspondant est plus riche. Cependant lorsque les inversions sont plus importantes, les oscillations deviennent plus violentes et des hautes fréquences parasites irréalistes apparaissent. Nous n'avons pas déterminé si ces oscillations relevaient du modèle physique ou du modèle numérique.

### 5.2.3 Influence de la non-linéarité de propagation

Pour les mêmes paramètres de simulation, nous allons comparer pour des niveaux de jeu élevés le champ interne du modèle extrinsèque (linéaire) et du modèle intrinsèque.

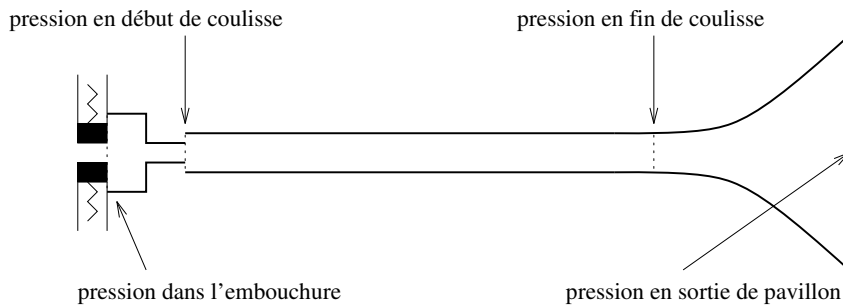


FIG. 5.17 – les différents points de calcul

3. En jouant sur le seuil maximum d'ouverture (donc sur la non-linéarité mécanique des lèvres), nous avons aussi pu produire des multiphoniques intéressants à l'écoute.

Ensuite, nous comparerons pour différentes nuances les signaux de sortie (coulisse ou pavillon) calculés par les trois modèles (voir figure 5.17).

### Auto-oscillation en linéaire et en non-linéaire intrinsèque

Comparons l'auto-oscillation obtenu en linéaire (équivalent au non-linéaire extrinsèque) et en non-linéaire (intrinsèque).

#### • Allure temporelle des signaux de pression

Nous présentons ici des résultats pour une fréquence de jeu de  $186\text{Hz}$  (à peu près un  $Fa\#2$ ) jouée sur une longueur de coulisse de l'ordre de  $3\text{m}$ , pour la nuance fortissimo ( $7000\text{Pa}$  d'alimentation). Observons les signaux de pression calculés dans l'embouchure et en sortie de coulisse (figures 5.18 et 5.19) en linéaire et en non-linéaire :

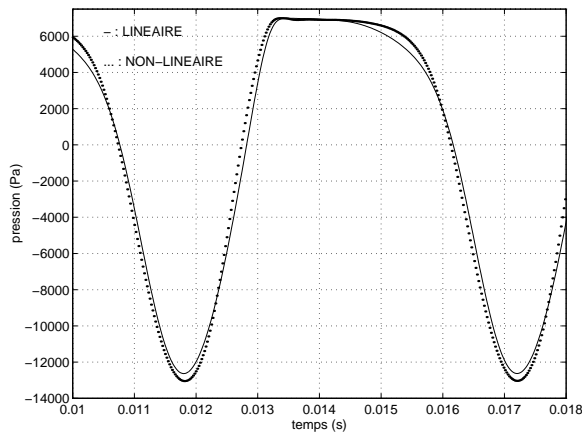


FIG. 5.18 – *Pression dans l'embouchure*

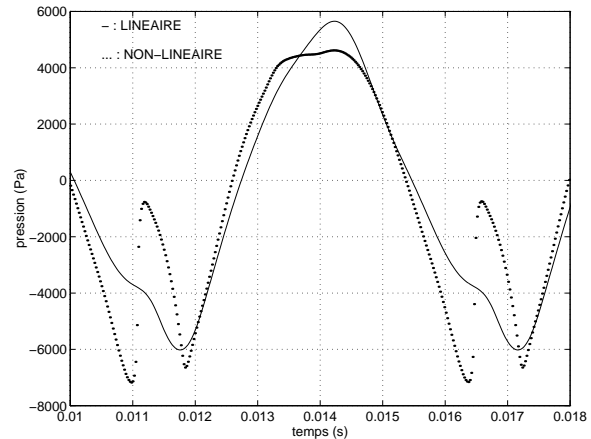


FIG. 5.19 – *Pression en fin de coulisse*

Pour des signaux d'embouchures d'amplitude et de forme similaires, nous observons à la fin de la coulisse des formes d'onde très différentes. Dans le cas du modèle intrinsèque, le front d'onde présente une transition très brutale résultant de la propagation non-linéaire donnant des signaux en fin de coulisse d'allure similaire à celle des signaux mesurés dans le trombone [3] [4].

#### • Distorsion des ondes aller et retour

Ce front provient de la distorsion des ondes aller se propageant non-linéairement dans la coulisse. La figure 5.20 qui compare le spectre d'amplitude des pressions en entrée et en fin de coulisse montre l'important transfert d'énergie vers le haut du spectre associée à la propagation non-linéaire :

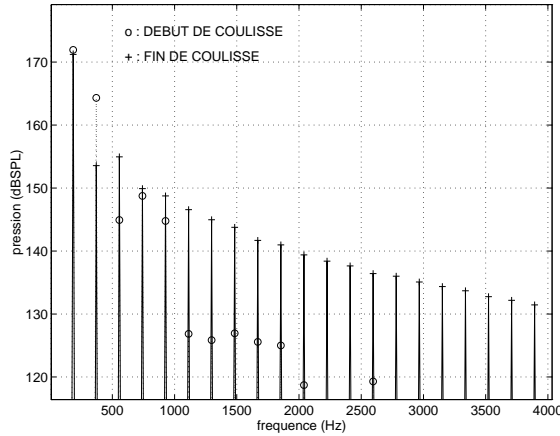


FIG. 5.20 – Ondes de pression aller dans la coulisse en non-linéaire

Les ondes de pression retour subissent aussi une distorsion comme on peut le voir sur la figure 5.21. Mais dans ce cas, elle engendre un certain appauvrissement du spectre (figure 5.22) qui s’explique par le changement de signe que les ondes aller subissent lors de leur réflexion à la fin du pavillon. Ainsi, malgré le filtrage passe-haut de ce dernier (une grande partie de l’énergie transférée vers les hautes fréquences étant rayonnée), il subsiste sur la partie décompressive des ondes réfléchies un front relativement raide s’annihilant par effet de propagation non-linéaire.

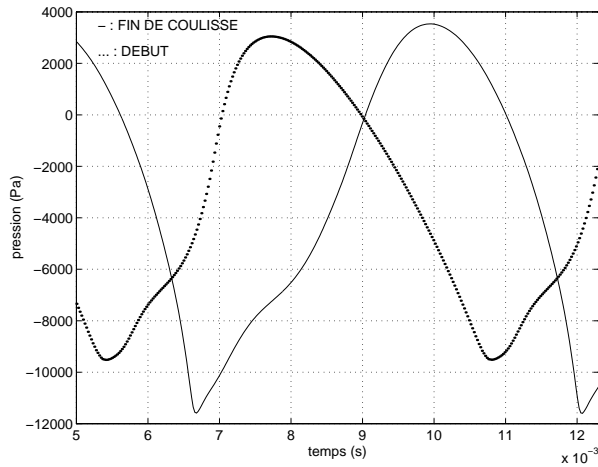


FIG. 5.21 – Ondes retour dans la coulisse en non-linéaire

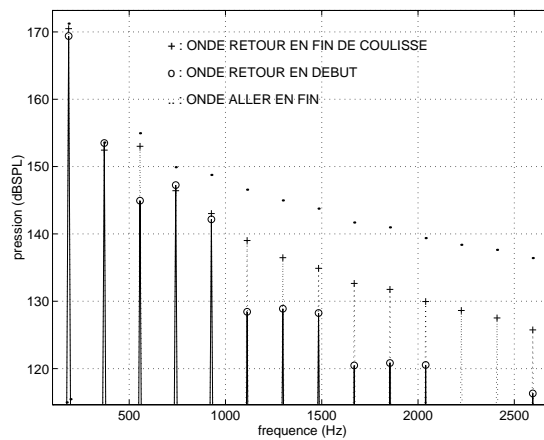


FIG. 5.22 – Spectre des ondes retour dans la coulisse

Cependant, quand on compare le spectre des ondes retour dans l’embouchure (vues par les lèvres), on observe que leur spectre est plus riche en non-linéaire qu’en linéaire (figure 5.23). Ceci provient du fait que l’annihilation du front le plus raide (partie décompressive)

s'accompagne aussi d'un raidissement de la zone de compression (figure 5.21) qui limite l'appauvrissement du spectre.

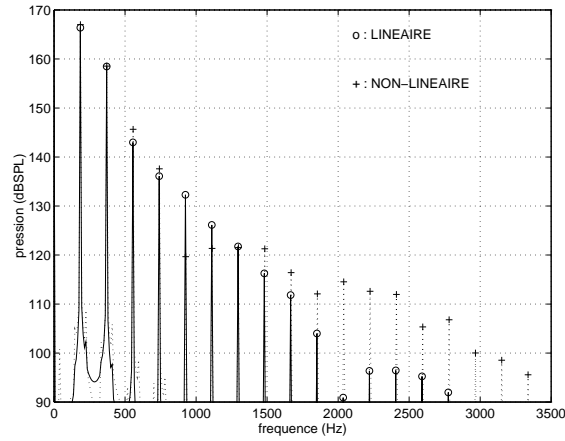


FIG. 5.23 – Ondes de pression retour dans l'embouchure

### • Influence sur la “source” acoustique

L'analyse comparée des spectres en amplitude de la dérivée du débit des lèvres dans les cas linéaire et non-linéaires donne une indication de l'influence de la non-linéarité sur le signal source à l'entrée du tuyau (figure 5.24).

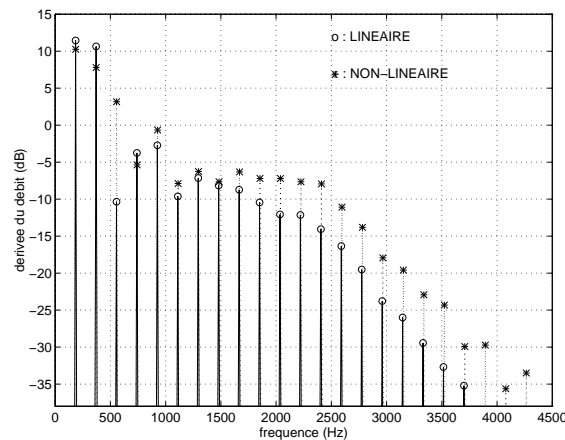


FIG. 5.24 – Dérivée du débit des lèvres ( $Fa^{\#2} fff$ )

Le transfert d'énergie des basses fréquences vers le haut du spectre induit un affaiblissement du fondamental et surtout du second harmonique. Bien qu'une partie de l'énergie soit transférée au troisième harmonique durant la propagation des ondes aller (figure 5.20), cela

ne peut expliquer son amplification manifeste car nous avons vérifié que ce qui a été gagné à l’aller semble en grande partie perdu au retour (figure 5.22).

Une explication possible est que tout se passe comme si l’affaiblissement des deux premiers partiels produisait une modification des pics correspondants de l’impédance d’entrée vue par l’excitateur non-linéaire (les lèvres) provoquant ainsi une modification de l’auto-oscillation. Au delà de  $1500\text{Hz}$  l’enrichissement du spectre de la source semble provenir essentiellement de la distorsion des ondes retour.

Une deuxième simulation est effectuée pour une fréquence de jeu inférieure ( $\approx 104\text{Hz}$  soit à peu près un *Sol#1*). La modification de l’auto-oscillation en non-linéaire est alors plus manifeste. L’ouverture des lèvres est plus grande et elles se ferment complètement contrairement au cas linéaire (figure 5.25). En observant les ondes retour de pression dans l’embouchure (figure 5.25), on remarque que dans le cas non-linéaire la dépression maximale est plus importante, ce qui favorise la fermeture des lèvres (la force de Bernoulli tendant alors à cet effet). Cette dépression provient de l’effet combiné de la distorsion des ondes aller et de leur filtrage par le pavillon.

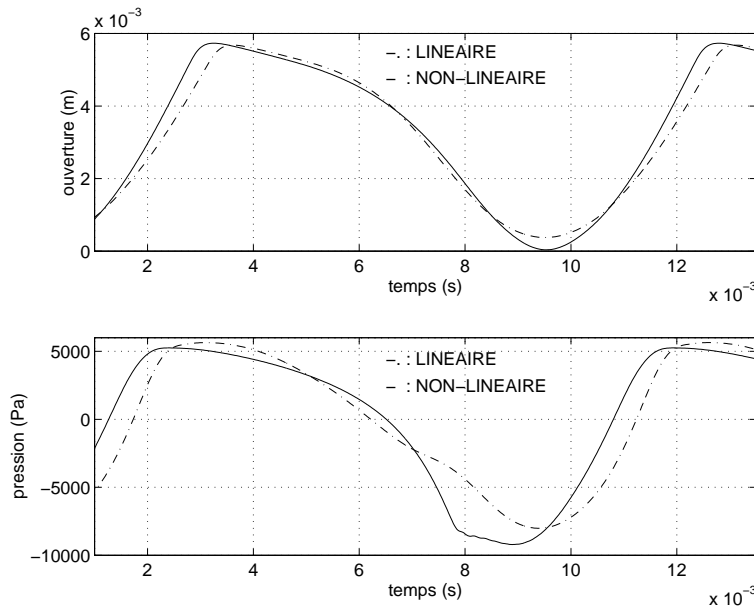


FIG. 5.25 – ouverture (en haut) et ondes retour (en bas) dans l’embouchure (*Sol#1 fff*)

Ceci amplifie le caractère “non-sinusoïdal” de la pression dans l’embouchure typique des notes graves et des fortes amplitudes [1] (figure 5.26) en accentuant la dépression maximale et en raidissant la zone de décompression.



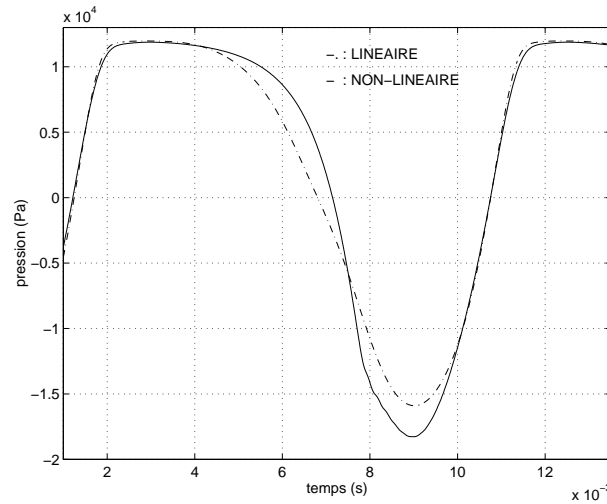


FIG. 5.26 – pression dans l'embouchure (Sol#1 fff)

### • Fréquence de jeu

Dans le cas d'ondes propagatives périodiques, la distorsion non-linéaire n'induit pas de modification de leur période [14]. La fréquence fondamentale du signal de sortie calculé en non-linéaire extrinsèque sera identique à la fréquence d'auto-oscillation (calculée en linéaire donc). Par contre, en non-linéaire intrinsèque, la distorsion des ondes retour modifiant le couplage acoustique avec l'excitateur non-linéaire peut induire des modifications de la fréquence d'auto-oscillation du modèle. La figure 5.27 présente l'évolution en non-linéaire de l'écart sur la fréquence de jeu en cents (référence solution en linéaire) en fonction de l'amplitude de la pression d'alimentation pour des nuances allant du piano au fortissimo.

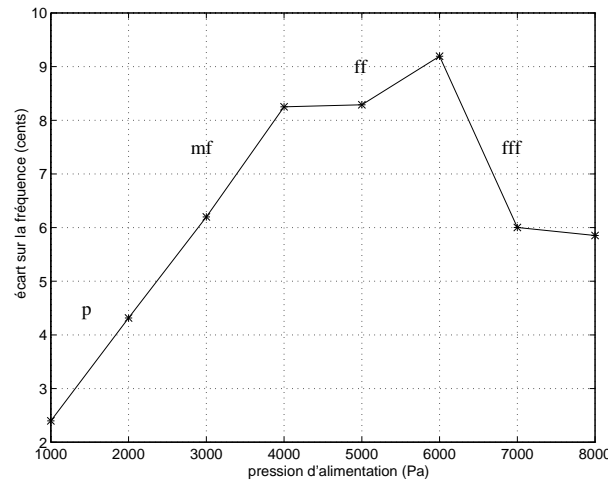


FIG. 5.27 – évolution de l'écart de fréquence de jeu (Fa#2)

On observe que le faible écart sur la fréquence de jeu augmente pour des amplitudes variant de  $1kPa$  à  $6kPa$  puis rediminue au delà. Pour des nuances faibles (piano, mezzoforte), l'écart du à une faible distorsion non-linéaire reste perceptivement négligeable ( $< 5$  cents). Pour des nuances supérieures, il peut être légèrement perceptible. Les mécanismes qui provoquent ces modifications de l'auto-oscillation sont difficiles à expliquer car ils combinent les deux types de non-linéarité, localisée et répartie.

### Comparaisons linéaire, non-linéaire extrinsèque et intrinsèque en sortie de coulisse et de pavillon

Nous avons montré que la prise en compte de la non-linéarité de propagation dans l'auto-oscillation entraîne des modifications de la source acoustique. Ces modifications restant relativement faibles, nous pouvons nous demander quelle sera leur influence sur le son transmis vers l'auditeur.

Pour cela, nous comparons la pression obtenue en fin de coulisse (c'est à dire le signal qui sera filtré linéairement pour l'écoute) en linéaire, en non-linéaire extrinsèque et intrinsèque pour les deux fréquences et amplitudes de jeu précédentes.

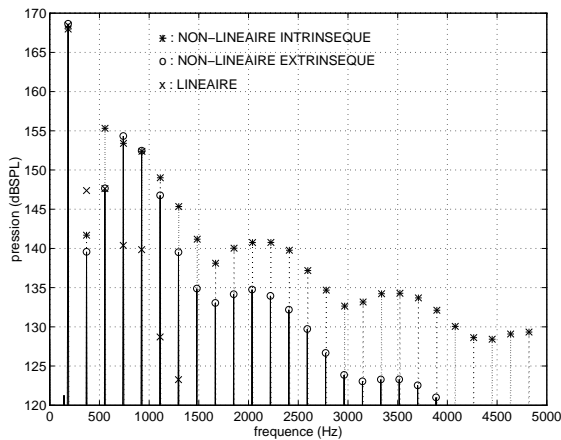


FIG. 5.28 – pression en fin de coulisse

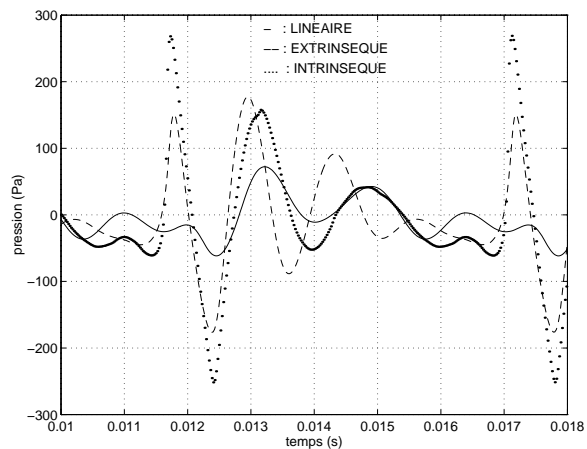


FIG. 5.29 – pression en sortie de pavillon

Dans le cas du  $Fa^{\#2}$  fortissimo, les spectres des signaux en fin de coulisse confirment que la prise en compte de la non-linéarité de propagation dans l'auto-oscillation produit des différences importantes sur l'amplitude du second et du troisième harmonique (figure 5.28). Pour des fréquences supérieures à  $1500Hz$  le spectre est nettement plus riche en intrinsèque qu'en extrinsèque (plus de  $10dB$  au delà de  $3000Hz$ ).

On retrouve dans une moindre mesure de telles différences pour la seconde note (figure 5.30).

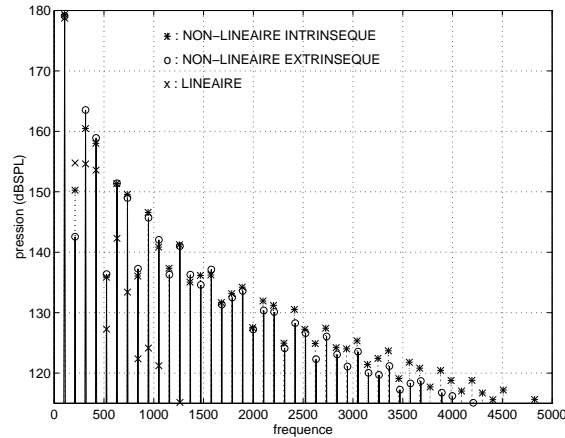


FIG. 5.30 – pression en fin de coulisse (Sol#1 fff)

Comparons maintenant (figure 5.29) l’allure temporelle des signaux de pression de sortie (après le filtrage passe-haut du pavillon) pour les trois modèles. Nous retrouvons en non-linéaire la forme typique des signaux de trombone à forte amplitude [3], l’aspect “impulsion” étant plus marqué en non-linéaire intrinsèque.

A l’écoute, le timbre obtenu est nettement plus brillant en non-linéaire qu’en linéaire et plus brillant en intrinsèque qu’en extrinsèque.

Nous pouvons nous demander si pour des nuances plus faibles les considérations précédentes se retrouvent. Pour cela, observons les spectres d’amplitude de la pression en sortie de pavillon pour quatre nuances (p, mf, f, fff) et comparons les résultats donnés par les trois modèles.

Pour les niveaux élevés (figure 5.31 et 5.32), nous vérifions que les spectres des signaux calculés avec le modèle intrinsèque sont plus riches que ceux calculés par les modèles extrinsèque et linéaire et que l’on retrouve les transferts d’énergie entre les premiers harmoniques.

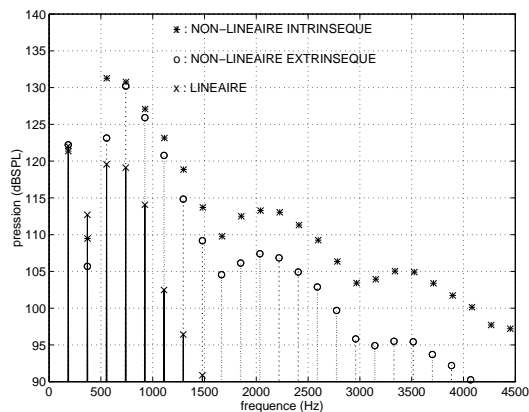


FIG. 5.31 – Pression de sortie (fff)

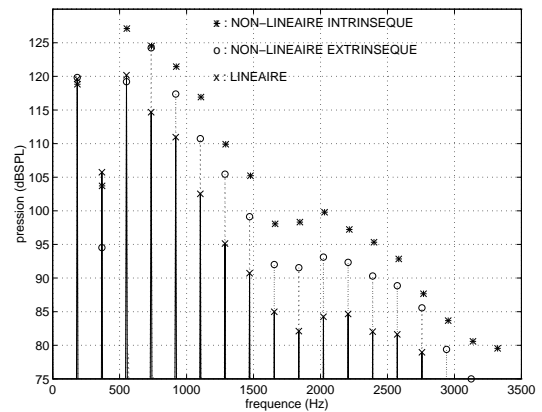


FIG. 5.32 – Pression de sortie (f)

Pour des nuances plus faibles (figure 5.33 et 5.34), la différence entre les trois modèles est moins marquée. La distorsion non-linéaire a induit un transfert limité d'énergie vers les harmoniques supérieurs et on retrouve encore des modifications importantes des premiers harmoniques pour la nuance mf. A l'écoute, les faibles différences entre les trois modèles sont encore perceptibles pour la nuance mezzo-forte.

Pour la nuance piano, les faibles différences entre les modèles semblent perceptivement négligeables comme on pouvait s'y attendre.

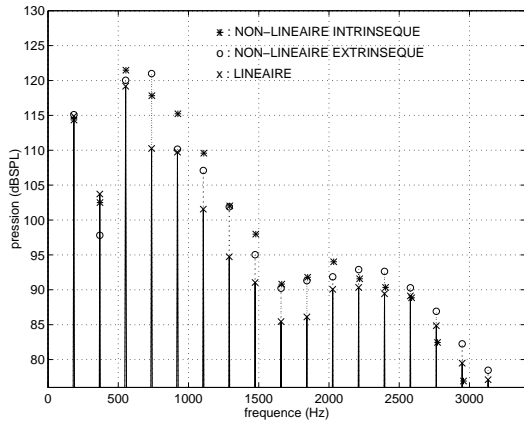


FIG. 5.33 – Pression de sortie (mf)

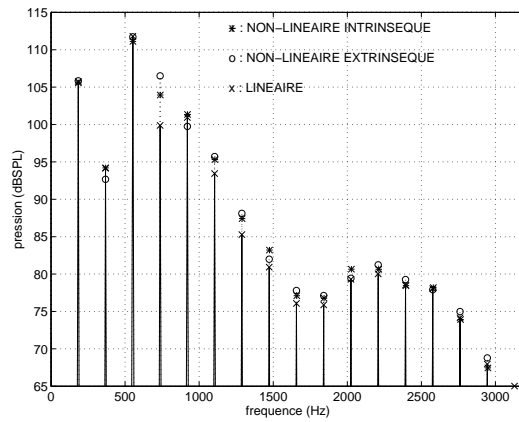


FIG. 5.34 – Pression de sortie (p)

## Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons proposé des modèles physiques simples de trombone et de tromboniste. L'instrumentiste a été réduit à une simple pression d'alimentation et un modèle de lèvres à une masse. La première modification apportée à ce modèle classique réside en la prise en compte d'une fonction d'aire proportionnelle au carré de l'ouverture des lèvres. Il en résulte, pour de grandes oscillations avec fermeture complète des lèvres, un signal "source" plus réaliste. Combiné avec une augmentation progressive de l'amortissement et de la raideur de l'oscillateur pour des ouvertures dépassant un certain seuil maximum, nous retrouvons des évolutions temporelles de l'aire des lèvres similaires à celles mesurées dans la littérature. A partir d'hypothèses simplificatrices, la non-linéarité de propagation a été concentrée dans la coulisse de l'instrument et découplée des pertes visco-thermiques. La distorsion non-linéaire (décrite par la méthode des caractéristiques) apparaît simplement alors comme un retard de propagation variant avec l'amplitude de l'onde propagative considérée.

Deux modèles non-linéaires sont proposés. Le premier dit "extrinsèque" ne prend pas en compte la non-linéarité dans l'auto-oscillation contrairement au second qui sera dit "intrinsèque". Pour des nuances allant de mezzo-forte à fortissimo, les signaux calculés en fin de coulisse et à la sortie de pavillon par ces deux modèles sont plus riches en harmoniques

aigus qu'en linéaire, la différence s'accroissant spectaculairement avec la nuance. Les simulations numériques montrent aussi que pour des nuances élevées (à partir de la nuance forte) les signaux calculés en intrinsèque sont plus riches et plus brillants que ceux obtenus en extrinsèque du fait de la distorsion des ondes retour. Les transferts d'énergie opérés des harmoniques les plus bas vers leurs supérieurs proches induisent aussi des différences entre les deux modèles. Par contre, la fréquence de jeu est en général peu modifiée. Nous en concluons que pour des applications à la synthèse sonore, la prise en compte de la non-linéarité de propagation est une amélioration certaine des modèles quant à la production de son "civrés". Le modèle extrinsèque sera apte à produire de tels sons mais sous-estimera les effets de la distorsion. Inclure la non-linéarité de façon intrinsèque ne présentant pas de grosses difficultés, il ne semble pas y avoir de raison de s'en passer. De plus, si l'on modifie le modèle d'instrument (ajout d'une sourdine par exemple) ou création d'un instrument virtuel, la prise en compte de la non-linéarité intrinsèque peut être intéressante.

D'un point de vue qualitatif, certains des résultats obtenus peuvent éclairer notre compréhension du fonctionnement du trombone. Ainsi, les niveaux de jeu et l'allure des signaux d'embouchure étant assez similaires à ceux mesurés, on peut supposer que la distorsion non-linéaire sur les ondes retour influe sur le signal de pression dans l'embouchure et que la source acoustique est modifiée pour des nuances élevées. Il semble prématuré de fournir des résultats quantitatifs qui seraient comparables avec des mesures (sur bouche artificielle) en raison des difficultés expérimentales et des approximations actuelles du modèle physique.

Des améliorations sont possibles comme décrire plus précisément l'embouchure ou prendre en compte la non-linéarité de propagation dans la partie la moins évasée du pavillon ainsi que les effets des modes supérieurs sur son impédance d'entrée [35]. De même un modèle plus élaboré des mécanismes de pertes (pertes visco-thermiques aux parois, turbulence ...) et la prise en compte d'éventuels décollements de couche limite pourrait être aussi nécessaire [10]. Enfin, la description de l'instrumentiste, en particulier de la mécanique de ses lèvres et du jet d'air est si caricaturale que la prise en compte par ailleurs de finesses dans l'instrument peut paraître superflue.

Cependant, malgré ces nombreuses approximations, notre modèle est capable de reproduire d'une façon réaliste des sons "civrés" et des signaux présentant de fortes similarités avec ceux mesurés dans l'instrument ce qui semble indiquer que conformément aux objectifs que nous nous sommes fixés, l'essentiel du phénomène physique est bien capté.



# Bibliographie

- [1] Elliot S.J. and Bowsler J.M. Regeneration in brass wind instruments. *Journal of Sound and Vibration*, 83:181–217, 1982.
- [2] Hirschberg A., Kergomard J., and Weinreich G. *Mechanics of Musical Instruments*. Springer, 1996.
- [3] Hirschberg A., Gilbert J., Msallam R., and Wijnands A. Shock waves in trombones. *J. Acoust. Soc. Am.*, 99(3):1754–1758, 1996.
- [4] Gilbert J. and Petiot J.F. Brass instruments, some theoretical and experimental results. In *Proceedings of the Institut of Acoustics, ISMA'97*, Edimbourg, 1997.
- [5] Msallam R., Dequidt S., Dubois F., and Caussé R. Modèle et simulations numériques de la propagation non-linéaire dans les conduits (text in french). In *Actes de Colloques du 4<sup>ème</sup> Congrès Français d'Acoustique*, pages 699–702, Marseille, 1997.
- [6] Gilbert J. and Msallam R. Chocs cuivrés. *Pour la Science*, février 1998.
- [7] Beauchamp J. Brass-tone synthesis by spectrum evolution matching with non-linear functions. *Computer Music J.*, 3(2):35–43, 1975. Reprinted in *Foundations of Computer Music*, MIT Press 1985.
- [8] Smith J.O. Physical modeling synthesis update. *Computer Music J.*, 20(2):44–56, 1996.
- [9] Msallam R., Dequidt S., Tassart S., and Caussé R. Physical model of the trombone including non-linear propagation effects. In *Proceedings of the Institut of Acoustics, ISMA'97*, Edimbourg, 1997.
- [10] A. Hirschberg. Communication personnelle, 1997.
- [11] Chester W. Resonant oscillations in closed tubes. *J. Fluid Mech.*, 18(44), 1964.
- [12] Menguy L. and Gilbert J. Propagation acoustique faiblement non-linéaire dans les guides cylindriques, modélisation et solutions (numériques). In *Actes de Colloques du 4<sup>ème</sup> Congrès Français d'Acoustique*, pages 691–694, Marseille, 1997.
- [13] Tassart S., Msallam R., Depalle P., and Dequidt S. A fractional delay application: time-varying propagation speed in waveguides. In *Proceedings of ICMC97*, Thessaloniki, 1997.
- [14] Whitham G.B. *Linear and Nonlinear Waves*. Wiley-Interscience Publication, 1974.

- [15] Cenker C., Feichtinger H.G., and Herrmann M. Iterative methods in irregular sampling: a first comparison of methods. In *Proceedings of the 10th IPCCC*, Scottsdale, 1991. IEEE Computer Soc. Press.
- [16] Wassink C.H.Ph. Shockwaves in trombone. Technical Report R-1390-S, Vakgroep Transportfysica, Faculteit Technische Natuurkunde, Eindhoven, 1996.
- [17] Laakso T.I., Välimäki V., and Karjalainen M. and Laine U.K. Splitting the unit delay. *IEEE Signal Processing magazine*, 13(1), 1996.
- [18] Verge M.P., Hirschberg A., and Caussé. Sound production in recorderlike instruments. 2. a simulation model. *J. Acoust. Soc. Am.*, 101(5):2925–2939, 1997.
- [19] Gazengel B., Gilbert J., and Amir N. Time domain simulation of single reed wind instrument. from the input impedance to the synthesis signal. where are the traps? *Acta Acustica*, 3:445–472, 1995.
- [20] Lurton X. *Etude analytique de l'impédance d'entrée des instruments à embouchure. Applications à la trompette et au trombone*. PhD thesis, Université du Maine, 1979.
- [21] Caussé R., Kergomard J., and Lurton X. Input impedance of brass instruments-comparison with experiment and numerical models. *J. Acoust. Soc. Am.*, 75(1):241–254, 1984.
- [22] Smith J.O. Physical modeling using digital waveguides. *Computer Music J.*, 4(74), 1992. Special issue: Physical Modelling of Musical Instruments.
- [23] Flanagan J.L. *Speech Analysis, Synthesis and Perception*. Springer-Verlag, 1972.
- [24] Jorno D. Etude théorique et expérimentale de l'auto-oscillation des lèvres en présence d'un couplage acoustique. DEA ATIAM, ICP Grenoble, 1996.
- [25] Copley D.C. and Strong W.J. A stroboscopic study of lip vibrations in a trombone. *J. Acoust. Soc. Am.*, 99(2):1219–1226, 1996.
- [26] Adashi S. and Sato M. Trumpet sound simulation using a two-dimensional lip vibration model. *J. Acoust. Soc. Am.*, 99(2):1200–1209, 1996.
- [27] Ishisaka K. and Flanagan J.L. Synthesis of voiced sounds from a two-mass model of the vocal cords. *Bell System Technical Journal*, 51:1233–1268, 1972.
- [28] Yoshikawa S. Acoustical behavior of brass player's lips. *J. Acoust. Soc. Am.*, 99:1929–1939, 1995.
- [29] Gilbert J., Ponthus S., and Petiot J.F. Artificial buzzing lips and brass instruments: experimental results. *J. Acoust. Soc. Am.* to appear.
- [30] Vergez C. and Rodet X. Model of trumpet functioning: real time simulation and experiment with an artificial mouth. In *Proceedings of the Institut of Acoustics, ISMA'97*, Edimbourgh, 1997.
- [31] Dietz P. and Amir N. Synthesis of trumpet tones by physical modeling. In *Proc. International Symposium on Musical Acoustics*, Dourdan, 1995.



- [32] Pelorson X., Hirschberg A., van Hassel R.R., and Wijnands A.P.J. Theoretical and experimental study of quasisteady-flow separation within the glottis during phonation. application to a modified two-mass model. *J. Acoust. Soc. Am.*, 96(6):3416–3430, 1994.
- [33] Lous N.J.C., Hofmans G.C.J., Veldhuis R.N.J., and Hirschberg A. A symmetrical two-mass vocal-fold model coupled to vocal tract and trachea, with application to prothesis design. *submitted to Acta Acustica*.
- [34] Strong W.J. and Copley D.C. Trombone tone synthesis using measured lip openings. In *Proceedings of the Institut of Acoustics, ISMA'97*, Edimbourgh, 1997.
- [35] Amir N., Pagneux V., and Kergomard J. Wave propagation in acoustic horns through modal decomposition. In *Proceedings of the Institut of Acoustics, ISMA'97*, Edimbourgh, 1997.



---

# Chapitre 6

## Conclusion générale

Dans cette étude, nous nous sommes intéressés à la modélisation physique et numérique de la propagation acoustique non-linéaire dans les tuyaux. Le sujet a été introduit de façon originale par le biais de l'acoustique du trombone. Nous avons en effet montré expérimentalement (voir le premier chapitre) que d'importants effets de distorsion non-linéaire se produisent dans cet instrument pour de fortes amplitudes de jeu, confirmant ainsi les hypothèses émises par Beauchamp quelques années auparavant.

Dans le second chapitre, nous avons rappelé les théories classiques de la propagation linéaire dans les tuyaux où l'influence des couches limites visco-thermiques a fait l'objet de nombreuses études dans la littérature. Ensuite, nous avons présenté les théories de la propagation non-linéaire en fluide parfait et dans les tuyaux. Pour ces derniers, l'article de Chester reste l'une des principales références.

A partir des équations de base de la dynamique des gaz et d'une analyse adimensionnelle, nous avons établi dans le troisième chapitre un système d'équations non-linéaires quasi monodimensionnelles décrivant la propagation non-linéaire dans les guides d'ondes de type "larges" à section très lentement variable en espace. La formulation incluant les pertes visco-thermiques linéaires, bien que physiquement (quasiment) équivalente à celle de Chester, nous rapproche de la problématique aérodynamique du couplage des équations de fluide parfait et de couches limites. Nous avons proposé une formulation que nous espérons suffisamment générale pour envisager des extensions telles la prise en compte de non-linéarités de couche limite, l'interaction du champ acoustique avec un écoulement moyen . . . Nous avons discuté enfin les limites de validité de notre formulation et la possibilité de l'appliquer à l'étude du champ acoustique dans le trombone.

Cette formulation théorique s'inspire de l'aérodynamique, la méthode de résolution numérique présentée au chapitre suivant aussi. En effet, si l'utilisation des méthodes numériques de résolution directe des équations est aujourd'hui chose courante en aérodynamique et en dynamique des gaz, l'application de ces méthodes à l'aéroacoustique est relativement récente et est quasiment inexistante quant à l'acoustique non-linéaire dans les tuyaux. Nous avons donc choisi de résoudre notre système d'équations à l'aide d'une discrétisation en espace et

en temps, nous contentant (au regard de nos objectifs) d'un schéma classique de résolution d'ordre faible. Les tests effectués ont montré la capacité de notre outil à traiter des cas standards de l'acoustique linéaire et non-linéaire. Une validation plus systématique serait nécessaire, de même qu'une étude plus poussée du traitement des conditions limites.

L'application de cet outil à l'étude du trombone confirme l'importance des effets non-linéaires de propagation et des pertes visco-thermiques dans l'instrument à fort niveau de jeu. La confrontation avec les résultats expérimentaux n'a cependant pas été possible du fait des difficultés de mise en oeuvre des mesures.

Une des limitations de notre code de calcul quant aux applications instrumentales provient de la lourdeur des calculs. Nous n'avons cependant pas orienté notre recherche vers l'optimisation du temps de calcul (utilisation de schémas optimisés, traitement moins coûteux des pertes visco-thermiques . . .) mais plutôt privilégié la mise au point d'un modèle de trombone plus simple et plus pratique pour la synthèse sonore présenté dans le cinquième chapitre. A partir des résultats théoriques et numériques des chapitres précédents, nous avons donc élaboré un modèle physique comprenant un modèle simple de lèvres et le traitement des non-linéarités de propagation concentrées dans la coulisse de l'instrument. Ce modèle permet de reproduire des amplitudes de jeu et des signaux similaires à ceux mesurés dans l'instrument. Nous avons vérifié ainsi l'importance de la propagation non-linéaire pour l'émission de sons "cuivrés" typique du trombone pour les fortes nuances.

Bien que présentant de nombreuses lacunes, notre travail présente une certaine originalité dans sa volonté de réunir des domaines aussi vastes que l'acoustique non-linéaire et la mécanique des fluides, le calcul scientifique, l'acoustique musicale et la synthèse sonore. Puisse le modeste fruit de nos recherches inspirer de nouveaux développements dans ces domaines passionnants.

---

# Annexe A

## Approche Aérodynamique

A titre d'introduction à la notion de couche limite qui va nous servir pour introduire les effets de pertes visco-thermiques dans la propagation acoustique, on se place dans le cas de l'aérodynamique classique, c'est à dire dans le cas d'un écoulement fluide stationnaire ou lentement instationnaire se développant dans une conduite. L'évolution spatiale d'un tel écoulement est essentiellement déterminée par les termes non-linéaires des équations de Navier-Stokes, les termes de convection. On suppose qu'on peut le décomposer en un écoulement principal défini dans le gros de la section du tuyau et un écoulement secondaire défini près des parois, la couche limite. On adimensionne alors classiquement les équations [1] afin de faire apparaître des nombres sans dimension qui renseignent sur l'ordre de grandeur des différents termes des équations et des simplifications possibles dans chacune des deux zones. On peut alors montrer que l'écoulement principal est du type fluide parfait et que celui de couche limite du type fluide visqueux.

### A.1 Géométrie

Quand une des longueurs caractéristiques du problème tridimensionnel étudié est très grande devant les deux autres, on peut en général se ramener à l'étude d'un problème à deux dimensions et simplifier les équations de conservation.

On va ainsi considérer un fluide newtonien en mouvement entre deux parois fixes distantes d'une épaisseur  $2h$  et de longueur  $L$ , ces deux dimensions étant très petites devant la largeur des plaques.

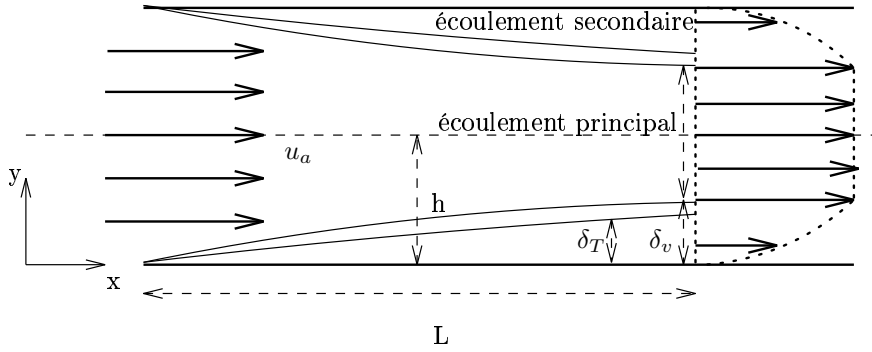


FIG. A.1 – *Écoulement bidimensionnel entre deux plaques planes*

## A.2 Hypothèses

On considère un écoulement vérifiant les hypothèses suivantes :

- Écoulement bidimensionnel soit deux variables d’espace, x longitudinale et y transversale.
- Hypothèse de Stokes soit  $\mu_v = \lambda + \frac{2}{3}\mu = 0$  (on néglige la viscosité de volume).
- On exclut des variations temporelles brutales.
- Pas de turbulence.
- Vitesse nulle à la paroi.
- Température donnée aux parois qui sont supposées bonnes conductrices de la chaleur.

Les deux dernières hypothèses nous permettent d’envisager l’existence de trois zones distinctes d’écoulement.

Deux zones pariétales à forts gradients de température et de vitesse suivant y, respectivement “couche limite thermique” d’épaisseur  $\delta_T$  et “couche limite visqueuse” d’épaisseur  $\delta_v$ . Ces deux régions permettant le raccord entre la valeur des variables précédentes à la paroi et leur valeur dans la troisième zone dite “écoulement principal” (voir figure A.1).

On ajoutera les trois hypothèses restrictives suivantes :

- La demi épaisseur de conduite est plus petite que la longueur caractéristique de l’écoulement soit  $h < L$ .
- Les couches limites visqueuses et thermiques ont la même origine spatiale.
- Leur épaisseur est du même ordre de grandeur.
- Symétrie suivant l’axe longitudinal de la conduite.

## A.3 Equations de base

Soit les équations de Navier-Stokes pour un fluide bidimensionnel compressible à viscosité et conductivité thermique constantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) + \partial_y(\rho v) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) + \partial_y(\rho uv) = -\partial_x p + \mu \left( \frac{4}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho uv) + \partial_y(\rho v^2) = -\partial_y p + \mu \left( \frac{4}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \\ \partial_t(\rho E) + \partial_x[(\rho E u + p u)] + \partial_y[(\rho E v + p v)] = \varphi + K \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

avec la densité d'énergie totale, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie interne :

$$\rho E = \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) + \rho e$$

et une fonction de dissipation :

$$\varphi = \mu \left[ \partial_x \left( \frac{4}{3} u \partial_x u - \frac{2}{3} u \partial_y v + v \partial_y u + v \partial_x v \right) + \partial_y \left( u \partial_y u + u \partial_x v - \frac{2}{3} v \partial_x u + \frac{4}{3} v \partial_y v \right) \right]$$

## A.4 Adimensionnement des équations de base

Nous gardons la forme conservative des équations et allons les adimensionner afin d'évaluer l'importance des différents termes dans chacune des deux zones, écoulement principal et écoulement secondaire (qui comprend les deux couches limites).

On doit tout d'abord évaluer l'ordre de grandeur des différentes variables afin de faire apparaître des variables adimensionnées d'ordre de grandeur 1 et des nombres sans dimension qui nous renseigneront sur les propriétés de l'écoulement et les éventuelles simplifications à effectuer. On va pour cela supposer que l'écoulement est peu différent d'un écoulement de fluide parfait (stationnaire ou lentement instationnaire).

### A.4.1 Écoulement secondaire (couche limite)

On notera les variables adimensionnées en surligné.

- Grandeurs de référence et adimensionnement des variables et gradients :

- $L$  longueur de référence.
- $\delta_v$  ou  $\delta_T$  épaisseurs de couche limite.
- $u_a$  vitesse longitudinale dans l'axe de la conduite bidimensionnelle.
- $t_a = \frac{L}{u_a}$  temps de référence de l'écoulement, temps mis par une particule fluide pour parcourir la distance  $L$  à la vitesse  $u_a$ .
- $\rho_a$  densité dans l'axe.
- $\Delta p \approx \rho_a u_a^2$  variation de pression.
- $\Delta T \approx \frac{u_a^2}{2c_p}$  variation de température.

–  $v_{cl}$  une vitesse transversale de référence.

soit l'adimensionnement des dérivées temporelles et spatiales :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} &= L \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{y}} &= \delta_v \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{pour application au champ de vitesse et aux différents flux.} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{y}} &= \delta_T \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{pour application au champ de température.} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{t}} &= t_a \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}$$

L'ordre de grandeur des gradients transverses de pression et de densité d'énergie interne n'est pas évident car ces grandeurs ne vérifient pas de condition limite à la paroi.

Nous devons d'abord déterminer l'ordre de grandeur de la vitesse transversale dans la couche limite ( $v_{cl}$ ), nous allons pour cela écrire l'ordre de grandeurs des différents termes de l'équation de conservation de la masse. Les flux transversaux étant du même ordre de grandeur que les flux longitudinaux, nous pouvons écrire :

$$\underbrace{\partial_x(\rho u)}_{\frac{\rho_a u_a}{L}} \approx \underbrace{\partial_y(\rho v)}_{\frac{\rho_a v_{cl}}{\delta_v}} \quad \text{soit } v_{cl} \approx u_a \frac{\delta_v}{L} = u_a \bar{\delta}_v$$

avec  $\bar{\delta}_v$  l'épaisseur de couche limite adimensionnée.

L'ordre de grandeur de la vitesse transversale est donc donné par la vitesse de parcours d'une information de la paroi à la frontière de la couche limite pendant le temps ( $t_a$ ) de parcours de l'information longitudinale.

La pression ne subit pas de condition à la paroi. Pour déterminer l'ordre de grandeur du gradient de pression transverse, nous considérons l'équation de l'impulsion transverse et déduisons que celui-ci est du même ordre de grandeur que le flux d'impulsion transverse, soit :

$$\partial_y(\rho v^2) \approx \partial_y p \quad \text{soit } (\partial_y p)_{ref} \approx \frac{\rho_a u_a^2}{L} \bar{\delta}_v \approx \frac{\rho_a v_{cl}^2}{\delta_v}$$

En remarquant que pour un gaz parfait  $\rho e = \frac{p}{\gamma-1}$ , on en déduit directement les gradients de densité d'énergie interne de référence.



Les variables et gradients adimensionnés principaux (d'ordre 1) vérifient donc :

$$\begin{aligned}
 \rho &= \rho_a \bar{\rho} \\
 u &= u_a \bar{u} \\
 v &= u_a \bar{\delta}_v \bar{v} \\
 \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\rho_a u_a^2}{L} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \\
 \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\rho_a u_a^2 \bar{\delta}_v}{L} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \\
 \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{u_a^2}{c_p \delta_T} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}}
 \end{aligned}$$

- Equations adimensionnées dans la couche limite :

Les équations de Navier-Stokes s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= 0 \\
 \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}^2}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{Re} \left( \frac{4}{3} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{1}{\bar{\delta}_v^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \right) \\
 \bar{\delta}_v \left( \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}^2}{\partial \bar{y}} \right) &= -\bar{\delta}_v \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{Re} \left( \frac{4}{3} \frac{1}{\bar{\delta}_v} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} + \bar{\delta}_v \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{\bar{\delta}_v} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \right) \\
 \frac{1}{\gamma-1} \left( \frac{\partial \bar{\rho} \bar{e}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{e}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v} \bar{e}}{\partial \bar{y}} \right) + \bar{\chi} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= \bar{\varphi} + \frac{1}{Pr Re} \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{1}{\bar{\delta}_v^2} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right)
 \end{aligned} \right. \quad (\text{A.2})$$

avec pour l'énergie cinétique :

$$\bar{\chi} = \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left[ \frac{1}{2} \bar{\rho} (\bar{u}^2 + \bar{\delta}_v^2 \bar{v}^2) \right] + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[ \frac{1}{2} (\bar{u}^2 + \bar{\delta}_v^2 \bar{v}^2) \bar{\rho} \bar{u} \right] + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left[ \frac{1}{2} (\bar{u}^2 + \bar{\delta}_v^2 \bar{v}^2) \bar{\rho} \bar{v} \right]$$

et la fonction de dissipation :

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[ \frac{4}{3} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} - \frac{2}{3} \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{\delta}_v^2 \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right] + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left[ \frac{1}{\bar{\delta}_v^2} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{2}{3} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{4}{3} \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right] \right)$$

Nous avons fait apparaître les épaisseurs de couche limite adimensionnées ( $\bar{\delta}_{v/T} = \frac{\delta_{v/T}}{L}$ ) et les nombres sans dimension suivants :

$$\begin{aligned}
 Re &= \frac{\rho_a u_a L}{\mu} = \frac{u_a L}{\nu} \quad \text{le **nombre de Reynolds**} \\
 Pr &= \frac{\nu}{a} \quad \text{le **nombre de Prandtl**}
 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

avec la viscosité cinématique ( $\nu = \frac{\mu}{\rho_a}$ ) et la diffusivité thermique ( $a = \frac{K}{\rho_a c_p}$ ).

Le nombre de Reynolds  $Re$  mesure l'importance des effets convectifs par rapport aux effets visqueux.

Le nombre de Prandtl,  $Pr$ , qui mesure la viscosité cinématique par rapport à la diffusivité thermique, est un indicateur de l'importance de la diffusion de l'impulsion sous l'effet de la viscosité devant la diffusion de la chaleur.

On peut aussi adimensionner les équations d'état qui s'écrivent alors :

$$\bar{p} = \bar{\rho} \bar{T} \quad (\text{A.4})$$

$$\bar{e} = \bar{T} \quad (\text{A.5})$$

### A.4.2 Ecoulement principal

On reprend la même procédure pour l'écoulement principal.

Les grandeurs de références seront les mêmes que pour la couche limite (valeurs dans l'axe, longueur L) sauf pour les dimensions et gradients caractéristiques transverses.

On choisit ainsi comme hauteur de référence la demi épaisseur h.

Les gradients transverses s'écriront :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{y}} = h \frac{\partial}{\partial y}$$

Puisque  $v_a = 0$  par axisymétrie, la vitesse transverse de référence est la même que dans la couche limite.

Par contre, la pression, la température et la densité ne subissant pas de condition limite, l'adimensionnement de leur gradient transverse respectif n'est pas évident.

En se rappelant que l'écoulement principal est peu différent d'un écoulement de fluide parfait, écrivons l'équation de l'impulsion suivant y et les ordres de grandeur correspondants :

$$\underbrace{\partial_x(\rho uv)}_{\frac{\rho_a u_a^2 \bar{\delta}_v}{L}} + \underbrace{\partial_y(\rho v^2)}_{\frac{\rho_a u_a^2 \bar{\delta}_v^2}{h}} = -\partial_y p$$

On voit que si  $\frac{\delta}{h}$  est petit devant 1 (soit si l'épaisseur de couche limite est petite devant la demi-épaisseur de la conduite), le terme de flux longitudinal domine et l'impulsion ne peut être équilibrée que si le gradient de pression est du même ordre, soit :

$$\partial_y p \approx \frac{\rho_a u_a^2 \bar{\delta}_v}{L} = \frac{\Delta p}{\delta_v} \bar{\delta}_v^2 = \frac{\bar{\delta}_v^2}{S_h} \frac{\Delta p}{h}$$

où l'on a introduit le "**shear number**" (nombre de cisaillement), rapport de l'épaisseur de couche limite sur la demi épaisseur de la conduite :

$$S_h = \frac{\delta_v}{h} \quad (\text{A.6})$$

On remarque le gradient de pression est donc du même ordre de grandeur que dans la couche limite.

Pour déterminer l'ordre de grandeur du gradient de température, nous appliquons un raisonnement similaire pour l'équation de l'énergie en fluide parfait écrite sous forme non-conservative :

$$\underbrace{u \left( \partial_x T - \frac{1}{\rho c_p} \partial_x p \right)}_{\approx 0} = v \left( -\partial_y T + \frac{1}{\rho c_p} \partial_y p \right)$$

d'où

$$\partial_y T \approx \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial_y p}{\rho} \approx \frac{u_a^2}{c_p L} \bar{\delta}_v = \frac{\Delta T}{\bar{\delta}_v} \bar{\delta}_v^2$$

De même, on peut vérifier que  $\partial_y u \approx \frac{u_a \bar{\delta}_v}{L}$  et  $\partial_y \rho \approx \frac{\rho_a \bar{\delta}_v}{L}$ , soit les ordres de grandeur suivants des gradients de pression, de vitesse longitudinale, de température et de densité :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\rho_a u_a^2}{L} \bar{\delta}_v = \frac{\bar{\delta}_v^2}{S_h} \frac{\Delta p}{h} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{u_a}{L} \bar{\delta}_v = \frac{\bar{\delta}_v^2}{S_h} \frac{u_a}{h} \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{u_a^2}{c_p L} \bar{\delta}_v = \frac{\bar{\delta}_v^2}{S_h} \frac{\Delta T}{h} \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} &= \frac{\rho_a}{L} \bar{\delta}_v = \frac{\bar{\delta}_v^2}{S_h} \frac{\rho_a}{h} \end{aligned}$$

- Equations adimensionnées dans le flux principal :

Les équations de Navier-Stokes s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}}{\partial \bar{x}} + S_h \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}^2}{\partial \bar{x}} + S_h \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{R_e} \left( \frac{4}{3} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + S_h \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{1}{3} S_h \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \right) \\ \bar{\delta}_v \left( \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{v}}{\partial \bar{x}} + S_h \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}^2}{\partial \bar{y}} \right) &= -\bar{\delta}_v \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{R_e} \left( \frac{4}{3} \frac{S_h^2}{\bar{\delta}_v} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} + \bar{\delta}_v \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \right) \right) \\ \frac{1}{(\gamma-1)} \left( \frac{\partial \bar{\rho} \bar{e}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{e}}{\partial \bar{x}} + S_h \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v} \bar{e}}{\partial \bar{y}} \right) + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}}{\partial \bar{x}} + S_h \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \bar{\chi} &= \bar{\varphi} + \frac{1}{P_r R_e} \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + S_h \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) \end{aligned} \right. \quad (\text{A.7})$$

avec

$$\bar{\chi} = \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left[ \frac{1}{2} \bar{\rho} (\bar{u}^2 + \bar{\delta}_v^2 \bar{v}^2) \right] + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[ \frac{1}{2} (\bar{u}^2 + \bar{\delta}_v^2 \bar{v}^2) \bar{\rho} \bar{u} \right] + S_h \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left[ \frac{1}{2} (\bar{u}^2 + \bar{\delta}_v^2 \bar{v}^2) \bar{\rho} \bar{v} \right]$$

$\bar{\varphi}$  la fonction de dissipation :

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{R_e} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[ \frac{4}{3} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} - \frac{2}{3} S_h \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \bar{\delta}_v^2 \left( \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \right] + S_h \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left[ \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{2}{3} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{4}{3} S_h \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right] \right)$$

et les équations d'état :

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \bar{\rho} \bar{T} \\ \bar{e} &= \bar{T} \end{aligned}$$

On retrouve les mêmes nombres sans dimension ( $R_e$ ,  $P_r$ ) que dans la couche limite et le "shear number" défini précédemment.

## A.5 Simplification des équations

Nous allons chercher maintenant à simplifier les équations dans les deux zones considérées.

Pour cela, donnons un ordre de grandeur des nombres sans dimension que l'on a fait apparaître.

### A.5.1 Hypothèses

- Le nombre de Reynolds est grand ( $R_e \gg 1$ ). On peut alors montrer que l'épaisseur de couche limite visqueuse  $\delta_v$  est de l'ordre de  $\frac{L}{\sqrt{R_e}}$  [1], soit :

$$\bar{\delta}_v \approx \frac{1}{\sqrt{R_e}} \quad \text{avec} \quad \bar{\delta}_v \ll 1 \quad (\text{A.8})$$

- Le nombre de Prandtl est d'ordre 1 (pour l'air,  $P_r \approx 0.72$ ). De plus, on peut montrer [1] que dans le cas où les couches limites thermiques et visqueuses ont même origine, le Prandtl vérifie :

$$P_r \approx \frac{\delta_v^2}{\delta_T^2} \quad (\text{A.9})$$

soit  $\bar{\delta}_T \approx \bar{\delta}_v \ll 1$

- On peut distinguer deux cas extrêmes pour le "shear number".  
Le cas  $S_h \geq 1$ , l'épaisseur de couche limite est de l'ordre de la demi épaisseur de la conduite (la couche limite s'établit sur la section complète du tuyau) ou plus grande et  $S_h \ll 1$ , c'est le cas (que nous traiterons) où l'épaisseur de couche limite est très petite devant la demi-épaisseur de la conduite.

### A.5.2 Approximations dans la couche limite

Nous allons maintenant négliger les termes d'ordre 2 et plus en  $\bar{\delta}_v$  (ou  $\bar{\delta}_T$ ) dans les équations.

On obtient alors les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{v}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + O\left(\frac{1}{R_e}\right) \\ \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}^2}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y} + O\left(\frac{1}{R_e}\right) \\ \frac{1}{(\gamma-1)} \left( \frac{\partial \bar{p} \bar{e}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{e}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v} \bar{e}}{\partial y} \right) + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}}{\partial y} + \bar{\chi} = \bar{\varphi} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} + O\left(\frac{1}{R_e}\right) \end{array} \right. \quad (\text{A.10})$$

avec  $\bar{\chi} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} \bar{\rho} \bar{u}^2 \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2} \bar{u}^2 \bar{\rho} \bar{u} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{2} \bar{u}^2 \bar{\rho} \bar{v} \right]$

et la fonction de dissipation qui se réduit à :

$$\bar{\varphi} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{4}{3} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right]$$

On remarque que l'équation de l'impulsion transverse ne fait intervenir que des termes

d'ordre 1 ou plus en  $\frac{1}{\sqrt{Re}}$ . Le gradient de pression est petit mais pas nécessairement négligeable au premier abord.

En raisonnant sur son ordre de grandeur déterminé précédemment,

$$\partial_y p \approx \frac{\rho_a v_{cl}^2}{\delta_v} = \frac{\rho_a u_a^2 \overline{\delta_v}^2}{\delta_v} \approx \frac{(\Delta p)_y}{\delta_v}$$

Nous obtenons ainsi  $(\Delta p)_y$  l'ordre de grandeur des variations transverses de la pression dans la couche limite en fonction de  $\Delta p = \rho_a u_a^2$  l'ordre de grandeur des variations longitudinales:

$$(\Delta p)_y = \frac{1}{Re} \Delta p$$

Les variations transversales de la pression sont donc négligeables au regard des variations longitudinales et la pression peut donc être considérée **uniforme** suivant l'épaisseur et égale à la pression à la frontière de la couche limite.

En revenant aux variables dimensionnées, on obtient les **équations conservatives de couche limite** :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) + \partial_y(\rho v) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) + \partial_y(\rho uv) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho uv) + \partial_y(\rho v^2) = -\partial_y p + \mu \left( \frac{4}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \\ \partial_t(\rho E) + \partial_x[(\rho E u + p u)] + \partial_y[(\rho E v + p v)] = \frac{4}{3} \mu \frac{\partial}{\partial y} \left[ u \frac{\partial u}{\partial y} \right] + K \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{array} \right. \quad (\text{A.11})$$

avec l'énergie totale simplifiée:  $\rho E = \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e$

L'équation de conservation de la masse n'a pas été modifiée.

Dans l'équation de l'impulsion longitudinale, on néglige les termes de diffusion longitudinale pour ne conserver que la diffusion suivant l'épaisseur ( $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ).

Dans le bilan de l'énergie, on néglige l'énergie cinétique associée à la vitesse transversale  $v$  (énergie totale simplifiée), les termes longitudinaux pour la production de température par friction (fonction de dissipation simplifiée) et la conduction thermique longitudinale ( $K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ ).

Les relations thermodynamiques ne sont pas modifiées.

### A.5.3 Approximations dans l'écoulement principal ( $S_h \ll 1$ )

On effectue les mêmes approximations dans l'écoulement principal (termes en  $\overline{\delta_v}^2$  négligés) et on néglige les termes du second ordre en  $S_h$ .

Les équations adimensionnées s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{\rho u}}{\partial \bar{x}} + S_h \frac{\partial \bar{\rho v}}{\partial \bar{y}} = 0 \\ \frac{\partial \bar{\rho u}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{\rho u^2}}{\partial \bar{x}} + S_h \frac{\partial \bar{\rho uv}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + O\left(\frac{1}{Re}\right) \\ \left( \frac{\partial \bar{\rho v}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{\rho uv}}{\partial \bar{x}} + S_h \frac{\partial \bar{\rho v^2}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + O\left(\frac{1}{Re}, S_h^2\right) \right) \\ \frac{1}{(\gamma-1)} \left( \frac{\partial \bar{\rho e}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{\rho u e}}{\partial \bar{x}} + S_h \frac{\partial \bar{\rho v e}}{\partial \bar{y}} \right) + \frac{\partial \bar{\rho u}}{\partial \bar{x}} + S_h \frac{\partial \bar{\rho v}}{\partial \bar{y}} + \bar{\chi} = O\left(\frac{1}{Re}, S_h^2\right) \end{array} \right. \quad (A.12)$$

avec pour l'énergie cinétique

$$\bar{\chi} = \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left[ \frac{1}{2} \bar{\rho u^2} \right] + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[ \frac{1}{2} \bar{u^2} \bar{\rho u} \right] + S_h \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left[ \frac{1}{2} \bar{u^2} \bar{\rho v} \right]$$

Comme dans la couche limite, l'équation de l'impulsion transverse ne fait intervenir que des termes petits mais non négligeables à cet ordre d'approximation. Ainsi, le gradient transverse de pression n'est pas nécessairement nul.

En revenant aux variables dimensionnées, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) + \partial_y(\rho v) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) + \partial_y(\rho uv) = -\partial_x p \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho uv) + \partial_y(\rho v^2) = -\partial_y p \\ \partial_t(\rho E) + \partial_x[(\rho E u + p u)] + \partial_y[(\rho E v + p v)] = 0 \end{array} \right. \quad (A.13)$$

avec l'énergie totale simplifiée :  $\rho E = \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e$

Tous les termes relatifs à la diffusion visqueuse et à la conduction thermique ont disparus. On obtient ainsi pour l'écoulement principal **les équations d'Euler bidimensionnelles**, c'est à dire les équations de conservation pour un fluide parfait, à une différence près, l'énergie cinétique associée à la composante transverse est négligeable.

Remarques :

- A cet ordre d'approximation, rien ne permet d'affirmer que l'écoulement principal est monodimensionnel.
- Par contre, nous avons vu que les variables  $W$  caractéristiques de l'écoulement principal (pression, vitesse longitudinale, densité, température) vérifient :

$$\partial_y W = \frac{\delta_y^2}{S_h} \frac{\Delta W}{h} = \frac{1}{Re S_h} \frac{\Delta W}{h} = \frac{(\Delta W)_y}{h}$$

L'ordre de grandeur  $(\Delta W)_y$  des variations transverses des quantités  $W$  dans le flux principal vérifie donc :

$$(\Delta W)_y = \frac{1}{Re S_h} \Delta W$$

avec  $\Delta W$  l'ordre de grandeur des variations longitudinales.

En supposant que  $\frac{1}{ReSh} \ll 1$ , nous pouvons négliger les variations transverses de  $W$  devant ses variations longitudinales et l'écoulement principal peut être considéré quasi-uniforme suivant l'épaisseur.





---

## Annexe B

# Intégration des équations de propagation

Dans cette annexe se reportant au paragraphe 3.2 (chapitre 3), nous présentons les détails des calculs relatifs à la détermination des équations de propagation par intégration des équations de conservation simplifiées sur la section du tuyau.

### B.1 Intégration de la masse

On va intégrer l'équation de la masse sur la base des hypothèses précédentes en prenant comme surface d'intégration la portion de conduit décrite par la figure 3.2 du paragraphe 3.2.

- **Intégrale de surface** ( $\int_S \partial_t \rho dS$ )

$$\begin{aligned} \Rightarrow d_t \left[ \int_x^{x+\Delta x} (S_h \int_0^1 \rho dy + \int_{S_h}^1 \rho_e dy_e) dx \right] &= \Delta x d_t \left[ (1 - S_h) \rho_e + S_h \int_0^1 \rho dy \right] \\ &= \Delta x d_t \left[ \rho_e - S_h \int_0^1 (\rho_e - \rho) dy \right] \end{aligned}$$

• **Termes de flux (intégrales de contour**  $(\int_{\partial S} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} d(\partial S))$ )

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow (1 + M) \left( \left[ S_h \int_0^1 \rho u dy + \int_{S_h}^1 \rho_e u_e dy_e \right]_x^{x+\Delta x} + \int_x^{x+\Delta x} \rho_e u_e \sin \theta dx \right) \\
 &= (1 + M) \left( \left[ S_h \int_0^1 \rho u dy + (1 - S_h) \rho_e u_e \right]_x^{x+\Delta x} + \sin \theta \Delta x \rho_e u_e \right) \\
 &= \Delta x (1 + M) \left( \frac{1}{\Delta x} \left[ \rho_e u_e - S_h \int_0^1 (\rho_e u_e - \rho u) dy \right]_x^{x+\Delta x} + \rho_e u_e \sin \theta \right)
 \end{aligned}$$

En simplifiant par  $\Delta x$ , en faisant tendre  $\Delta x$  vers 0 et négligeant le terme  $\rho_e u_e \sin \theta$  on obtient pour la conservation de la masse l'équation intégro-différentielle adimensionnée suivante :

$$\begin{aligned}
 \partial_t \left[ \rho_e - S_h \int_0^1 (\rho_e - \rho) dy \right] + (1 + M) \partial_x \left[ \rho_e u_e - S_h \int_0^1 (\rho_e u_e - \rho u) dy \right] \\
 = O \left( \frac{1}{Re S_h}, \sin \theta, M \sin \theta, \varepsilon \right)
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

où l'on a fait apparaître les défauts de masse et de débit masse respectivement :  $\int_0^1 (\rho_e - \rho) dy$  et  $\int_0^1 (\rho_e u_e - \rho u) dy$ .

## B.2 Intégration de l'impulsion

On va considérer l'équation de conservation de l'impulsion suivant l'axe des x.

• **Intégrales de surface**  $(\int_S \partial_t \rho u dS)$

$$\Rightarrow \Delta x d_t \left[ (1 - S_h) \rho_e u_e + S_h \int_0^1 \rho u dy \right] = \Delta x d_t \left[ \rho_e u_e - S_h \int_0^1 (\rho_e u_e - \rho u) dy \right]$$

• **Termes de flux** ( $\int_{\partial S} \rho u(u,n)d(\partial S)$ )

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow M \left( \left[ S_h \int_0^1 h \rho u^2 dy + \int_{S_h}^1 \rho_e u_e^2 dy \right]_x^{x+\Delta x} + \int_x^{x+\Delta x} \rho_e u_e^2 \sin \theta dx \right) \\
 &= M \left( \left[ S_h \int_0^1 h \rho u^2 dy + (1 - S_h) \rho_e u_e^2 \right]_x^{x+\Delta x} + \sin \theta \Delta x \rho_e u_e^2 \right) \\
 &= \Delta x M \left( \frac{1}{\Delta x} \left[ \rho_e u_e^2 - S_h \int_0^1 (\rho_e u_e^2 - \rho u^2) dy \right]_x^{x+\Delta x} + \rho_e u_e^2 \sin \theta \right)
 \end{aligned}$$

• **Intégration des contraintes** ( $\int_S \left( -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dS$ )

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \int_x^{x+\Delta x} \left[ S_h \int_0^1 \left( -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dy - \int_{S_h}^1 \frac{\partial p_e}{\partial x} dy_e \right] dx \\
 &= \int_x^{x+\Delta x} \left[ -S_h (\partial_x p + [\partial_y u]_0^1) - \partial_x p_e (1 - S_h) \right] dx \\
 &= \int_x^{x+\Delta x} \left[ -\partial_x p_e + S_h (\partial_x p_e - \partial_x p) \right] dx - \Delta x S_h \partial_y u|_{y=0} \\
 &= \Delta x \left( -\frac{1}{\Delta x} [p_e]_x^{x+\Delta x} - S_h \partial_y u|_{y=0} \right)
 \end{aligned}$$

En faisant tendre  $\Delta x$  vers 0 et en négligeant les termes en  $\sin \theta$ , on obtient pour la conservation de l'impulsion l'équation intégro-différentielle suivante :

$$\begin{aligned}
 &(1 + M) \partial_t \left[ \rho_e u_e - S_h \int_0^1 (\rho_e u_e - \rho u) dy \right] \\
 &\quad + \\
 &M(1 + M) \partial_x \left[ \rho_e u_e^2 - S_h \int_0^1 (\rho_e u_e^2 - \rho u^2) dy \right] \\
 &\quad = \\
 &-\partial_x p_e - S_h \partial_y u|_{y=0} + O \left( \frac{1}{Re S_h}, M \sin \theta, \varepsilon \right)
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

où l'on a fait apparaître le défaut de débit de quantité de mouvement dans la couche limite  $\int_0^1 (\rho_e u_e^2 - \rho u^2) dy$  et la contrainte visqueuse à la paroi  $\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}$ .

## B.3 Intégration de l'énergie

### • Intégration de l'énergie interne et des flux correspondants

Intégrale de surface ( $\int_S \partial_t(\rho e) dS$ )

$$\Rightarrow d_t \left[ \int_x^{x+\Delta x} \left( S_h \int_0^1 \rho e dy + \int_{S_h}^1 \rho_e e_e dy_e \right) dx \right] = \Delta x d_t \left[ \rho_e e_e - S_h \int_0^1 (\rho_e e_e - \rho e) dy \right]$$

Termes de flux (intégrales de contour:  $\int_{\partial S} \rho e \vec{u} \cdot \vec{n} d(\partial S)$ )

$$\begin{aligned} \Rightarrow (1+M) & \left( \left[ S_h \int_0^1 \rho e u dy + \int_{S_h}^1 \rho_e e_e u_e dy_e \right]_x^{x+\Delta x} + \int_x^{x+\Delta x} \rho_e e_e u_e \sin \theta dx \right) \\ = \Delta x (1+M) & \left( \frac{1}{\Delta x} \left[ \rho_e e_e u_e - S_h \int_0^1 (\rho_e e_e u_e - \rho e u) dy \right]_x^{x+\Delta x} + \rho_e e_e u_e \sin \theta \right) \end{aligned}$$

avec les défauts d'énergie interne et de flux d'énergie interne :  
 $\int_0^1 (\rho_e e_e - \rho e) dy$  et  $\int_0^1 (\rho_e e_e u_e - \rho e u) dy$ .

### • Intégration de l'énergie cinétique et des flux correspondants

Intégrale de surface ( $\int_S \partial_t(\frac{1}{2}\rho u^2) dS$ )

$$\begin{aligned} \Rightarrow d_t & \left[ \int_x^{x+\Delta x} \left( S_h \int_0^1 \frac{1}{2} \rho u^2 dy + \int_{S_h}^1 \frac{1}{2} \rho_e u_e^2 dy_e \right) dx \right] \\ = \Delta x d_t & \left[ \frac{1}{2} \rho_e u_e^2 - S_h \int_0^1 \frac{1}{2} (\rho_e u_e^2 - \rho u^2) dy \right] \end{aligned}$$

Flux d'énergie cinétique ( $\int_{\partial S} \frac{1}{2} \rho u^2 (u, n) d(\partial S)$ )

$$\begin{aligned} \Rightarrow M & \left( \left[ S_h \int_0^1 \frac{1}{2} \rho u^3 dy + \int_{S_h}^1 \frac{1}{2} \rho_e u_e^3 dy_e \right]_x^{x+\Delta x} + \int_x^{x+\Delta x} \frac{1}{2} \rho_e u_e^3 \sin \theta dx \right) \\ = \Delta x M & \left( \frac{1}{\Delta x} \left[ \left( \frac{1}{2} \rho_e u_e^3 - S_h \int_0^1 \frac{1}{2} (\rho_e u_e^3 - \rho u^3) dy \right) \right]_x^{x+\Delta x} + \frac{1}{2} \rho_e u_e^3 \sin \theta \right) \end{aligned}$$

avec les défauts d'énergie cinétique et de flux d'énergie cinétique :  
 $\int_0^1 \frac{1}{2} (\rho_e u_e^2 - \rho u^2) dy$  et  $\int_0^1 \frac{1}{2} (\rho_e u_e^3 - \rho u^3) dy$

• **Intégration du travail de la pression sur le contour** ( $\int_{\partial S} p\vec{u} \cdot \vec{n} d(\partial S)$ )

$$\begin{aligned} \Rightarrow & (1 + M) \left( \left[ S_h \int_0^1 p u dy + \int_{S_h} p_e u_e dy_e \right]_x^{x+\Delta x} + \int_x^{x+\Delta x} p_e u_e \sin\theta dx \right) \\ = & \Delta x (1 + M) \left( \frac{1}{\Delta x} \left[ p_e u_e - S_h \int_0^1 (p_e u_e - p u) dy \right]_x^{x+\Delta x} + p_e u_e \sin\theta \right) \end{aligned}$$

où on a fait apparaître le défaut de travail de la contrainte de pression  $\int_0^1 (p_e u_e - p u) dy$  que l'on simplifie (la pression étant uniforme suivant l'épaisseur) :

$$\int_0^1 (p_e u_e - p u) dy = p_e \int_0^1 (u_e - u) dy + O\left(\frac{1}{Re}\right)$$

• **Intégration de la fonction de dissipation** ( $\int_S \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{4}{3} u \frac{\partial u}{\partial y} \right] dS$ )

Ce terme ne donne aucune contribution car  $u = 0$  à la paroi et  $\partial_y u \approx 0$  à la frontière de la couche limite.

$$\Rightarrow -\frac{4}{3} S_h \left[ u \frac{\partial u}{\partial y} \right]_0^1 = 0$$

• **Intégration de la conduction thermique** ( $\int_S \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dS$ )

où l'on voit apparaître le flux de chaleur pariétal :

$$\Rightarrow -S_h \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$$

On obtient finalement l'équation intégro-différentielle suivante pour l'énergie :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\gamma-1} \partial_t \left[ \rho_e e_e - S_h \int_0^1 (\rho_e e_e - \rho e) dy \right] \\ & + \\ & \frac{1}{\gamma-1} (1 + M) \partial_x \left[ \rho_e e_e u_e - S_h \int_0^1 (\rho_e e_e u_e - \rho e u) dy \right] \\ & + \\ & (1 + M) \partial_x \left[ p_e u_e - S_h p_e \int_0^1 (u_e - u) dy \right] \\ & + \\ & M(1 + M) \partial_t \left[ \frac{1}{2} \rho_e u_e^2 - S_h \int_0^1 \frac{1}{2} (\rho_e u_e^2 - \rho u^2) dy \right] \\ & + \\ & M^2(1 + M) \partial_x \left[ \frac{1}{2} \rho_e u_e^3 - S_h \int_0^1 \frac{1}{2} (\rho_e u_e^3 - \rho u^3) dy \right] \\ & = -S_h \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} + O\left(\frac{1}{Re S_h}, \sin\theta, M \sin\theta \dots\right) \end{aligned} \tag{B.3}$$



---

# Annexe C

## Détermination des profils

### Détermination des profils de vitesse et de température

Le calcul des profils de vitesse et de température nécessite la résolution d'équations de diffusion, du type :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - k^{-1} \frac{\partial W}{\partial t} = F(t)$$

avec les conditions limites :

$$\left| \begin{array}{l} W|_{y=0} = 0 \\ W|_{y=\delta} = W_e \end{array} \right.$$

Mais dans notre cas, la borne supérieure du domaine est l'épaisseur de couche limite qui dépend de la solution de cette équation, le problème est donc mal posé. En fait, l'épaisseur de couche limite est déduite de la connaissance du profil de vitesse ou de température. On va donc supposer que déterminer le profil dans la couche limite revient à le déterminer sur la demi-épaisseur complète et par extension résoudre le problème semi-infini suivant :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - k^{-1} \frac{\partial W}{\partial t} = F(t) \tag{C.1}$$

avec

$$\left| \begin{array}{l} W|_{y=0} = 0 \\ W|_{y \rightarrow \infty} = W_\infty \end{array} \right. \tag{C.2}$$

Pour résoudre le problème semi-infini précédent, on peut utiliser la formalisme de Green [2], soit la fonction de Green :

$$G(y, t | y_0, t_0) = 0 \text{ si } t < t_0$$

où  $y_0$  et  $t_0$  désignent respectivement la position en espace et en temps d'une source ponctuelle impulsionnelle. On peut alors montrer [2] que la fonction de Green vérifie :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial y_0^2} + k^{-1} \frac{\partial G}{\partial t_0} = -\delta(y - y_0)\delta(t - t_0) \tag{C.3}$$

avec les conditions limites

$$\begin{cases} G|_{y_0=0} = 0 \\ G|_{y_0 \rightarrow \infty} = 0 \\ G|_{t_0 \rightarrow t^+} = 0 \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

associé à

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y_0^2} - k^{-1} \frac{\partial W}{\partial t_0} = F(t_0) \quad (\text{C.5})$$

avec les conditions limites et initiales

$$\begin{cases} W|_{y_0=0} = 0 \\ W|_{y_0 \rightarrow \infty} = W_\infty \\ W|_{t_0=0} = 0 \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

pour la variable  $W(y_0, t_0)$ .

$G$  est déterminée à partir de la fonction de Green du problème infini  $G_\infty$  par la méthode des sources-images [2].

Ainsi à partir de :

$$G_\infty(y, t | y_0, t_0) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{\pi(t-t_0)}} e^{-\frac{(y-y_0)^2}{4k(t-t_0)}}$$

on déduit :

$$G(y, t | y_0, t_0) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{\pi(t-t_0)}} \left( e^{-\frac{(y-y_0)^2}{4k(t-t_0)}} - e^{-\frac{(y+y_0)^2}{4k(t-t_0)}} \right)$$

En multipliant l'équation C.3 par  $W$  et l'équation C.5 par  $G$ , en soustrayant les deux équations et en intégrant en temps et en espace, on obtient :

$$\begin{aligned} W(y, t) = & \int_0^{t^+} \int_0^\infty \left( G \frac{\partial^2 W}{\partial y_0^2} - W \frac{\partial^2 G}{\partial y_0^2} \right) dy_0 dt_0 - \frac{1}{k} \int_0^{t^+} \int_0^\infty \left( G \frac{\partial W}{\partial t_0} + W \frac{\partial G}{\partial t_0} \right) dt_0 dy_0 \\ & - \int_0^{t^+} \int_0^\infty F G dt_0 dy_0 \end{aligned}$$

Par intégration par parties et en appliquant les conditions limites et initiales, on vérifie que :

$$\int_0^{t^+} \left( G \frac{\partial W}{\partial t_0} + W \frac{\partial G}{\partial t_0} \right) dt_0 = [GW]_0^{t^+} = 0$$

et

$$\int_0^\infty \left( G \frac{\partial^2 W}{\partial y_0^2} - W \frac{\partial^2 G}{\partial y_0^2} \right) dy_0 = - \left[ W \frac{\partial G}{\partial y_0} \right]_0^\infty = 0$$

avec

$$\partial_{y_0} G|_{y_0 \rightarrow \infty} = 0$$

soit

$$W(y, t) = - \int_0^{t^+} F \left[ \int_0^\infty G dy_0 \right] dt_0$$



avec

$$\int_0^\infty G dy_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{\pi(t-t_0)}} \int_0^\infty \left( e^{-\frac{(y-y_0)^2}{4k(t-t_0)}} - e^{-\frac{(y+y_0)^2}{4k(t-t_0)}} \right) dy_0$$

avec le changement de variable  $\sigma = \frac{y \pm y_0}{\sqrt{4k(t-t_0)}}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty G dy_0 &= \frac{k}{\sqrt{\pi}} \left[ \int_{\frac{-y}{\sqrt{4k(t-t_0)}}}^\infty e^{-\sigma^2} d\sigma - \int_{\frac{y}{\sqrt{4k(t-t_0)}}}^\infty e^{-\sigma^2} d\sigma \right] = k \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{y}{\sqrt{4k(t-t_0)}}} e^{-\sigma^2} d\sigma \\ &= k \operatorname{erf} \left( \frac{y}{\sqrt{4k(t-t_0)}} \right) \end{aligned}$$

Soit finalement :

$$W(y,t) = -k \int_0^t F(t_0) \operatorname{erf} \left( \frac{y}{\sqrt{4k(t-t_0)}} \right) dt_0 \quad (\text{C.7})$$

La solution est donc classiquement obtenue par convolution de la source avec la fonction erf.

La solution vérifie bien la condition de grandeur nulle à la paroi.

On peut déterminer le gradient pariétal :

$$\begin{aligned} \partial_y W|_{y=0} &= -k \int_0^t F(t_0) \partial_y \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{y}{\sqrt{4k(t-t_0)}} \right) \right]_{y=0} dt_0 \\ &= -k \int_0^t F(t_0) \left[ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{4k(t-t_0)}} e^{-\frac{y^2}{4k(t-t_0)}} \right]_{y=0} dt_0 \\ &= - \int_0^t F(t_0) \sqrt{\frac{k}{\pi(t-t_0)}} dt_0 \end{aligned}$$

soit

$$\partial_y W|_{y=0} = - \int_0^t F(t-\tau) \sqrt{\frac{k}{\pi\tau}} d\tau \quad (\text{C.8})$$

et la limite à l'infini pour les dérivées premières et secondes :

$$\begin{aligned} \partial_y W|_{y \rightarrow \infty} &= - \int_0^{t^+} F \left[ \int_0^\infty \partial_y G|_{y \rightarrow \infty} dy_0 \right] dt_0 = 0 \\ \partial_{yy}^2 W|_{y \rightarrow \infty} &= - \int_0^{t^+} F \left[ \int_0^\infty \partial_{yy}^2 G|_{y \rightarrow \infty} dy_0 \right] dt_0 = 0 \end{aligned}$$

A l'infini, le champs suivant  $y$  de  $W$  est donc uniforme.

On applique maintenant ces résultats aux champs de vitesse et de température du système

couplé 3.30.

Soit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_0^2} - \nu_0^{-1} \frac{\partial u}{\partial t_0} = \frac{1}{\mu} \partial_x p_e$$

avec les conditions limites et initiales

$$\left| \begin{array}{l} u|_{y_0=0} = 0 \\ u|_{y_0 \rightarrow \infty} = u_\infty \\ u|_{t_0=0} = 0 \end{array} \right.$$

On a éliminé (comme dans les équations de propagation) le problème de la détermination de l'épaisseur de couche limite. La condition à l'infini sur la vitesse respecte le raccord avec le flux principal  $u_\infty$  désignant le premier ordre de la vitesse dans le flux principal mais on vérifie que le couplage intervient par le terme source (lié à la pression). On doit par contre s'assurer que la solution calculée vérifie bien  $\delta \ll h$ . On dispose pour cela de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de couche limite dans le domaine fréquentiel.

On obtient alors pour le profil de vitesse

$$u(y,t) = - \int_0^t \frac{1}{\rho_0} \partial_x p_e(t_0) \operatorname{erf} \left( \frac{y}{\sqrt{4\nu_0(t-t_0)}} \right) dt_0 \quad (\text{C.9})$$

et pour la contrainte pariétale :

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = - \int_0^t \partial_x p_e(t-\tau) \sqrt{\frac{\nu_0}{\pi\tau}} d\tau \quad (\text{C.10})$$

et

$$\frac{\partial^2 (T - T_0)}{\partial y_0^2} - a_0^{-1} \frac{\partial (T - T_0)}{\partial t_0} = - \frac{1}{K} \frac{\partial p_e}{\partial t_0}$$

avec les conditions limites et initiales

$$\left| \begin{array}{l} (T - T_0)|_{y_0=0} = 0 \\ (T - T_0)|_{y_0 \rightarrow \infty} = T_\infty \\ (T - T_0)|_{t_0=0} = 0 \end{array} \right.$$

qui donne

$$T(y,t) - T_0 = \frac{1}{\rho_0 c_p} \int_0^t \partial_{t_0} p_e \operatorname{erf} \left( \frac{y}{\sqrt{4a_0(t-t_0)}} \right) dt_0 \quad (\text{C.11})$$

et pour le flux de chaleur à la paroi :

$$K \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \int_0^t \partial_\tau p_e(\tau) \sqrt{\frac{a_0}{\pi(t-\tau)}} d\tau \quad (\text{C.12})$$

---

## Annexe D

# Vecteurs propres de la matrice de Riemann

Nous avons vu dans le chapitre 4 que le traitement des conditions limites du code Euler s'appuie sur le formalisme modal appliqué aux équations d'Euler linéarisées 4.1.5.

### D.1 Equations linéarisées

Les équations d'Euler linéarisées s'écrivent sous forme compacte:

$$\partial_t \delta W + \partial_x g(\delta W) = 0$$

avec  $g(\delta W) = \partial_{\delta W} G(W_0) \delta W$

la solution de référence  $W_0 = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ \rho_0 u_0 \\ \rho_0 E_0 \end{pmatrix}$ , et le vecteur solution  $\delta W = \begin{pmatrix} \delta \rho \\ \delta(\rho u) \\ \delta(\rho E) \end{pmatrix}$

et la matrice de Riemann

$$\partial_W G(W_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (\frac{\gamma-3}{2}) \frac{W_{01}^2}{W_{00}^2} & (3-\gamma) \frac{W_{01}}{W_{00}} & (\gamma-1) \\ ((\gamma-1) \frac{W_{01}^3}{W_{00}^3} - \gamma \frac{W_{01} W_{02}}{W_{00}^2}) & (\frac{3}{2}(1-\gamma) \frac{W_{01}^2}{W_{00}^2} + \gamma \frac{W_{02}}{W_{00}}) & \gamma \frac{W_{02}}{W_{00}} \end{pmatrix}$$

### D.2 Vecteurs et valeurs propres de la matrice de Riemann

Nous devons utiliser les vecteurs propres  $\Phi$  de la matrice de Riemann et les vecteurs propres  $\Phi^*$  de la matrice transposée.

Pour l'onde acoustique se propageant dans le sens des  $x > 0$ :  
la valeur propre  $\lambda_1 = u_0 + c_0$ ,

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2c_0} \\ \frac{u_0 + c_0}{2c_0} \\ \frac{1}{2c_0} \left( \frac{u_0^2}{2} + \frac{c_0^2}{\gamma-1} + c_0 u_0 \right) \end{pmatrix}, \quad \Phi_1^* = \begin{pmatrix} \frac{(\gamma-1)u_0^2}{2c_0} - u_0 \\ 1 - \frac{(\gamma-1)u_0}{c_0} \\ \frac{\gamma-1}{c_0} \end{pmatrix}$$

Pour la composante d'écoulement:

la valeur propre  $\lambda_2 = u_0$ ,

$$\Phi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ u_0 \\ \frac{u_0^2}{2} \end{pmatrix}, \quad \Phi_2^* = \begin{pmatrix} 1 - \frac{(\gamma-1)u_0}{2c_0^2} \\ \frac{(\gamma-1)u_0}{c_0^2} \\ -\frac{\gamma-1}{c_0^2} \end{pmatrix}$$

Pour l'onde acoustique se propageant dans le sens des  $x < 0$ :

la valeur propre  $\lambda_3 = u_0 - c_0$ ,

$$\Phi_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2c_0} \\ \frac{u_0 - c_0}{2c_0} \\ \frac{1}{2c_0} \left( \frac{u_0^2}{2} + \frac{c_0^2}{\gamma-1} - c_0 u_0 \right) \end{pmatrix}, \quad \Phi_3^* = \begin{pmatrix} \frac{(\gamma-1)u_0^2}{2c_0} + u_0 \\ -1 - \frac{(\gamma-1)u_0}{c_0} \\ \frac{\gamma-1}{c_0} \end{pmatrix}$$

# Bibliographie

- [1] Schlichting H. *Boundary-Layer Theory*. McGraw-Hill Ed., 1968.
- [2] P. Morse and H. Feshbach. *Methods of Theoretical Physics*. McGraw-Hill, New-York, 1953.

# Résumé

Pour de forts niveaux de jeu, le trombone produit un timbre typique brillant dit “cuivré” du à un enrichissement des composantes aigues du spectre. Dans cette étude, nous montrons que ce phénomène peut s’expliquer essentiellement par l’apparition d’importants effets non-linéaires de propagation acoustique qui entraînent la distorsion des ondes se propageant à l’intérieur de l’instrument. Ces effets se cumulant sur la distance peuvent provoquer la formation d’ondes de choc comme nous l’avons vérifié expérimentalement.

Afin d’étudier et de modéliser ce phénomène, nous rappelons les principes de la propagation acoustique linéaire dans les tuyaux puis ceux de la propagation non-linéaire. Ensuite, nous appuyant sur une analyse dimensionnelle, nous intégrons des équations quasi-monodimensionnelles prenant en compte les effets non-linéaires de propagation et les effets viscothermiques de couche limite, nous rapprochant ainsi du problème aérodynamique du couplage des équations de fluide parfait et de couche limite. Enfin, nous discutons la validité générale des approximations faites puis leur application au trombone.

La formulation mathématique choisie se prête à la résolution numérique. Nous appuyant sur un schéma de résolution classique, nous élaborons un outil de simulation à même de reproduire des cas classiques de la propagation linéaire dans les conduits et de la propagation non-linéaire. Appliqué à la propagation à forte amplitude dans la coulisse du trombone, nous vérifions que la déformation des ondes est essentiellement imputable à la combinaison des pertes visco-thermiques aux parois et de la distorsion non-linéaire.

A partir des résultats expérimentaux, numériques et d’hypothèses simplificatrices, nous proposons et comparons deux modèles physiques simples pour la synthèse sonore incluant la distorsion non-linéaire de propagation et un modèle basique de lèvres. Ces modèles auto-oscillants permettent de reproduire des sons de trombone réalistes dont le timbre varie avec l’amplitude, en particulier le timbre “cuivré” à forte amplitude.