Formation doctorale Musique et Musicologie du XX^e si cle

Universit Paris-Sorbonne (Paris IV)
Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales

Moreno ANDREATTA

MEMOIRE pour l'obtention du Dipl me d'Etudes Approfondies

LA THEORIE MATHEMATIQUE DE LA MUSIQUE DE GUERINO MAZZOLA ET LES CANONS RYTHMIQUES

Sous la direction de Hugues Dufourt et Marc Chemillier

Suivi de la traduction d'une partie de l'appendice de
MAZZOLA Guerino, *Geometrie der T ne* , Basel, Birkh user Verlag, 1990

15 juin 1999

Je tiens remercier les professeurs Hugues Dufourt et Marc Battier pour m avoir donn la possibilit de travailler sur un double sujet (la Th orie Math matique de la Musique de Guerino Mazzola et le mod le des canons rythmiques de Dan Tudor Vuza) qui trouve une premi re possibilit de rencontre l int rieur d une r flexion alg brique sur les liens entre musiques et math matiques.

Je remercie sinc rement mon co-directeur de recherche Marc Chemillier, qui a accept de suivre mon travail. Je lui suis tr s reconnaissant de m avoir propos de participer plusieurs initiatives qui ont beaucoup influenc la r daction de cette tude.

Je remercie l Equipe de Repr sentations Musicales de l IRCAM peur son soutien la fois professionnel et amical. Merci G rard Assayag de m avoir permis de pr senter une premier partie des r sultats obtenus dans le cadre des s minaires de recherche. Je ne saurais trop remercier Carlos Agon tout d abord pour m avoir introduit dans l univers d' *OpenMusic*, d'o l nous sommes sortis ensemble en compagnie des canons rythmiques, mais aussi pour tout son aide dans les difficult s quotidiennes de mon premier s jour parisien.

Tous mes remerciements galement Guerino Mazzola qui a accept de nous pr senter l IRCAM, en un peu plus de deux heures, vingt ann es des recherches dans le domaine des rapports entre musiques et math matiques.

J exprime ma plus sinc re gratitude Fabien Levy pour les critiques s v res mais toujours encourageantes sur les aspects non seulement formels d un travail qui, sans son intervention, aurait difficilement pu voir le jour.

Je remercie aussi, pour leur relecture patiente, tous mes amis, en particulier Edoardo Acotto, qui a bien accept de mettre l g rement de cot ses recherches philosophiques pour s int resser la tradition am ricaine des ensembles et Stephen Schaub, avec qui je partage la curiosit pour une r apparition des Mammouths sur le terrain, cette fois, de la musique.

Je remercie le gouvernement fran ais pour l attribution d une bourse trimestrielle et l *Associazione Alunni* du Collegio Ghislieri de Pavie pour m avoir permis de b n ficier, pour la p riode restante, de sa bourse, ce qui a rendu aussi extr mement agr able mon s jour Paris.

Merci enfin Marella, dont la patience a permis toujours d aller au-del des apparences.

A Dan Tudor Vuza

TABLE DES MATIERES

- INTRODUCTION 1

- Chapitre 1. *MaMuTh* ou la Th orie Math matique de la Musique **4**

1.1 Avant-Propos **4**

1.2 Contexte historique **5**

- Structures alg briques dans les math matiques et la musique 5
- Groupes et musique 7
- Exemple d'une formalisation alg brique d'une proposition th orique 9
- La tradition am ricaine 12
- Deux exemples de formalisation alg brique de la transposition musicale 18

1.3 Formes locales/globales dans le concept de ˙ vari t musicale ¨ **22**

- L'esth tique musicale de Edouard Hanslick et la
- g om trie diff rentielle de Bernhard Riemann 22
- Propri t s intrins ques et
- propri t s extrins ques de la forme musicale 25
- Formalisation math matique 26

1.4 Le module d'Euler **29**

1.5 Classification travers les variations de perspectives **35**

- Port e philosophique de la th orie math matique des cat gories 35
- Le ˙ ruban harmonique¨ 38

Chapitre 2. De la th orie modale d'Anatol Vieru au mod le alg brique des canons musicaux **43**

2.1 Quelques aspects de la th orie modale d'Anatol Vieru **43**

- Modes transposition limit e de Messiaen 48

2.2 Les canons rythmiques et le probl me du pavage de l'espace g om trique **50**

2.3 Applications informatiques: *OpenMusic* et les "Canons r guliers compl mentaires de cat gorie maximale" **55**

2.4 Exemple d' tude exhaustive d'un canon rythmique: le cas de Z_{72} **61**

- Observation 62

Chapitre 3. Intersections, ou des *ach vements* possibles d'une th orie math matique de la musique **67**

3.1 La th orie math matique de la musique de G. Mazzola et le Syst me d'Intervalles g n ralises (GIS) de D. Lewin. 67

3.2 Syst mes d'intervalles g n ralis s et ensembles principaux homog nes 75

3.3 Vers un mod le ˙ MaMuTh-th orique ¨ des canons musicaux 81

- Vers une formalisation rigoureuse 89

CONCLUSION 92

BIBLIOGRAPHIE

ANNEXES:

LISTE DES CLASSES METRIQUES S ET CLASSES RYTHMIQUES R CORRESPONDANTES AUX *CANONS REGULIERS COMPLEMENTAIRES DE CATEGORIE MAXIMALE* (POUR TOUT Z_n, 72† n † 120)

INTRODUCTION

˙°La Th orie Math matique de la Musique [...] n a rien voir avec une nouvelle forme de pens e sot rique pythagoricienne°¨

Guerino Mazzola (Mazzola [1993], p. 1)

L emploi des math matiques dans la description des probl mes li s aux diff rents domaines de la musique n est pas une d couverte de notre si cle. Pourtant, parmi les formes diff rentes de ce qu on peut bien appeler la *˙°tentation math matique°¨* (Chemillier [1987]) chez les th oriciens de la musique, philosophes et compositeurs de notre poque, l approche alg brique, dans le sens de l alg bre moderne, repr sente une conqu te relativement r cente. La th orie math matique de la musique de Guerino Mazzola [1] et les travaux du math maticien roumain Dan Tudor Vuza, qui s est occup de la formalisation des structures modales et rythmiques chez le compositeur Anatol Vieru, ont en commun la m me d marche m thodologique, dont les diff rences essentielles concernent le type d alg bre utilis e: th orie des *modules*[2], des *cat gories* et *topologie alg brique* dans le premier cas, et th orie des *groupes* (en particulier le concept math matique d *action*[3] de groupes sur les ensembles) comme paradigme de r f rence pour le deuxi me. Cependant il y a, entre les deux approches, plusieurs points de rencontre, comme nous essaierons de le montrer travers les travaux du th oricien et compositeur am ricain David Lewin (Lewin [1987]), dont la m me approche alg brique a conduit, entre autres, une g n ralisation de la th orie des ensembles (*set-theory*) d Allen Forte (Forte [1978])[4].

Cette tude repr sente une tape ult rieure dans la discussion critique de ces liens par rapport mes travaux pr c dents sur la formalisation des structures musicales [5]. Tout d abord la collaboration que j ai entreprise avec G. Mazzola pour la nouvelle dition anglaise du livre *Geometrie der T ne*[6] m a conduit, pour reprendre le nouveau titre, dans le topos[7] de la r flexion th orique sur les m thodes alg briques appliqu es la musique. La *˙°Journ e math matiques-musiques, autour de Guerino Mazzola°¨* l IRCAM, organis e par Marc Chemillier (Universit de Caen) et G rard Assayag (Ircam), a repr sent le lieu id al pour une discussion de ces liens. La notion de forme locale/forme globale dans la th orie math matique de la musique s est montr e extr mement importante par rapport au processus de compr hension d une structure musicale complexe, comme celle du canon musical.

Cette tude se limite l analyse des canons musicaux rythmiques dont les propri t s ont t formalis es, de fa on syst matique, par Dan Tudor Vuza (Vuza [1991]). Il se trouve qu un canon rythmique est une composition globale *stricto sensu*, voire une structure musicale complexe qui ¨°*se r alise travers un patchwork* [glueing] *compatible de cartes locales*°¨ (Mazzola [1993], p. 1)[8]. Une fa on standard d tudier la complexit d une telle composition globale est celle de lui associer une structure additionnelle ¨°topologique°¨, le *nerf*, qui transpose la complexit structurelle d une composition sur le plan g om trique et dont l utilit et pertinence vis vis de la compr hension des ph nom nes globaux dans la musique est un des piliers de la th orie math matique de la musique. Cette tude se centre plus pr cis ment sur une famille tr s particuli re des canons musicaux rythmiques, qu on appelle - d apr s Vuza - ° *Canons r guliers compl mentaires de cat gorie maximale*. On montre que pour cette famille d objets musicaux, le paradigme math matique des *vari t s*, ainsi que les structures topologiques de nerf qu on peut lui associer, repr sente une approche musicologique qui int gre bien le mod le rythmique de Vuza l int rieur de la th orie math matique de la musique.

Enfin la collaboration avec l quipe de repr sentation musicale de l IRCAM dirig e par G rard Assayag a conduit, pour la premi re fois, une mise en exp rimentation de la th orie alg brique de Vuza travers le logiciel *OpenMusic*. Les r sultats de cette impl mentation, qui ont fait l objet d une r cente pr sentation au CNET-CEMAMu dans le cadre des *Journ es d Informatique Musicale* (Andreatta [1999]) repr sentent une premi re tape vers une application compositionnelle des ces structures musicales[9].

Chapitre 1.

MaMuTh ou la Th orie Math matique de la Musique .

1.1 Avant-Propos

Bien que les ouvrages de r f rence pour cette tude aient t celles de la premi re version de la th orie math matique de la musique (o *MaMuTh* [10]), la pr sence d une contrepartie anglaise para tre, dont on a parl e dans l introduction, a beaucoup influenc la r daction du pr sent chapitre. Le point de vue *fonctoriel*[11] qui, dans le cadre originel ¨*n avait pas t pris suffisamment s rieusement*¨ (Mazzola [1999]) est le paradigme de r f rence dans *The Topos of Music*, comme le titre du livre qui va para tre le montre.

Ainsi dans cette tude on a beaucoup survol l approche s miotique sur la musique (Cfr. Mazzola [1998]) qui introduit un paradigme conceptuel et une terminologie nouvelles. C est le cas, par exemples, des ¨denotatores¨ (Mazzola [1998], p.13) et ¨predicates¨ (Mazzola [1999b], p.38) qui peuvent tre consid r s comme deux sous-syst mes dans ce que Mazzola appelle le ¨*syst me mental de signes*¨ [Mental Sign System]. Ce cadre conceptuel nouveau, dont on ne parlera pas dans cette tude, permit, selon Mazzola, de capturer ¨*la r alit mentale* [mental reality] *de la musique comme une construction autonome de l esprit* [autonomous mind construct]¨ (Mazzola [1998], p.13). Une des cons quences la plus vidente de cette hypoth se d autonomie de la recherche th orique sur la musique est l emploi d un formalisme abstrait qui tr s souvent finit par d courager le lecteur non-math maticien. En g n ral, on a essay de r duire au minimum l aspect abstrait de la th orie, en confinant les d finitions rigoureuses des concepts math matiques dans une partie distincte qui repr sente la traduction fran aise de l **Appendice** originelle de *Geometrie der T ne* . On a donc choisi de centrer l tude plut t sur les aspects musicologiques et pist mologiques de la th orie, sans essayer d appliquer les constructions th oriques des exemples de r pertoire. Le manque d efforts analytiques est compens , il nous semble, par une r flexion sur les nombreuses probl matiques li es une telle approche th orique, mais que nous avons abord toujours avec la conscience qu'une discussion sur une th orie math matique de la musique ne peut pas renoncer l'emploi des math matiques. Dans le cas, en particulier, de la th orie des cat gories, dont le ¨*lemme de Yoneda*¨ repr sente le r sultat math matique de r f rence, on a pr f r faire une pr sentation plus informelle en discutant plut t la soi-disant ¨*philosophie*

de Yoneda°¨, mais en donnant aussi quelques repr sentations math matiques des *foncteurs* en jeu. Une r flexion critique, voire philosophique et esth tique sur ce dernier point repr sente, pourrait-on dire une ¨°prise de conscience th orique°¨ sur le point de vue fonctoriel et sa pertinence musicologique.

1.2 Contexte historique

Situer la th orie math matique de la musique dans un contexte historique appropri signifie, en premier lieu, envisager une discussion des propositions th oriques qui, premi rement ont une approche scientifique rigoureuse, et deuxi mement font appel un v ritable appareil math matique (Chemillier [1987]). Cette double condition limite le probl me d une histoire exhaustive du rapport entre musique et math matique qui d passerait les limites de cette recherche. En particulier, on peut r duire encore le champ d tude en se concentrant, comme on l a d j soulign dans l introduction, sur les th ories qui se r f rent la notion de structure alg brique.

Structures alg briques dans les math matiques et la musique.

L id e de structure la base d une th orie math matique est une conqu te cruciale du XX me si cle. Ses origines remontent, cependant, au XIX me si cle, premi re p riode o on s aper oit que ¨°*ce qui joue le r le primordial dans une th orie, ce sont les* relations *entre les objets math matiques qui y figurent, plut t que la* nature *de ces objets*°¨ (Dieudonne [1987], p. 114). Il se trouve que, souvent, tant donn es deux th ories tr s diff rentes, les relations s expriment de la m me fa on dans les deux cas. On peut ainsi affirmer que ¨°*le syst me de ces relations et de leurs cons quences est une m me structure sous-jacente aux deux th ories*°¨. (Dieudonne [1987], p.114). Si on prend, par exemple, l mergence historique de la notion de *groupe abstrait* dans les math matiques [12] on se rend compte que ¨°*l tude [de cette structure] s tait impos e aux math maticiens bien avant que la notion g n rale n ait t formul e*°¨ (Dieudonne [1987], p.146); en outre la difficult d adapter la nouvelle id e la notion alors courante de groupe de transformations exprime bien la difficult des math maticiens du XIX me si cle°° ¨° *se d gager de la conception traditionnelle de la division des math matiques en parties caract ris es par les objets math matiques tudi s [...]*

et arriver la conception moderne o ce sont les relations entre les objets qui comptent˚¨ (Dieudonne [1987], p.138-139).

Dans la perspective que nous avons adopt e, l histoire des relations entre musique et math matiques est reconduite celle de la prise de conscience du r le essentiel que jouent les structures alg briques dans le processus de formalisation des ph nom nes musicaux. Le crible que constitue notre point de vue est extr mement s lectif, comme on peut noter en prenant, par exemple, une tude r cente extr mement pointue sur les th ories scientifiques de la musique aux XIX me et XX me si cle (Fichet [1996]). Au-del du manque de rigueur scientifique parmi de nombreuses propositions th oriques consid r es, comme l auteur n h site pas le souligner, on s aper oit que bien peu de ces approches proposent une r flexion sur les structures musicales au sens des math matiques modernes. Il n est pas inutile ici de souligner que la rigueur scientifique que nous demandons une proposition th orique n est pas en soi un crit re de validation (ou r futation) d un processus compositionnel, ni repr sente une condition n cessaire ou suffisante pour toute r flexion sur la musique. Le probl me est bien cadr par J.-C. Risset, quand il affirme que, du point de vue du compositeur, ˙˚*la scientificit de la d marche peut tre une exigence int rieure*˚*: mais elle n est nullement un crit re en mati re d thique ou d esth tique*˚¨ car ˙˚*la validit d une ˇuvre ne repose en rien sur la scientificit ou la technicit de l arsenal utilis* ˚¨ (Risset [1991], p. 281). Autrement dit, l exigence compositionnelle n est pas li e la rigueur de la connaissance, mais ˙˚*utilise la f condit et l autonomie productrice de l analogie, et recourt de fa on m taphorique aux mod les*˚¨ (Dufourt [1991], p.281).

Notre approche, dans cette tude, est plut t celle de mener une r flexion pist mologique sur la possibilit , l int rieur d une recherche th orique sur la musique, d une utilisation des math matiques qui ne rel ve pas n cessairement d un point de vue exclusivement m taphorique. Cela nous permet de mettre dans deux cat gories distinctes les syst mes sot riques d origine pythagoricienne, comme celles de Fabre d Olivet ou de Joseph Schillinger, et les propositions th oriques bien fond es du point de vue scientifique, comme les recherches conduites sur les mod les des transitions pour automates finis (Barbaud [1965]) et sur la th orie du langage (Chemillier [1987]), mais aussi la th orie des ensembles d Allen Forte, notamment dans sa r formulation et sa g n ralisation successive par David Lewin (Lewin [1987]). Ainsi structur , le domaine des relations entre math matiques et musique met

en vidence surtout ce que nous avons appel mergence de la notion de *groupe* qui se transf re, d une fa on naturelle, du paradigme math matique au domaine de la musique.

Groupes et musique.

Sans vouloir faire remonter la d couverte de la structure de groupe dans la musique Aristox ne, comme il nous semble sugg rer Iannis Xenakis [13], on pr f re consid rer plut t les
crits m mes du compositeur comme le lieu de toute une s rie de pr monitions sur une formalisation possible des structures musicales travers des concepts alg briques, tels que les groupes et les espaces vectoriels. En particulier la distinction entre structures hors temps et structures en temps rend vidente la pertinence des axiomes de groupe ab lien dans la th orie musicale. Ce que Xenakis appelle la formulation universelle du probl me de la perception des hauteurs est, ainsi, la suivante:

> ¨°*L ensemble des intervalles m lodiques est muni d une structure de groupe avec comme loi de composition l addition*°¨ (Xenakis [1994], p.69).

On retrouve la m me approche alg brique quelques ann es apr s dans les travaux de formalisation du syst me tonal de Pierre Barbaud. Au-del de la notion de modulo, dont l application la musique remonte aux th oriciens du XIX me si cle [14], Barbaud reconna t l importance, dans une proposition th orique sur la musique, de la ¨°*structure du groupe* ***Z/12Z*** *plong , bien malgr lui [...] dans le ph nom ne de la r sonance*°¨ (Barbaud [1968]). Curieusement, Barbaud, qui s' tait int ress beaucoup la dod caphonie (Barbaud [1997]), ne semblait pas noter la pr sence d une autre structure de groupe qu on retrouve dans les axiomes du 'm thode de composition douze sons d'Arnold Sch nberg, mais, avant lui, dans la proc dure de variation d une ligne m lodique d velopp e, par exemple, par le contrepoint du XVII me si cle. Il s agit du Groupe de Klein (o Quadrigroupe), car il poss de quatre l ments qui repr sentent les quatre transformations g om triques d une ligne m lodique: l identit (voire la ligne originelle), l inversion, la r trogradation et l inversion de la r trogradation (ou, d une fa on quivalente, la r trogradation de l inversion).

Il faut reconna tre encore une fois Xenakis le m rite d avoir propos , pour la premi re fois ce lien en soulignant que le m me mod le peut tre utilis pour formaliser les

quatre tats (ou formes) d une s rie dod caphonique. Il propose, tout d abord, d utiliser l isomorphisme canonique entre l espace Euclidien bidimensionnel $\mathbf{R}^2$ et le plan **C** de nombres complexes. Les quatre op rations dod caphoniques deviennent, dans ce nouvel espace g om trique, les quatre applications qui transforment un nombre complexe $z = x + iy$ respectivement dans lui-m me (forme originelle), son conjugu $z^* = x - iy$ (inverse), son inverse alg brique $-z = -x - iy$ (inverse du r trograde) et son inverse conjugu $-z^* = -x + iy$ (r trograde).

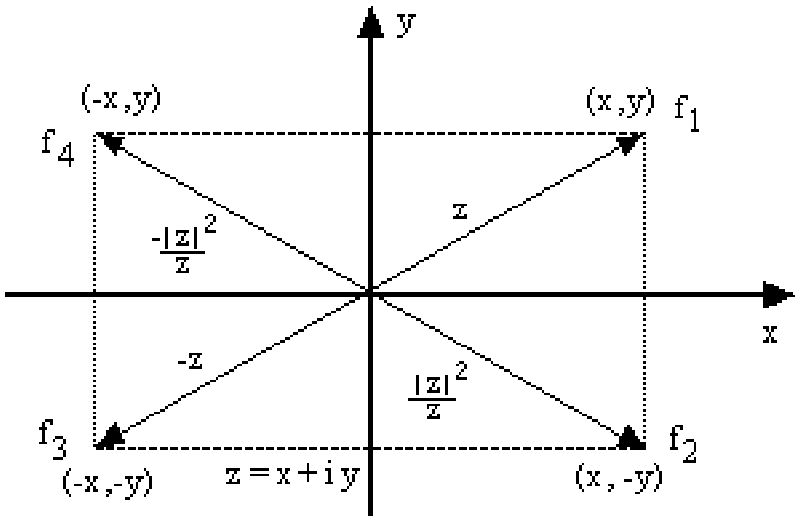


Figure 1. Les quatre op rations dod caphoniques, (Xenakis [1992]).

L exemple pr c dent nous donne, peut tre, la meilleure introduction une r flexion pist mologique sur les fondements d une th orie math matique de la musique et cela essentiellement pour deux raisons. Tout d abord, il exprime d une fa on rigoureuse ce que de nombreux th oriciens de la musique du d but du si cle avaient essay d claircir dans leur relation avec les op rations musicales. Parmi les plus connus, au moins pour l influence de ses id es sur nombreux compositeurs (George Gershwin, Henry Cowell, ...) ou musiciens (Benny Goodman, Charles Previn...) on peut citer l am ricain Joseph Schillinger, auteur d ouvrages aussi ambitieux qu'infond es (Schillinger [1941] et (Schillinger [1948]). Son analyse g om trique de la musique repose sur le pr suppos que ¨°*la m thode graphique est une m thode objective et donc g n rale*°¨ (Schillinger [1941], p.245). La faiblesse rel ve du fait que le m thode propos par Schillinger n'est pas formalisable d'une fa on rigoureuse, ce qui a donn John Backus l'impression que ¨°*les m thodes de Schillinger n'ont aucun fondement scientifique ou math matique*°¨ (Backus [1960], p.232) et que ¨°*le peu de science et de math matique qu'on trouve est banal, quand non erron* °¨ (Backus [1960], p.231).

Exemple d une formalisation alg brique d'une proposition th orique.

En revenant la formalisation alg brique propos e par Xenakis, on s'aper oit qu il n'y a aucune raison math matique pour limiter quatre le nombre de transformations d un nombre complexe. Pour comprendre la g n ralisation suivante il faut rappeler une autre forme de repr sentation des nombres complexes, c.- -d. la repr sentation vectorielle qui utilise les fonctions trigonom triques ordinaires. Le nombre $z = x + iy$ est repr sent par un vecteur qui sort de l origine du syst me cart sien, a pour longueur (ou ¨°module°¨) [15]

$$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

et forme avec la direction positive de l'axe x un angle θ (ou ¨°anomalie°¨)

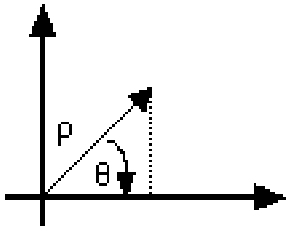


Figure 2. Repr sentation d'un nombre complexe.

A travers les quations d Euler on peut donc exprimer les fonctions trigonom triques travers les exponentielles complexes et a nous permet de repr senter le nombre complexe $z = x + iy$ dans la forme:

$$z = \rho\, e^{i\theta} = \rho\,(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)$$

avec les relations:

$$\cos\theta = 1/2\,(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$
$$\mathrm{sen}\theta = 1/2\,(e^{i\theta} - e^{-i\theta}).$$

On peut noter que, en prenant $\rho = 1$ et en choisissant judicieusement l anomalie θ on obtient une repr sentation concise d un polygone r gulier de n c t s inscrit dans le cercle

ayant un rayon unitaire. Il suffit de consid rer une anomalie variable $\theta_k = (k \cdot 2\pi)/n$, o k = 1, 2, ..., n. Si on utilise ensuite la repr sentation exponentielle pr c dente, on obtient la suite de nombres (r els ou complexes)

$$1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1} \quad \text{o} \quad \omega = e^{i\theta} \text{ et } \theta = 2\pi/n.$$

Ils ont la propri t que, en les levant la puissance n-i me ils redonnent l unit [16], c.- -d.:

$$1^n = \omega^n = \omega^{2n} = \ldots = \omega^{(n-1)n} = 1$$

On peut montrer (Andreatta [1997c]) que les transformations complexes suivantes

$f: z \rightarrow z$

$g: z \rightarrow \omega \cdot z$ o $\omega = e^{i\theta}$, $\theta = 2\pi/n$

engendrent un groupe fini ayant 2n l ments, dit *groupe di dral* et not , d habitude, avec D_n . On a donc formalis (Andreatta [1998], p.11) travers la notion de groupe (de transformations) la proposition th orique suivante de Xenakis:

˙°Nous prenons [ ] un graphique arbre dans un syst me de coordonn es temps/hauteur. Une premi re possibilit est celle de faire une rotation; l ensemble des rotations forme un groupe. [ ] Nous pouvons utiliser les transformations traditionnelles des chemins m lodiques : l'inverse d'une ligne m lodique de base, le r trograde et l inverse du r trograde. Mais il y a naturellement beaucoup d'autres transformations possibles car l objet peut subir une rotation d'un angle quelconque°¨ (Xenakis [1996], pp.88-89].

Voil un exemple o la s paration traditionnelle entre recherches sur la musique et recherches pour la musique, comme celle introduite par Elizabeth Duchez (Duchez [1978]) devient probl matique. Autrement dit, une recherche sur la musique, si elle est conduite travers la rigueur de la m thode scientifique et l emploi de techniques descriptives suffisamment g n rales peut devenir la base th orique d une recherche pour la musique. Des approches diff rentes dans la recherche musicale, comme par ex. celle de Jean-Claude Risset,

(Risset [1991]) ont montr la souplesse de la ligne qui d marque les deux champs de recherche. Cette observation est, peut- tre, encore plus valable dans un paradigme de recherche de type alg brique, comme celle qu on est en train de discuter dans son mergence historique. En effet, la g n ralit des r sultats obtenus dans le contexte d une recherche sur la musique, est un pr suppos essentiel pour une g n ralisation des applications possibles dans une recherche pour la musique, dans le sens d une recherche ˙°prospective°¨ ou ˙°cr atrice°¨ (Risset [1991], p. 274).

Le point est encore plus vident si on discute les fondements pist mologiques d une recherche math matique sur les structures musicales et leur classification. On a d j parl des travaux de formalisation du langage tonal de Pierre Barbaud. Un contrepoint int ressant est repr sent par les recherches sur la structure de la musique atonale chez Allen Forte et, plus g n ralement, par toute une s rie de travaux r alis es aux tats Unis et qu ont utilis , plus ou moins explicitement, des m thodes alg briques dans la recherche th orique, la composition et l analyse. La r flexion critique sur les liens profonds entre la th orie math matique de la musique et une tendance particuli re de la recherche th orique aux tats Unis (notamment celle de David Lewin) seront l objet de la derni re partie de cette tude. Ici c'est plut t l occasion d'esquisser une g n alogie de ce qu on a fini par classer sous le label un peu g n rique de ˙°tradition am ricaine°¨ [17].

La tradition am ricaine.

L impossibilit de donner une description m me partielle des sujets trait s dans la litt rature th orico-musicale am ricaine d s les ann es cinquante nous induit rechercher des ˙°segmentations°¨ pertinents du point de vue historique et m thodologique dans le domaine de la th orie de la musique contemporaine. Une approche parmi les plus f condes est bas e sur la diff rence presque dichotomique entre, d un cot , une attitude en apparence plus compositionnelle envers la th orie musicale (Milton Babbitt) et, de l autre cot , une perspective radicalement analytique (Allen Forte). Cette distinction appara t de fa on plus ou moins explicite dans nombreuses tudes sur le sujet, partir de (Boretz et Cone [1972]) jusqu au r cent (Baker [1997]). Ces deux travaux sont divis s chacun en deux parties formelles, soit respectivement : une m tath orie et une th orie m thodologico-compositionnelle ; des essais th oriques et des tudes analytiques. Le premier travail vise ˙°*l'engagement des compositeurs dans des explications fondamentales sur la th orie de la*

musique˚¨ (Boretz et Cone [1972], p. vii), tandis que le deuxi me sugg re que ˙˚*le fait que Forte ne soit pas lui-m me un compositeur a chang de fa on consid rable le domaine de la th orie*˚¨ (Baker [1997], p. 50).

Nous voulons aussi sugg rer que cette distinction n est pas simplement relevante pour une consid ration historique de la th orie des ensembles de classes de hauteurs. En effet, elle est aussi une aide pour la compr hension de comment cette th orie a successivement largi son domaine d application gr ce surtout aux travaux de John Rahn (Rahn [1987]), Robert Morris (Morris [1987]), et David Lewin (Lewin [1987]). Comme George Perle l a point dans sa vaste tude sur la musique s rielle et atonale, ˙˚*l influence la plus importante de la m thode de Sch nberg n est pas l id e des 12 notes en elle-m me, mais bien, c t de cela, les concepts individuels de permutation, sym trie d inversion et compl mentation, invariance sous transformation, construction agr g e, syst mes clos, propri t s d adjacence* en tant que d terminantes compositionnelles (...)*˚¨ (Perle [1981], p.x). Cette pr sentation des probl matiques des douze sons faite par Babbitt constitue peut- tre l introduction la plus appropri e Babbitt en tant que compositeur et th oricien. Un de ses m rites a t celle de fournir ˙˚*la th orie des douze notes d un vocabulaire technique consistant*˚¨ (Perle [1981], p. xiv) et qu il a montr que l importance et ˙˚*la force de tout syst me musical est envelopp dans la condivision de certains principes empiriques (consid rer non pas comme des contraintes universelles pour toute musique, mais plut t comme des constructions th oriques alternatives) et de certaines assomptions valid es par la tradition, l exp rience et l exp rimentation*˚¨ (Boretz et Cone [1972], p. ix). La r flexion sur le probl me d une ˙˚*terminologie reconstruite de fa on appropri e*˚¨ (Babbitt [1965], p.10) est une tape pr alable n cessaire la description des caract ristiques structurelles du syst me de douze sons, comme l clairent quatre articles cruciaux de Babbitt (Babbitt [1955], [1960], [1961], [1962]). D autres discussions d taill es de la terminologie de Babbitt sont aussi rep rables en (Babbitt [1987]). On ne peut pas suffisamment souligner que, pour Babbitt, un ˙˚ensemble˚¨ [set] est une collection ordonn e de classes de hauteurs, et ce terme est employ comme parfait synonyme de s rie. En revanche, le vrai pr d cesseur de l ˙˚ensemble de classes de hauteurs˚¨ de Allen Forte est l ˙˚*ensemble source* ˚¨, un ensemble ˙˚*consid r seulement dans les termes du contenu de ses hexacordes, et dont les caract ristiques combinatoires sont ind pendantes de l ordre impos son contenu*˚¨ (Babbitt [1955], p. 57). Un synonyme pour ce mot est le terme de ˙˚*collection*˚¨, pour la premi re fois introduit par Lewin en (Lewin [1959]) et largement trait pour sa pertinence analytique en (Lewin [1960]).

Successivement, une grande partie de la litt rature am ricaine fut consacr e l tude des propri t s sp cifiques d ensembles et de collections, en particulier la combinatoire et le partitionnement (Cf. Martino [1961], Howe [1965], Gamer [1967], Bazelow et Brickle [1976], (Starr et Morris [1978]). Les probl mes d une partition connect s l id e originelle de Babbitt ont aussi largement prouv leur pertinence en math matique tant naturellement envelopp s dans la *th orie des groupes* (Lewin [1987], Morris [1987]). Mais, m me l id e d appliquer le concept math matique de groupe pour des syst mes de mod lisation musicale peut tre regard e comme l une des plus f condes intuitions de Babbitt, puisque ¨°*les r gles de formation et transformation du syst me de douze sons sont interpr tables comme d finissant un groupe d l ments (une permutation d ordre d ensembles de nombres) et un groupe d op rations (composition de permutations)*°¨ (Babbitt [1965], p.20). Cette quivalence de structures, introduite pour la premi re fois en (Babbitt [1960]), a d importantes cons quences pour la composition ¨°*directement d rivables des th or mes de la th orie des groupes finis*°¨ (Babbitt [1961], p. 8).

Allen Forte, avec sa th orie des Complexes d Ensembles labor e en (Forte [1964]) et dans un travail plus r cent consacr en grande partie la musique atonale de Sch nberg, Webern et Berg dans les premi res vingt ann es du si cle (Forte [1973]), est le repr sentant le plus important de l approche analytique dans la litt rature am ricaine de th orie de la musique. L intention de Forte est de ¨°*fournir un cadre th orique g n ral, en r f rence auquel les proc d s sous-jacents la musique atonale peuvent tre d crit de fa on syst matique*°¨ (Forte [1973], p. ix). Le point de d part de Forte est ¨°*fermement analytique, surgissant d'un d sir fervent de d couvrir les secrets d'un (...) r pertoire nigmatique*°¨ (Baker [1997], p. 50). Dans son plus r cent article, Forte souligne cet aspect avec une emphase particuli re, tablissant que ¨°*la structure de la musique atonale (est) surtout l' tude d'un r pertoire musical plut t qu'une pr sentation th orique*°¨ (Forte [1989], p. 83).

Cependant, l une de ses m rites les plus remarquables a t l'introduction d une ¨°*terminologie consistante pour les collections de classes de hauteurs bas e sur les propri t s math matiques des ensembles*°¨ (Baker [1997], p. 49) avec la mise en place du *Complexe d'ensembles*, un sujet r cemment d velopp par R. Morris (Morris [1997]). On peut bien souscrire la th se selon laquelle ¨°*le vrai succ s de Allen Forte consiste dans les d veloppements qu'il a inspir s : au-del de sa th orisation de la musique atonale, son travail*

a convaincu plusieurs de l'int r t d'une tude formelle de l'espace chromatique˚¨ (Mesnage [1989], p. 90).

Un exemple de cela est l introduction de John Rahn quelques probl matiques communes au r pertoire atonal et s riel (Rahn [1987]). Ce livre pr pare aussi ¨˚*ses lecteurs la litt rature professionnelle dans le domaine*˚¨ (Rahn [1987]) et il donne des r f rences pr cises pour des sujets plus sp cifiques qui incluent le s rialisme avanc et la combinatoire. Le ¨˚r le g n ral de formation˚¨ de Babbitt, avec l h ritage terminologique de Forte , a t largement explor dans la sph re des Etats Unis et le livre de John Rahn est devenu une r f rence standard pour toutes les discussions dans la th orie des ensembles.

Robert Morris, par exemple, a d velopp quelques ¨˚ *relations entre l ordre, la compl tion agr g e et la structure de hauteurs, bas es sur des groupes d'op rations agissant sur les classes d'ensemble*˚¨ (Morris [1987], p.xiii). La r cente formalisation de Morris des ainsi dits ¨˚Espaces Compositionnels˚¨ fournit un nouvel outil th orique qui compense certaines faiblesses du mod le compositionnel originel. Comme Morris l a d fini, ¨˚*les espaces compositionnels sont des structures hors le temps partir desquelles peut tre compos le dessin compositionnel le plus sp cifique et orient dans le temps*˚¨ (Morris [1995]). Le point crucial, ici, est la connexion intime avec l approche alg brique et transformationnelle de David Lewin (Lewin [1987] et [1993]).

Comme dans le cas de Babbitt et Forte, contribution de David Lewin dans le champ de la th orie de la musique est en m me temps terminologique et m thodologique . Son travail peut aussi bien tre consid r comme l une des tentatives les plus claires d aller au-del de la dichotomie th orico-musicale entre proc dures compositionnelles et proc dures analytiques. Son tout premier article concernant les approches g n ralis es dans la description des collections intervalliques de notes (Lewin [1959]), est au maximum proche de l attitude compositionnelle de Babbitt˚; il fut bient t suivi d une application analytique de quelques constructions formelles, comme les fonctions d intervalle, aux compositions dod caphoniques bas es sur structures d'hexacordes (Lewin [1960]).

Selon l observation de Jonathan Bernard, le fait que les fonctions de Lewin concernent le contenu d intervalles d une collection singuli re de notes, fait de lui ¨˚*le pr d cesseur conceptuel du vecteur de classes d intervalles ( ) dans le travail de Forte*˚¨ (Bernard

[1997]). Successivement Lewin tudia les diff rences sp cifiques entre sa propre ¨°Fonction intervallique°¨ et d autres constructions th oriques similaires, comme le *vecteur intervallique* de A. Forte ou la fonction ¨°*common-note*°¨ de E. Regener (Lewin [1977]). La majeure partie des domaines d velopp s par Lewin d s les ann es soixante trouvent leur place naturelle dans son trait fondamental (Lewin [1987]). La construction abstraite la plus importante de Lewin est probablement le **GIS** (Syst me d Intervalles G n ralis s), une version plus labor e de son pr c dent ¨°Syst me Formel d Intervalles°¨ ou **FIS** (Cf. le chapitre 3.1 de cette tude). L tude d une telle structure conduit une g n ralisation naturelle de la *Th orie des Ensembles* de A. Forte, aussi par le biais d un mod le transformationnel qui inclut des *graphes transformationnels*, des *r seaux* et des *isographies*.[18] ¨°*Transformationals networks*°¨ et ¨°*leur pertinence pour la th orie de la musique et l analyse*°¨ sont l objet du deuxi me livre de Lewin (Lewin [1993]) qui est consacr Milton Babbitt et Allen Forte. Pour d autres applications de l approche transformationnelle de Lewin au probl me de la conduite des voix [voice leading] dans la musique atonale on peut voir (Straus [1997]).

Nous concluons cette br ve g n alogie de la tradition am ricaine dans le domaine de la th orie de la musique avec quelques mots sur le probl me de la formalisation des structures diatoniques. Cela est parfaitement en accord avec les concepts g n raux de Babbitt et Lewin et les r sultats ont plusieurs points d intersection avec la th orie math matique de la musique de Guerino Mazzola. Comme il a t sugg r dans une tude r cente consacr e au sujet (Agmon [1996]), la th orie moderne du diatonisme a sa source en certains probl mes expos s pour la premi re fois par Babbitt (Babbitt [1962], [1965]). L tude des propri t s combinatoires des syst mes musicaux temp r s conduit de fa on naturelle la formalisation des structures musicales travers des m thodes de *th orie des groupes* et de la *th orie l mentaire des nombres* . Une des tudes parmi les plus pointus sur le syst me musical et les chelles diatoniques a t l'article paru sur la revue *Journal of Music Theory* et sign par Gerald Balzano. (Balzano [1980]). R cemment la m me approche a t reprise par Paul Zweifel (Zweifel [1996]) qui a g n ralis plusieurs propri t s des chelles diatoniques et pentatoniques travers des m thodes alg brique emprunt s de la th orie de groupes.

Deux exemples de formalisation alg brique de la transposition musicale.

Parmi les travaux th oriques qu on vient de pr senter, on n a pas parl d une tude fondamentale dans le domaine de l application de m thodes alg briques dans la th orie musicale parue dans les m mes ann es que le livre de Forte et sign e par deux scientifiques am ricains, George D. Halsey et Edwin Hewitt (Halsey et Hewitt [1978]). Il s agit d une tude syst matique des accords dont les propri t s alg briques sont analys es l int rieur d une division g n ralis e de l octave musicale en n parties gales (c.- -d. du groupe cyclique $\mathbf{Z_n}$) :

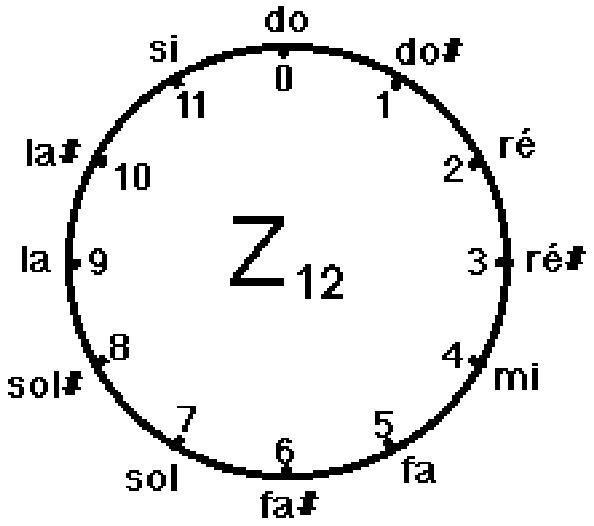


Figure 3. Exemple de groupe cyclique avec n = 12.

A la notion famili re de *transposition* dans la musique correspond l op ration math matique de ¨°*translation*°¨ d un ensemble l int rieur d un groupe. Les propri t s alg briques ainsi mises en vidence ne changent pas par transposition d une m me structure d'accords, c.- -d. qu elles sont invariantes une translation pr s. Cette remarque permet de concentrer l tude des propri t s significatives aux soi-disant ¨°classes de translation°¨ des accords. On note ici une vidente analogie avec les ¨°pitch class sets°¨ d Allen Forte qui repr sentent les classes des hauteurs (pitch classes) une transposition et une inversion pr s. Mais le nouveau paradigme alg brique, totalement absent dans la formulation originelle d Allen Forte, montre, parmi les classes de transpositions, toute une s rie de familles ayant les m mes propri t s alg briques: on retrouve, ainsi, des objets musicaux familiers, comme les modes de Messiaen transposition limit e, les hexacordes ¨°all-combinatorial°¨ de Milton Babbitt et les classes ¨°partitionnantes°¨ (ou *Parkettierungsklasses* dans la terminologie allemande emploie par Halsey et Hewitt) dont la pertinence dans la formalisation des

structures modales et rythmiques chez Anatol Vieru et Dan Tudor Vuza sera soulign e dans le deuxi me chapitre de cette tude.

Dans notre perspective alg brique sur les liens entre musique et math matique que nous avons choisi, l tude de Halsey et Hewitt nous donne plusieurs l ments de r flexion. Tout d abord elle repr sente un des premiers essais d une classification rigoureuse des structures musicales travers une m thode alg brique explicite. Parmi les autres travaux qui, plus ou moins dans les m mes ann es, conduisent la fois aux m me r sultats, on peut citer les recherches du math maticien polonais Maciej Zalewski (Zalewski [1972]), les crits th oriques de Rudolf Wille (Wille [1982] et Wille [1985]) et, surtout ce qu on peut consid rer comme le meilleur exemple d une proposition th orique hors-temps qui est capable de comprendre, son int rieur, les probl mes cruciaux du temps musical: le livre de modes d Anatol Vieru (Vieru [1993]).

Dans le cas du compositeur et th oricien roumain Anatol Vieru, la classification des structures modales (c.- -d. classes de translation des accords) est accomplie dans le cas du temp rament gal (n-degr s) et donc avec une g n ralit tout fait quivalente celle chez Halsey et Hewitt. La diff rence essentielle rel ve, au contraire, de la perspective particuli re employ e, qui d passe l univers strictement hors-temps des hauteurs.

On consid re les accords qui factorisent un groupe (cyclique) donn , c.- -d. tout sous-ensemble A d un groupe G tel que G est une union de ˙°transpositions°¨ de A. Autrement dit la famille des translations du sous-ensemble A forme un *recouvrement* du groupe. Voici un exemple dans le cas du groupe cyclique $\mathbf{Z}_{12}$:

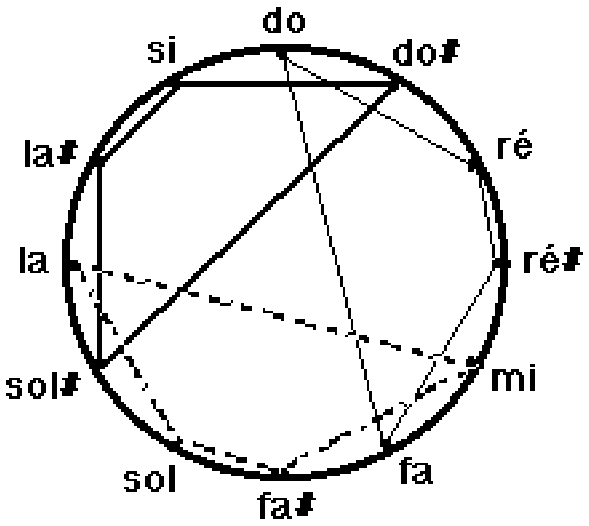


Figure 4. Exemple de factorisation pour $\mathbf{Z}_{12}$.

La notion est facilement g n ralisable celle de couple d ensembles factorisants, c.- -d. tout couple {A,B} d accordes de $\mathbf{Z_{12}}$ tout l ment g du groupe peut tre repr sent (de fa on unique) dans la forme $g = a + b$ (o a et b sont des l ments de A et B respectivement). Voici un exemple dans le cas du groupe cyclique $\mathbf{Z_{12}}$ [19]:

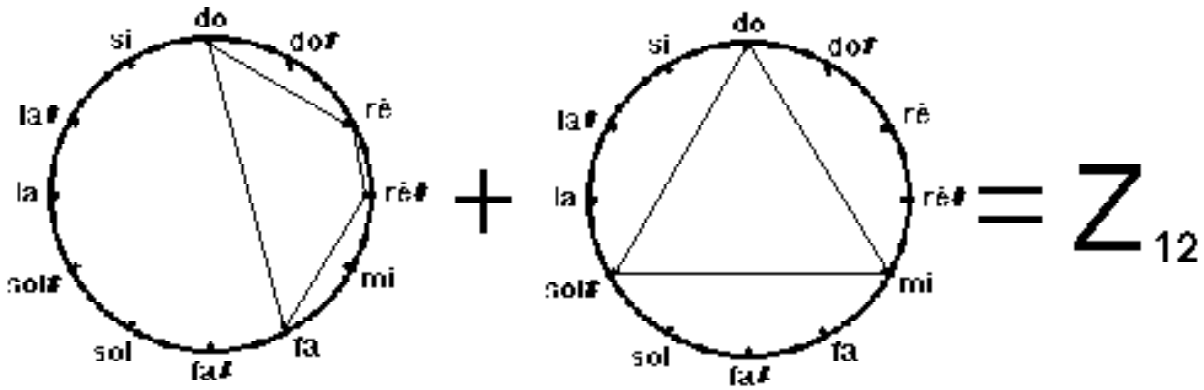


Figure 5. Exemple de couple d'ensembles factorisants.

La notion de classes de translation factorisantes est quivalente celle des classes modales partitionnantes (Vuza [1982]). Mais si dans Halsey et Hewitt la classification de ces structures d accords est conduite sur la base d une d termination a priori des groupes ¨ *qui ont la probabilit plus haut de jouer un r le dans la th orie de la composition musicale [sic!]* ¨ (Halsey et Hewitt [1978], p.190), la notion de classes modales partitionnantes est laiss e, chez Vieru et Vuza, dans sa pleine g n ralit . La restriction des cas tr s particuliers est justifi e, dans le premier cas, par le seul sch ma interpr tatif d une classe de translation d un accord l int rieure d un syst me temp r n degr s. Le choix impos n est, ainsi, celle d' tre un param tre significatif par rapport la perception des hauteurs. Pour cette raison Halsey et Hewitt consid rent toutes chelles microtonales jusqu' n = 24 (quartes de tons). Le choix n'est pas heureux, car il se trouve que la notion de classe partitionnante est li e un ancien probl me de factorisation de groupes, la conjecture de Minkowski, dont on analysera les cons quences musicales dans le deuxi me chapitre de cette tude. Pour ce probl me, la fois alg brique et g om trique, il y a toute une famille de groupes cycliques, soi disant ¨°groupes mauvais°¨ (ou groupes qui ne poss dent pas la propri t de Hajos [20]) dont la pr sence reste cach e si on ne prend pas en compte des valeurs de n suffisamment grandes (le minimum n pour que $\mathbf{Z_n}$ soit un ¨°groupe mauvais°¨ est n=72).

L int r t musical d une telle structure de groupe est vident dans un paradigme th orique comme celui qui caract rise les crits de Vieru et Vuza, qui d passe l interpr tation d un sous-ensemble d un groupe cyclique comme classe des hauteurs. Autrement dit, dans l approche de Vieru et Vuza, le groupe cyclique $\mathbf{Z_n}$ mod lise la fois le syst me bien temp r n degr s (dont les sous-ensembles sont les classes modales) mais aussi le domaine rythmique (dont les sous-ensembles sont des structures rythmiques p riodiques). On constatera, encore une fois, qu'une telle recherche n est pas non plus une recherche exclusivement sur la musique, mais qu elle est la base d une formalisation rigoureuse d une structure compositionnelle complexe comme celle d un canon musical. Dans le cadre de la Th orie math matique de la musique qu on va introduire dans le prochain paragraphe, le changement de paradigme pr c dent repr sente une r alisation concr te de la soi-disant philosophie de Yoneda . R duite l essentiel, elle affirme que *¨°la connaissance d rive travers la somme des aspects ou perspectives°¨.*[21]

La derni re partie de ce premier chapitre sera d di e une discussion plus approfondie de cette id e extr mement g n rale.

1.3 Formes locales/globales dans le concept de ¨°vari t musicale°¨.

L'esth tique musicale de Edouard Hanslick et la g om trie diff rentielle de Bernhard Riemann.

On a d j soulign dans l introduction [22] de la pr sente tude l importance de la double notion de forme locale et globale dans le paradigme esth tique de la th orie math matique de la musique. Une analyse historique de cette id e nous conduit en plein XIX si cle, plus exactement en 1854, ann e de publication du c l bre Essai de r forme de l esth tique musicale de Edouard Hanslick (Hanslick[1986]). Mais si l id e hanslickienne d une quivalence entre contenu et forme de la musique[23] semble bien s int grer avec les id es de base de la th orie math matique de la musique, on ne peut pas passer sous silence une remarque ajout e *¨°plut t par prudence que par n cessit jour°¨* , comme il dit, sur le rapport entre musique et math matique: *¨°le beau dans la musique n a rien de commun avec les math matiques°¨* (Hanslick [1986], p. 110) car *¨°la pens e musicale n a nul besoin de leur secours pour se faire jour°¨* (Hanslick [1986], p. 111). Mais, encore une fois, il faut faire

attention aux diff rentes significations du terme ¨°math matiques°¨, surtout dans des contextes historiques non homog nes. En effet, on n a pas de difficult imaginer l objet des attaques d Hanslick parmi les nombreuses propositions th oriques pseudo-scientifiques qui dans l esprit des trait s de Rameau consid rent la musique comme une v ritable science physico-math matique (Fichet [1996], p. 9).

Nous voulons envisager ici une discussion ult rieure qui s inspire de la distinction propos e par Jean-Jacques Nattiez entre dimension esth tique et dimension s miologique dans l essai de Hanslick (Nattiez [1986], p.18). Car, cot d une dimension esth tique pr dominante, selon laquelle ¨°*la beaut d une ˇuvre est sp cifiquement musicale jour*°¨ (Hanslick [1986], p. 57) il y a aussi une conception qui rel ve d une dimension s miologique, o le terme indique l tude ¨°*d un ph nom ne quelconque comme fait symbolique, c.- -d. dot d une capacit de renvoi*°¨ (Nattiez [1986], p.49). En ce qui concerne cette deuxi me cat gorie, on s aper oit, et avec surprise, du caract re ambigu du terme formalisme propos de la pens e hanslickienne. En effet, ce qui a t mis en vidence par Nattiez, la diff rence des formalistes pour lesquels ¨°*la musique ne signifie pas autre chose que le jeu de ses formes*°¨ (Nattiez [1986], p.18), c est la conception s miologique de la forme chez Hanslick qui est plus assimilable une position expressionniste mod r e. En utilisant une cat gorie introduite par Leonard Meyer dans (Meyer [1956]) et reprise par Nattiez, on pourrait donc d finir la position hanslickienne comme celle d un expressioniste-r f rentialiste , pour lequel ¨ *l affectif s explique par renvoi au monde ext rieur*°¨ . On a beaucoup insist sur les diff rents l ments de la pens e esth tique hanslickienne, car il nous semblait que la composante s miologique de sa conception de la forme musicale est, en r alit , un aspect plus proche la th orie math matique de la musique. Notre point de vue se distingue du point de vue traditionnel sur le lien entre th orie math matique de la musique et conception de la musique chez Hanslick, selon lesquels les points en commun entre les deux disciplines rel vent surtout de l id e des ¨°*formes sonores en mouvement*°¨ [t nend bewegte Formen](Hanslick [1986], p.94) ayant la propri t d tre ¨°*enti rement rassembl es*°¨ [kunstreich zusammengef gt].

Mais si Hanslick repr sente la r f rence fondamentale dans la th orie math matique de la musique parmi les th oriciens et esth ticiens du XIX me si cle, dans le domaine des math matiques il faut aussi remonter aux m mes ann es pour trouver dans l ˇuvre du math maticien Bernhard Riemann ¨°*une r vision compl te et extr mement tendue [...] du concept d espace*°¨ (Mazzola [1993], p. 3). A travers l id e nouvelle de *vari t math matique* la dichotomie locale/globale trouve une premi re formalisation rigoureuse qui exprime bien

une propri t commune la musique et la g om trie. Car, dans les deux cas, ¨°*des structures qui localement sont tr s simples sont compos es d une fa on complexe pour donner des formes globales pertinentes*°¨ (Mazzola [1993], p. 4) L utilit de la notion de vari t dans la classification des objets g om triques est montr e dans la figure suivante :

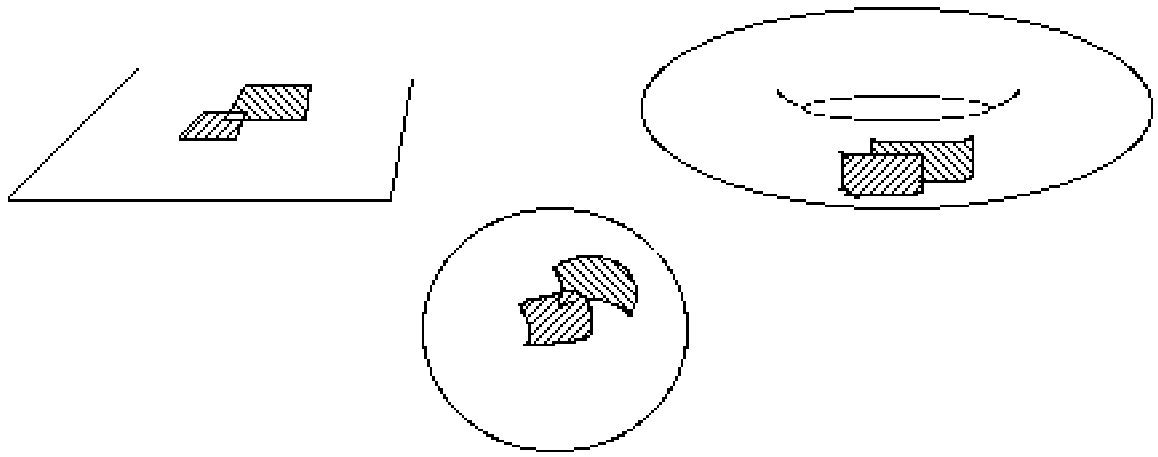


Figure 6. Le plan, la sph re et le tore.

La diff rence entre le plan euclidien bidimensionnel, la sph re, le tore et le ruban de M bius ne peut pas tre d duite travers une perspective locale car ces surfaces sont toutes compos es des m mes cartes locales planes. Elles diff rent uniquement dans leur assemblage global des cartes planes. Le plan est la seule surface, parmi les objets g om triques consid r s, qui peut tre d crite travers une seule carte plane. Par analogie la sph re le plan ne poss de pas de trou (le plan et la sph re sont *simplement connexes*) ce qui rend ces objets de vari t s diff rentes, par exemple, au tore. En plus, toutes les surfaces, l exception du ruban de M bius, sont *orientables*, c.- -d. que toutes les cartes locales ont une face sup rieure et une face inf rieure. On verra bri vement au cours du paragraphe suivant que la non-orientabilit du ruban de M bius, est une propri t qui peut tre utilis e pour rendre compte de certaines caract ristiques du syst me musical tonal, plus pr cis ment, de certains aspects de la th orie fonctionnelle de Hugo Riemann.

On a pr f r aller du g n ral au particulier en discutant la dichotomie locale /globale, au lieu de suivre l approche traditionnelle de la th orie math matique de la musique (celle d une pr sentation des structures locales et leur emploi l int rieure d une forme globale) car l objet principal de cette tude est le canon musical rythmique, un exemple pour lequel le

paradigme local n est pas non plus suffisant. Mais, au-del de l objet musical que nous avons choisi d analyser, le canon rythmique, la dichotomie locale/globale occupe aussi une position de premier plan dans plusieurs r flexions th oriques et compositionnelles de nos jours. Nous voulons traiter, bri vement, une de ces propositions th oriques qui nous semblaient bien s int grer dans le paradigme de vari t s musicales. Il s agit d une relecture musicale - ¨°*plus pr cis ment d un compositeur*°¨ - (Nicolas[1996]) d un ouvrage sur la philosophie des math matiques d Albert Lautman (Lautman [1977]).

Propri t s intrins ques et propri t s extrins ques de la forme musicale.

Des trois ¨°*r seaux conceptuels*°¨ (Nicolas [1996], p.2) qui, selon Nicolas, sont d ploy s par Lautman, les deux premiers rel vent d une double dialectique : celle entre propri t s *intrins ques* et propri t s *extrins ques* et celle du *local* et du *global.* Dans le premier cas, on retrouve, parmi les propri t s intrins ques, les soi disantes ¨°*propri t s de structure*°¨ (Nicolas [1996], p.3), c.- -d. celles qui ¨°*ne d pendent pas de l espace dont on immerge l objet consid r* °¨ (Nicolas [1996], p. 2)[24].

Les propri t s extrins ques, ou ¨°propri t s de situation°¨ (Nicolas [1996], p. 3) sont celles qui se r alisent d une fa on qui n est pas enti rement dissociable du contexte g om trique, dans ce cas l espace. L exemple du ruban de M bius, dont on a d j soulign les propri t s de connexion et de non-orientabilit permet de comprendre la distinction propos e par Lautmann. Propri t s comme la connexion et la simple connexion qu on a discut propos d objets g om triques familiers comme le plan, la sph re et le tore sont, en fait, du type ¨°intrins que°¨, tandis que d'autres, notamment celle d avoir un seul c t , sont li es l espace et sont donc de nature ¨°extrins que°¨. Mais le m me exemple montre que ce type de dialectique n est pas suffisant par rapport au probl me d une caract risation exhaustive de ces structures. Dans le cas de la non-orientabilit , on s aper oit qu elle est li e plut t une dynamique dialectique du type local/global, plut t qu' une perspective intrins que ou extrins que. En fait, comme nous l'avons soulign au d but de cette partie, deux objets ¨°globalement°¨ diff rents, comme le ruban de M bius et le tore, ont, en r alit , les m mes cartes locales, dans le sens de la g om trie diff rentielle riemannienne. Ils diff rent seulement dans la fa on dont les contributions locales g n rent la forme globale.

Dans une discussion sur la forme musicale, ce point est voqu par Pierre Boulez quand il parle de la relation de ˙°filiation°¨ entre les contributions locales et la structure globale. Dans cette perspective, la th orie math matique de la musique donne une caract risation du terme ˙°filiation°¨ qui s accorde avec les pr occupations de Boulez et de Nicolas. Elle vite, tout d abord, la r ponse ˙°classique°¨ ce probl me, c.- -d. celle ˙°naturalisante°¨ d inspiration goethienne, travers laquelle on pose un isomorphisme entre le tout et ses parties. La filiation est, au contraire, un processus dialectique et la g om trie diff rentielle donne une formalisation tr s g n rale de ces relations travers l id e d un atlas et d un recouvrement de la forme globale travers cartes locales [25].

Formalisation math matique.

Pour rendre moins m taphorique l tude d une structure musicale globale travers le paradigme riemannien de vari t s il est n cessaire de formaliser d une fa on plus rigoureuse l espace g om trique dont on plonge la composition musicale. Parmi les nombreux exemples qu on trouve dans *Geometrie der T ne* nous pr sentons celle qui analyse la structure interne [Binnestruktur] d une s rie dod caphonique en termes de vari t riemannienne. L espace g om trique est repr sent par le produit cart sien $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z_{12}}$. Une s rie dod caphonique est un ensemble de points dans l espace bidimensionnel ayant comme axes coordonn s l axe $\mathbf{Z}$ du temps et l axe $\mathbf{Z_{12}}$ des hauteurs. Un exemple d atlas (c.- -d. une collection de cartes locales qui recouvrent la s rie) est propos par la figure suivante :

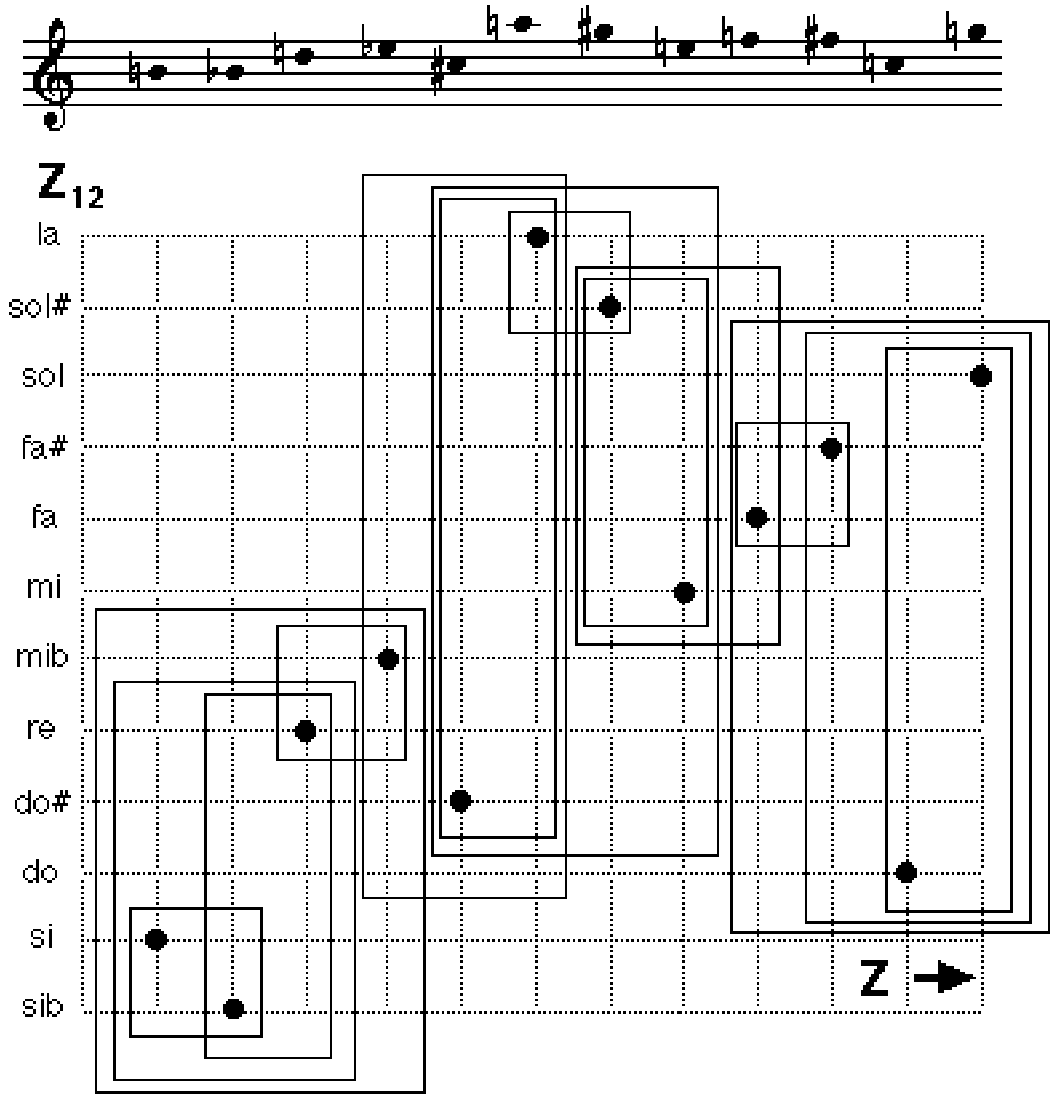


Figure 7. Exemple d'atlas pour une s rie dod caphonique (Mazzola [1990], p.154)

La diff rence entre une vari t musicale et une vari t riemannienne rel ve de la fonctionne des parties locales l int rieur de la forme globale. Dans la g om trie riemannienne on peut ajouter un atlas de nombreuses autres cartes qui peuvent tre diff rentes de celles originelles mais qui ne changent pas la ¨°perspective°¨ sur la forme globale. Au contraire dans les ¨°vari t s musicales°¨ les cartes locales sont elles-m mes une interpr tation du mat riau global. Autrement dit, le choix d un atlas particulier pour recouvrir une composition musicale globale est un ¨°acte interpr tatif°¨.

La triple question soulev e par Nicolas ce propos repr sente un point fondamental de la th orie math matique de la musique: ¨°*Peut-on lire la structure de l ensemble dans les propri t s locales? A partir du moment o sont donn es des propri t s globales, quelles*

conditions p sent sur les configurations locales? Soit: quelles conditions les propri t s globales se r fl chissent-elles localement?°¨ (Nicolas [1996] p. 6). La th orie math matique de la musique donne, il nous semble, une r ponse possible cette question cruciale. L id e est tr s simple mais elle implique un changement ontologique dont les probl matiques philosophiques et pist mologiques induites sont beaucoup plus larges qu une simple r flexion sur les liens entre math matique et musique: les points sont des *fl ches* (voire *morphismes*) et un objet est l ensemble des fl ches qui le transforment. C est le point de vue *fonctoriel* sur la musique qui rel ve de la th orie math matique des cat gories [26]

La suite de ce paragraphe est consacr e la d finition rigoureuse des structures musicales locales (ou *compositions locales*) telles que nous les avons employ es dans la construction de l atlas pr c dent. Nous allons revenir sur cet exemple propos de la construction topologique qu on peut lui associer. Cette structure adjointive s appelle le *nerf* et il repr sente un objet qui rel ve de la topologie combinatoire

Du point de vue math matique, une composition locale est un sous-ensemble fini d un module M sur un anneau commutatif R. Comme on a d j soulign dans l introduction, un *module* est une version affaiblie de la notion d espace vectoriel qui inclut, comme cas particuliers, les structures de *groupe* et *d anneau* (cf. l **Appendice A2** pour autres exemples)[27].

Dans (Mazzola [1999], p. 73) on trouve une justification d taill e d ordre math matique et musicologique du recours cette structure dans le processus de mod lisation des ph nom nes musicaux. La discussion comprend, plus g n ralement, celle de la relation entre une structure math matique et une signification [meaning] musicale. Car *¨°on pourrait demander qu une propri t structurelle d termin e doive jouer un r le musical ou musicologique dans toutes les situations o la structure est pr sente°¨* (Mazzola, [1999], p.73). Cependant, une telle requ te serait trop restrictive, car *¨les math matiques doivent rendre accessible la musique ce qui peut ventuellement avoir lieu dans la musique, et non ce qui se passe dans tout cas¨* (Mazzola [1999], p. 74). Le r le jou par les structures math matiques dans la musique est donc essentiellement li la possibilit de *¨°donner une r gion minimale du type conceptuelle et th orique o les applications possibles [la musique] peuvent tre plac es°¨* (Mazzola [1999], p.73). Il est donc tr s clair que *¨°on ne peut pas d cider a priori quelles structures math matiques impliquent une signification musicale°¨*, raison pour laquelle plusieurs th orie, bien qu'elles soient fond es du point de vue scientifique produisent un r sultat *¨°musicalement*

inutile et sans port e aucune¨°. [28]Dans le cas de la th orie math matique de la musique la ¨°*structure de module repr sente un cadre formel [...] qui au pr sent garantit un champ tr s vaste d applications*¨° et qui permet, en m me temps, de g n raliser des approches diff rentes, comme ceux de Dan Tudor Vuza (Vuza [1991]) et David Lewin (Lewin [1987])[29].

Le paragraphe suivant repr sente un premier exemple de module dans la musique, le soi disant ¨°module d Euler°¨, ainsi appel d apr s le math maticien Leonhard Euler (1707-1783). Le sujet a plusieurs points de rencontre avec le mod le propos par le math maticien fran ais Yves Hellegouarch (Hellegouarch [1983]) et repris, r cemment, par Fabien Levy (Levy [1999a]).

1.4 Le module d Euler.

Bien que du point de vue physique la hauteur d coule de la fr quence d un ton exprim e en hertz, on ne peut pas affirmer en toute s r nit qu un tel nombre r el positif rende compte de la fa on additive dont l oreille forme les intervalles [30]. La transformation plus g n rale (Mazzola [1990], p.25) pour passer de la hauteur physique celle math matique est donc l expression logarithmique suivante:

$$h(f) = u \ln(f) + v$$

o les valeurs u et v ne sont pas n cessairement des constantes.
Si on prend comme intervalles fondamentaux les trois nombres rationnels 2, 3/2 et 5/4 (correspondants l intervalle d'octave, de quinte juste et de tierce majeure), on peut consid rer l ensemble des hauteurs physiques de la forme

$$f = k \cdot 2^p \cdot 3^s \cdot 5^r$$

o p, s et r sont des nombres rationnels et k est une constante qui repr sente une fr quence de r f rence (d habitude le la = 440 hz). Ce cas repr sente une g n ralisation du paradigme zarlinien traditionnel, o les nombres p, s et r sont des nombres entiers [31].
En prenant les logarithmes naturels on a ainsi une combinaison lin aire

$$\ln(f) = \ln(k)+\ln(2^p)+\ln(3^s)+\ln(5^r)$$

qui, par des propri t s l mentaires des logarithmes, devient:

$$\ln(f) = \ln(k) + p\cdot\ln(2) + s\cdot\ln(3) + r\cdot\ln(5).$$

La diff rence fr quentielle , ou hauteur intervallique, (par rapport une hauteur standard choisie) est donc:

$$\ln(f) - \ln(k) = p\cdot\ln(2) + s\cdot\ln(3) + r\cdot\ln(5).$$

D s que les valeurs ln(2), ln(3) et ln(5) sont constantes, on peut affirmer qu une hauteur f est bien repr sent e par un triplet des nombres rationnels $x = (p,s,r)$ qui prend le nom de *point eulerien* (Mazzola [1990], p.27).

On peut v rifier, en appliquant les axiomes contenus dans l **Appendice A2**, que l ensemble des ¨*hauteurs math matiques*© de la forme $h(f) = u\cdot\ln(f) + v$ est un *module* sur l anneau commutatif **Q** (Mazzola [1990], p.67) et que les op rations d addition (dans **R**) et de multiplication (d un nombre r el par un nombre rationnel) ont une interpr tation musicale naturelle, c.- -d.:

1) La structure additive du ¨*module des hauteurs*© [Tonhöhenmodulus] est le fondement pour la pens e intervallique des hauteurs [Tonhöhenabstanden] (Mazzola [1990], p. 68).
En fait, tant donn es deux hauteurs $h(f) = u\ln(f) + v$ et $h(g) = u\ln(g) + v$ on d montre tr s simplement qu on a la distance fr quentielle suivante (ou intervalle):

$$h(f)-h(g) = u\ln(f) + v - u\ln(g) - v = u[\ln(f)-\ln(g)] = u\ln(f/g).$$

2) La multiplication (scalaire) avec un nombre rationnel $u = \pm p/q$ est compos e des multiplications l mentaires (c.- -d. des op rations l mentaires sur les intervalles) suivantes:

a) Multiplication par u = -1 ou inversion des r les [Rollentausch]:

$$h(f) - h(g) \rightarrow u\text{Æ}h(f) - \ln(g)] = -1[\ln(f)-\ln(g)] = \ln(g)-\ln(f) = h(g)-h(f)$$

b) Multiplication par un nombre naturel u=p≥0 ou p-multiplication des rapports intervallaires. En particulier, si u=0 on retrouve l unisson, c.- -d. h(*f*) = h(*g*).

c) Multiplication par le nombre rationnel 1/q (avec q≠0 entier) ou q-r duction des rapports intervallaires. Ceci correspond la formation d une distance intervallique qui, apr s une q-multiplication, redonne la distance intervallique originelle h(*f*)-h(*g*). En particulier, si q=1 on a l op ration identique sur les distances intervallaires.

En revenant au cas d espace d Euler $\mathbf{Q}^3$ on observe que tout point eulerien $x=(r,s,u)\in\mathbf{Q}^3$ repr sente une hauteur $f(x)=k\cdot 2^r\cdot 3^s\cdot 5^u$. Comme on l a d j observ au d but de ce paragraphe, on peut associer les nombres 2, 3 et 5 respectivement aux intervalles de l octave, de la quinte et de la tierce majeure. Pour cette raison les ¨°*points euleriens unitaires*°¨°:

o = (1,0,0)

q = (0,1,0)

t = (0,0,1)

sont appel s respectivement (Mazzola [1990], p.27) point de l'octave [Oktavpunkt], de la quinte [Quintpunkt] et de la tierce [Terzpunkt].

Pour donner l espace d Euler $\mathbf{Q}^3$ une structure de module, on a besoin d un anneau R et d une multiplication scalaire correspondante. On prenne $R=\mathbf{Q}$ et on d finit (Mazzola [1990], p.68) pour tout point d Euler $x=(r,s,u)$ et tout nombre rationnel λ la multiplication suivante:

$$\lambda\cdot x = \lambda\cdot(r,s,u) = (\lambda\cdot r, \lambda\cdot s, \lambda\cdot u).$$

On peut v rifier que les axiomes de module sont respect s. Le module ainsi obtenu s appelle ¨°*module d Euler*°¨.

En plus, on peut utiliser les points euleriens unitaires pour repr senter tout point d Euler $x=(r,s,u)$ de fa on unique (Mazzola [1990], p.69):

$$x = r\cdot(1,0,0) + s\cdot(0,1,0) + u\cdot(0,0,1) = r\cdot\mathbf{o} + s\cdot\mathbf{q} + u\cdot\mathbf{t}.$$

En particulier les points $x = (-1, 1, 0)$ et $y = (-2, 0, 1)$ correspondent aux fr quences:

$$f(x) = k\cdot 2^{-1}\cdot 3^{1}\cdot 5^{0} = k\cdot 3/2$$
$$f(y) = k\cdot 2^{-2}\cdot 3^{0}\cdot 5^{1} = k\cdot 5/4$$

c.- -d. aux intervalles de quinte (juste), et de tierce majeure (par rapport une fr quence de base choisie). Dans la repr sentation qui utilise les points d Euler unitaires on a donc que:

$$x = -1\cdot\mathbf{o} + 1\cdot\mathbf{q} + 0\cdot\mathbf{t} = \mathbf{q} - \mathbf{o} = Q$$
$$y = -2\cdot\mathbf{o} + 0\cdot\mathbf{q} + 1\cdot\mathbf{t} = \mathbf{t} - 2\mathbf{o} = T$$

La figure suivante montre la repr sentation g om trique de deux points pr c dents dans l espace Eulerien. On observe que l'on retrouve, comme cas particulier le 12-temp rament (il suffit de prendre l axe des octaves). A la note *mi* du temp rament gale correspond le point T=**t** — **o**, tandis qu a la note *sol* correspond donc le point eulerien **q** —**o** (comme le montre la figure suivante)[32°]:

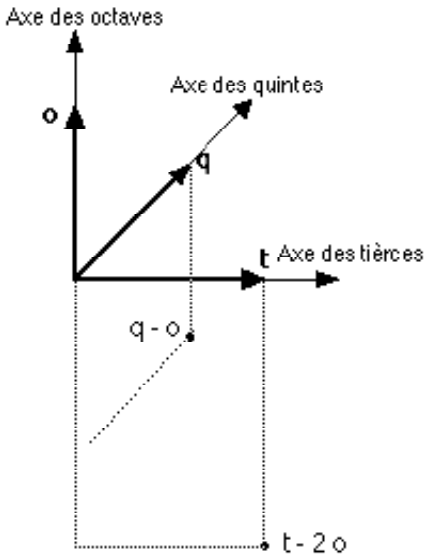


Figure 8. Deux points pr c dents dans l espace Eulerien.

En g n ral on peut donc repr senter toute diff rence $d = x_1 - x_2$ dans la forme (Mazzola [1990], p. 69) :

$$d = x_1 - x_2 = r\cdot\mathbf{o} + s\cdot\mathbf{q} + u\cdot\mathbf{t} = (r + s + 2u)\cdot\mathbf{o} + s\cdot(\mathbf{q}-\mathbf{o}) + u\cdot(\mathbf{t}-2\cdot\mathbf{o}) = a\cdot\mathbf{o} + s\cdot Q + u\cdot T.$$

c.- -d. est d rivable de l'octave, la quinte Q et la tierce T travers les op rations musicales l mentaires°: inversion des r les [Rollentausch], p-multiplication des rapports intervallaires [Abtragung] et q-r duction des rapports intervallaires [Teilung].
En particulier, dans le cas du temp rament juste, on retrouve des quantit s bien connues, plus pr cis ment:

1. Comme pythagorique
K**q** = 12Æ**q**(-**o**) - 7Æ**t** = 12Æ**q** - 19Æ**t**

2. Comme syntonique
K**t** = (**t**-2Æ**o**) + 2Æ**o** - 4Æ(**q**-**o**) = **t** - 4Æ**q** + 4Æ**t**

Dans son travail sur les gammes naturelles, le math maticien Yves Hellegouarch a montr comment on peut aller au-del du paradigme pytagoricien et du paradigme zarlinien avec l introduction, par exemple, de la septi me harmonique et la d finition correspondante de *comma.* En particulier il formalise une proc dure de calcul de la distance harmonique entre deux fr quences d une chelle naturelle qui permet d tablir ¨°*une hi rarchie de consonance pour chacune des chelles*°¨ (Levy [1999a], p. 59). Il se trouve que la notion de distance harmonique d Hellegouaurch est assez proche d'une fonction math matique de la dissonance qui rel ve, encor une fois, de la r flexion th orique sur la musique de Leonhard Euler. Cette application math matique, qu on appelle *fonction de Euler*, a t analys e en d tail initialement dans (Mazzola [1989]) et successivement dans (Mazzola [1990]). Pour une discussion sur les liens entre la distance harmonique d Hellegouarch et l usage de la fonction d Euler chez Mazzola voir (Levy [1999a]).

1.5 Classification travers les variations de perspectives

Le probl me de la classification des structures musicales travers des m thodes alg briques est comme on l d j vu, commun plusieurs propositions th oriques du XIX me et XX me si cle. Mais dans la majorit des cas les aspects contradictoires des soi-

disant th ories scientifiques de la musique rel vent d un cadre conceptuel trop limit par rapport la complexit du ph nom ne musical (Fichet [1996]). Dans les math matiques, le paradigme qui radicalise le processus de passage de l objet aux relations et transformations de l objet lui-m me (voir Introduction) est celle de la th orie des cat gories.

Port e philosophique de la th orie math matique des cat gories.

Cette fa on nouvelle d envisager l tude des structures math matiques a des cons quences qui d passent la r flexion sur la science et entrent, de force, dans le domaine de la philosophie et de l'esth tique. La th orie des cat gories, d une fa on extr mement diff rent par rapport la pr c dente th orie des ensembles, *¨°s av re d terminer une telle puissance universelle qu elle se d veloppe comme exposition de l ontologie (de la math matique) tout enti re°¨* (Badiou [1998], p. 1). Mettre la math matique entre parenth se signifie reconna tre que le probl me des *¨°fondements des math matiques°¨* ne repr sente qu une perspective, extr mement r duite (voire celle pist mologique) sur la port e de la th orie. Le point essentiel dans la discussion que nous voulons envisager est plut t d ordre ontologique, car *¨°l ontologie prescrite par la th orie des ensembles d termine l' tre en tant qu' tre ¨,* tandis que celle *¨°prescrite par la th orie des cat gories d termine l' tre comme acte, rapport, m o u v e m e n t°¨* (Badiou [1998],p. 1). On retrouve, ainsi, la dialectique *¨°intrins que/ extrins que°¨* que nous avons reprise de Lautmann d apr s la lecture musicale de F. Nicolas. Lorsque l objet est d termin *¨°par les rapports, ou mouvements, dont cet objet est la source ou le cible°¨* (Badiou [1998], p. 2), on est dans une ontologie cat gorielle ou *¨°extrins que°¨*, la diff rence de la d termination intrins que (ou *¨°immanente°¨*) de l tre qui rel ve de l ontologie ensembliste. Ainsi l existence d un objet, dans un univers r gl par la th orie des cat gories, ne d rive pas de l'aspect contradictoire de sa non-existence mais plut t de la fa on dont il est la source ou le but (la *¨°cible°¨* dans Badiou) d une collection de fl ches (ou morphismes). Car *¨°dans toute construction ne faisant intervenir que des notions cat goriques, seuls les morphismes comptent°¨* (Lafon [1998], p. 4). Le r sultat math matique qui donne cette id e g n rale un caract re *¨°op rationnel°¨* est le c l bre lemme de Yoneda, d apr s le math maticien japonais Nobuo Yoneda auquel on a fini par associer ce r sultat bien que sa *¨°contribution [...] ce lemme ne soit pas compl tement claire°¨* (Mazzola [1999], p.189). Il affirme qu un objet math matique peut tre *¨°classifi un isomorphisme pr s a*

travers l tude de tout point de vue (morphisme) d un autre objet du m me type°¨ (Mazzola [1993], p. 5).

Dans le cas de la musique, l tude d une structure musicale est donc conduit travers l emploi d un paradigme de type *fonctoriel* relevant de la th orie math matique des cat gories. La complexit de l objet donn est ainsi li e au nombre des perspectives qui sont n cessaires (et, pour Yoneda, suffisantes) pour le d crire. L existence de l objet, encore une fois, n est plus le point de d part pour une r flexion sur l objet lui-m me. La th orie des groupes, dans ses d veloppements nouveaux, offre des exemples remarquables de cette id e [33].

On prend, par exemple, le cas des ¨°groupes simples°¨, les groupes plus l mentaires, qui ¨°*jouent, vis- -vis des groupes g n raux, un r le similaire celui des nombres premiers par rapport tous les nombres*°¨ (No l [1989], p. 21), et partir desquels on peut reconstruire plus ou moins tous les autres groupes. Le probl me de la classification de tous groupes fins simples, qui est rest ouvert jusqu'au d but des ann es quatre-vingt, a mis en vidence la pr sence ¨°*extrins que*°¨ d un groupe qui chappait toute classification. [34] Pour une telle structure l existence a repr sent une tape successive (et relativement r cente) par rapport la collection de point de vue (ou perspectives) diff rentes sur l objet lui-m me.

L exemple pr c dent nous donne une bonne introduction la perspective fonctorielle sur la musique qui permette, par exemple, de revoir le concept traditionnel d chelle et de tonalit en ne faisant intervenir que des fl ches et des objets abstraits. Tout d abord, on observe que la notion de composition globale est bien repr sentable en termes de cat gorie et foncteurs, c.- -d. l ensemble abstrait des compositions globales et leurs morphismes forment une cat gorie, pourvu que les fl ches ainsi d finies prennent en charge non seulement la structure de module sous-jacent la composition globale mais aussi celle d atlas (Voir **Appendice A5**.).

Dans la terminologie de la MaMuTh une chelle est ¨°*une composition locale S dans un module M associ avec une note*°¨ (Mazzola [1993], p. 10). Du point de vue de la th orie des cat gories, la tonalit associ e avec une chelle donn e est ¨°*li e au foncteur contravariant* h_S*:*$Gl_R \rightarrow$ *Ens de la cat gorie* Gl_R *des compositions globales sur un anneau R la cat gorie des ensembles, d fini par h* $_S(X)=Hom(X,S)$°¨ (Mazzola [1993], p. 10)**.** Entrer dans les d tails de la proposition pr c dente d passe la limite et surtout le but de cette tude, mais on retiendra l id e g n rale°: la possibilit de changer la perspective par rapport au contexte est une des caract ristiques de l approche fonctorielle. Dans les cas des chelles et des

tonalit s (tant donn un ensemble d accords qui d finissent un *atlas* par rapport la composition globale, c.- -d. l chelle) on peut consid rer le morphisme d *enfoncement* d un accord de l atlas I dans l chelle S sous-jacente. Chaque choix du morphisme peut tre vu comme une perspective particuli re de l harmonie. Si on consid re, par exemple, le recouvrement de l chelle diatonique S dans Z_{12} travers les triades de la figure suivante on a une collection de cartes locales qui repr sentent un atlas pour la composition globale.

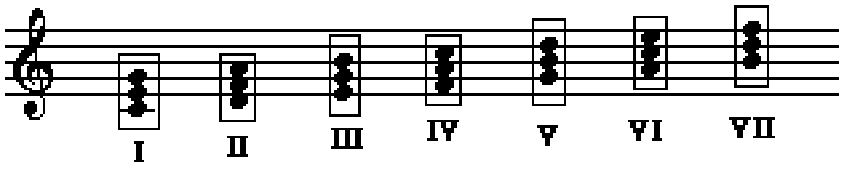


Figure 9. Recouvrement de l chelle diatonique.

L atlas d finit une ¨*interpr tation*¨ , voire une perspective particuli re de l chelle initiale parmi tous les points de vue extrins ques sur l objet. En fait la structure r sultant de l encontre entre chelle originelle (*composition locale*) et triades (*cartes locales*) n est pas non plus une composition locale simple mais acquiert une complexit structurelle nouvelle. Nous appelons une telle interpr tation ¨*interpr tation triadique*¨ (Mazzola [1990], p. 170). Pour tudier une telle structure, la th orie math matique de la musique propose d utiliser une construction g om trique qui rel ve de la topologie combinatoire. Elle s appelle *nerf* et sa construction a une pertinence esth tique que nous allons souligner en prenant, comme exemple, l interpr tation triadique de l chelle diatonique par rapport la th orie fonctionnelle de l'harmonie de Hugo Riemann.

Le ruban harmonique.

On commence associer chaque carte locale (voir chaque accord) un point dans un espace Euclidien de dimension n (quelconque), o le cas d espace Euclidien tridimensionnel n est donc qu un cas tr s particulier parmi les nombreux exemples d'espaces g om triques associ s un nerf. Toute carte locale est ainsi repr sent par un point, avec la seule limitation de ne pas faire correspondre des objets l mentaires diff rents (c.- -d. des accords diff rents) le m me point (et vice-versa, deux points diff rents les m mes structures locales). On joint ensuite par un segment tout couple de points qui correspondent des cartes initiales ayant des l ments en commun (c.- -d. dont l intersection est non vide). Trois cartes

diff rentes ayant des l ments en commun sont connect es travers une surface triangulaire et ainsi de suite. Quatre cartes qui ont une intersection, donnent lieu un 3-simplex (voire un t tra dre), et, cas le plus g n ral, n cartes ayant intersection non vide d terminent une structure n-1 dimensionnelle, appel n-1 simplex.

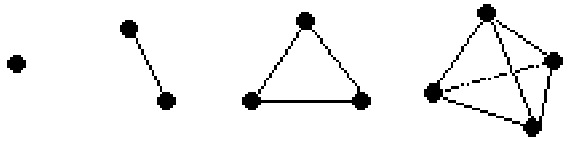


Figure 10. Point, segment, triangle, t tra dre.

Dans le cas particulier de l chelle diatonique et de son interpr tation triadique, la proc dure de construction du nerf s'arr te aux 2-simplex (c.- -d. aux triangles) mais la structure finale pr sente pourtant des propri t s int ressantes. Il s agit du c l bre ruban de M bius, comme il le montre la figure suivante :

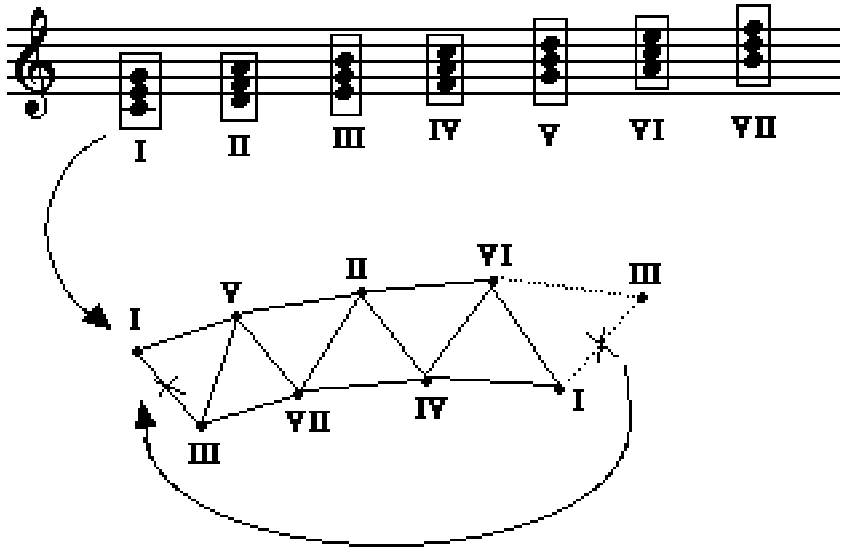


Figure 11. Nerf du recouvrement de l' chelle diatonique.

Dans la th orie math matique de la musique une telle structure s appelle ¨°*ruban harmonique*°¨ [Harmonisches Band], en honneur d Arnold Sch nberg qui parlait, dans son Trait d harmonie [Sch nberg, 1922; pp41-42], d un ¨°*harmonisches Band*°¨ entre les accords qui ont une intersection non vide. En transf rant toutes les potentialit s de la composition globale originelle dans la nouvelle structure topologique, on a ¨°*g om tris* °¨ des propri t s qui n taient pas videntes au d but. Un premier exemple d utilit d une telle structure rel ve de l id e g n rale de la th orie fonctionnelle de Hugo Riemann. Chez Riemann le terme

fonction [Funktion] r gle ¨°*la relation d un accord son centre tonal*°¨ (Bent [1998], p. 208). On peut formaliser ce concept d une fa on tr s sch matique travers le concept de fonction en sens math matique, car il s agit d une application qui exprime tout accord par rapport aux trois fonctions tonales de base°: la tonique T, la dominante D et la sous-dominante S. Toutefois, en essayant de d finir l ensemble des accordes diatoniques (I ^{er} degr , II me degr) partir de ces trois fonctions tonales (T, D, S) on s aper oit que ce n est pas suffisant et que d autres fonctions sont n cessaires. Le probl me a t soulign pour la premi re fois par Carl Dahlhaus dans (Dahlhaus [1966]), o il met en vidence que ¨°*la d termination de l importance de la logique harmonique est ainsi li e une r gle sur la succession des degr s*°¨ [35]. Cette ¨°*r gle*°¨ est bien claircie travers le ruban harmonique.

En fait, en suivant la succession des triades sur le rebord du ruban de M bius on obtient le cycle classique de quintes:

$$I \rightarrow V \rightarrow II \rightarrow VI \rightarrow III \rightarrow VII \rightarrow IV \rightarrow ...$$

On peut observer que cette propri t de cyclicit est bien repr sent e, g om triquement, par le fait que le ruban de M bius a une seule face. Nous restons, ainsi, dans la pleine g n ralit si on consid re, au lieu de la s quence pr c dente, la succession:

$$V \rightarrow I \rightarrow IV \rightarrow ...$$

qui a l avantage de pr senter, comme les trois l ments premiers, les ¨°*arguments*°¨ de la fonction riemannienne.

Notons t l application qui tout degr associe sa fonction tonale. On a, par exemple°:°

t (V) = D
t (I) = T
t (IV) = S

Nous allons montrer que la contradiction apparente de la fonction riemannienne, celle d avoir deux valeurs fonctionnelles diff rentes pour le m me l ment, s explique en fait par les propri t s locales/globales du ruban harmonique.

Notons avec αY le degr successif de Y dans la succession des quintes. On se rend compte qu'il existe (et il est unique) un autre degr , qu on notera βY, tel que Y, αY et βY

forment un 2-simplex (c.- -d. un triangle) dans le ruban de M bius. β(Y) s appelle ¨°*degr parall le*°¨[Parallel-stufe] de Y (Mazzola [1990], p.181), tandis que les applications β et α sont appel es respectivement ¨°*distance parall le*°¨ [Parallelabstand] et ¨°*distance de quinte*°¨ [Quintabstand]. Par exemple, on a pour le V me degr les valeurs suivantes:

α(V) = I

β(V) = III.

A travers le concept de distance parall le on peut donc reformuler la condition d galit fonctionnelle sur les degr s relatifs, selon laquelle un degr et son degr relatif doivent avoir la m me valeur fonctionnelle, c.- -d.:

$$t(Y) = t(\beta Y).$$

On a, par exemple, les valeurs fonctionnelles suivantes:

t (I) = t(βI) = t(VI) = T

t(IV) = t(βIV) = t(II) = S.

On arrive, ensuite, ce que Carl Dahlhaus appelait ¨°*le concept obscur*°¨ [Dunkler Begriff] dans la logique musicale riemannienne. En fait, pour les valeurs de Y respectivement III et V on trouve que:

t(V) = t(βV) = t(III) = D

t(III) = t(βIII) = t(I) = T

c.- -d. deux valeurs fonctionnelles diff rentes pour le m me l ment.

Math matiquement on exprime cette contradiction apparente des fonctions riemanniennes travers la propri t de non orientabilit du *nerf* associ au *recouvrement* initial. En effet, tant fix un degr Y, les l ments αY et βY forment, avec Y, une orientation locale sur le ruban de M bius et cette orientation ne peut pas tre g n ralis e une propri t d orientabilit globale (Voir fig. 12)

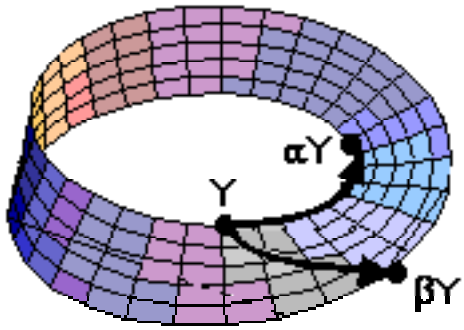


Figure 12. Orientation locale sur le ruban de M bius.

Une tude r cente sur la th orie fonctionnelle de Riemann (Noll [1995]) a montr comme ¨°*la polys mie [...] de la th orie fonctionnelle classique peut tre explicit e et rendue operationnelle travers les techniques de la th orie math matique de la musique*°¨ (Mazzola [1999], p.102).

Pour une discussion de ce probl me dans l esprit d un possible compte rendu critique de la musicologie du point de vue s miotique on renvoi (Mazzola [1999b])

Chapitre 2.
De la th orie modale d Anatol Vieru au mod le alg brique des canons musicaux[36]

2.1 Quelques aspects de la th orie modale d Anatol Vieru.

Bien que l objet principal de ce chapitre soit les canons musicaux rythmiques, il faut souligner, encore une fois, qu ils repr sentent plut t le point d arriv e d une th orie qui est n e et s est d velopp e dans l univers hors-temps des classes des hauteurs. Les premiers articles de Vuza sont d di s la formalisation des aspects math matiques de la th orie que le compositeur roumain Anatol Vieru avait nonc e dans son livre des modes (Vieru [1993]). Selon Anatol Vieru, les tudes de Vuza ont eu une triple fonction: Premi rement, celle d examiner la coh rence du mod le propos , deuxi mement de v rifier ses assertions et, troisi mement, de leur donner un vrai fondement math matique (Vieru [1993], p.151). On peut avoir une id e tr s pr cise du travail de formalisation de Vuza en analysant un des rares crits du compositeur roumain paru dans la revue am ricaine *Perspectives of New Music* et d di la discussion du concept de modalit comme une troisi me approche compositionnelle et esth tique, entre la tonalit et l atonalit (Vieru [1992]). L crit est int ressant parce qu il nous montre aussi une d marche diff rente du compositeur par rapport aux th oriciens am ricains de la musique et, en m me temps, l impossibilit de classer ses

propositions th oriques l int rieur de la r flexion de Iannis Xenakis sur la musique symbolique.

Bien qu on retrouve, dans cet article, les op rations ensemblistes qui nous rappellent les proposition th oriques de Iannis Xenakis sur l axiomatisation et la formalisation de la musique (Xenakis [1994], pp.67-74), Vieru n h site pas souligner qu il n est pas question, pour lui, de *musique symbolique* du type d fini par Xenakis (Vieru [1992], p.64) car ce qu on retrouve dans la th orie modale est ¨°*le mod le de comportement de l oreille commun*°¨ (Vieru [1992], p.64). L assertion soul ve, videmment, plusieurs probl mes que nous ne pouvons pas aborder ici, mais elle est quand m me r v latrice d une attention, chez le compositeur roumain, des aspects li s la physiologie de la perception. Il d fend sa position en prenant, comme exemple, un mode traditionnel roumain, le soi disant ¨°*mode Bacovia*[37]°¨, qu il avait employ dans sa composition de 1959 *Lupta cu inertja* (La lutte contre l inertie).

Math matiquement on peut repr senter tout mode comme un sous-ensemble des classes de restes (ou r sidus), travers l isomorphisme usuel qui associe la famille de tous les do, l l ment 0 du groupe cyclique $\mathbf{Z_{12}}$. Dans le cas du mode *Bacovia* on obtient l ensemble {0,3,6,7,11} d l ments de $\mathbf{Z_{12}}$, dont on peut faire correspondre la structure intervallique (3,3,1,4,1) obtenue en partant de la diff rence des l ments cons cutifs de l ensemble pr c dent [38].

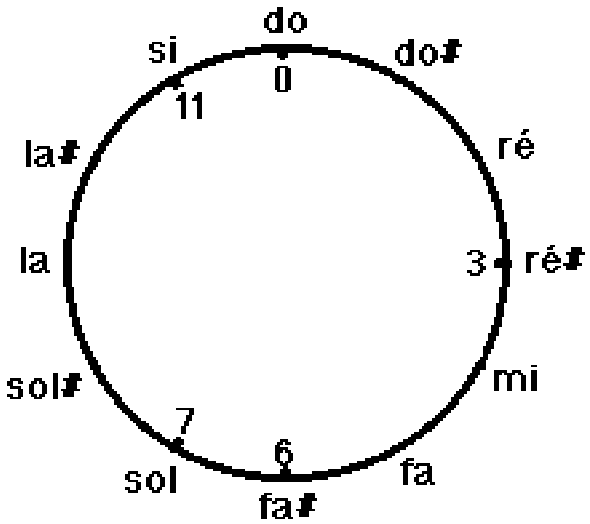


Figure 13. Le mode *Bacovia*.

Si on note $\{Bac_n\}$ la transposition de n semi-tons du mode originel $\{Bac_0\}=\{0,3,6,7,11\}$ et avec $\sim\{Bac_n\}$ le compl ment de la n-i me transposition du mode originel de Bacovia l int rieur du total chromatique (qu on indique avec TC), on obtient, par exemple (Vieru [1992], p.64):

$$\sim\{Bac_3\} = TC\backslash\{2,3,6,9,10\} = \{0,1,4,5,7,8,11\}$$

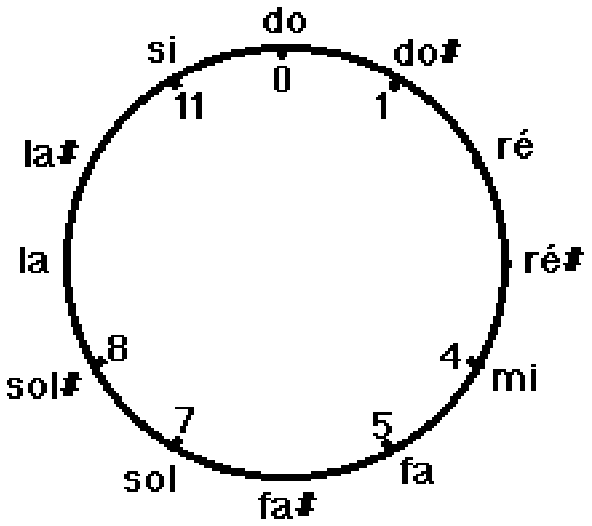


Figure 14. Le compl ment du $\{Bac_3\}$.

On s aper oit que l ensemble ainsi obtenu est l union ensembliste de deux transpositions du m me mode Bacovia , plus exactement $\{Bac_1\}=\{0,1,4,7,8\}$ et $\{Bac_5\}=\{0,4,5,8,11\}$. La propri t est tout fait g n rale et on peut la formaliser de la fa on suivante (Vieru [1992], p.65):

$$\{Bac_n\}\cup\{Bac_{n+4}\} = \sim\{Bac_{n+2}\},$$

c.- -d.:

> ¨°*l union de deux transpositions situ es la distance d une tierce majeure est compl mentaire un autre mode situ un intervalle de seconde majeure par rapport au mode initial*°¨ (Vieru [1992], p. 65).

Toutes ces propri t s se refl tent, videmment, au niveau des structures intervalliques, mais les modes et les structures intervalliques ne sont pas deux objets quivalents. Avant de montrer qu elles sont *essentiellement* diff rentes nous reprenons une observation de Vieru propos de la structure interne de ce mode. Malgr sa d fectivit qui le rend apparemment tr s pauvre, le mode est, en r alit , suffisamment riche pour contenir, son int rieur, l accord majeur, l accord mineur, l accord diminu et l accord augment . En prenant les quatre accords pr c dents comme cartes locales on peut construire une ¨°interpr tation°¨ du mode

Bacovia dans la perspective de la th orie math matique de la musique. On a choisi d utiliser deux fois le m me accord (troisi me et cinqui me carte) pour montrer que quatre types d accord sont suffisants pour reconstruire le mode. En outre, comme soulign par Vieru, il s agit du plus petit mode (c.- -d. le mode ayant le minimum de notes) qui contient, dans sa structure interne, l accord majeur, la mineure, l augment et le diminu .

Dans la repr sentation g om trique du mode comme ¨°*composition globale*°¨ au sens de la th orie math matique de la musique les quatre accords qu on a choisi forment un recouvrement dont on peut associer, comme d habitude, le *nerf* [39](cfr Fig.15)

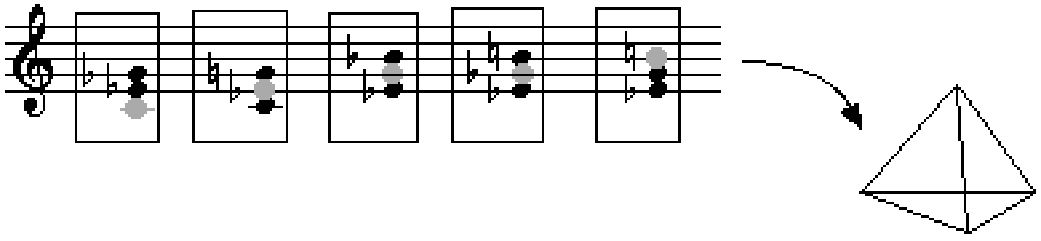


Figure 15. Nerf associ au mode Bacovia.

En revenant au probl me du rapport entre modes et structures intervalliques, il se trouve que la diff rence entre ces deux objets est bien claircie travers une op ration qui est caract ristique, selon Vieru, de l univers modal [40] (Vieru [1985], p. 66)°: la *composition* entre modes et structures intervalliques. ¨°*Composer deux modes a correspond donner chacun la structure de l autre*°¨ (Vieru [1992], p.65). Par exemple, si on consid re les sous-ensembles suivants du mode Bacovia°:

Dim = {0, 3, 6}
Aug = {3, 7, 11}

La composition de *Dim* avec *Aug* est le mode qu on obtient en prenant l union de toutes transpositions de *Dim* construites sur chaque note de *Aug*. L op ration est montr e dans la figure suivante°:

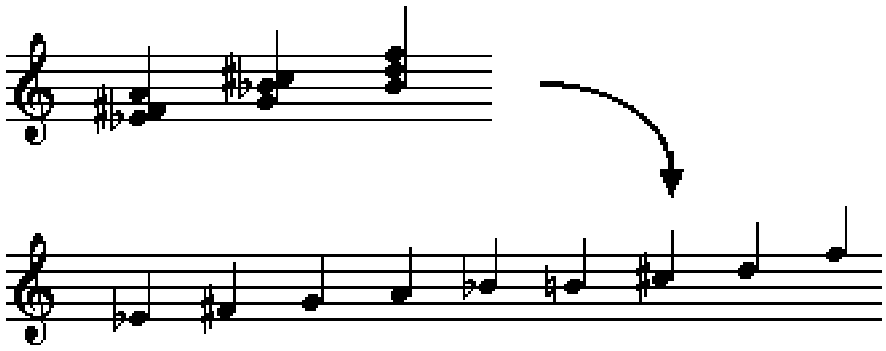
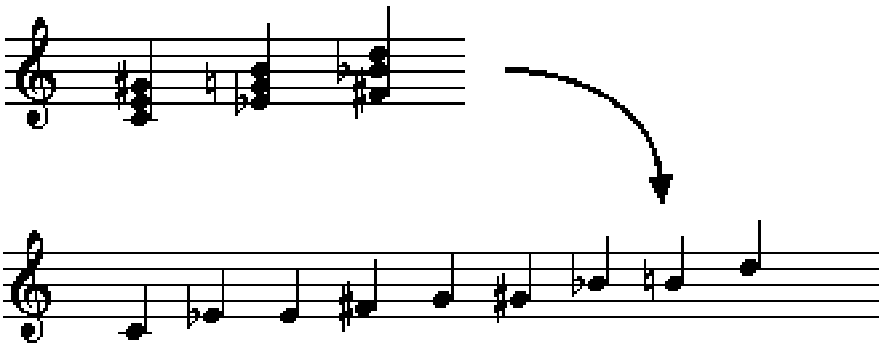


Figure 16. Composition de *Dim* avec *Aug*.

L observation que fait Vieru donne la meilleure justification au travail de formalisation de Dan Tudor Vuza. Il observe que la propri t de composition sur les modes n est pas *commutative*, c.- -d. que le mode qu on a obtenu est diff rent, en g n ral, de celle qu on obtient en faisant la composition de *Aug* avec *Dim* (c.- -d. en renversant les deux structures musicales), comme le montre la figure suivante˚:



Figure˚17. Composition de *Aug* avec *Dim*.

La diff rence, au contraire, dispara t si on consid re les structures intervalliques associ es, autrement dit ¨˚*la composition de deux structures modales est commutative*˚¨ (Vieru [1992], p.65). Comme on le verra dans le dernier chapitre, Vuza a formalis toutes ces propri t s travers la notion math matique d *action* d un groupe sur un ensemble en g n ralisant, potentiellement, des autres processus compositionnels qui ne rel vent pas n cessairement de l univers modal d Anatol Vieru.

L exemple plus vident concerne l quivalence formelle entre la loi de *composition* chez Vieru et la technique de *multiplication* d accords chez Boulez. A la diff rence de la d marche modale d Anatol Vieru, l laboration de cette technique g n ralisatrice de l op ration de transposition par Pierre Boulez a sa source dans un effort ¨˚*formaliser et*

largir structurellement les processus de transformations utilis s dans les techniques s rielles°·. [41] Curieusement aucune r f rence n'est faite par Vieru ou Vuza la technique boulezienne de multiplication d accords, qui remonte aux ann es soixante (Boulez [1963] et [1966]).

L approche alg brique propos e par Vieru et formalis par Vuza ouvre la recherche la classification de toutes les familles de classes modales qui ont les m mes propri t s. En particulier, on centre le propos sur le cas de deux familles particuli res de structures modales qui seront essentielles pour introduire le probl me de la construction des canons rythmiques: les *classes transposition limit e* et les *classes partitionnantes* .

Modes transposition limit e de Messiaen.

Selon Messiaen un mode M est transposition limit e s il existe une op ration de transposition (non identique et diff rente de la transposition d octave ou de ses multiples) telle que le mode transpos soit gal au mode originel. La propri t peut tre formul e d une fa on tr s l gante en termes alg briques en disant qu un *mode* (dans le sens d'une classe de r sidus) est transposition limit e si son *stabilisateur* n'est pas nul, o le stabilisateur S_M d un sous-ensemble M d un groupe G est, par d finition, l ensemble de tous l ments *g* du groupe G tells que *g*+M=M. Par exemple l accord augment { do,mi,sol#} est un mode (Vieru) transposition limit e (Messiaen). Du fait (trivial) que, si le sous-ensemble M est transposition limit e alors toutes ses transpositions ont la m me propri t , on est conduit, d une fa on naturelle, g n raliser la notion de mode celle de classe modale (voir classe de transposition d un mode) transposition limit e. On souligne ici que dans la perspective de la th orie math matique de la musique la propri t pr c dente est une *propri t locale* .

Une deuxi me famille particuli re de structures modales qui entreront dans la probl matique des canons rythmiques est celle des classes partitionnantes (Vuza [1983]) et (Vuza [1985]). Cette d nomination rel ve du fait que les classes partitionnnantes forment une partition du total chromatique. La notion de *partition* (au sens math matique) dans la musique est commune plusieurs approches th oriques, par exemple (Babbitt [1972]), (Bazelow et Brickle [1976]), (Lewin [1977]), (Halsey et Hewitt [1978]). Mais le probl me soulev par Vieru et Vuza donne la probl matique alg brique de la partition une application

musicale extr mement naturelle. Une structure modale est partitionnante si le total chromatique est une union disjointe de transpositions d un repr sentant. Autrement dit, si on indique avec M_i les transpositions d un m me mode M, on a que:

$$\mathbf{Z_{12}} = \cup M_i \text{ et } M_i \cap M_j = \varnothing \text{ si } i \neq j.$$

Un exemple musical est repr sent par le t tracorde mineur TM_{do}={do, re, mi_b, fa}, et ses deux transpositions, respectivement TM_{mi}={mi, fa#, sol, la} et $TM_{sol\#}$ ={sol#, la#, si, do#}. Les trois ensembles sont disjoints (c.- -d. ils n ont pas d intersection) et leur union redonne le total chromatique[42].

Cependant il y a une autre fa on assez curieuse d obtenir le total chromatique en partant du m me t tracorde mineur TM_{do}={ do, re, mi_b, fa}. On prend, tout d abord, sa repr sentation comme sous-ensemble du groupe cyclique $\mathbf{Z_{12}}$, c.- -d. TM_0 ={0,2,3,5}. On peut v rifier facilement que tout l ment *g* du groupe est repr sentable, d une fa on unique, comme somme alg brique (modulo 12) d un l ment *x* de l ensemble TM_0 et d un l ment *y* appartenant l ensemble { 0,4,8}. Les ensembles qui poss dent la propri t pr c dente sont appel s, d apr s Vuza, ¨*ensembles suppl mentaires* ¨ [supplementary sets]. On a donc retrouv , comme ensemble suppl mentaires du t tracorde mineur, la triade augment e { do, mi, sol#}, que nous avons d j class e l int rieur des modes transposition limit e.

L exemple que nous venons de discuter repr sente, en empruntant la terminologie de Lautman, une propri t *intrins que* du syst me temp r occidental douze degr s. Autrement dit, pour tout choix d accords factorisants M et N du total chromatique, au moins un accord a la propri t d tre transposition limit e (Vuza [1991], p.24). La propri t ne peut pas tre g n ralis e tous les temp raments gaux (c.- -d. tout groupe cyclique $\mathbf{Z_n}$). Par exemple, dans le cas du syst me microtonal temp r en $1/12^e$ de ton (division de l octave en 72 parties gales), comme celle propos e par Wyschnegradsky (Wyschnegradsky [1996]) la propri t qui lie classes factorisantes et classes transposition limit e de Messiaen n est plus valable. Mais pour comprendre les principales cons quences de cet nonc , il faut abandonner le paradigme hors-temps des hauteurs ou, plus exactement, ¨*transf rer [les structures modales] dans la sph re temporelle* ¨ (Vieru [1993], p.151).

2.2 Les canons rythmiques et le probl me du pavage de l espace g om trique.

L histoire des canons musicaux est tr s riche de r flexions qui rencontrent, la fois, l int r t de musiciens, de th oriciens et, tr s souvent, de math maticiens.

Du point de vue math matique, l emploi de m thodes alg briques dans l analyse de cette forme musicale est propre notre fin de si cle. On trouve les premiers d bats sur le sujet dans une s rie de trois conf rences d un th oricien danois A.D. Fokker (Fokker [1947] qui est sans doute un des premiers avoir introduit le concept de *groupe* dans l analyse de la structure formelle d un canon, et encore de nos jours, la th orie des groupes est appliqu e l tude de toutes les sym tries pr sentes dans les variations Goldberg (Scimeni [1997]) en passant par Frank J. Budden, qui d die un chapitre entier d un livre de math matiques au probl me des groupes dans la musique (Budden [1972]).

Dans le domaine des canons rythmiques qui sont l objet de la pr sente tude, on doit Olivier Messiaen l introduction et l emploi syst matiques de formes canoniques o l imitation entre les diff rentes parties ne concerne que les valeurs rythmiques, ind pendamment des autres param tres, telles que la m lodie et l harmonie. Le canon rythmique de la figure 18, extrait de la 7 me partie (Adieu) de son ˙°Chant d amour et de mort °¨ (*Harawi*), repr sente ici un double int r t. Tout d abord, les trois parties sont construites, rythmiquement, comme un encha nement (une juxtaposition) de trois rythmes non retrogradables. Si on prend comme unit la double-croche, les rythmes peuvent tre repr sent s de la fa on suivante:

R1=(3, 5, 8, 5, 3)
R2=(4, 3, 7, 3, 4)
R3=(2, 2, 3, 5, 3, 2, 2).

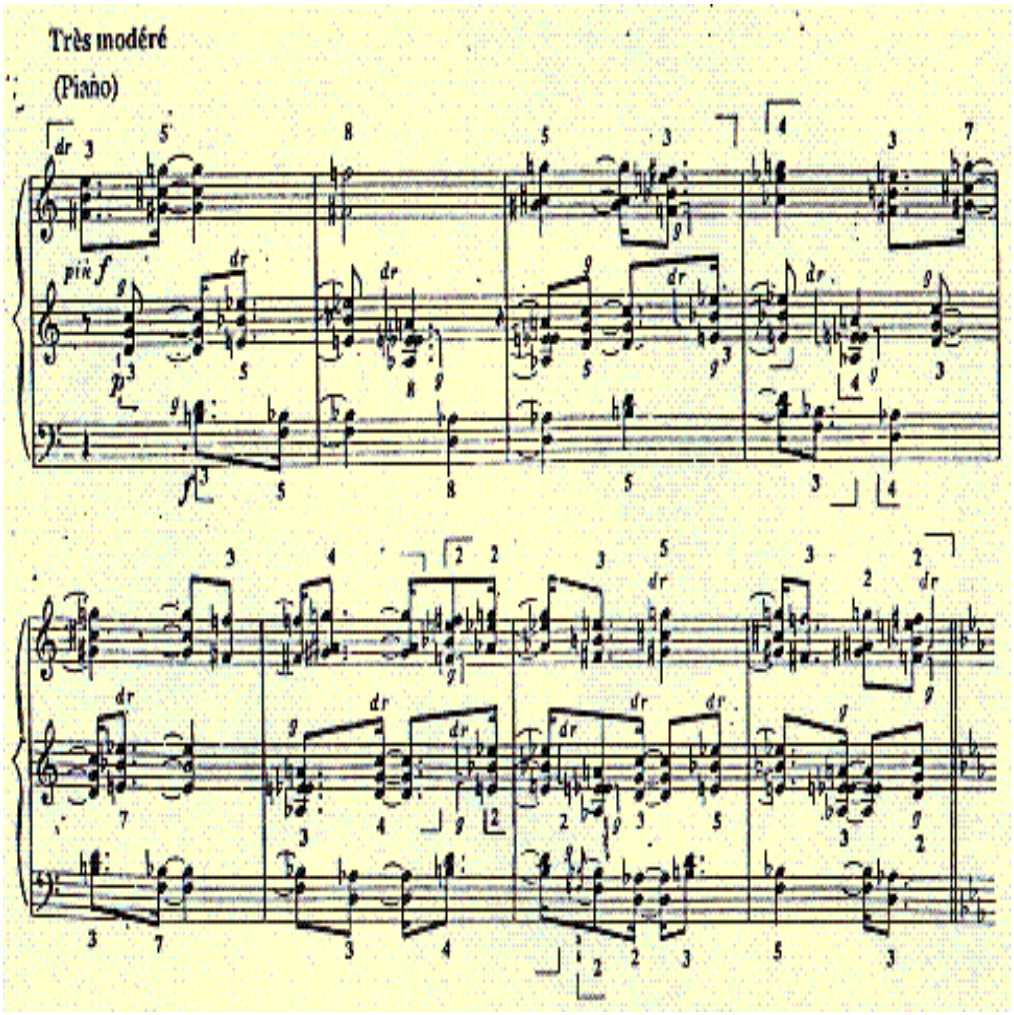


Figure 18. Extrait de la 7 me partie de *Harawi.*

La distance entre les entr es de ce triple canon est fixe et correspond une croche. Le r sultat final est, curieusement, assez proche de l objet de ce chapitre, savoir le probl me du pavage de l espace g om trique. En fait, les trois parties sont, presque toujours, compl mentaires, c.- -d. que les superpositions simultan es de deux voix diff rentes sont tr s rares. Une fa on tr s simple pour le d terminer, en cr ant une mod lisation rythmique de la pi ce, est d utiliser la d finition du *rythme* propos e par Vuza (Vuza [1985]˚; [1992]). Comme soulign par le titre de son premier article d di au probl me du temps dans la musique, Vuza se centre sur un objet musical tr s particulier, le rythme p riodique, qui est formalis comme un sous-ensemble p riodique et localement fini du corps **Q** des nombres rationnels, plus pr cis ment (Vuza [1991, p.38) un sous-ensemble R de **Q** (ventuellement vide) tel que:

1. L ensemble S_R des nombres rationnels positifs t tels que t+R=R est non vide.

2. Pour tout couple d l ments (a, b) du groupe additif **Q** tels que $a<b$, l ensemble R∩[a,b[est fini.

Les deux conditions formalisent le fait que le rythme est, tout d abord, une collection d objets˚:

a) qui peuvent tre d nombr s [43]˚;

b) qui se pr sente, souvent, avec des propri t s de p riodicit (c.- -d. de r p tition identique)[44]

c) qu il ˙˚*fait entendre un nombre fini de battements dans chaque laps fini de temps*˚¨ (Vuza [1985], p.78).

Pour appliquer le mod le de Vuza aux canons de Messiaen, on assume que la structure rythmique de chaque partie est p riodique et que le canon (rythmique) r sultant est infini.
Le rythme de chaque partie est donc le sous-ensemble R de **Q**:

R={0, 3/16, 1/2, 1, 21/16, 3/2, 7/4, 31/16, 19/8, 41/16, 45/16, 47/16, 49/16, 13/4, 57/16, 15/4, 31/8, 4} + 3**Z**.

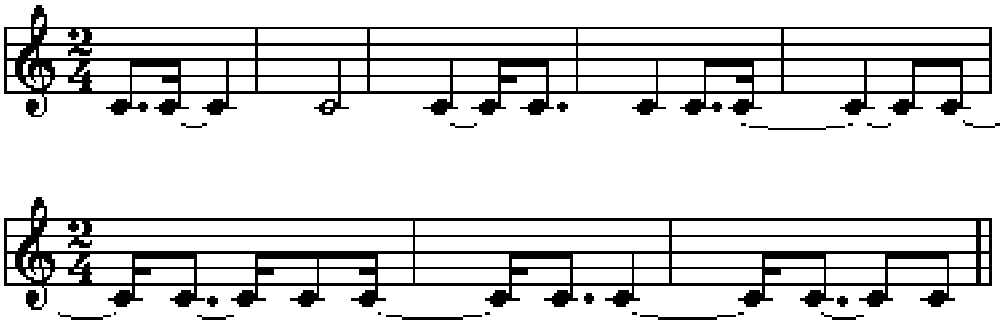


Figure 19. Rythme de chaque partie du canon de Messiaen.

Les autres parties ont le m me rythme, mais elles sont d cal es dans le temps selon des quantit s respectivement d une croche (t_1=1/8) et une noire (t_2=1/4).
Pour retrouver les instants temporels dans lesquels les voix se superposent, il suffit de calculer les ensembles R =t_1+R et R =t_2 +R et faire l intersection I=R∩R ∩R .

L ensemble qu on vient de discuter repr sente une bonne introduction au probl me de la formalisation d un canon rythmique travers des moyennes alg briques plus fines, qui soient capables d abstraire, partir de propri t s locales, l architecture g n rale de la pi ce.
En particulier, on pourrait tre int ress rendre vide l ensemble pr c dent I. Un exemple qui

radicalise, pourrait-on dire, les intentions de Messiaen sur les rythmes non retrogradables et la compl mentarit entre parties diff rentes, est repr sent dans la figure suivante. Il s agit d un canon 6 voix, prototype de toute une s rie de canons qu on appelle, d apr s Vuza, *Canons r guliers compl mentaires de cat gorie maximale* (Vuza [1991]). Personnellement je le consid re, en empruntant une expression introduite r cemment par Marc Chemillier (Chemillier [1999]) comme une sorte de ˙°singularit °¨ dans mon approche de la th orie des canons rythmiques de Dan Tudor Vuza.[45]

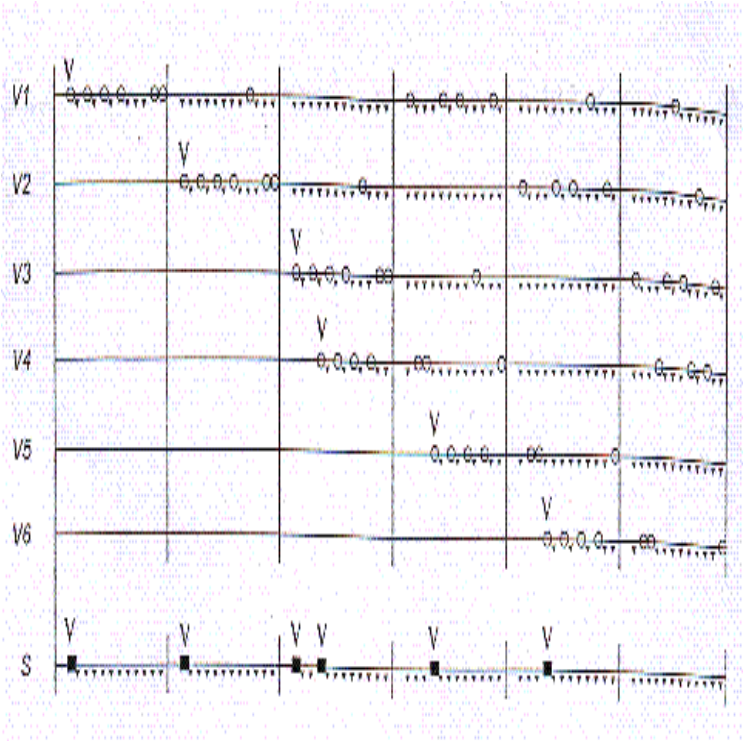


Figure 20. Canon r gulier compl mentaire de cat gorie maximale (groupe Z_{108}).

Les six voix sont toutes compl mentaires et sont telles que la classe rythmique r sultante de la superposition de toutes voix est une pulsation r guli re . Autrement dit, chaque instant temporel correspond une attaque (et une seulement) d une voix. On a marqu le d but de chaque voix par un accent et les attaques sont repr sent s par des petits cercles vides (o). Le pattern rythmique S s appelle une *classe m trique* [metric class] et elle organise les entr es des diff rentes voix selon des attaques correspondantes aux carr s pleins. La classe rythmique d une voix ou *classe de base* [ground class] et la classe m trique sont, d apr s le mod le de Vuza, deux classes rythmiques p riodiques et, dans ce cas, on trouve que la p riode est la m me, c.- -d. 108 (unit s de base). Les canons rythmiques ayant cette derni re propri t s appellent ˙°*canons de cat gorie maximale*°¨ [canons of maximal category].

Pour r sumer, on a donc un objet musical d termin par deux classes rythmiques p riodiques compl mentaires (classe de base et classe m trique) ayant le m me p riode (cat gorie maximale) et telles que l union de toutes les classes de base donne une pulsation r guli re. On a commenc tudier cette famille particuli re de canons rythmique travers le logiciel *OpenMusic* d velopp par l quipe de repr sentation musicale dirig e par G rard Assayag. L analyse des probl mes li s l application informatique de la th orie qu on vient de pr senter sera l objet de la section suivante.

2.3 Applications informatiques: *OpenMusic* et les ¨ Canons r guliers compl mentaires de cat gorie maximale °¨.

Dans cette section, nous abordons le probl me de l impl mentation de l algorithme alg brique propos par Vuza (Vuza [1991] et [1995]) dans le logiciel d criture assist e par ordinateur *OpenMusic*. Nous sommes ici vis- -vis d une probl matique beaucoup plus g n rale sur le r le de l informatique dans la g n ration musicale automatique (Barbaud [1965] et [1968]) et la formalisation des structures musicales (Riotte [1979], Chemillier [1989]). Dans le cas de canons rythmiques propos s par Vuza, l impl mentation peut tre consid r e comme un vrai changement de paradigme qui a d termin , tout d abord, une v rification exp rimentale des m thodes et des r sultats d j obtenus mais aussi un moyen pour introduire des g n ralisations possibles du mod le, en accord avec les r flexions propos es dans (Andreatta [1997c]).

Du point de vue alg brique, la structure d un canon r gulier compl mentaire de cat gorie maximale est li e une factorisation du groupe cyclique $\mathbf{Z_n}$ comme somme de deux sous-ensembles M et N suppl mentaires non p riodiques , c.- -d. tels que le stabilisateur soit vide (Cf. 2.1). Si on reprend l interpr tation musicale du stabilisateur, comme soulign e dans le chapitre 2.1, on s aper oit que la condition pr c dente est quivalente affirmer que M et N ne sont pas des modes transposition limit e. On a vu que, dans le cas de la division de l octave en 12 parties gales, pour tout couple de sous-ensembles M et N de $\mathbf{Z_{12}}$ suppl mentaires, au moins un des deux modes est un mode de Messiaen transposition limit e. En g n ral, on pr f re parler de *p riodicit* ¨°*sym trie transpositionnelle*°¨ (Vuza [1991, p.24]) parce qu il se trouve que le probl me peut tre g n ralis n importe quel groupe G (Andreatta [1997c]). Tout groupe comme $\mathbf{Z_{12}}$ tel que, si on le factorise travers

deux sous-ensembles suppl mentaires M et N, a au moins un des deux p riodique, s appelle ¨°*groupe de Hajos*°¨ (ou, d une fa on quivalente, ¨° *groupe ayant la propri t de Hajos*°¨).

Hajos est un math maticien hongrois qui a d montr , dans les ann es quarante, une c l bre *conjecture* qui remonte la fin du XIX me si cle: la conjecture de Minkowski [46]. Dans sa forme g om trique (1907) elle affirme que:

> ¨°*Dans un pavage* [lattice tiling] *d un espace n-dimensions par des cubes unit , il y a au moin un couple de cubes qui ont en commun une face enti re de dimension n-1*°¨ (Stein [1994], p. 22)

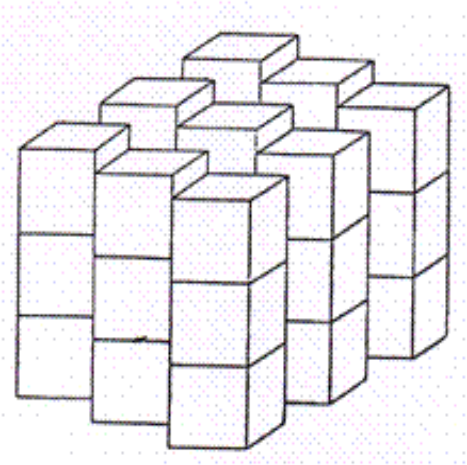


Figure 21. Pavage de l'espace tridimensionnel par des cubes unit .

Dans le cas d un pavage de l espace Euclidien tridimensionnel, comme celle de la figure pr c dente, la condition est facilement v rifiable, car il y a au moins un couple de cubes qui ont en commun une face bidimensionnelle.
Le lien entre la conjecture de Minkowski et la solution alg brique de Hajos est l objet d un ouvrage r cent qui encadre le probl me dans une perspective beaucoup plus g n ral sur les rapports entre la g om trie et l alg bre (Stein, [1994]). Une discussion de ce probl me d passerait le cadre de cette tude. Cependant, il faut souligner qu il y a un lien tr s fort entre un probl me g om trique de pavage (voir de *carrelage* dans le cas de l espace bidimensionnel) et une structure musicale qui r alise une autre forme de pavage en saturant l axe temporel des attaques.

Pour revenir la propri t de Hajos, le lien avec la th orie de Vuza peut tre tabli en se limitant aux groupes cycliques. La liste compl te des groupes cycliques ayant la propri t

de Hajos remonte aux ann es cinquante (Sands [1953]). Les m mes groupes ont t retrouv s, d une fa on ind pendante du probl me originaire de Minkowski, par Vuza (Vuza [1991], p. 33). La premi re tape de notre impl mentation a t d tablir une liste de valeurs pour un nombre *n* donn correspondant aux groupes cycliques $\mathbf{Z_n}$ qui ne poss dent pas la propri t de Hajos. La figure suivante montre la liste pour les entiers inf rieurs 1000. Elle est obtenue d apr s (Sands [1959]) et (Vuza [1991]) en supprimant[47]°de la liste des entiers de 1 1000 tous les entiers qui sont°:

a) Une puissance d un nombre premier
b) Un produit d une puissance d un nombre premier par un autre nombre premier
c) Un produit des carr s de deux nombres premiers distincts
d) Un produit de deux nombres premiers par un troisi me nombre premier ou son carr
e) Un produit de quatre nombres premiers

(72 108 120 144 168 180 200 216 240 252 264 270 280 288 300 312 324 336 360 378 392 396 400 408 432 440 450 456 468 480 500 504 520 528 540 552 560 576 588 594 600 612 616 624 648 672 675 680 684 696 700 702 720 728 744 750 756 760 784 792 800 810 816 828 864 880 882 888 900 912 918 920 936 945 952 960 968 972 980 984 1000)

On sait (Vuza [1995], p. 95) que tout nombre entier n de ce type peut tre d compos °:

$$n = p_1.p_2.n_1.n_2.n_3$$

o °:

- p_i sont premiers et diff rents
- $p_1.n_1$ n a pas de diviseur en commun avec $p_2.n_2$ (c.- -d. ils sont relativement premiers entre eux).
- Les n_i sont des entiers sup rieurs de 2 ($1 \leq i \leq 3$).

La liste suivante montre que dans la majorit des cas la d composition n est pas unique.

72 : { (2 3 2 3 2) }
108 : { (2 3 2 3 3) }
120 : { (2 3 2 5 2), (2 5 2 3 2) }
144 : { (2 3 2 3 4), (2 3 4 3 2) }
168 : { (2 3 2 7 2), (2 7 2 3 2) }

180 : { (2 3 2 5 3), (2 3 2 3 5), (2 3 5 3 2), (2 5 2 3 3) }

200 : { (2 5 2 5 2 }

216 : { (2 3 2 3 6), (2 3 2 3 6), (2 3 4 3 3) }

240 : { (2 3 4 5 2), (2 3 2 5 4), (2 5 2 3 4), (2 5 4 3 2) }

252 : { (2 3 7 3 2), (2 3 2 3 7), (2 3 2 7 3), (2 7 2 3 3) }

264 : { (2 3 2 11 2), (2 11 2 3 2 }

270 : { (2 3 5 3 3) }

280 : { (2 5 2 7 2), (2 7 2 5 2) }

288 : { (2 3 4 3 4), (2 3 2 3 8), (2 3 8 3 2) }

300 : { (2 3 2 5 5), (2 5 2 5 3), (2 5 2 3 5), (2 5 3 5 2) }

312 : { (2 3 2 13 2), (2 13 2 3 2) }

324 : { (2 3 2 3 9), (2 3 2 9 3) }

336 : { (2 3 2 7 4), (2 3 4 7 2), (2 7 2 3 4), (2 7 4 3 2) }

360 : { (2 3 10 3 2), (2 3 4 5 3), (2 3 4 3 5), (2 3 2 5 6), (2 3 2 3 10),
(2 3 5 3 4), (2 5 2 3 6), (2 5 2 3 6), (2 5 4 3 3) }

... ...

Ce fait a des cons quences importantes, comme on verra, sur le nombre de voix possibles pour que tels canons existent (par exemple, pour n=120 on a deux solutions qui correspondent deux canons diff rents respectivement 10 et 6 voix).

Le point essentiel du mod le rythmique de Vuza est qu il permet d tablir une analogie compl te (on parle d'un isomorphisme) entre l univers ¨°hors temps°¨ de classes modales et celle des classes rythmiques. Ce probl me nous rapproche, encore une fois, une id e originaire de Messiaen, quand il propose une analogie entre les rythmes non r trogradables et des modes transposition˚limit e (Messiaen [1944])˚: ¨°les modes transposition limit e r alisent, dans le sens vertical (transposition) ce que les rythmes non-r trogradables r alisent dans le sens horizontal (r trogradation)°¨ [48]. Cette analogie, qui fonctionne tr s bien au niveau m taphorique, pose des probl mes du point de vue math matique, comme soulign dans (Mazzola [1990], p. 99).

Dans Vuza le lien entre le mod le math matique du rythme et la th orie modale ¨°est fourni par l existence de bijections canoniques entre certains sous-ensembles de rythmes (respectivement classes rythmiques) et l ensemble des modes (respectivement classes

modales) dans un syst me temp r n degr s°¨ (Vuza [1985], p. 73). On peut donc associer d une fa on naturelle aux ensembles M et N respectivement la classe de base R et la classe m trique S d un canon ayant un nombre de voix compl mentaires gal la cardinalit de l ensemble M (c.- -d. $n_1.n_2$), de m me p riode pour les deux classes R et S (c.- -d. n) et ayant comme *classe r sultante* [49] celle correspondant une pulsation r guli re (avec une unit temporelle choisie). Dans le cas du canon model sur le groupe cyclique $\mathbf{Z_{108}}$ et propos au d but de cette section, on a°:

M = {39, 51, 63, 66, 78, 90}
N = {16, 18, 20, 22, 26, 27, 36, 52, 56, 58, 62, 72, 81, 88, 90, 92, 94, 98}

d o les valeurs rythmiques correspondantes°:

R=[2, 2, 2, 4, 1, 9, 16, 4, 2, 4, 10, 9, 7, 2, 2, 2, 4, 26]
S=[12, 12, 3, 12, 12, 57]

Obtenus partir de la diff rence entre des l ments cons cutifs (Andreatta [1997c], p.28).
Une liste des premiers trois familles des canons r guliers compl mentaires de cat gorie maximale ($72 \leq n \leq 120$) est contenue dans les annexes cette tude.

2.4 Exemple d tude exhaustive d un canon rythmique: le cas de Z_{72}.

Nous profitons de cette section pour entrer plus en d tail dans notre travail d impl mentation de l algorithme originaire de Vuza dans le cas particulier du plus petit canon r gulier compl mentaire de cat gorie maximale, c.- -d. celui model sur le groupe cyclique $\mathbf{Z_{72}}$ d ordre 72.

La valeur n=72 repr sente le plus petit nombre entier pour lequel le groupe cyclique correspondant, $\mathbf{Z_{72}}$, n a pas la propri t de Hajos. En le d composant dans le produit usuel $p_1 \cdot p_2 \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$ (voir 2.3), on s aper oit que, dans ce cas, la d composition est unique, c.— —d.°:

$$72 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2.$$

On v rifie que les conditions qu on impose sur les d compositions sont respect es.
En effet˚:

1. p=2 et p=3 sont premiers distincts
2. $p_1n_1 = 4$ est relativement premier avec $p_2n_2=9$
3. $n_i \geq 2$ pour tout i.

Les caract ristiques pr c dentes nous donnent des indications sur le prototype de canon rythmique correspondant. En particulier, si on note R et S respectivement la classe rythmique de base et la classe m trique et Per(R) la p riode du pattern rythmique (m me chose pour S) on peut affirmer que :

a) Per (R) = Per (S), c.- -d. la longueur des patterns correspondants aux deux classes rythmiques p riodiques R et S est 72 (unit s fix es).

b) Les deux ensembles R et S ont une cardinalit , respectivement, $p_1p_2n_3=12$ et $n_1n_2=6$. Dans le cas particulier des classes rythmiques, la cardinalit correspond aux nombres d attaques l'int rieur d une p riode choisie et elle est, d apr s Vuza, un invariant pour la famille des canons rythmiques model s sur un groupe cyclique donn (Vuza [1991]). Plut t que card (R) (respectivement card (S)), on pr f re donc utiliser pour exprimer le nombre d attaques l int rieure d une cellule rythmique le symbole propos par Vuza, voir NrpR (respectivement NrpS).

c) Du fait que NrpS=6, on a directement le nombre de voix du canon rythmique ˙˚correspondant˚¨ [50]

Observation˚:

Six est donc le minimum de voix qu on peut utiliser pour avoir un canon r gulier compl mentaire de cat gorie maximale. En g n ral, du fait que NrpS = n_1n_2 n est pas un nombre premier (ou puissance d un nombre premier), les canons r guliers compl mentaires de cat gorie maximale ne peuvent pas avoir un nombre de voix qui soit gal un nombre premier ou une puissance d un nombre premier (Vuza [1991]).

L algorithme qu on a impl ment nous donne, pour n = 72, les classes rythmiques R et S suivantes:

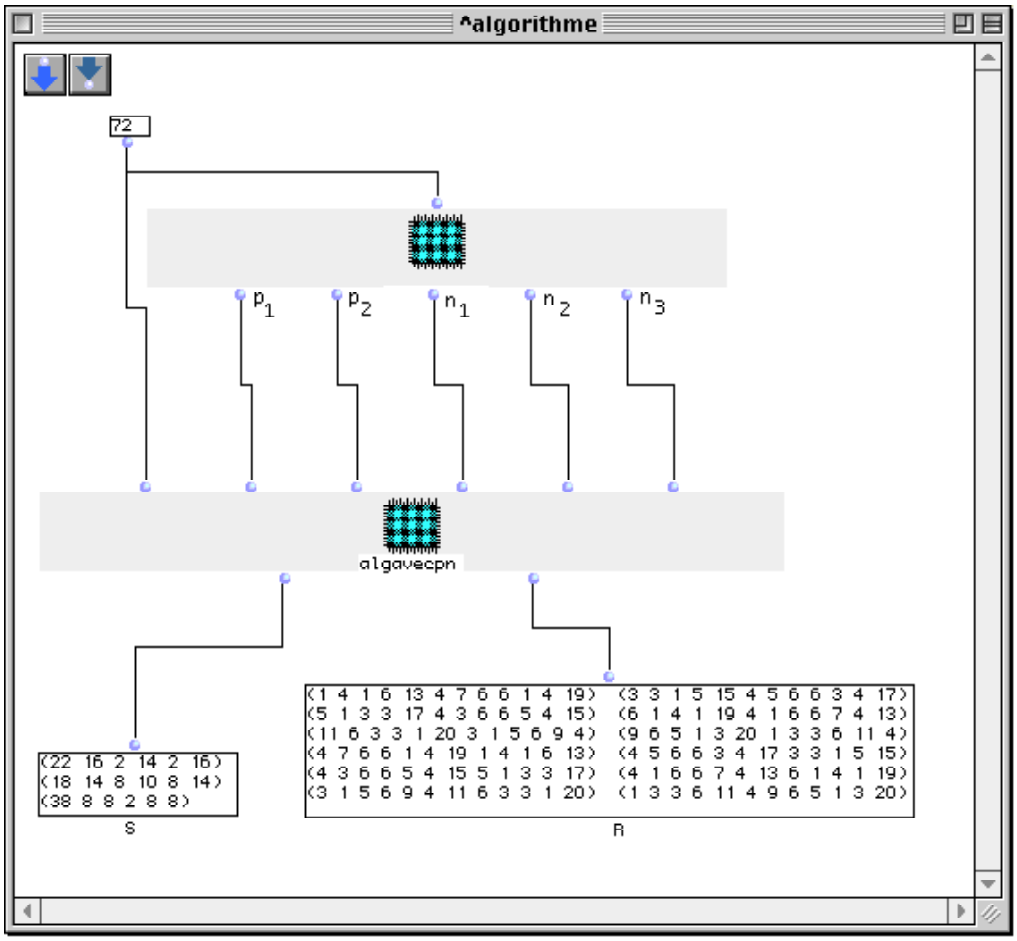


Figure 22. Algorithme de calcul des classes rythmiques R et S pour n = 72.

Pour toute classe rythmique R et classe m trique S, on a, correspondant, un canon Can(R,S) r gulier compl mentaire de cat gorie maximale (voir figure 23) [51]. Si on analyse la structure des classes m triques S on observe que, pour chaque choix d un l ment particulier $S_1 = (a_1,a_2,...,a_6)$, on obtient toutes ses permutations cycliques, c.- -d. $S_2 = (a_2,a_3,...,a_1)$ jusque $S_6 = (a_6,a_1,...,a_5)$.

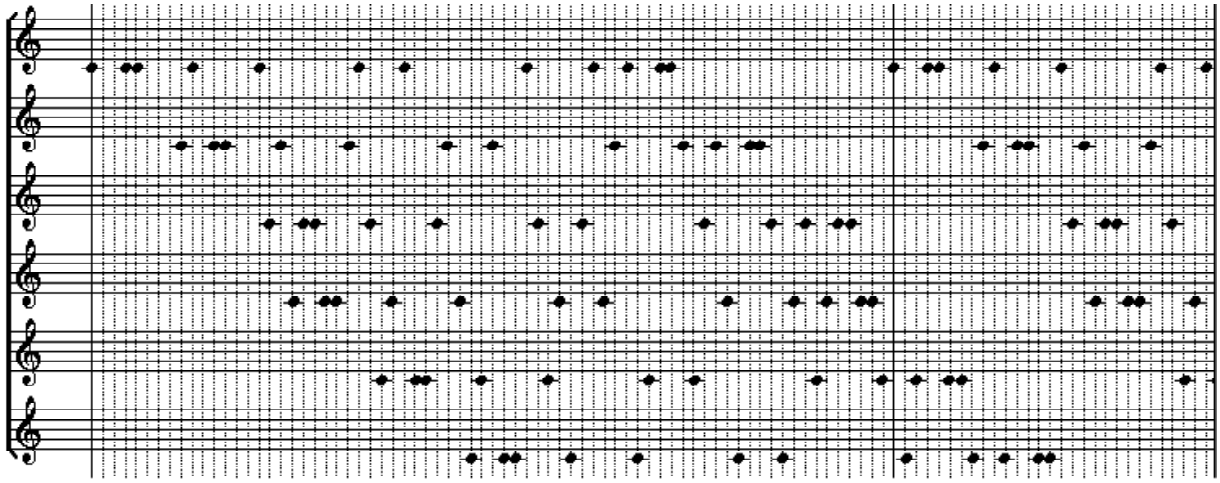


Figure 23. Exemple de canon rythmique (en notation proportionnelle).

La raison musicale de cette propri t est tr s simple. Au lieu de commencer l coute du canon du d but de la composition on ¨°masque°¨ l existence de la classe rythmique associ e la premi re voix V_1 et on commence l coute partir de la voix V_2 . On r int gre la premi re voix apr s l entr e de la derni re (c.- -d. dans la deuxi me p riode de la pi ce). Il est clair qu on peut permuter cycliquement l entr e de toutes les voix, cette proc dure ne changeant pas la forme globale de la pi ce. Pour cette raison, on peut r duire la famille des classes rythmiques un ensemble de ¨°repr sentants°¨ de classes rythmiques qui contiennent la valeur la plus grande au d but. Ceci correspond, musicalement, avoir la plus grande distance entre le d but de la premi re voix et l entr e de la deuxi me [52].

Une autre propri t qui nous semble int ressante souligner est la pr sence d une sym trie rigoureuse l'int rieur de chaque classe m trique. Les entr es des voix qui suivent la premi re voix sont r gl es par un rythme non retrogradable de Messiaen. La g n ralisation de cette propri t pour toute classe m trique de canons r guliers compl mentaires de cat gorie maximale, qui ne semblait pas sortir de la th orie originaire de Vuza, avait t propos e sur la forme d une *conjecture* dans un travail pr c dent (Andreatta [1997])[53].

Une analyse d taill e avec l ordinateur nous a oblig s reformuler la conjecture pr c dente en termes moins radicaux (Andreatta 1999). On a d couvert, par exemple que pour n=120 il existe une classe m trique qui n a pas cette propri t (voir **annexes**).

Si on reprend le cas de n=72, on peut aussi trouver des permutations cycliques et des r trogradations aussi dans la classe rythmique de base R. Mais la diff rence de la classe

m trique, on ne peut pas passer directement aux repr sentants car la loi qui r gle les permutations cycliques et r trogradations n est pas unique. On a donc d cid de maintenir explicitement pour chaque choix de n toutes les classes rythmiques correspondantes en groupant celles qui ont les m mes l ments. Si on choisit un repr sentant pour chaque groupe, on obtient, en r sumant, trois classes rythmiques essentiellement diff rentes qui d terminent, avec les trois repr sentants des classes m triques, neuf familles de canons rythmiques. On a donc consid rablement restreint le probl me par rapport aux 216(=6 ·12·3) canons rythmiques mod les sur le groupe cyclique $\mathbf{Z_{72}}$.

Pour conclure cette section, nous analyserons bri vement l op ration qui ¨renverse¨ le r le de la classe rythmique et de la classe m trique d un canon. Vuza appelle *inversion* le passage d un canon Can(R,S) au canon Can(S,R) ayant comme classe de base et comme classe m trique respectivement l ancienne classe m trique S et l ancienne classe de base R. D apr s Vuza les canons r guliers compl mentaires de cat gorie maximale sont *inversibles* , c.- -d. que l inversion transforme un canon r gulier compl mentaire de cat gorie maximale en un canon qui a la m me propri t (Vuza [1992a]).

Dans le cas du groupe cyclique $\mathbf{Z_{72}}$ on obtient ainsi toute une famille de canons rythmiques Can(R ,S) telle que:

NrpR = NrpS = 6
NrpS = NrpR = 12

c.- -d. ayant 12 voix et, pour chaque voix, un pattern rythmique avec 6 attaques. La p riode des classes rythmiques reste invariant. Un exemple de canon inverse est donn dans la figure suivante:

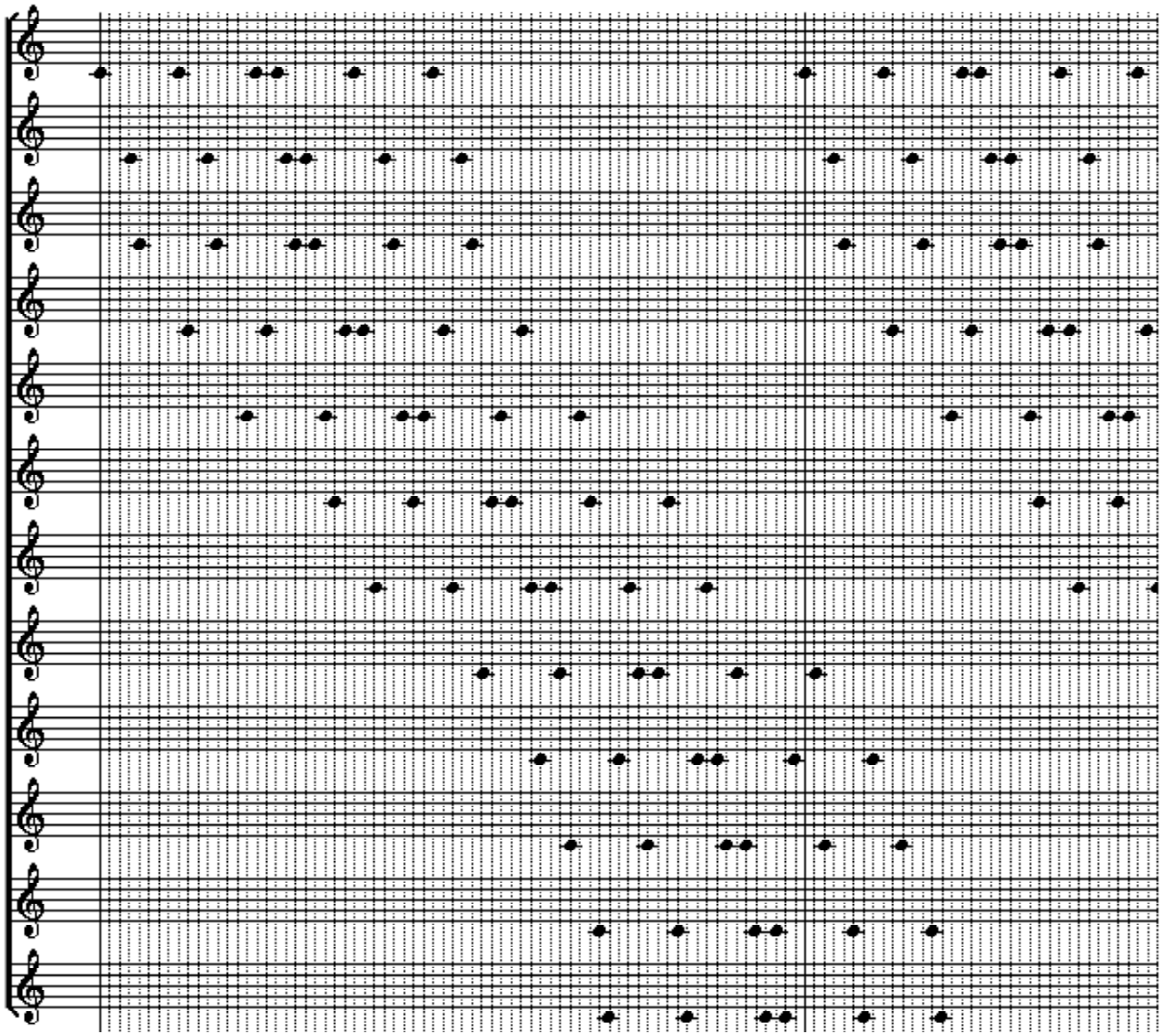


Figure 24. Le canon inverse de la figure 23.

Chapitre 3.
Intersections, ou des *ach vements* possibles d une th orie math matique de la musique [54].

˙°*Bien que plusieurs [th oriciens am ricains] [...] aient associ la signification* [significance] *d un v nement musical avec ses multiples interpr tations, Mazzola est le premier fournir les moyens complets, pr cis et coh rents pour le faire*°¨ (Roeder, [1993] p. 310).

3.1 La th orie math matique de la musique de G. Mazzola et le Syst me d intervalles g n ralises (GIS) de D. Lewin.

Parmi les nombreux trait s am ricains sur la th orie musicale qui, dans l esprit de ce qui a t d sign comme la *dichotomie* Forte/Babbitt[55], peuvent tre mis en relation avec la th orie math matique de la musique, celle de David Lewin repr sente une des propositions th oriques les plus int ressantes. Au-del des in vitables diff rences qui rel vent d un emploi g n ralement plus l mentaire des math matiques, la construction formelle d velopp e par Lewin dans son premier ouvrage th orique (Lewin [1987]) a des propri t s extr mement complexes.

Apr s toute une partie introductive qui pr sente les concepts math matiques de base employ s (fonction, groupe, quivalence, congruence, quotient d un ensemble modulo la relation d' quivalence, homomorphisme et isomorphisme), Lewin introduit le concept de Syst me d'intervalles g n ralises (ou GIS). La pr sentation proc de des exemples aux d finitions rigoureuses, un peu comme la notion de *module* chez Mazzola, dont une description informelle anticipe toujours l acte d une d finition math matique. Au contraire nous donnerons tout d abord la d finition exacte du concept, car elle tablit, en m me temps, une perspective tout fait particuli re sur l objet. Dans un sens math matique, un *syst me d'intervalles g n ralis s* est un triplet ordonn (S, IVLS, int) o S est un ensemble (une famille ou collection d' l ments), IVLS est un groupe multiplicatif (c.- -d. le groupe des

intervalles) et int est une application du produit cart sien S×S dans le groupe IVLS d'intervalles, c.- -d.:

$$\text{int: } S \times S \rightarrow \text{IVLS}$$

et telle que les deux axiomes suivants soient satisfaits:

1. int(r,s).int(s,t) = int(r,t) pour tout l ment r, s, t dans S.
2. Pour tout s dans S et i dans IVLS il existe une unique valeur t dans S tel que int(s,t)=i.

La premi re condition nous garantit que ¨°*si i, j sont des intervalles [...] nous sommes intuitivement capables de le composer dans un sens pr ciser (par exemple travers l addition, l addition modulo 12, la multiplication [...]°)*¨ (Lewin [1987], p.25). L objet ainsi obtenu est lui-m me un Intervalle et donc ¨°*pour tout l ment r, s, t de l espace musical, l intervalle-de-r- -s [sic!] compos avec l intervalle-de-s- -t donne le nouveau intervalle-de-r- -t*°¨ (Lewin [1987], p.26).

La deuxi me condition est une condition la fois d existence et d unicit mais aussi d ordre m thodologique. Elle affirme que, tant donn un l ment s dans un espace musical S et une distance intervallique qui s pare s d un autre objet r, l espace musical est suffisamment grand pour contenir le dernier l ment. La pertinence de cette deuxi me condition est surtout de nature m thodologique car elle permet de concevoir ¨°*l espace formel d un GIS comme un espace de potentialit s th oriques plut t que un compendium de pratiques musicales*°¨ (Lewin [1987], p.27).

On est donc tr s proche de ce que nous avons appel la perspective ¨°extrins que°¨ sur l objet. Autrement dit, l espace musical n est pas seulement une collection d objets ayant des propri t s immanentes, mais plut t des relations entre eux qui d finissent un champ de possibilit s l'int rieur de l espace musical lui-m me. L id e sera pr cis e dans le paragraphe suivant, lorsqu'on reconna tra dans la d finition du Syst me intervalles g n ralis s la notion alg brique d action d un groupe sur un ensemble.

Parmi les nombreux exemples musicaux de GIS (m lodiques, rythmiques, harmoniques), on retrouve deux constructions qui s int grent bien la th orie math matique de la musique. Le premier espace musical rel ve de la probl matique sur le temp rament naturel. Etant donn deux tons s et t ayant pour hauteurs respectivement FQ(s) et FQ(t), on

consid re l application intervallique int(s,t)=FQ(t)/ FQ(s) o le quotient est un nombre rationnel de la forme $2^a\ 3^b\ 5^c$ ... avec a, b, c entiers (positifs, n gatifs ou nuls). On est donc dans un cas particulier du mod le de Mazzola, plus exactement il s agit du sous-groupe additif du module d Euler[56]. On peut v rifier facilement que les deux axiomes de GIS sont satisfaits.

L autre exemple, sur lequel nous voulons envisager une discussion plus approfondie, repr sente un mod le rythmique extr mement int ressant parce qu'il est construit partir d un groupe intervallique IVLS non commutatif. Nous rappelons qu un groupe G est commutatif (ou ab lien) quand deux l ments quelconques de G peuvent tre combin s, travers la loi de composition interne la structure de groupe, ind pendamment de l ordre dans lequel on le choisit. Formellement, si la loi est indiqu e en notation additive, on a˚:

$$a + b = b + a$$

pour tout choix de *a* et *b* dans G.

D habitude, les groupes qui jouent un r le significatif dans la musique sont tous commutatifs, et pour cette raison, comme on le verra dans le prochain paragraphe, toute la th orie modale et rythmique d Anatol Vieru et Dan Tudor Vuza sous-entend qu on a un groupe commutatif. Cependant nous avons d j soulign la pr sence d un groupe non ab lien ¨˚musicalement int ressant˚¨ en discutant l id e de transformation g om trique g n ralis e d une s rie dod caphonique (ou, d une fa on quivalente, d une ligne m lodique) propos e par Iannis Xenakis (Voir chapitre 1.2). En fait le groupe di dral D_n des isom tries qui laissent invariant un polygone r gulier de n cot s est non commutatif (l exception du groupe D_2 de Klein dont les l ments repr sentent les quatre formes d une s rie dod caphonique et dont la loi de composition est commutative).

Le mod le rythmique propos par Lewin reprend une id e introduite dans un article pr c dent, d di aux Intervalles formels entre ceux qu il appelle ¨˚*laps de temps*˚¨ [Time-Spans] (Lewin [1984]). Formellement un *time span*[57] est un couple ordonn (a, x) du produit cart sien $\mathbf{R}\times\mathbf{R}_+$. Le nombre r el a mod le l instant initial d un v nement musical qui a une dur e (positive!) de x unit s temporelles. Si on prend comme ensemble S la famille de tous les laps de temps et comme groupe d intervalles g n ralis s le produit cart sien du groupe

(**R**,+) de r els avec l addition et du groupe ($\mathbf{R}^+$,.) des r els positifs avec la multiplication, on peut d finir la fonction intervallique suivante:

$$int((a,x),(b,y)) = (b-a, y/x).$$

Notons que int est une application du produit cart sien S ×S, ou dans ce cas chaque ensemble S est, lui-m me, un produit cart sien (ce que complique l g rement la notation mais laisse invariante l id e g n rale). L application int transforme deux laps de temps (a,x) et (b,y) dans un interval (b-a,y/x) qui ¨°*mesure notre impression que le time span (b,y) commence b-a unit s apr s le time spans (a,x) et a une dur e totale de y /x unit s temporelles*°¨ (Lewin [1987], p.61). A travers la d finition pr c dente, l ensemble des laps de temps est un syst me d intervalles g n ralis s ayant aussi la propri t commutative. Malgr sa relative simplicit , il se trouve qu il n est pas ad quat ¨°*pour modeler la fa on dont nous percevons les laps de temps qui interagissent sous toute circonstance*°¨ (Lewin [1987], p.61). Et cela cause de la difficult de ¨°*la notion d* <u>*une*</u> *unit temporelle abstraite de type conceptuel*°¨ (Lewin [1987], p.62). En fait l' v nement musical qui commence la valeur a est ¨°*con u implicitement comme ayant son d but exactement le m me nombre d unit s de temps conceptuelles apr s un point temporal de r f rence, le point z ro* ¨ (Lewin [1987], p.63).

Si on analyse la propri t math matique li e au changement du point temporel initial (par exemple en fixant le nouveau point de r f rence m unit s temporelles en arri re) on est conduit analyser le rapport entre les laps de temps (a,x) et (b,y) (respectivement (a +m, x) et (b+m,y)). Dans la d finition de distance intervallique entre time-spans on obtient (Lewin [1987], p.63):

$$int[(a+m,x),(b+m,y)] = (b+m-(a+m), y/x) = (b-a, y/x) = int\,[(a,x),(b,y)]$$

c.- -d. les intervalles entre time spans restent invariants apr s changement du point temporal initial. Deuxi mement on peut consid rer des transformations sur les laps de temps qui laissent invariant le point temporal z ro mais qui changent l unit temporelle, c.- -d. les 'times spans' (au,xu) et (bu,yu) au lieu de (a,x) et (b,y), o u est une valeur r elle positive. On a donc les valeurs intervalliques suivantes:

int((a,x),(b,y)) = (b-a,y/x)

int((au,xu), (bu,yu)) = (bu-au, yu/xu) = ((b-a)u, y/x)

qui sont, videmment, diff rents. Ainsi le mod le rythmique ne pose pas de probl mes quand on analyse une musique pour laquelle ¨°*on peut identifier [...] du contexte une unit temporelle et un point z ro de r f rence*°¨ (Lewin [1987], p.66).

Une analyse tr s pointue du premier quatuor cordes d Elliott Carter (mesures 22-35) [58] met en vidence au contraire les limites du mod le rythmique pr c dent et conduit une nouvelle d finition de distance intervallique.

Pour tout time-spans s=(a,x), t=(b,y) on pose:

int(s,t) = ((b-a)/x, y/x).

Intuitivement, on a remplac les ¨°unit s temporelles de r f rence°¨ avec de nouvelles unit s d pendant du contexte. Le laps de temps t=(b,y) commence, ainsi, (b-a)/ x ¨°s-unit s temporelles°¨ de longueur x apr s s et a une dur e totale de y/ x unit s.

La figure suivante (Fig. 25) montre les nouveaux intervalles entre deux time-spans (respectivement s1=(a1,x1) et t1=(b1,y1)) et leurs time-spans correspondantes s2=(a2,x2) respectivement t2=(b2,y2).

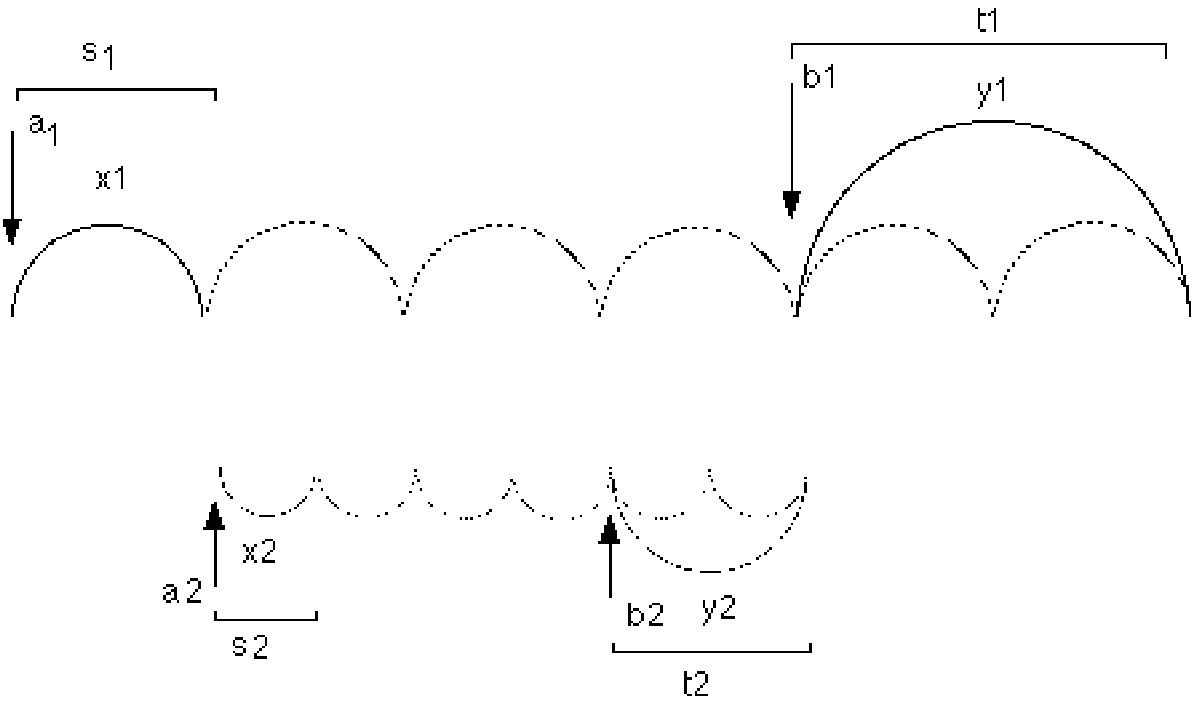


Figure 25. Exemple d'intervalle entre deux *laps de temps* (Lewin [1987]).

Formellement on obtient :

$$int(s1,t1)=((b1-a1)/x1, y1/x1) = (4,2), c.- -d.$$

le time spans t1 commence 4 ˙°unit s du type s1°¨ apr s s1 et a une dur e totale de deux (unit).

Par analogie :

$$int(s2,t2)=((b2-a2)/x2, y2/x2) = (4,2).$$

Pour donner l ensemble des laps de temps une structure de *syst me d intervalles g n ralis s* on a besoin de trouver un groupe IVLS telle que les axiomes initiaux soient satisfait. La fa on la plus naturelle pour le faire est celle de prendre comme IVLS l ensemble des couples (i,p) o i est un nombre r el et p est un nombre r el positif. Etant donn deux l ments (i,p) et (j,q) de IVLS, on d finit la loi de composition suivante:

$$(i,p).(j,q):=(i+pj,pq)$$

On peut montrer (Lewin [1987], p. 75) que (IVLS, .) est un groupe non commutatif ayant comme l ment unitaire e=(0,1).

En fait:

e.(i,p)=(0,1).(i,p)=(0+1.i,1.p)=(i,p).

Par analogie:

(i,p).e=(i,p).(0,1)=(i+1.0,p.1)=(i,p).

On peut noter que pour tout l ment (i,p) de IVLS son inverse [59] est (j,q)=(-i/p,1/p).

En fait:

(i,p).(-i/p,1/p)=(i+p.-i/p,p.1/p)=(i-1,1)=(0,1)=e

Et par analogie:

(-i/p,1/p).(i,p)=(-i/p+(1/p).i,(1/p).p)=(0,1)=e

On peut montrer (Lewin [1987], p.79) que l ensemble S des laps de temps, muni du groupe IVLS pr c dent et de la fonction intervallique int, est un syst me intervalles g n ralis s. En outre *¨°il est essentiellement[60] la seule possibilit de GIS concernante la famille S dont la fonctionne int est compl tement ind pendante de l unit temporelle de r f rence et du point z ro°¨* (Lewin [1987], p.79-80).

Du point de vue de la th orie math matique de la musique, un syst me d intervalles g n ralises appartient la famille des *espaces affines*, pourvu que le groupe IVLS soit le groupe additif d un espace vectoriel. Dans le cas du mod le rythmique pr c dent, on peut regarder la propri t d invariance pour la fonction intervallique comme un cas particulier d une propri t beaucoup plus g n rale concernant les transformations affines, en particulier les *automorphismes affines*[61]

En reprenant la notation employ e par Lewin et tant donn deux time spans (a,x) et (b,y) le premier est transform dans le deuxi me travers un intervalle int = (i,p)=((b-a)/x,y/x) dont la loi d action est la suivante:

$$(b,y)=(a,x)(i,p)=(a+xi,xp).$$

Il se trouve que°¨°*celle ci est la loi bien connue de composition des transformations affines*°¨ (Mazzola [1999], pp.88) qui peut tre r crite dans la forme

$$e^{b}.y=e^{a}.x.e^{i}.p=e^{a+xi}.xp$$

o on a utilis la propri t de composition des transformations affines. [62]

En outre, la propri t de la fonction intervallique - celle d tre invariante une dilatation temporelle pr s - repr sente un cas particulier du fait que ¨°*pour tout automorphisme affine* f

$$f = e^{u}.v : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}.$$

l'intervalle ne change pas s'il est appliqu aux objets transform s°¨ (Mazzola [1999], p.88).

En fait en appliquant un automorphisme affine f la relation suivante:

$$e^{b}.y=e^{a}.x.e^{i}.p$$

on obtient:

$$f.e^{b}.y=f.e^{a}.x.e^{i}.p,$$

c.- -d.:

$$int((a,x),(b,y))=int((u,v)(a,x),(u,v)(b,y))$$

qui repr sente donc une g n ralisation de la relation de Lewin.

3.2 Syst mes d'intervalles g n ralis s et ensembles principaux homog nes.

On peut profiter de cette section pour entrer dans les d tails du mod le modal d Anatol Vieru et Dan Tudor Vuza et pour montrer dans quelle mesure on peut parler d quivalence

entre cette proposition th orique et le syst me d'intervalles g n ralis s (GIS) de David Lewin qu on vient de pr senter. L analyse compar e est sugg r e par un commentaire tr s pointu aux aspects math matiques de *Generalized Musical Intervalls and Transformations* sign par Vuza lui-m me et paru dans la revue am ricaine *Perspective of New Music* (Vuza [1988]). Nous allons reprendre les id es principales de cet article en essayant de l'int grer dans une discussion qui se r f re aussi aux crits post rieurs de Vuza, en particulier la s rie d articles sur les canons musicaux (Vuza [1991]). Tout d abord, *¨°d un point de vue alg brique, il y a une quivalence compl te entre le concept d un GIS et celle d un PH G-ensemble [...]°¨* (Vuza [1988], p.270). Nous allons faire une petite pr sentation de cette derni re structure qui repr sente, on le verra, l objet central de la th orie modale de Vuza et, en m me temps, le point qui rend cette approche diff rente de la perspective originelle de Vieru. Pour Vieru un *mode* est *¨°un ensemble de classes de restes°¨* (Vieru [1980]), c.- -d. un l ment de la famille $\wp(\mathbf{Z_n})$ des sous-ensembles du groupe cyclique d ordre n (Voir **Appendice A1**). Cela pr suppose donc *¨°une identification pr alable°¨* (Vuza [1982], p.235) de l ensemble de classes de sons (ou *pitch classes*) S={do, do#=r $_b$, ..., si} modulo l octave avec le groupe cyclique. Les deux structures sont identifi es travers l isomorphisme qui fait correspondre au do la classe d quivalence de 0, au do # la classe d quivalence de 1 et ainsi de suite jusqu'au si qui est associ avec la classe d quivalence de 11. Ce processus de num ration, dont les origines remontent aux th oriciens de la musique du XIX me si cle (Fichet [1996]), est celui utilis par Macjei Zalewski (Zalewski [1972]), Allen Forte et toute la tradition am ricaine dont on a d j pr sent les aspects principaux.

Au contraire, dans Vuza le groupe cyclique $\mathbf{Z_{12}}$ et l ensemble S des notes sont deux objets essentiellement diff rents. En fait, sur l ensemble S des classes de sons modulo l octave *¨°il n y a pas de structure alg brique naturelle (du point de vue musical)°¨* (Vuza [1982], p.17), la diff rence de l ensemble des intervalles qui poss de une structure naturelle de groupe, isomorphe au groupe cyclique $\mathbf{Z_{12}}$. La relecture de l ouvrage de Vieru par Vuza rel ve du fait que *¨°la th orie de l action d un groupe sur un ensemble est la plus indiqu e pour modeler les ph nom nes du monde modal d crits par l auteur°¨* (Vuza [1982], p. 1).

En g n ral, tant donn s un groupe G et un ensemble A, une loi d action de G sur A est une application qui associe tout couple (g,a) d' l ments respectivement de G et de A un

troisi me l ment appartenant A et not , d'habitude, avec g.a et telle que soient v rifi s les deux axiomes suivants:

1) Si g est l' l ment neutre e du groupe G alors g.a=a pour tout a appartenant A. La condition est tout fait naturelle, car elle utilise une des propri t s de tout groupe G (propri t de l identit ou l ment unit) l'int rieur de la nouvelle loi d'action.

2) g.(h.a)=(g.h).a pour tout g et h appartenant au groupe G et tout l ment a de l ensemble A. Cette propri t est aussi une application d une propri t de la th orie de groupes, notamment celle associative, l'int rieure du nouveau concept d'action d un groupe sur un ensemble.

Du point de vue musical, la loi d action qu on vient de caract riser ¨°*d finit un lieu naturel [...] entre le groupe des intervalles et l ensemble des classes de sons (modulo l octave)*°¨ (Vuza [1982], p.17). En outre, l isomorphisme qui dans Vieru mettait en correspondance le do avec le 0 n est qu un choix parmis les 12 fa ons diff rentes d associer l ensemble S avec le groupe $\mathbf{Z_{12}}$ (en respectant la loi de composition qu on a d finie). Le tableau suivant, reproduit de (Vuza [1982], p.233), peut tre lu comme une table multiplicative faisant correspondre tout l ment de l ensemble S (premier ligne) et toute classe de restes de $\mathbf{Z_n}$ (premi re colonne) l unique classe des sons d termin e de l action de l' l ment du groupe sur la classe des restes originaires. Dans le cas particulier du $\mathbf{Z_{12}}$-ensemble S (c.- -d. de l action du groupe cyclique $\mathbf{Z_{12}}$ sur S) l application d action est bijective. Dans la terminologie bourbakiste, on dit que l ensemble est un ¨°G-ensemble principal homog ne°¨, ou PH G-ensemble. On peut donc conclure que l ensemble des classes des sons (modulo l octave) est un $\mathbf{Z_{12}}$-ensemble principal homog ne.

Dans la perspective de Vuza un *mode* est un l ment M de la famille $\wp(S)$ des sous-ensembles de S. De la d finition pr c dente d action de $\mathbf{Z_{12}}$ sur S on obtient, d une fa on naturelle, une nouvelle loi d action du m me groupe $\mathbf{Z_{12}}$ sur la famille des modes. Cette derni re action s appelle ¨°*extension de la loi d action initiale l ensemble des parties*°¨ (Vuza [1982], p.13) et repr sente le formalisme math matique du concept musical de transposition. Si on appelle *orbite* une classe quivalence (Voir **Appendice A1**) par rapport l action initiale, c.- -d. une classe qui contienne un mode M et toutes ses transpositions, on abouti une d finition rigoureuse de *classe modale* chez Vuza.

Dans le cas du temp rament gal ordinaire (voire du groupe cyclique $\mathbf{Z_{12}}$) on peut donc calculer le num ro compl tif des classes modales et on retrouve, ainsi, les 352 ¨°structures°¨ de Macjei Zalewski (Zalewski [1972]) qui sont appel es ¨°classes de translations°¨ [Translationklassen] chez Halsey et Hewitt (Halseyet Hewitt [1978]).

La prochaine section sera d di e la discussion des aspects locaux et globaux de ces classes modales, selon le paradigme de la th orie math matique de la musique. Un sch ma de classification qui r sume graphiquement les r sultats de Vuza et ceux de Halsey et Hewitt est propos dans (Andreatta [1997c]). On a beaucoup insist sur les aspects math matiques de la th orie modale d Anatol Vieru et Dan Tudor Vuza car il nous semblait qu'elle est, peut- tre, le seul moyen d' claircir l' quivalence alg brique entre GIS et PH G-ensembles. En fait, il se trouve qu il y a ¨°*une correspondance bijective entre GIS et triplets (S,G,act) o S est un ensemble, G un groupe et act une action [...] de G sur S telle que S soit un G-ensemble principal homog ne*°¨ (Vuza [1988], p.270). La loi d action sur tout couple (i,s) d' l ments respectivement du groupe IVLS et de l ensemble S est pr cis ment la transposition d une valeur gale i, c.- -d. l'op ration $T_i(s)$ d finie travers l' quation (Lewin [1987], p.46):

$$int(s,T_i(s)) = i$$

Au contraire, si on part du triplet (S,G,act), on peut lui associer le syst me d'intervalles g n ralis s (S,G,int) o , pour tous l ments s,t de S, int(s,t) est l unique l ment g de G tel que t=s.g (Vuza [1988], p.270). Mais le lien plus surprenant entre les constructions alg briques de Lewin et de Vuza est celui qu on peut tablir dans le domaine rythmique. En fait, au-del des structures alg briques diff rentes pour repr senter l axe temporel (l ensemble **R** des nombres r els chez Lewin et l ensemble **Q** des nombres rationnels chez Vuza), les deux mod les rythmiques ¨°*donnent aux objets primaires [...] (<u>laps de temps</u> dans le premier cas* [c.- -d. Lewin, N.D.T.] *et <u>rythmes p riodiques</u> pour le deuxi me* [c.- -d Vuza, N.D.T.]*) la capacit de cr er* [to settle] *des unit s temporelles contextuelles* (Vuza [1988], p.283).

Selon Vuza l unit temporelle contextuelle associ e au rythme p riodique R est un des invariants introduits originellement dans (Vuza [1985]), plus pr cis ment il s agit de la

¨°division minimale°¨ d un rythme R, qui est indiqu e par *DivR*. Cette grandeur est d finie comme *¨°le plus grand nombre rationnel positif d tel que la diff rence entre deux l ments quelconques dans R est un multiple entier de d°¨* (Vuza [1988], p.284). L exemple suivant, tir de (Vuza [1991], p. 39) pr sente trois rythmes R1, R2 et R3 dont le deuxi me et le troisi me diff rent d une translation temporelle. Avec la d finition introduite dans le paragraphe 2.2, les rythmes sont ainsi repr sentables de la fa on suivante :

R1={0, 3/8, 1/2}+(3/4)**Z**

R2={1/8, 3/16, 9/16, 11/16, 3/4, 13/16, 7/8, 15/16} + **Z**

R3={0, 1/16, 1/8, 3/16, 1/4, 7/16, 1/2, 7/8} + **Z**.

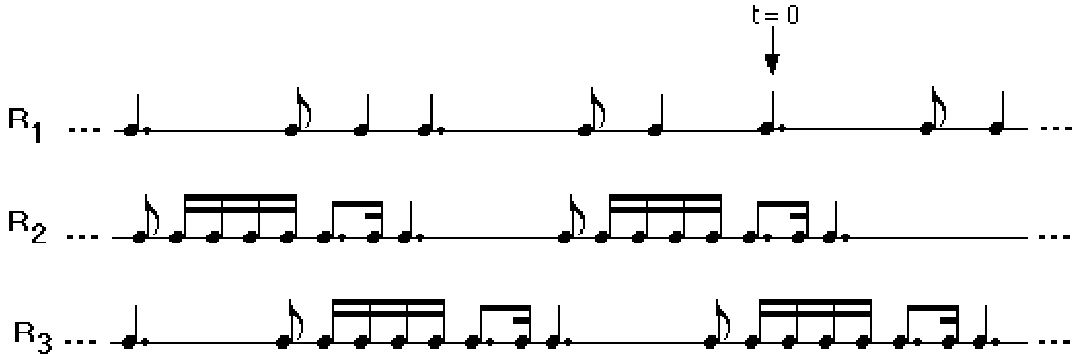


Figure 26. Trois rythmes dont le deuxi me et le troisi me diff rent d une translation temporelle.

Les ¨°divisions minimales°¨ correspondantes sont:

DivR1 = 1/8

DivR2 = DivR3 = 1/16.

La grandeur num rique *DivR* est donc un *invariant absolu*, c.- -d. qu il ne change pas apr s une translation du rythme R dans l axe temporelle **Q**. Pour comprendre comment DivR joue le r le d une unit temporelle contextuelle, Vuza propose un probl me beaucoup plus large sur les diff rents types des canons musicaux rythmiques qu on peut formaliser. Nous avons pr f r d dier tout le deuxi me chapitre de cette tude une introduction informelle du probl me des canons musicaux, car nous tions int ress s surtout la philosophie g n rale qui liait la classe particuli re des canons r guliers compl mentaires de cat gorie maximale l ancien probl me du pavage de l espace. On profite, donc, de la discussion pr sente sur les unit s temporelles contextuelles pour introduire un formalisme qui sera utilis aussi dans la

prochaine et derni re section, o nous allons proposer une r vision possible du mod le rythmique de Vuza travers la th orie math matique de la musique.

Soient R1 et R2 deux rythmes p riodiques ayant le m me point z ro de r f rence mais, en g n ral, une division minimale diff rente, et tels qu'il y a des intersections entre les deux, autrement dit des instants temporels dans lesquels les deux rythmes se superposent. Le probl me propos par Vuza est celui de d terminer les instants correspondants au d but d une troisi me classe rythmique R3 qui soit simplement une translation temporelle du rythme R2 (c.- -d. le rythme R2 et R3 forment un canon rythmique), ayant une intersection avec les rythmes pr c dents mais pas une intersection compl te (c.- -d. une superposition exacte) avec le rythme R2. Pour comprendre encore mieux le lien avec les time spans de David Lewin on commence formaliser le probl me pr c dent en termes alg briques. Vuza propose d introduire un ensemble interm diaire form de tous nombres rationnels positifs tel que les deux relations suivantes soient satisfaites:

1. $t+R2 \subset R1$
2. $t+R2 \neq R2$.

La premi re condition dit qu une translation temporelle du rythme R2 d une valeur rationnelle t doit tre un sous-ensemble du rythme R1 de d part mais, cause de la deuxi me condition, elle ne doit pas co ncider avec le rythme R2.

Toutes les grandeurs pr c dentes sont d pendantes de l unit temporelle choisie, dans le sens qu ¨*elles changent si on choisit une unit temporelle diff rente*¨ (Vuza [1988], p.284). Afin d avoir une propri t comme celle du syst me rythmique de Lewin, il suffit (Vuza [1988], p.284) de consid rer l ensemble {t/DivR} o les valeurs rationnelles t sont exactement celles qui satisfont les deux propri t s pr c dentes. L ensemble ainsi obtenu ¨*ne d pend pas de l unit temporelle particuli re qu on a utilis pour repr senter les rythmes R1 et R2*¨ (Vuza [1988], p.284). Autrement dit l ensemble pr c dent est ¨invariant¨ pour le groupe de toutes les applications (affines!) qu' associent un nombre rationnel t l l ment at+b, o a est une valeur rationnelle positive et b est un nombre rationnel quelconque. La condition est donc totalement quivalente celle propos e par David Lewin sur les laps de temps (Lewin [1987], p. 79).

3.3 Vers un mod le · MaMuTh-th orique ¨ des canons musicaux

Du point de vue de la Th orie Math matique de la Musique, un canon musical est une composition globale qui peut tre *interpr t e* [63] travers un ·°recouvrement°¨ de cartes locales. Le choix d un recouvrement, plut t que d un autre, d termine une ·°perspective°¨ particuli re sur la structure globale, dans le sens de la philosophie de Yoneda (Cf.1.5). Parmi les points de vue sur un canon, il y a des cas limites qui repr sentent des perspectives triviales [*trivials interpretations*] de la structure globale.

La premi re perspective consiste regarder chaque voix comme une structure autonome, n ayant pas d intersections avec les autres voix. L interpr tation du canon qui d rive est tr s pauvre et elle est totalement insuffisante pour rendre compte de l architecture totale de la pi ce (Cf. Figure 27.)

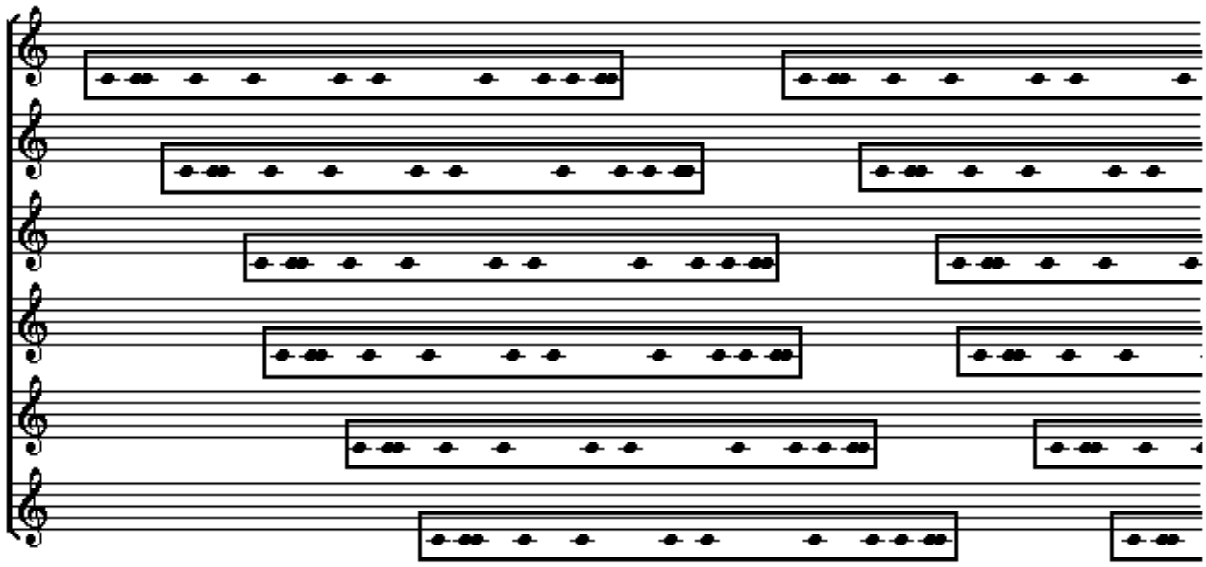


Figure 27. Interpr tation triviale d'un canon.

En formalisant un peu mieux le concept d interpr tation, on peut montrer qu une telle perspective est quivalente, dans un sens qu on va pr ciser tout de suite, la perspective qui consid re la pi ce comme une collection de points disjoints. Pour comprendre cette derni re id e, il faut reprendre le concept de ·°nerf°¨ d une interpr tation. La pertinence musicologique de cette construction, qui rel ve de la topologie combinatoire et de la g om trie alg brique, est l un des piliers de la th orie math matique de la musique. Elle a t mise en vidence, par exemple, dans le probl me d une formalisation rigoureuse du processus de modulation (cas

du syst me temp r mais aussi intonation juste) [64]. D autres exemples d utilit de la notion de *nerf* sont rassembl s dans la partie de *Geometrie der T ne* d di e au probl me de la classification des structures globales travers des atlas et des morphismes. Par exemple, travers le nerf on peut donner une repr sentation g om trique d une s rie dod caphonique ayant des propri t s internes de sym trie (Mazzola [1990], p.154-165). Dans ce cas, comme dans le cas de la construction du ruban de M bius associ l chelle diatonique (voir 1.5), on peut souligner l extr me souplesse du paradigme *local/global* qui ne se caract rise pas en termes d une dichotomie stricte mais qui se modifie, chaque fois, selon les diff rentes perspectives qu on veut tablir d un m me objet.

Une chelle diatonique, qui en g n ral est un sous-ensemble fini et non vide d un *module* (c.- -d. une composition locale), est trait e comme une composition complexe, compos e de parties locales simples (dans ce cas particulier les accords). Ainsi une s rie dod caphonique, qui dans une architecture globale d une ˇuvre musicale repr sente une partie locale, peut tre elle-m me analys e dans la perspective d une composition globale interpr ter. A travers l atlas propos dans *Geometrie der T ne,* il est possible de mettre en vidence la structure interne [Binnestruktur] de la s rie et construire le *nerf topologique* associ (Mazzola [1990], p.165). On se rend compte, dans ce cas, que les 2-simpl xes (triangles) ne sont plus suffisants pour mettre en vidence les propri t s du recouvrement choisi, mais qu on a besoin d aller jusqu aux 3-simpl xes (c.- -d. t tra dres).

Ainsi dans le cas des canons musicaux, la pr sence de t tra dres ou, plus en g n ral, des n-simpl xes (avec n >3) peut constituer un indice de la complexit structurelle de canons diff rents par rapport au m me type de recouvrement choisi. On peut partir de cette id e pour comprendre comment envisager le probl me d une classification topologique des canons r guliers compl mentaires de cat gorie maximale. Le point essentiel dans notre approche (ce qui nous semblait coller assez bien avec les propositions th oriques et esth tiques de la Th orie Math matique de la Musique) rel ve du fait qu une liste d objets (accords, rythmes ou organisations complexes comme les canons musicaux) acquiert un int r t dans la mesure o l on peut la ¨°structurer°¨ selon des crit res la fois alg briques mais aussi g om triques . Pour cette raison nous avons soulign l originalit de l approche de Vieru et Vuza dans le domaine de la classification des structures d accords, par rapport d autres propositions th oriques de la deuxi me moiti du XX me si cle. En suivant la m me philosophie, on peut affirmer qu une liste de tous les canons rythmiques, comme celle que nous proposerons dans

les annexes de cette tude, aura une utilit tr s limit e si elle n est pas encadr e dans une proc dure qui d passe la simple num ration.

Pour donner un exemple d une m thodologie possible dans l tude des canons musicaux du point de vue d un *atlas* et de *recouvrements* de cartes locales, on propose, tout d abord, de se concentrer sur une partie de la classe rythmique de base [*ground class*]. Par exemple, on pourrait s int resser la structure comprise entre le d but de la premi re voix et l entr e de la deuxi me et essayer de regarder comment ce sort de ¨°cellule motivique°¨, qui se r p te - d cal e dans le temps - dans les diff rentes voix, s int gre dans la structure globale. Pour avoir une cellule suffisamment grande, on peut toujours permuter cycliquement les valeurs de la classe m trique afin d avoir la valeur la plus grande au d but (voir 2.4). Cette op ration, qu on a dite de ¨°normalisation°¨ [65], permet tout d abord de pouvoir tablir, pour des canons correspondants des groupes cycliques diff rents, des crit res comparatifs homog nes.

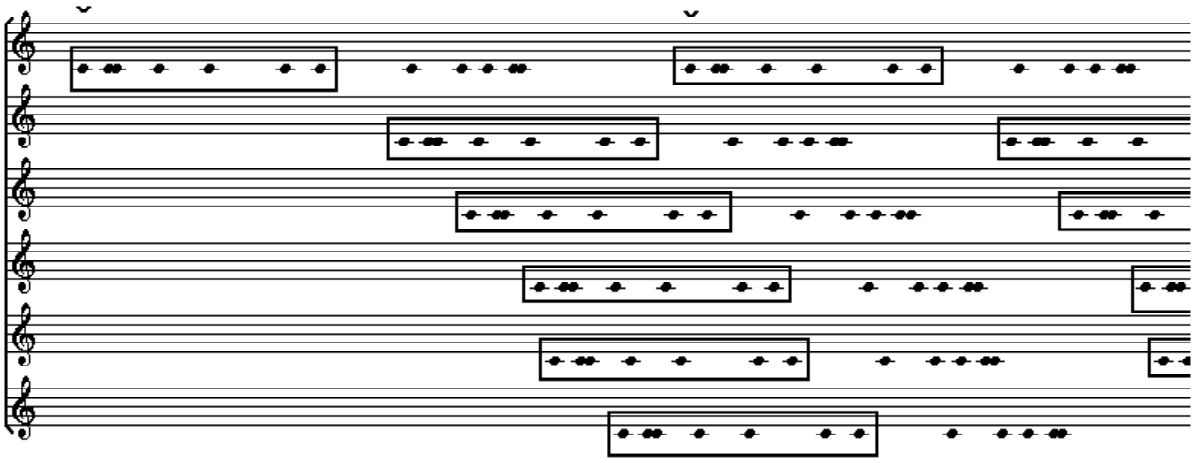


Figure 28. Cellules motiviques comme cartes locales d'un recouvrement.

Une fois qu on a une collection de cartes disjointes, correspondant la m me cellule rythmique, on peut utiliser des cartes interm diaires pour cr er une sorte de ¨°point d coute°¨ entre les compositions locales pr c dentes. Un des crit res le plus simple est celui de consid rer, pour tout couple de cartes correspondant des voix successives, une carte locale qui contienne la premi re entr e de la deuxi me voix mais aussi le dernier l ment de la voix imm diatement pr c dente. Cette deuxi me interpr tation, et le nerf qu on peut lui associer, est montr e dans la figure suivante.

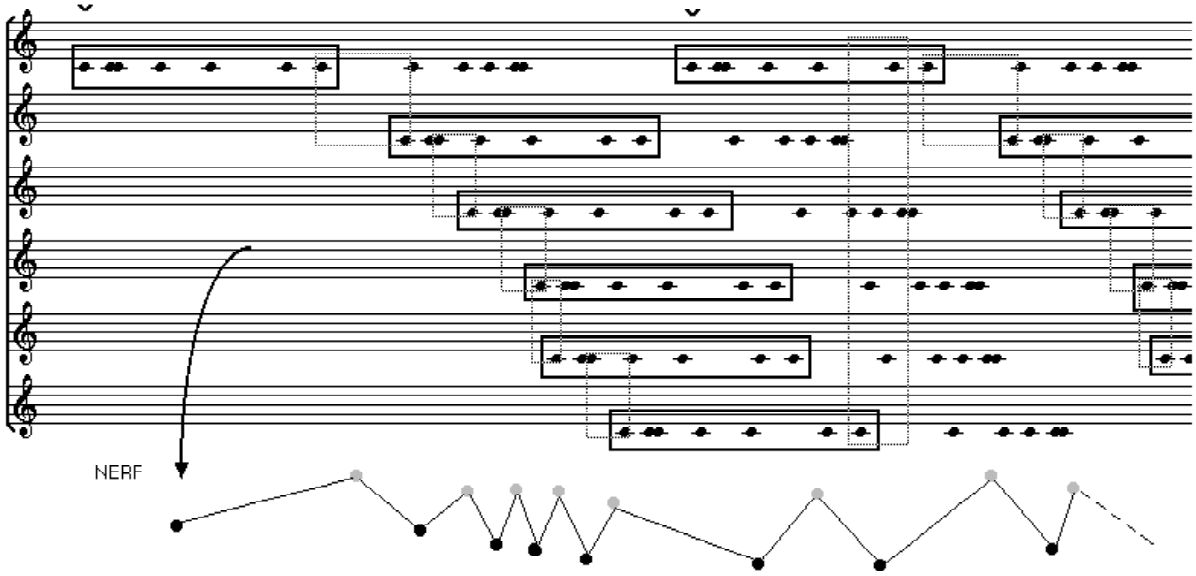


Figure 29. Exemple d'un *atlas* et de son *nerf* associ .

On se rend compte facilement qu il faut trouver un moyen pour diff rencier les cas pour lesquels la distance entre deux l ments cons cutifs d une classe m trique est respectivement inf rieure ou sup rieure la longueur de la carte motivique. Si on fait une projection de toutes les structures rythmiques sur l axe des attaques, les cas pr c dents correspondent, respectivement, des projections disjointes de cartes locales et des projections ayant une intersection entre elles. Un exemple de ce deuxi me cas est repr sent dans la figure suivante:

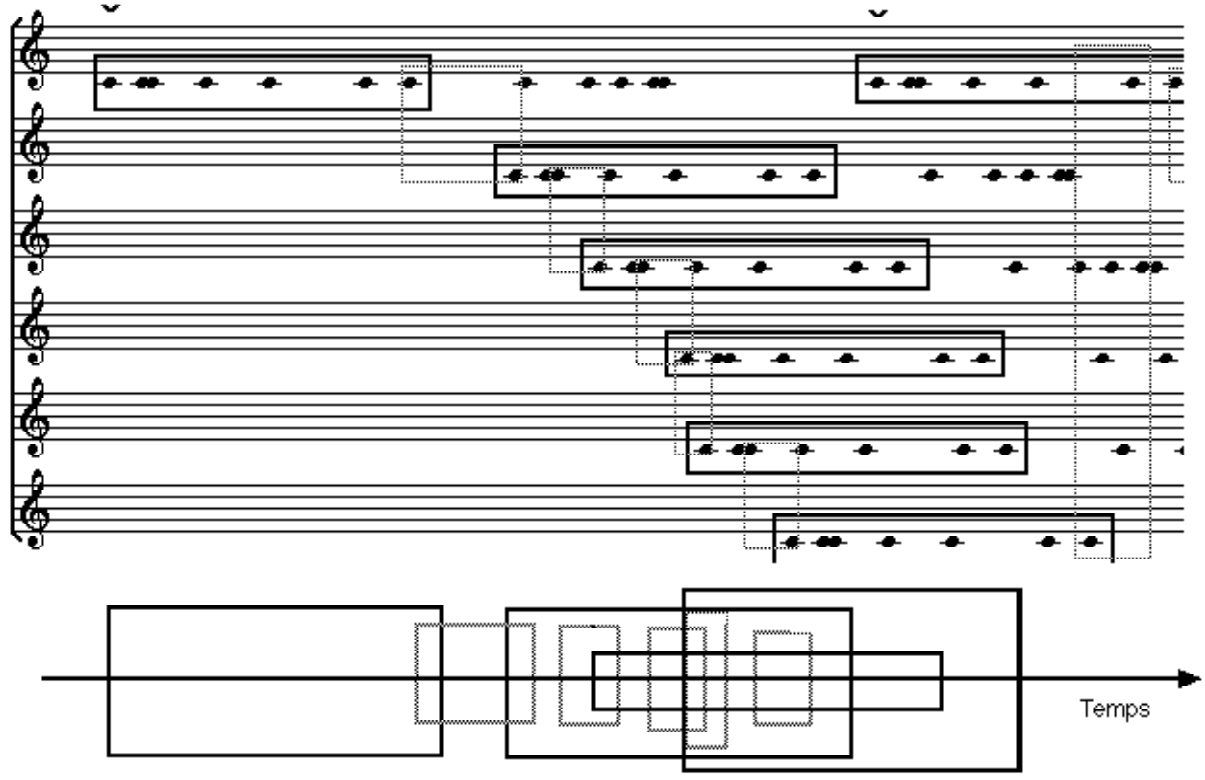


Figure 30. Projection d'un *atlas* sur l'axe des temps.

Pour ce cas, on a besoin de cartes qui puissent rendre compte de la diff rence structurelle par rapport au premier cas. Un choix possible est la suivante (Cf. Figure 31)˚:

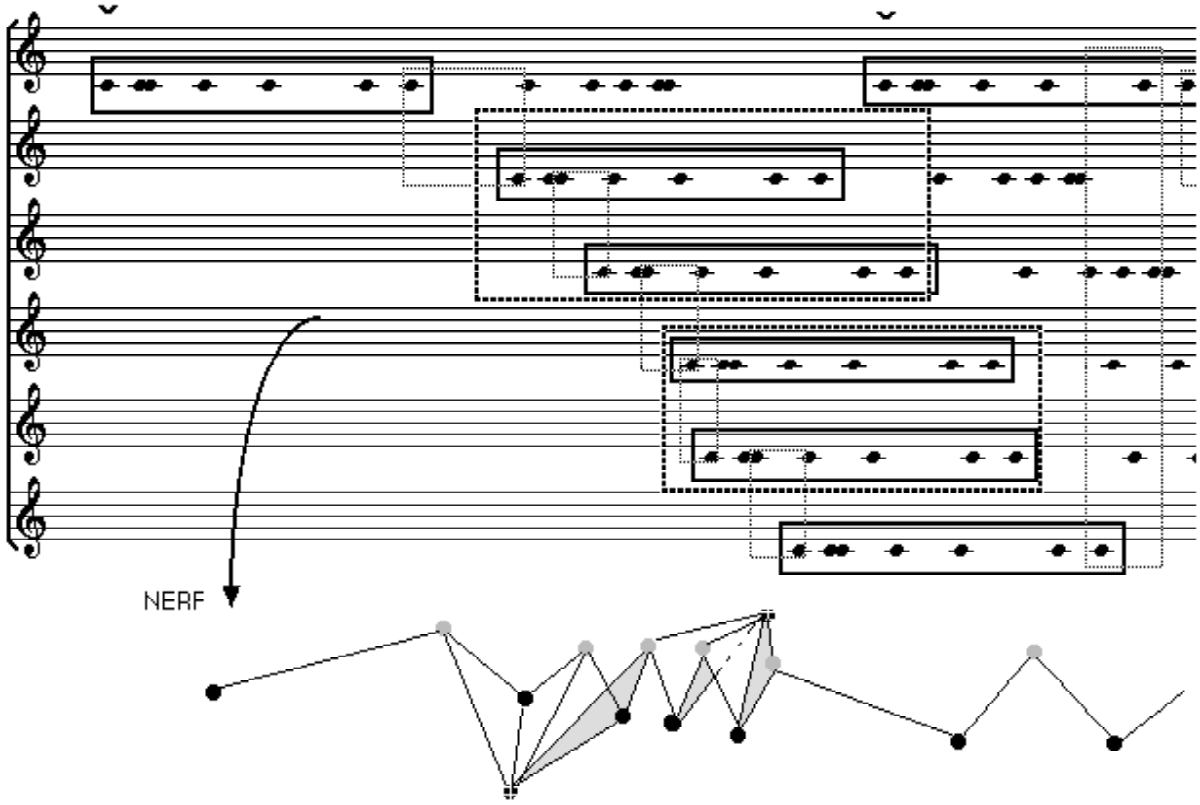


Figure 31. Un *atlas* diff rent pour le m me canon pr c dent.

Des nerfs topologiquement diff rents, comme ceux figur , sont un bon index de la diff rence structurelle entre deux compositions globales. Cette approche reste, malgr tout, peu int ressant du point de vue musical.

En effet il m lange deux niveaux diff rents l'int rieur d un choix possible des cartes locales pour recouvrir la composition globale[66].

On commence, tout d abord, rendre la terminologie plus coh rente avec les id es d velopp es dans la nouvelle version de la th orie math matique de la musique (voir section 1.1). En particulier, dans la formalisation du rythme locale (Mazzola [1999], p. 125), Mazzola introduit le concept de ¨˚germe˚¨ comme une composition locale qui assume les valeurs non seulement dans l ensemble des attaques *(Onset)* mais aussi dans un espace *(Para)* qui contient des param tres additionnels (tells que la dur e, l intensit ,) (Mazzola [1999], p.125). Dans

l atlas que nous avions propos au d but, les ˙°germes°¨ correspondaient ce que nous avions appel es *cellules motiviques* , avec une diff rence essentielle, savoir que deux germes (voir deux cellules) ne sont pas globalement isomorphes[67]. Ils sont isomorphes seulement dans leur projection sur l axe *Onset* des attaques. Pour cette raison chaque cellule $Cell_i$, correspondant la voix V_i, est une composition locale qui doit tre consid r e ind pendamment des autres. La classe rythmique d une voix V_i est, elle aussi, une union de cellules rythmiques diff rentes qui repr sentent une des segmentations possibles de la classe de base. L union de ces derni res cellules a la fonction d'un ˙°germe°¨ dans la Th orie Math matique de la Musique.

Si on indique avec $germ_i$ le germe correspondant la voix i-i me on peut r aliser une structure complexe capable de g n rer le canon rythmique infini. Il suffit de prendre l ensemble *GERM* d fini par l'union de tous germes $germ_i$ pour $1 \le i \le N$, N tant le nombre de voix. On a donc formellement:

$$GERM := \cup_i germ_i.$$

Voici un exemple°:

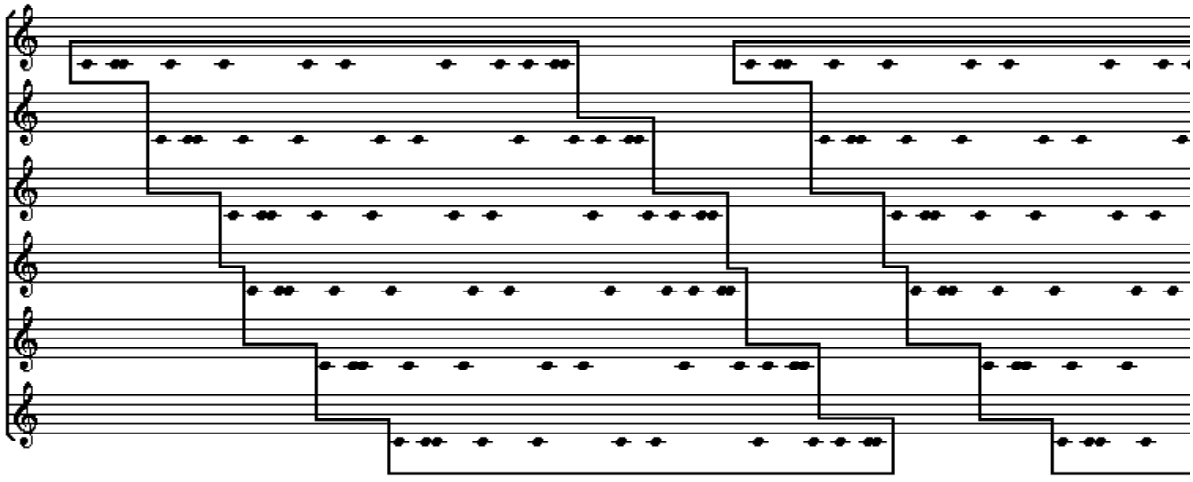


Figure 32. Canon rythmique obtenu travers une translation temporelle de *GERM*.

Le canon rythmique Can(R,S) peut tre repr sent sous la forme compacte suivante°:

$$Can(R,S) = e^{tZ}.GERM, \text{ o } t=PerR.$$

o t est un param tre repr sentant la p riode Per(R) de la classe rythmique de base et la notation e indique l application d'une translation qui transforme un nombre entier x dans $t+x$ (cf. Appendice A2.3).

Vers une formalisation rigoureuse

Nous ne pouvons pas entrer dans les d tails du probl me de donner une repr sentation unique et explicite pour tous germes, mais il faut souligner que la philosophie g n rale est celle contenue dans le chapitre V (en pr paration) de (Mazzola [1999]) intitul ¨*Topologies for Rhythm and Motives*©, qui d finit la notion globale de ¨Makro-Event©. L id e est celle de repr senter chaque germe $germ_i$ en termes vectoriels dans un espace ayant comme axes coordonn s respectivement l'axe temporel Q (*Onset*) et un axe $Para$ contenant des informations ult rieures sur les germes. Ainsi on peut associer aux germes $germ_i$ une repr sentation vectorielle diff rente mais ayant les m mes projections sur l axe des attaques. Deux germes sont gaux (et donc la carte locale est la m me) seulement si tous les autres param tres sont gaux. A partir de la repr sentation bidimensionnelle pr c dente, on peut choisir de se concentrer sur les param tres que nous avons appel ¨cellules© et qui repr sentent les parties locales qui, une fois rassembl es, redonnent la structure complexe du germe. Un germe $germ_i$ est ainsi compos de plusieurs cellules $cell_{i,j}$ o les valeurs admissibles pour j sont, priori, infinies (car le canon lui m me est infini). Une approche nouvelle au probl me de la construction d un nerf topologique pertinent du point de vue musical est celui d analyser les r gularit s locales sur l axe Onset des attaques une fois qu on a fait toutes les projections des cellules $cell_i$ pour tout index i=1, , N (N tant le nombre de voix du canon). On a donc *cribl* l axe des attaques travers toutes les contributions d un m me type de cellule motivique. Le probl me qui se pose, maintenant, est celui de donner un ¨poids© l ensemble des attaques ainsi obtenu de fa on pouvoir le diff rencier d un autre ensemble obtenu partir des cellules $cell_{i,j}$ pour des valeurs diff rents de j.

Cette question nous m ne au cˇur de la r flexion th orique de Iannis Xenakis sur les cribles. En particulier, il observe que le probl me est en r alit double, car il ne s agit pas seulement de ¨*formuler une th orie permettant de construire des sym tries aussi complexes qu'on les d sire*© (Xenakis [1994], p.75), mais de pouvoir renverser le probl me, c.- -d. ¨*partir d'une suite donn e d' v nement ou d'objets dans l'espace ou dans le temps, de retrouver les sym tries qui la constituent*© (Xenakis [1994], p.75). Bien que dans la formalisation originaire de Xenakis, les cribles soient li s surtout aux chelles des hauteurs, plusieurs travaux th oriques et d informatique musicale ont d velopp la pertinence de cette notion dans l'architecture des structures temporelles[68]

En revenant à l'analyse de l'ensemble *Onset* déterminé à travers la projection des cellules motiviques $cell_i$ nous restreignons le problème d'une reconstruction de régularités globales à celle de la recherche de structures rythmiques régulières, c.-à-d. correspondant à un sous-ensemble d'une classe rythmique régulière. On appelle une telle structure un «peigne rythmique» ou, plus simplement, un «peigne». L'axe des attaques est ainsi une union de peignes qui ne sont pas nécessairement disjoints. Parmi toutes les structures rythmiques régulières qui criblent l'axe temporel des attaques, on trouve des peignes qui ont la propriété de n'être inclus proprement dans aucun autre peigne. Si on indique par Pei_i (i dans I) la famille des peignes dont l'union est l'ensemble total des attaques correspondant aux projections des cellules rythmiques $cell_i$ on trouve des valeurs j pour lesquels $Pei_j \not\subset Pei_i$ pour toute valeur i. Un tel peigne Pei_i est dit <u>maximal</u>.

En prenant comme cartes locales les structures rythmiques associées à tout <u>peigne maximal</u> on obtient un *atlas* dont on peut associer le *nerf topologique*. L'idée suivante est de regarder toute cellule rythmique initiale $cell_i$ dans son intersection avec le nerf précédent. Si une cellule $cell_i$ a des éléments en commun avec un peigne maximale Pei_j on connecte les deux points correspondants avec un segment.

Le nerf topologique a une forme qui représente bien l'interaction entre les régularités locales de l'axe *Onset* des attaques et les cellules motiviques qu'on avait choisi au début.

La procédure décrite est tout à fait généralisable à des choix différents de cellules motiviques à l'intérieur d'un même germe $germ_i$ et qui auront des interactions différentes avec un autre ensemble de peignes considérés. Le problème de trouver tous les peignes maximales à l'intérieur d'une suite d'attaques donnée a été l'objets de plusieurs recherches dans l'informatique musicale. En outre, cet approche représente un bon point de rencontre entre toutes les recherches conduites en France sur la modélisation et formalisation de structures musicales (Assayag et Agon [1996] ; Mesnage [1997]) et les nouvelles perspectives de la Théorie Mathématique de la Musique (Mazzola [1998] et [1999]).

CONCLUSION

Les liens qu'on a essay de discuter dans ce troisi me chapitre expriment toutes les potentialit s d une utilisation des math matiques dans la musique qui ne rel ve pas d une dimension n cessairement m taphorique. En effet la convergence substantielle de trois lignes de recherche ind pendantes qui partagent la m me hypoth se sur la pertinence d une discussion du type alg brique sur la musique, met en vidence la n cessit d une prise de conscience de l importance des m thodes alg briques pour la formalisation de structures musicales. Pour cette raison, nous avons essay d encadrer l mergence et la pertinence de la notion de *groupe* dans la musique l int rieur d une r flexion critique sur les liens entre math matiques, philosophie et musique.

La perspective alg brique, qui d place progressivement le point de vue de l *objet* celui de les relations entre objets diff rents, acquiert dans les propositions th oriques consid r es, une dimension d abstraction de plus en plus grande, du Syst me d Intervalles G n ralis es (*GIS*) de David Lewin la Th orie Math matique de la Musique (*MaMuTh*) de Guerino Mazzola, en passant par les ensembles principaux homog nes de Dan Tudor Vuza.

De ces rapprochements, on peut extraire une premi re r flexion g n rale sur la coh rence conceptuelle des syst mes formels qui mod lisent, d une fa on quivalente, des ph nom nes musicaux la fois tr s diff rents. C est le cas, par exemple, du syst me d intervalles g n ralis s de David Lewin qu on retrouve dans les mod les rythmiques de Vieru ou dans la notion de composition locale chez Mazzola. L'id e qu'on peut retrouver la base des toutes ces approches alg briques est bien r sum e par Marc Chemillier quand il affirme qu' ¨ *il est possible d'approcher le fait musical d'une mani re scientifique et rigoureuse, et que, si cette attitude a ses limites, elle permet aussi parfois de d celer certaines propri t s du langage musical inaccessibles avec les moyens de la th orie musicale traditionnelle* ¨ (Chemillier [1987], p.342).

Le point de vue *fonctoriel* sur la musique, dont l analyse d taill e travers les langages de la th orie math matique des cat gorie aurait d pass les limites de cette tude, repr sente l aspect plus radical du processus d abstraction de ph nom nes musicaux.

Nous avons choisi de rester attach au niveau, pourrait-on dire, de l alg bre l mentaire (dont les difficult s sont suffisantes pour d courager plus d un lecteur), en essayant de r duire les formulations plus g n rales des cas d int r t musical plus concret, plut t que de nous envoler vers les nuages th r s des diagrammes commutatifs fonctoriels et des transformations naturelles.

De ce point de vue, on peut dire que nous avons privil gi , dans le seul cas de la th orie des cat gories, l usage m taphorique des math matiques, qui s exprime bien travers la soi-disante ·°Philosophie de Yoneda[69°¨]. L utilisation non m taphorique du · Lemme de Yoneda ¨ et, plus g n ralement, de tout le cadre conceptuel de la th orie des cat gories, est un des piliers de la nouvelle version de la ·°Th orie Math matique de la Musique°¨ (Mazzola [1999]) qui radicalise un processus d abstraction d j pr sent dans son paradigme originaire.

En particulier on pourrait reformuler, du point de vue fonctoriel, un diagramme commutatif qui est la base de l quivalence formelle (isomorphisme canonique) entre classes modales et structures rythmiques[70]. Le r sultat a repr sent une premi re justification de notre travail d encadrement du probl me de la construction des canons rythmiques l int rieur du paradigme g om trique des vari t s musicales.

Cependant, la mise en vidence des propri t s topologiques, par exemple travers l tude du nerf associ un atlas particulier n est que la premi re tape pour l analyse d une structure musicale extr mement particuli re, comme celle des canons pr sent s dans cette tude. La restriction du travail ces cas tr s particuliers, qui ne font pas partie du r pertoire usuel, a d plac le probl me d une pertinence analytique de ces recherches vers une dimension plus th orique des discussions entre musiques et math matiques. En particulier, on a pu conduire toute une r flexion pist mologique sur les liens entre un probl me alg brique de th orie des groupes et la formalisation d une ·°composition globale°¨, au sens de la Th orie Math matique de la Musique.

Cependant la th orie de Vuza est beaucoup plus g n rale et elle donne une formalisation rigoureuse d une collection tr s large de canons rythmiques. Une tude exhaustive des propri t s formelles de canons rythmiques propos s par Vuza pourrait rendre moins m taphorique la port e analytique et compositionnelle de ces structures musicales qui

poss dent, dans cette premi re approche, une aura d'id alit tr s proche ce qu'Olivier Messiaen appela ˙°charme d impossibilit °¨ [71].

Une des cons quences les plus int ressantes est l ouverture de la recherche une tude comparative des formes musicales qu on peut esp rer retrouver dans le r pertoire. Un exemple est le triple canon de Messiaen (*Harawi*) qui est assez proche des canons rythmiques qu on a consid r , mais dont l int r t musical est li e pr cis ment aux petits carts par rapport au mod le id al de Vuza [72].

En m me temps, une tude exhaustive des propri t s formelles des canons rythmiques et leur g n ralisation travers le paradigme local/global de la Th orie Math matique de la Musique repr sente une premi re tape vers leur application compositionnelle.

BIBLIOGRAPHIE

Agmon [1989] E. Agmon˚: ˙˚A Mathematical model of the diatonic system˚¨, *Journal of Music Theory*, 33, pp.1-25, 1989.

Agmon, [1996] E. Agmon˚: ˙˚Coherent Tone-Systems: a study in the theory of diatonicism˚¨, *Journal of Music Theory*, 40(1), pp.39-59, 1996.

Amiot [**1986**] E. Amiot et al. : ˙ Duration structure generation and recognition in musical writing ¨, *Proc. of the ICMC 1986,* La Haye, 1986.

Amiot [**1994**] E. Amiot : ˙ La s rie dod caphonique et ses sym tries ¨, *Quadrature n¡19,* III, 1994.

Andreatta [**1997a**] M. Andreatta : ˙ Nastri, Orologi e Ciambelle. Spunti per riflessioni matemusicali ¨, *Il Monocordo,* Vol. 2, pp. 5-32, 1997.

Andreatta [**1997b**] M. Andreatta : *Formalizing Musical Structure : from Information to Group Theory,* Dissertation in Aesthetics and Sociology of Music, University of Sussex, 1997.

Andreatta [**1997c**] M. Andreatta : *Group-theoretical methods applied to music,* Dissertation, University of Sussex, 1997.

Andreatta [**1997d**] M. Andreatta : ˙ Logica simbolica, teoria dei gruppi e crivelli musicali nel pensiero di Iannis Xenakis (1ª parte) ¨, *Il Monocordo,* Vol. 2, pp. 3-14, 1997.

Andreatta [**1998**] M. Andreatta : ˙ Logica simbolica, teoria dei gruppi e crivelli musicali nel pensiero di Iannis Xenakis (2ª parte) ¨, *Il Monocordo,* Vol. 3, pp. 3-30, 1998.

Andreatta [**1999**] M. Andreatta et al. : ˙ *OpenMusic* et le probl me de la construction de canons musicaux rythmiques ¨, *Actes des sixi mes Journ es d Informatique Musicale,* pp.179-185.

Arnaudi s et Fraysse [**1987**] J.-M. Arnaudi s et H. Fraysse : *Alg bre,* Dunod, 1987

Assayag et Agon [**1996**] G. Assayag et C. Agon : ˙ OpenMusic Architecture ¨, ICMC Proceedings 96 , Hong-Kong, 1996.

Babbitt [1955] M. Babbitt˚: ˙˚Some Aspects of Twelve-Tone Composition˚¨, dans *The Score and IMA Magazine*, 12, pp.53-61, 1955 (repris dans *Twentieth Century Views of Music History*, W. Hays diteur., pp.364-371, New York, Scribner, 1972.

Babbitt [1960] M. Babbitt˚: ˙˚Twelve-Tone Invariants as Compositional Determinants˚¨, *Musical Quarterly*, 46, pp.245-259, 1960.

Babbitt [1961] M. Babbitt˚: ˙˚Set Structure as a Compositional Determinant˚¨, *Journal of Music Theory*, 5(2), pp.72-94, 1961.

Babbitt [1962] M. Babbitt˚: ˙˚Twelve-Tone Rhythmic Structure and the Electronic Medium˚¨, *Perspectives of New Music* 1(1), pp.49-79, 1962.

Babbitt [1965] M. Babbitt˚: ˙˚The Structure and Function of Music Theory˚¨, College Music Symposium, Vol.5, 1965 (repris dans **Boretz et Cone [1972]**, pp.10-21).

Babbitt [1987] M. Babbitt˚: ˚*Words about Music*, S. Dembski et J.N. Straus diteurs., Madison, University of Wisconsin Press, 1987.

Backus [**1960**] J. Backus : ˙ Pseudo-science in Music¨, *Journal of Music Theory,* 4(2), pp.221-232, 1960.

Badiou [**1998**] A. Badiou : *Topos ou Logiques de l onto-logique,* Tome 1, Support de cours, 1998.

Baker [1997] J. Baker, D. Beach et J. Bernard˚: *Music Theory in Concept and Practice*, Eastman Studies in Music, University of Rochester Press, 1997.

Balzano [1980] G. Balzano˚: ˙˚The group-theoretic description of 12-fold and microtonal pitch systems˚¨, *Computer Music Journal*, 4, pp.66-84, 1980.

Barbaud [**1965**] P. Barbaud : *Introduction la composition musicale automatique,* Dunod d., 1968.

Barbaud [**1968**] P. Barbaud : *La musique discipline scientifique,* Dunod d., 1968.

Barbaud [**1997**] P. Barbaud : *Schoenberg,* Editions Main d ¸uvre, 1997.

Bazelow et Brickle [1976] A. Bazelow et F. Brickle˚: ¨˚A Partition Problem posed by Milton Babbitt˚¨, *Perspectives of New Music*, 14(2), 15(1), pp.280-293, 1976.

Bent [**1998**] I. Bent et W. Drabkin : *L analyse musicale,* Editions Main d ¸uvre, 1998.

Bernard [1997] J. Bernard˚: ¨˚Chord, Collection, and Set in Twentieth-Century Theory˚¨, dans **Baker [1997]**, pp.11-52.

Boretz et Cone [1972] B. Boretz et E.T. Cone˚: *Perspectives on Contemporary Music Theor*y, W.W. Norton and Company, New York, 1972.

Boulez [**1963**] P. Boulez : *Penser la musique aujourd hui,* Gallimard d., Paris, 1963.

Boulez [**1966**] P. Boulez : *Relev s d apprenti,* Seuil d, Paris, 1966.

Budden [**1972**] F.J. Budden : *The Fascination of groupes,* Cambridge University Press, 1972.

Carey et Clampitt [1989] N. Carey et D. Clampitt˚: ¨˚Aspects of well-formed scales˚¨, *Music Theory Spectrum*, 11, pp.187-206, 1989.

Chemillier [**1987**] M. Chemillier : ¨ Monoide libre et musique ¨, *RAIRO Inf. Theo.,* vol. 21, n¡ 3 et 4, pp.341-371 et pp.379-417, 1987.

Chemillier [**1990**] M. Chemillier : *Structure et M thode alg briques en informatique musicale (th se),* L.I.T.P., Institut Blaise Pascal, 1990.

Chemillier [**1999**] M. Chemillier : ¨ G n rateurs musicaux et singularit s ¨, *Actes des sixi mes Journ es d Informatique Musicale,* pp.167-177, 1999.

Clough et Myerson [1985] J. Clough et G. Myerson˚: ¨˚Variety and multiplicity in diatonic systems˚¨, *Journal of Music Theory*, 29, pp.249-270, 1985.

Clough et Douthett [1991] J. Clough et J. Douthett˚: ¨˚Maximally even sets˚¨, *Journal of Music Theory*, 35, pp.93-173, 1991.

Clough [1994] J. Clough˚:˚ ¨˚Diatonic Interval Cycles and Hierarchical Structure˚¨, *Perspectives of New Music*, 32(1), pp.228-253, 1994.

Dahlhaus [**1966**] C. Dahlhaus : *Untersuchung ber die Entstehung der harmonischen Tonalit t,* B renreiter, Kassel, 1967.

Dieudonne [**1987**] J. Dieudonn : *Pour l honneur de l esprit humain. Les math matiques aujourd hui,* Hachette d., 1987.

Duchez [**1978**] M.E. Duchez : ¨ Th orie musicale et th orie scientifique ¨, *Actes du Colloque sur l ducation musicale scientifique,* Brest, pp.21-23, 1978.

Dufourt [**1991**] H. Dufourt : ¨ Timbre et espace ¨, in : *Le timbre, m taphore pour la composition,* Paris, IRCAM-Bourgois d., pp.272-281, 1991.

Durutte [**1855**] C. Durutte : *Technie, ou lois g n rales du syst me harmonique,* Mallet-Bachelier, Paris, 1855.

Fichet [**1996**] L. Fichet : *Les Th ories Scientifiques de la musique aux XIX me et XX me si cles,* Vrin d., 1996.

Fokker [**1947**] A.D. Fokker : *Les math matiques et la musique,* Extrait du Tome X, Archives du mus e Teyler, La Haye, pp.1-31, 1947.

Forte [1964] A. Forte˚: ¨˚A Theory of Set-Complexes for Music˚¨, *Journal of Music Theory*, 8(2), pp.136-183, 1964.

Forte [1973] A. Forte˚: *The Structure of Atonal Music*, New Haven, Yale University Press, 1973.

Forte [1989] A. Forte˚: ¨˚La *Set-complex theory:* levons les enjeux!˚¨, *Analyse musicale*, 4e trimestre, pp.80-86, 1989.

Gamer [1967] C. Gamer˚: ¨˚Some combinatorial resources of equal-tempered systems˚¨, *Journal of Music Theory* , 11, pp.32-59, 1967.

G tze et Wille [**1985**] H. G tze et R. Wille (sous la direction de) : *Musik und Mathematik, Salzburger Musikgespr ch 1984* , Springer-Verlag, 1985.

Graeser [**1924**] W. Graeser : Bachs Kunst der Fuge, in *Bach-Jahrbuch*, 1924.

Halsey et Hewitt [**1978**] D. Halsey et E. Hewitt : ¨ Eine gruppentheoretische Methode in der Musik-theorie ¨, *Jahresber. der Dt. Math.-Vereinigung* 80, 1978.

Hanslick [**1986**] E. Hanslick : *Du beau dans la musique*, Christian Bourgois d., 1986.

Hellegouarch [**1983**] Y. Hellegouarch : ¨ Gammes Naturelles ¨, *Musique et Math matiques,* revue de l Ass. des Profess. de Math. de l Enseignement Public, n¡ 53, 1983.

Hellegouarch [**1987**] Y. Hellegouarch: ¨ A la recherche de l aritm tique qui se cache dqns la musique ¨, *Gaz. des Math.,* n¡ 33, pp.71-80, Avril 1987.

Howe [1965] H. Howe˚: ¨˚Some combinatorial properties of Pitch-Structures˚¨ *Perspectives of New Music*, 4(1), pp45-61, 1965.

Lafon [**1998**] J.-P. Lafon: *Les formalismes fondamentaux de l alg bre commutative,* Hermann d., 1998.

Lautman [**1977**] A. Lautman : *Essai sur l unit des math matiques,* Paris, UGE, coll. 10/18 n¡1100, 1977.

Levy [**1995**] F. Levy : *La complexit du processus d criture musicale. Etude esth tique et scientifique du d calage entre intention compositionnelle et perception.* M moire de D.E.A. pour le doctorat en musique et musicologie du XX me si cle, EHESS/IRCAM, 1995.

Levy [**1999a**] F. Levy : ˙ Plaidoyer pour une oreille subjective et partisane. Une approche pythagoricienne de la perception culturelle des intervalles ¨, *Cahiers de philosophie du langage,* n¡ 3, L Harmattan, 1998.

Levy [**1999b**] F. Levy : ˙ Algorithmes et perception en France dans les musiques des ann es 1960-1970: de la perception induite par la structure aux processus d duits de la perception (A para tre).

Lewin [1959] D. Lewin°: ˙°Re: Intervallic Relations between Two Collections of Notes°¨ *Journal of Music Theory* , 3(2), 298-301, 1959.

Lewin [1960] D. Lewin°: ˙°Re: The Intervallic Content of a Collection of Notes, Intervallic Relations between a Collection of Notes and Its Complement: An Application to Schoenberg s Hexachordal Pieces°¨, *Journal of Music Theory* , 4(1), pp.98-101, 1960.

Lewin [1977] D. Lewin°: ˙°Forte s Interval Vector, My Interval Function, and Regener s Common-Note Function°¨, *Journal of Music Theory* , 21(2), pp.194-237, 1977.

Lewin [1984] D. Lewin°: ˙°On Formal Intervals between Time-Spans°¨, *Music Perception*, 1(4), pp.414-423, 1984.

Lewin [1987] D. Lewin°: *Generalized Musical Intervals and Transformations*, New Haven, Yale University Press, 1987.

Lewin [1993] D. Lewin°: *Musical Form and Transformation: 4 Analytic Essays*, New Haven, Yale University Press, 1993.

Mac Lane [**1997**] S. Mac Lane : *Categories for the Working Mathematician,* Second Edition, Springer-Verlag, 1998.

Martino [1961] D. Martino°: ˙°The Source Set and Its Aggregate Formations°¨, *Journal of Music Theory* , 5(2), pp.224-273, 1961.

Mazzola [**1989**] G. Mazzola (et al.) : ˙ A Symmetry-Oriented Mathematical Model of Classical Counterpoint and Related Neurophysiological Investigations by Depth-EEG ¨. Dans I. Hargittai (sous la direction de) : *Symmetry II,* CAMWA, Pergamon, New York, 1989.

Mazzola [**1990**] G. Mazzola : *Geometrie der T ne* , Birkh user Verlag, 1990.

Mazzola [**1993**] G. Mazzola : ˙ Mathematical Music Theory - An Informal Survey. *Edizioni Cerfim,* Locarno, 1993.

Mazzola [**1998**] G. Mazzola : ˙ Semiotic Aspects of Musicology: Semiotics of Music ¨. In R. Posner et al. (sous la direction de) : *A Handbook on the Sign-theoretic Foundations of Nature and Culture.* Walter de Gruyter, Berlin and New York 1998.

Mazzola [**1999**] G. Mazzola : *The Topos of Music,* A para tre, Birkh user Verlag, Basel, 1999.

Mesnage [1989] M. Mesnage˚: ¨˚La *Set-Complex Theory:* de quels enjeux s agit-il?˚¨, *Analyse musicale*, 4e trimestre, pp.87-90, 1989.

Mesnage [**1991**] M. Mesnage : ˙ Sur la mod lisation des partitions musicales ¨, *Analyse Musicale,* n¡22, pp.31-46, F vrier 1991.

Mesnage et Riotte [**1993**] M. Mesnage et A. Riotte : ˙ Mod lisation informatique de partitions, analyse et composition assist , *Les Cahiers de l IRCAM n¡3,* pp.43-59, 2 me trimestre 1993.

Mesnage [**1997**] M. Mesnage : ˙ Entit s formelles pour l analyse musicale, in *Musiques et Math matiques,* Aleas d., 1997.

Messiaen [**1944**] O. Messiaen : *Technique de mon langage musical,* Alphonse Leduc, Editions Musicales, Paris, 1944.

Messiaen [**1992**] O. Messiaen : *Trait de Rythme, de Couleur et d'Ornithologie,* tome 2, Alphonse Leduc, Editions Musicales, Paris, 1944.

Meyer [**1956**] L.B. Meyer : *Emotion and Meaning in Music,* Chicago, University of Chicago Press, 1956.

Morris [1987] R. Morris˚: *Composition with Pitch-Classes: A Theory of Compositional Design*, New Haven, Yale University Press, 1987.

Morris [1995] R. Morris˚: ¨˚Compositional Spaces and Other Territories˚¨, *Perspectives of New Music,* 33, pp.328-358, 1995.

Morris [1997] R. Morris˚: ¨˚K, Kh, and Beyond˚¨, dans **Baker [1997]**, pp. 275-306.

Muzzulini [**1995**] D. Muzzulini : ˙ Musical Modulation by Symmetries ¨, *Journal of Music Theory,* 39(2), pp.311-325, 1995.

Nattiez [**1986**] J.-J. Nattiez : ˙ Introduction l esth tique de Hanslick ¨, in **Hanslick** [**1986**], pp.11-51.

Nicolas [**1996**] F. Nicolas : ˙ Quelle unit pour l ˇuvre musicale moderne? Une lecture d Albert Lautman ¨, *S minaire de travail sur la philosophie,* Lyon, 1996.

No l [**1989**] E. No l (sous la direction de) : *La sym trie aujourd hui,* Editions du Seuil, F vrier, 1989.

Noll [**1995**] T. Noll : *Morphologische Grundlage der abendl ndischen Harmonik,* Th se de doctorat, TU Berlin, 1995.

Orcalli [**1993**] A. Orcalli : *Fenomenologia della musica sperimentale,* Sonus Edizioni Musicali, Potenza, 1993.

Perle [1981] G. Perle˚: *Serial Composition and Atonality: An Introduction to the Music of Schoenberg, Berg and Webern*, 5th edition, revised, Berkeley, University of California Press, 1981.

Rahn [1980] J. Rahn˚: *Basic Atonal Theory*, New York, Longman, 1980.

Rahn [1987] J. Rahn˚: ¨ *Generalized Musical Intervals and Transformations* ¨, dans *Journal of Music Theory*, 31, pp.305-318, 1987.

Restagno [**1988**] E. Restagno (sous la direction de) : *Xenakis*, Biblioteca di cultura musicale, E.D.T., Torino, 1988.

Riotte [**1963**] A. Riotte : ¨ G n ration des cycles quilibr s ¨, Rapport interne n¡ £%£ Euratom, Ispra, 1963.

Riotte [**1979**] A. Riotte : *Formalisation des structures musicales,* Universit Paris VIII, d partement d informatique, Paris, 1979.

Risset [**1991**] J.-C. Risset : ¨ Musique, recherche, th orie, espace, chaos ¨, *Inharmoniques n¡ 8/9,* IRCAM, 1991.

Roeder [**1993**] J. Roeder : ¨ A MaMuTh Achievement ¨, *Perspectives of New Music,* 31(2), pp.294-312, 1993.

Sands [**1959**] A. Sands : ¨ The Factorisation of Abelian Groups ¨, *Quart. J. Math. Oxford,* vol. 2 n¡ 10, pp. 81-91, 1959.

Schaub [**1996**] S. Schaub : *Algebraic Structures and Symmetry in Western Music,* Thesis, Department of Mathematics, University of Arizona, 1996.

Schillinger [**1941**] F. Schillinger : *The Schllinger system of musical composition,* New York, Carl Fisher inc., 2 vol., 1941.

Schillinger [**1948**] F. Schillinger : *The mathematical basis of the art,* The Philosophical Library, 1948.

Sch nberg [**1922**] A. Schoenberg : *Harmonielehre,* Universal Edition, Wien, 1922.

Scimeni [**1997**] B. Scimeni : ¨ Contrappunto musicale e trasformazioni geometriche ¨, *Atti del colloquio Matematica e Cultura,* pp. 77-86, Venezia, 1997.

Starr [1978] D. Starr,˚: ¨˚Sets, Invariance and Partitions˚¨, *Journal of Music Theory*, 22(1), pp.1-42, 1978.

Starr et Morris [1978] D. Starr et R. Morris˚: ¨˚A General Theory of Combinatoriality and the Aggregate˚¨˚*Perspectives of New Music*, 16(1), pp.364-389, 16(2) pp.50-84, 1977-78.

Straus [1997] J. N. Straus˚: ¨˚Voice Leading in Atonal Music˚¨, dans **Baker [1997]**, pp.237-274.

Stein [**1994**] S. Stein et S. Szab : *Algebra and Tiling,* The Carus Mathematical Monographs, n¡25, 1994.

Vieru [**1980**] A. Vieru : *Cartea modurilor,* 1 (*Le livre des modes,* 1), Ed. muzicala, Bucarest, 1980.

Vieru [**1985**] A. Vieru : ¨ Modalism - A Third World ¨, *Perspectives of New Music,* 24, pp.62-71, 1985.

Vieru [**1992**] A. Vieru : ¨ Generating Modal Sequences ¨ (A remote approach to Minimal Music), *Perspectives of New Music,* 30(2), pp.178-200, 1992.

Vieru [**1993**] A. Vieru : *The book of modes* (2nd Edition), Editura Muzicala, Bucarest, 1993.

Vuza [**1982-**] D.T. Vuza : ¨ Aspects math matiques dans la th orie modale d Anatol Vieru ¨, Parts 1-4, *Revue Roumaine de Math matiques Pures et Appliqu es,* 27 (1982), n¡2 et 10; 28 (1983), n¡7 et 8.

Vuza [**1985**] D.T. Vuza : ¨ Sur le rythme p riodique ¨, *Revue Roumaine de Linguistique-Cahiers de linguistique Th orique et Appliqu e* 23, n¡1, pp.73-103, 1985.

Vuza [**1988**] D.T. Vuza : ¨ Some Mathematical Aspects of David Lewin s Book *Generalized Musical Intervals and Transformations ¨,* dans *Perspectives of New Music* 26(1), pp.258-287, 1988.

Vuza [**1991**] D.T. Vuza : ¨ Supplementary Sets and Regular Complementary Unending Canons I ¨, *Perspectives of New Music,* 29(2), pp.22-49, 1991.

Vuza [**1992a**] D.T. Vuza : ¨ Supplementary Sets and Regular Complementary Unending Canons II ¨, *Perspectives of New Music,* 30(1), pp.184-207, 1992.

Vuza [**1992b**] D.T. Vuza : ¨ Supplementary Sets and Regular Complementary Unending Canons III ¨, *Perspectives of New Music,* 30(2), pp.102-125, 1992.

Vuza [**1993**] D.T. Vuza : ¨ Supplementary Sets and Regular Complementary Unending Canons IV ¨, *Perspectives of New Music,* 31(1), pp.270-305, 1993.

Vuza [**1995**] D.T. Vuza : ¨ Supplementary Sets - Theory and Algorithms, Muzica n¡1 ¨, pp.75-99, 1995.

Weyl [**1964**] H. Weyl : *Sym trie et Math matique moderne,* Flammarion d., 1964.

Wille [**1980**] R. Wille : ¨ Mathematische Sprache in der Musiktheorie ¨, *Jahrbuch ber Math.,* pp.167-184, 1980.

Wille [**1982**] R. Wille : ¨ Symmetrien in der Musik ¨, *Neue Zeitschrift f r Musik,* pp.12-19, D cembre 1982.

Wille [**1985**] R. Wille : ¨ Musiktheorie und Mathematik ¨, dans **G tze et Wille** [**1985**], pp. 4-31.

Xenakis [**1963**] I. Xenakis : *Musiques Formelles,* Stock Musique, Paris, 1963.

Xenakis [**1965**] I. Xenakis : ¨ La voie de la recherche et de la question ¨, *Preuves,* n¡ 177, novembre 1965 (repris in **Xenakis** [**1994**], pp. 67-74).

Xenakis [**1971**] I. Xenakis : *Formalized Music,* Indiana University Press, 1971.

Xenakis [**1971b**] I. Xenakis : *Musique. Architecture,* Casterman, 1971.

Xenakis [**1979**] I. Xenakis : *Art/Sciences. Alliages,* (avec O. Messiaen, M. Ragon, O. Revault d Allones, M. Serres, B. Teyssedre), Casterman, 1979.

Xenakis [**1981**] I. Xenakis : ¨ Les chemins de la composition musicale ¨, *Le Compositeur et l ordinateur,* IRCAM, 1981.

Xenakis [**1992**] I. Xenakis : *Formalized music,* Pendragon Press, Stuyvesant NY, 1992..

Xenakis [**1994**] I. Xenakis : *K le tha,* L Arche d., 1994.

Xenakis [**1996**] B.-A. Varga: *Conversations with Iannis Xenakis,* Faber and Faber , London, 1996.

Wyschnegradsky [**1996**] I. Wyschnegradsky : *Loi de la Pansonorit ,* Editions Contrechamps, 1996.

Zalewski [**1972**] M. Zalewski : *Harmonia Teoretyczna,* PWSM, 1972.

Zweifel [1996] Zweifel, P. F.: ¨°Generalized Diatonic and Pentatonic Scales: A Group-theoretic approach°¨ *Perspectives of New Music*, 34(1), 1996, pp.140-161.

Abstract

There has been much interest, in recent years, in the possibility of representing musical structures in *algebraic*terms. Concepts like chords, scales, rhytms have been formalized in differents ways, from Maciej Zalewski's "Theory of Structures" and Allen Forte's "Set Theory" to David Lewin's "Generalized Intervals Systems", Anatol Vieru's "Modal Classes" and Guerino Mazzola's "Mathematical Music Theory". With its emphasis on group theory, the present essay analyse the relationships between Dan Tudor Vuza's "Theory of Rythmic Canons" and some topics of Mathematical Music Theory which could offer a basis for further researches into Music Theory, analytical fields and applications to the act of composing.

ANNEXES :

LISTE DES CLASSES METRIQUES *S* et CLASSES RYTHMIQUES *R* CORRESPONDANTES AUX CANONS REGULIERS COMPLEMENTAIRES DE CATEGORIE MAXIMALE (pour tout Z_n, $72 \leq n \leq 120$).

n = 72

n = 2 3 2 3 2

S

(22 16 2 14 2 16) (18 14 8 10 8 14) (38 8 8 2 8 8)

R

(1 4 1 6 13 4 7 6 6 1 4 19)
(5 1 3 3 17 4 3 6 6 5 4 15)
(11 6 3 3 1 20 3 1 5 6 9 4)
(4 7 6 6 1 4 19 1 4 1 6 13)
(4 3 6 6 5 4 15 5 1 3 3 17)
(3 1 5 6 9 4 11 6 3 3 1 20)

(3 3 1 5 15 4 5 6 6 3 4 17)
(6 1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13)
(9 6 5 1 3 20 1 3 3 6 11 4)
(4 5 6 6 3 4 17 3 3 1 5 15)
(4 1 6 6 7 4 13 6 1 4 1 19)
(1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)

n = 108

n = 2 3 2 3 3

S

(33 24 3 21 3 24) (27 21 12 15 12 21) (57 12 12 3 12 12)

R

(1 1 5 1 1 9 19 1 5 1 10 9 9 1 1 5 1 28)
(1 6 1 1 5 4 19 6 1 6 4 9 9 1 6 1 6 22)
(16 1 6 2 5 4 2 17 6 7 4 2 7 9 1 6 7 6)
(6 10 1 6 2 9 2 6 11 6 11 2 6 1 9 1 6 13)
(6 4 1 6 2 9 8 6 5 6 11 8 1 5 4 1 6 19)
(4 1 1 5 2 9 14 5 1 5 11 9 5 4 1 1 5 25)
(2 2 4 1 1 8 20 2 4 2 8 9 9 2 2 4 2 26)
(4 4 1 1 4 4 22 4 2 4 4 9 9 4 4 2 4 22)
(16 4 5 1 4 4 2 20 6 4 4 2 7 9 4 6 4 6)
(6 10 4 5 1 8 2 6 14 6 8 2 6 1 9 4 6 10)
(6 4 4 5 1 8 8 6 8 6 8 8 1 5 4 4 6 16)
(4 2 2 5 1 8 14 6 2 6 8 9 5 4 2 2 6 22)
(2 5 1 1 4 5 20 5 1 5 5 9 9 2 5 1 5 23)
(7 1 1 4 1 4 25 1 5 1 4 9 9 7 1 5 1 22)
(16 7 2 4 1 4 2 23 6 1 4 2 7 9 7 6 1 6)
(6 10 7 2 4 5 2 6 17 6 5 2 6 1 9 7 6 7)
(6 4 7 2 4 5 8 6 11 6 5 8 1 5 4 7 6 13)
(4 2 5 2 4 5 14 6 5 6 5 9 5 4 2 5 6 19)
(2 6 1 1 6 2 20 6 2 6 2 9 9 2 6 2 6 20)
(8 1 1 4 2 2 26 2 4 2 2 9 9 8 2 4 2 20)
(16 9 1 4 2 2 2 26 4 2 2 2 7 9 10 4 2 4)
(6 10 9 1 6 2 2 6 20 6 2 2 6 1 9 10 6 4)
(6 4 9 1 6 2 8 6 14 6 2 8 1 5 4 10 6 10)
(4 2 7 1 6 2 14 6 8 6 2 9 5 4 2 8 6 16)
(17 2 6 1 4 5 1 19 6 5 5 1 8 9 2 6 5 6)
(17 8 1 4 1 4 1 25 5 1 4 1 8 9 8 5 1 5)
(1 16 9 4 1 4 1 1 29 1 4 1 1 7 9 13 1 5)
(1 6 10 9 4 5 1 1 6 23 5 1 1 6 1 9 13 6)
(7 6 4 9 4 5 1 7 6 17 5 1 7 1 5 4 13 6)
(13 4 2 7 4 5 1 13 6 11 5 1 8 5 4 2 11 6)
(14 2 6 1 7 2 4 16 6 8 2 4 5 9 2 6 8 6)
(14 8 1 5 2 2 4 22 6 2 2 4 5 9 8 6 2 6)
(2 14 9 5 2 2 2 2 28 2 2 2 2 5 9 14 2 4)
(2 4 10 9 7 2 2 2 4 26 2 2 2 4 1 9 16 4)
(4 6 4 9 7 2 4 4 6 20 2 4 4 1 5 4 16 6)
(10 4 2 7 7 2 4 10 6 14 2 4 5 5 4 2 14 6)
(6 11 2 6 1 9 1 6 13 6 10 1 6 2 9 2 6 11)
(6 11 8 1 5 4 1 6 19 6 4 1 6 2 9 8 6 5)
(1 5 11 9 5 4 1 1 5 25 4 1 1 5 2 9 14 5)
(1 5 1 10 9 9 1 1 5 1 28 1 1 5 1 1 9 19)
(6 1 6 4 9 9 1 6 1 6 22 1 6 1 1 5 4 19)
(6 7 4 2 7 9 1 6 7 6 16 1 6 2 5 4 2 17)
(6 8 2 6 1 9 4 6 10 6 10 4 5 1 8 2 6 14)
(6 8 8 1 5 4 4 6 16 6 4 4 5 1 8 8 6 8)
(2 6 8 9 5 4 2 2 6 22 4 2 2 5 1 8 14 6)
(2 4 2 8 9 9 2 2 4 2 26 2 2 4 1 1 8 20)

(1 4 2 2 2 7 19 4 2 4 7 9 9 1 4 2 4 25)
(1 6 2 2 6 1 19 6 4 6 1 9 9 1 6 4 6 19)
(13 1 6 2 8 1 5 14 6 10 1 5 4 9 1 6 10 6)
(6 7 1 6 2 9 5 6 8 6 11 5 4 2 7 1 6 16)
(6 1 1 6 2 9 11 6 2 6 11 9 2 6 1 1 6 22)
(1 1 4 2 2 9 17 2 4 2 11 9 8 1 1 4 2 28)
(4 1 4 1 1 7 22 1 5 1 7 9 9 4 1 5 1 25)
(4 5 1 1 6 1 22 6 1 6 1 9 9 4 6 1 6 19)
(13 4 5 1 7 1 5 17 6 7 1 5 4 9 4 6 7 6)
(6 7 4 5 1 8 5 6 11 6 8 5 4 2 7 4 6 13)
(6 1 4 5 1 8 11 6 5 6 8 9 2 6 1 4 6 19)
(1 4 1 4 1 8 17 5 1 5 8 9 8 1 4 1 5 25)
(5 2 2 2 2 5 23 2 4 2 5 9 9 5 2 4 2 23)
(7 2 2 2 4 1 25 4 2 4 1 9 9 7 4 2 4 19)
(13 7 2 4 4 1 5 20 6 4 1 5 4 9 7 6 4 6)
(6 7 7 2 4 5 5 6 14 6 5 5 4 2 7 7 6 10)
(6 1 7 2 4 5 11 6 8 6 5 9 2 6 1 7 6 16)
(1 5 2 2 4 5 17 6 2 6 5 9 8 1 5 2 6 22)
(5 4 1 1 5 2 23 5 1 5 2 9 9 5 5 1 5 20)
(9 1 1 5 1 1 28 1 5 1 1 9 9 10 1 5 1 19)
(13 9 1 6 1 1 5 23 6 1 1 5 4 9 10 6 1 6)
(6 7 9 1 6 2 5 6 17 6 2 5 4 2 7 10 6 7)
(6 1 9 1 6 2 11 6 11 6 2 9 2 6 1 10 6 13)
(1 5 4 1 6 2 17 6 5 6 2 9 8 1 5 5 6 19)
(17 5 4 2 2 5 1 22 6 2 5 1 8 9 5 6 2 6)
(17 9 2 2 4 1 1 28 2 4 1 1 8 9 11 2 4 2)
(4 13 9 4 4 1 1 4 26 4 1 1 4 4 9 13 4 2)
(4 6 7 9 4 5 1 4 6 20 5 1 4 4 2 7 13 6)
(10 6 1 9 4 5 1 10 6 14 5 1 8 2 6 1 13 6)
(16 1 5 4 4 5 1 16 6 8 5 1 8 8 1 5 8 6)
(14 5 4 2 5 2 4 19 6 5 2 4 5 9 5 6 5 6)
(14 9 2 5 1 1 4 25 5 1 1 4 5 9 11 5 1 5)
(1 13 9 7 1 1 4 1 29 1 1 4 1 4 9 16 1 5)
(1 6 7 9 7 2 4 1 6 23 2 4 1 4 2 7 16 6)
(7 6 1 9 7 2 4 7 6 17 2 4 5 2 6 1 16 6)
(13 1 5 4 7 2 4 13 6 11 2 4 5 8 1 5 11 6)
(6 11 5 4 2 7 1 6 16 6 7 1 6 2 9 5 6 8)
(6 11 9 2 6 1 1 6 22 6 1 1 6 2 9 11 6 2)
(4 2 11 9 8 1 1 4 2 28 1 1 4 2 2 9 17 2)
(4 2 4 7 9 9 1 4 2 4 25 1 4 2 2 2 7 19)
(6 4 6 1 9 9 1 6 4 6 19 1 6 2 2 6 1 19)
(6 10 1 5 4 9 1 6 10 6 13 1 6 2 8 1 5 14)
(6 8 5 4 2 7 4 6 13 6 7 4 5 1 8 5 6 11)
(6 8 9 2 6 1 4 6 19 6 1 4 5 1 8 11 6 5)
(1 5 8 9 8 1 4 1 5 25 1 4 1 4 1 8 17 5)
(1 5 1 7 9 9 4 1 5 1 25 4 1 4 1 1 7 22)

(4 2 4 4 9 9 4 4 2 4 22 4 4 1 1 4 4 22)
(6 4 4 2 7 9 4 6 4 6 16 4 5 1 4 4 2 20)
(6 5 2 6 1 9 7 6 7 6 10 7 2 4 5 2 6 17)
(6 5 8 1 5 4 7 6 13 6 4 7 2 4 5 8 6 11)
(5 6 5 9 5 4 2 5 6 19 4 2 5 2 4 5 14 6)
(5 1 5 5 9 9 2 5 1 5 23 2 5 1 1 4 5 20)
(1 5 1 4 9 9 7 1 5 1 22 7 1 1 4 1 4 25)
(6 1 4 2 7 9 7 6 1 6 16 7 2 4 1 4 2 23)
(6 2 2 6 1 9 10 6 4 6 10 9 1 6 2 2 6 20)
(6 2 8 1 5 4 10 6 10 6 4 9 1 6 2 8 6 14)
(8 6 2 9 5 4 2 8 6 16 4 2 7 1 6 2 14 6)
(6 2 6 2 9 9 2 6 2 6 20 2 6 1 1 6 2 20)
(2 4 2 2 9 9 8 2 4 2 20 8 1 1 4 2 2 26)
(4 2 2 2 7 9 10 4 2 4 16 9 1 4 2 2 2 26)
(5 1 1 6 1 9 13 6 1 6 10 9 4 5 1 1 6 23)
(5 1 7 1 5 4 13 6 7 6 4 9 4 5 1 7 6 17)
(11 5 1 8 5 4 2 11 6 13 4 2 7 4 5 1 13 6)
(6 5 5 1 8 9 2 6 5 6 17 2 6 1 4 5 1 19)
(5 1 4 1 8 9 8 5 1 5 17 8 1 4 1 4 1 25)
(1 4 1 1 7 9 13 1 5 1 16 9 4 1 4 1 1 29)
(2 2 2 4 1 9 16 4 2 4 10 9 7 2 2 2 4 26)
(2 4 4 1 5 4 16 6 4 6 4 9 7 2 4 4 6 20)
(14 2 4 5 5 4 2 14 6 10 4 2 7 7 2 4 10 6)
(6 8 2 4 5 9 2 6 8 6 14 2 6 1 7 2 4 16)
(6 2 2 4 5 9 8 6 2 6 14 8 1 5 2 2 4 22)
(2 2 2 2 5 9 14 2 4 2 14 9 5 2 2 2 2 28)

(6 1 6 1 9 9 4 6 1 6 19 4 5 1 1 6 1 22)
(6 7 1 5 4 9 4 6 7 6 13 4 5 1 7 1 5 17)
(6 5 5 4 2 7 7 6 10 6 7 7 2 4 5 5 6 14)
(6 5 9 2 6 1 7 6 16 6 1 7 2 4 5 11 6 8)
(2 6 5 9 8 1 5 2 6 22 1 5 2 2 4 5 17 6)
(2 4 2 5 9 9 5 2 4 2 23 5 2 2 2 2 5 23)
(4 2 4 1 9 9 7 4 2 4 19 7 2 2 2 4 1 25)
(6 4 1 5 4 9 7 6 4 6 13 7 2 4 4 1 5 20)
(6 2 5 4 2 7 10 6 7 6 7 9 1 6 2 5 6 17)
(6 2 9 2 6 1 10 6 13 6 1 9 1 6 2 11 6 11)
(5 6 2 9 8 1 5 5 6 19 1 5 4 1 6 2 17 6)
(5 1 5 2 9 9 5 5 1 5 20 5 4 1 1 5 2 23)
(1 5 1 1 9 9 10 1 5 1 19 9 1 1 5 1 1 28)
(6 1 1 5 4 9 10 6 1 6 13 9 1 6 1 1 5 23)
(5 1 4 4 2 7 13 6 4 6 7 9 4 5 1 4 6 20)
(5 1 8 2 6 1 13 6 10 6 1 9 4 5 1 10 6 14)
(8 5 1 8 8 1 5 8 6 16 1 5 4 4 5 1 16 6)
(6 2 5 1 8 9 5 6 2 6 17 5 4 2 2 5 1 22)
(2 4 1 1 8 9 11 2 4 2 17 9 2 2 4 1 1 28)
(4 1 1 4 4 9 13 4 2 4 13 9 4 4 1 1 4 26)
(2 4 1 4 2 7 16 6 1 6 7 9 7 2 4 1 6 23)
(2 4 5 2 6 1 16 6 7 6 1 9 7 2 4 7 6 17)
(11 2 4 5 8 1 5 11 6 13 1 5 4 7 2 4 13 6)
(6 5 2 4 5 9 5 6 5 6 14 5 4 2 5 2 4 19)
(5 1 1 4 5 9 11 5 1 5 14 9 2 5 1 1 4 25)
(1 1 4 1 4 9 16 1 5 1 13 9 7 1 1 4 1 29)

n = 120

n = 2 3 2 5 2

S

(6 24 2 16 14 2 14 16 2 24)
(18 16 14 16 2 16 8 6 16 8)
(18 8 16 6 8 16 2 16 14 16)
(30 2 24 6 2 22 2 6 24 2)
(24 6 18 6 2 16 6 8 16 18)
(22 8 18 8 8 14 8 8 18 8)
(30 2 16 8 6 2 14 8 8 26)
(30 18 8 8 8 6 8 8 8 18)
(26 16 14 2 14 2 14 2 14 16)
(24 18 16 8 6 16 2 6 18 6)
(26 8 22 2 6 18 6 2 22 8)
(34 8 16 6 2 6 16 2 6 24)
(34 24 6 2 16 6 2 6 16 8)
(30 26 8 8 14 2 6 8 16 2)
(42 16 8 6 2 14 2 6 8 16)
(58 8 8 8 6 2 6 8 8 8))

R

(1 4 5 10 21 4 15 10 10 1 4 35)
(5 4 1 10 25 4 11 10 10 5 4 31)
(9 1 3 7 29 4 7 10 10 9 4 27)
(10 3 4 3 33 4 3 10 10 13 4 23)
(19 10 7 3 1 36 3 1 9 10 17 4)
(4 15 10 10 1 4 35 1 4 5 10 21)
(4 11 10 10 5 4 31 5 4 1 10 25)
(4 7 10 10 9 4 27 9 1 3 7 29)
(4 3 10 10 13 4 23 10 3 4 3 33)
(3 1 9 10 17 4 19 10 7 3 1 36)
(1 9 3 7 21 12 7 10 10 1 12 27)
(5 5 7 3 25 12 3 10 10 5 12 23)
(19 9 1 10 1 28 11 1 9 10 9 12)
(15 10 3 7 5 28 7 5 5 10 13 12)
(11 10 7 3 9 28 3 9 1 10 17 12)
(12 7 10 10 1 12 27 1 9 3 7 21)
(12 3 10 10 5 12 23 5 5 7 3 25)
(11 1 9 10 9 12 19 9 1 10 1 28)
(7 5 5 10 13 12 15 10 3 7 5 28)
(3 9 1 10 17 12 11 10 7 3 9 28)
(3 4 3 10 23 4 13 10 10 3 4 33)
(7 3 1 9 27 4 9 10 10 7 4 29)
(10 1 4 5 31 4 5 10 10 11 4 25)
(10 5 4 1 35 4 1 10 10 15 4 21)
(17 10 9 1 3 36 1 3 7 10 19 4)
(4 13 10 10 3 4 33 3 4 3 10 23)
(4 9 10 10 7 4 29 7 3 1 9 27)
(4 5 10 10 11 4 25 10 1 4 5 31)
(4 1 10 10 15 4 21 10 5 4 1 35)
(1 3 7 10 19 4 17 10 9 1 3 36)
(3 7 5 5 23 12 5 10 10 3 12 25)
(7 3 9 1 27 12 1 10 10 7 12 21)
(17 10 1 9 3 28 9 3 7 10 11 12)
(13 10 5 5 7 28 5 7 3 10 15 12)
(9 10 9 1 11 28 1 10 1 9 19 12)
(12 5 10 10 3 12 25 3 7 5 5 23)
(12 1 10 10 7 12 21 7 3 9 1 27)
(9 3 7 10 11 12 17 10 1 9 3 28)
(5 7 3 10 15 12 13 10 5 5 7 28)
(1 10 1 9 19 12 9 10 9 1 11 28))

n = 2 5 2 3 2

S

(26 30 2 30 2 30)
(34 30 10 16 14 16)
(50 8 22 8 2 30)
(50 30 2 8 22 8)
(34 16 14 16 10 30)
(58 16 14 2 14 16)
(30 26 8 22 8 26)
(74 8 8 14 8 8)

R

(1 4 7 6 6 1 4 7 13 4 7 12 1 4 1 6 12 1 4 19)
(3 4 5 6 6 3 4 5 15 4 5 12 3 3 1 5 12 3 4 17)
(5 4 3 6 6 5 4 3 17 4 3 12 5 1 3 3 12 5 4 15)
(7 4 1 6 6 7 4 1 19 4 1 12 6 1 4 1 12 7 4 13)
(11 9 3 1 5 6 9 3 1 20 3 1 11 6 3 3 1 11 9 4)
(9 11 1 3 3 6 11 1 3 20 1 3 9 6 5 1 3 9 11 4)
(4 7 12 1 4 1 6 12 1 4 19 1 4 7 6 6 1 4 7 13)
(4 5 12 3 3 1 5 12 3 4 17 3 4 5 6 6 3 4 5 15)
(4 3 12 5 1 3 3 12 5 4 15 5 4 3 6 6 5 4 3 17)
(4 1 12 6 1 4 1 12 7 4 13 7 4 1 6 6 7 4 1 19)
(3 1 11 6 3 3 1 11 9 4 11 9 3 1 5 6 9 3 1 20)
(1 3 9 6 5 1 3 9 11 4 9 11 1 3 3 6 11 1 3 20)

NOTE AU LECTEUR.

La partie suivante contient la traduction d'une partie de l'**Appendice** de *Geometrie der T ne* (Bikh user Verlag, 1990). Elle est destin e, surtout a ceux qui d sirent approfondir quelques aspects math matiques contenus dans cette tude. On a donc choisi de traduire les parties qui peuvent effectivement aider la compr hension de certains passages du texte. Plus pr cis ment il trouvera la les sections suivantes (num rot es selon la version originelle):

A0. Ensembles, Relations et Groupes

A0.1 Les ensembles

A0.1.1 Exemples d'ensembles

A0.2 Les relations

A0.2.1 Les applications

A0.2.1.1 Exemples

A0.3 Groupes

A0.3.1 Exemples de groupes

A0.3.2 Homomorphismes de groupes

A0.3.3 Th or me sur les groupes ab liens finis

A0.3.4 Op rations sur les groupes

A0.3.4.1 Exemple d'une op ration de groupe

A1. Domaine de coefficients pour les sons

A1.1 Anneaux

A1.1.1 Exemples d'anneaux

A.1.1.2 D composition en facteurs premiers dans **Z**.

A1.2 Homomorphismes d'anneaux

A1.2.1 Exemples d'Homomorphismes d'anneaux

A2. Modules, applications lin aires et applications affines

A2.3 Applications affines

A2.4 Modules de compositions locales

A2.5 Restriction de scalaires

A2.5.1 Approximation dans l'espace de Euler

A3. Les sym tries musicales et leurs groupes

A3.1 Sym tries du plan de g om trie affine

A3.1.1 Scisaillement

A3.1.2 Dilatation

A3.1.3 translation/r flexion

A5. Le lemme de Yoneda comme fondement pour la th orie des compositions globales

A5.1 Cat gories au lieu des ensembles

A5.2 Le lemme de Yoneda pour cat gories quelconques

A5.3 Les perspectives locales sont suffisants pour la description des c ompositions globales.

A0.1 Les ensembles

Le langage des ensembles d crit, de fa on classique, les entit s math matiques. Une alternative au langage des ensembles est celui des cat gories (Cf. **A5**).

Un ensemble M est un objet d finit comme une collection d'objets d termin s de fa on univoque et appel s l ments ou points de M. Deux ensembles sont donc gaux lorsqu'ils contiennent les m mes l ments. Lorsque l'on dit "soit M un ensemble" on sous entend que M est d finit de fa on non contradictoire et donc que cet ensemble existe. L'inclusion ou non dans M de tout objet m est alors fix e. Les expressions "m est un l ment de M", "m est dans M", "m est un point de / dans M" ou encore "m est inclus dans M" sont toutes synonymes. Pour d crire un ensemble par la liste de ses l ments m, m',.... on crit {m,m',...}. On notera que la mention r p t d'un m me l ment dans { } ne modifie en rien le contenu de l'ensemble - on a donc {x,x,x,y}={x,y}. Un ensemble N dont tous les l ments sont galement dans M est appel sous-ensemble de M. Deux ensembles sont gaux lorsqu'ils sont sous ensemble l'un de l'autre. L'ensemble vide est d finit comme ne contenant aucun l ment. Il est sous-ensemble de tout ensemble. Un ensemble est dit fini lorsque tous ses l ment peuvent tre num rot s par des entiers naturels 0, 1, 2 ... n , sinon, il est dit infini.

A0.1.1 Exemples d'ensembles

a) **Z** ={0,–1,–2,–3,...,–n} est l'ensemble des entiers relatifs, **N** est l'ensemble des entiers naturels, **Q** est l'ensemble des nombre rationnels, **R**= { "chiffres virgules" comme -741,76; „ = 3, 14159...} est l'ensemble des nombres r els. Nous avons : **N** sous ensemble de **Z**, **Z** de **Q** (les fractions de type {p/q°; p,q∈Z°;q≠0} **Q** de **R** (les nombres d cimales p riodiques).

b) Si M et N sont deux ensembles, alors leur diff rence M\N, galement appel e le compl ment de N dans M, est le sous ensemble de M contenant les l ments qui ne sont pas dans N. Si M_1, M_2 , ,M_n sont des ensembles, alors m est un point de leur union $U= M_1 \cup M_2 \cup \cup M_n$ si et seulement si (ssi) m est dans au moins un des M_s. De m me, m est un point de leur intersection $U= M_1 \cap M_2 \cap \cap M_n$ si et seulement si m est dans chacun des ensembles M_s (l'union et l'intersection d'un nombre infini d'ensemble M_1, M_2 , °,M_n sont d finies de fa on similaire). Si U est l'union de M_1, M_2, ,M_n alors I={ M_1, M_2, ,M_n } est appel recouvrement (fini) de U. Deux ensembles sont dit disjoints si leur intersection est (l'ensemble) vide. Un recouvrement est appel une partition lorsque ses l ments sont disjoints deux deux et non vides.

c) Un n-tuple est une suite ordonn e d'objets (m_1, m_2, ,m_n), c'est dire que l'ordre de ces objets est consid r . Pour une suite M_1 , M_2, , M_n d'ensembles, on crit M_1,+M_2,+ + M_n l'ensemble des n-tuples (m_1, m_2, , m_n) o m_1 est l ment de M_1 , m_2 est l ment de M_2 etc. Cet ensemble est appel somme directe de M_1, M_2, , M_n (nous d vions ici, pour des raisons li es la th orie des modules, de la notation traditionnelle du produit cart sien $M_1 \times M_2 \times \times M_n$ _)

A0.2 Les relations

Pour deux ensembles M et N, une relation est un sous-ensemble R de M + N. Lorsque la relation consid r e est claire, on peut crire m~n plut t que (m,n). La relation R^{-1} ,l'inverse de R, entre M et N est l'ensemble des tous les l ments (n,m) tels que (m,n) est l ment de R. Lorsque M = N on parle d'une relation sur M. Une relation sur M est dite r flexive lorsque m ~m est toujours vrai, elle est dite sym trique lorsque pour m~m on a m ~m et transitive lorsque m~m et m ~m impliquent m~m . Une relation qui est la fois r flexive, sym trique et transitive est appel e une relation d quivalence. Si [m] est, pour une relation d' quivalence R, la classe d' quivalence d finie par tous les m tel que m~m , alors le recouvrement M/R = M/~ = { [m] avec m dans M} est une partition de M par des classes d' quivalence (par R respectivement).

A0.2.1 Les applications

Une application f°:A→B d'un ensemble A vers un ensemble B est une r gle de correspondance f qui chaque l ment x de A fait correspondre un l ment unique f(x) de B. On crit x →f(x). Dans le langage des ensembles f peut tre d crit par un graphe c'est dire par une relation Γf entre A et B dont les l ments sont les paires (x,f(x)). Une relation entre A et B est un graphe de f si et seulement si pour chaque x dans A il existe un unique y dans B tel que x ~ y. L'image de f est le sous ensemble de B f(A)={f(x)∈ A}. L'application f est dite injective lorsque f(x)=f(x) implique x=x Elle est dite surjective lorsque pour tout b dans B il existe un x dans A tel que f(x)=b, c'est dire lorsque f(A)=B. Enfin, elle est dite bijective lorsque $(\Gamma f)^{-1}$ est le graphe d'une fonction, laquelle est appel e inverse f^{-1} de f. L'inverse de f existe si et seulement si f est injective et surjective. Une application bijective f°:A→A est galement appel e permutation de l'ensemble A.

A0.2.1.1 Exemples:

a) Pour s=1, ,n la projection p_s : M_1+ M_2+ + M_n est une application surjective. Pour une relation d' quivalence R sur M l'application des classes [°?]°: M→M/R°:m→[m] est surjective.

b) L'identit 1_A°: A→A°: a→a est une permutation de A. Lorsque f°:A→B et g°:B→C sont deux applications la composition de f avec g, g.f, est d finie par g.f(x)=g(f(x)). Avec une troisi me

application h°: C→D on a h.(g.f)=(h.g).f (associativit) et on crit simplement h.g.f. La composition de deux application surjective (injective) est elle m me surjective (injective) . De ce fait, g.f est bijectif si f et g sont bijectif et on a $(g.f)^{-1}=f^{-1}.g^{-1}$. En particulier, la composition de deux permutations sur A est galement une permutation sur A.

A0.3 Groupes

Un *groupe* est un ensemble G tel que:

a) Les l ments de G sont li s par une *loi de composition* μ: $G + G \rightarrow G$: $(g, h) \rightarrow g.h$; 2) Il y a un l ment *neutre* e dans G et pour chaque l ment g il existe un *inverse* g^{-1}

b) Ces donn es doivent r pandre les propri t s suivantes:

a) Loi associative: on a toujours $(g.h).k = g.(h.k)$, ce que on peut noter $g.h.k$;

b) L l ment e est neutre pour μ : on a toujours $e.g = g.e = g$;

c) Existence des inverses pour μ: on a toujours $g.g^{-1} = g^{-1}.g = e$.

L l ment neutre et les inverses sont d termin s de fa on unique par a)-c). Selon le contexte on crit aussi $g+h$, $g*h$ etc. au lieu de $g.h$, et **1**, 0 etc. au lieu de e. Pour repr senter un groupe de fa on symbolique on l crit comme un triplet (G, μ, e), $(G, +, 0)$ etc.; si μ et e sont clairs, on parle tout simplement d'un groupe G. Un groupe s appelle *commutatif* ou *ab lien* lorsque $g.h = h.g$ est toujours vrais.

Un groupe (G, μ, e) est *fini* si G est fini. Pour tout nombre n entier positif on crit g^n pour n r p titions de la lois de composition $g.g.... .g$; si n est n gatif on crit alors $g^n = (g^{-1})^{|n|}$; En posent galement $g^0 = e$ on a, pour tout entiers positifs m, n, la r gle $g^{m+n} = g^m .g^n$. Si la loi de composition est not e de fa on additive on crit $n\cdot g$ plut t que g^n.

A0.3.1 Exemples de groupes.

a) Le *groupe triviale* est $G = \{e\}$. Un *sous-groupe* H d un groupe G est un sous-ensemble H de G qui contienne e et qui, pour tout couple g, h contient galement $g.h$ et g^{-1}; Le groupe triviale est sous-groupe de tout groupe. Pour une succession de groupes G_1, G_2, ... , G_n la somme directe $G_1 + G_2 +...+ G_n$ est un groupe de fa on naturelle. On pose:

$(g_1, g_2 , ... , g_n).(h_1, h_2 , ... , h_n) = (g_1.h_1, g_2.h_2, ... , g_n.h_n)$,

$e = (e_1, e_2 , ... , e_n)$ (o e_s est l l ment neutre de G_s),

$(g_1, g_2 , ... , g_n)^{-1} = (g_1^{-1}, g_2^{-1} , ... , g_n^{-1})$.

Les inverses et les produits sont pris respectivement de chacun des groupes. Si E est un sous-ensemble d un groupe G , le sous-groupe $<E>$ *engendr* par E est d fini comme l ensemble de tous les produits ayants la forme). $g_1^{\pm 1} .g_2^{\pm 1} ...g_t^{\pm 1}$, o les g_s sont dans E; <E> est le plus petit sous-groupe de G qui contienne E.

b) Soit S(A) l ensemble des permutations de A. Via l l ment neutre 1_A et la loi de composition des permutations et en prenant comme inverse d une permutation son application inverse, S(A) devient un groupe (groupe sym trique)

c) Les entiers, les rationnels et le r els forment des groupes commutatifs en prenant comme loi de composition l addition:$(\mathbf{Z}, +)$, $(\mathbf{Q}, +)$, $(\mathbf{R}, +)$. Ainsi $\mathbf{Z}$ est sous-groupe de $\mathbf{Q}$, et $\mathbf{Q}$ est sous-groupe de R. A travers la multiplication des nombres les ensembles suivantes deviennent de groupes:

$\mathbf{Q}^x = \mathbf{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbf{R}^x = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\mathbf{Q}_+ = \{x \in \mathbf{Q}^x, x > 0\}$ et $\mathbf{R}_+ = \{ x \in \mathbf{R}^x, x > 0\}$ $(\mathbf{Q}^x , .)$, $(\mathbf{R}^x , .)$, $(\mathbf{Q}^x , .)$, $(\mathbf{R}^x , .)$.

Les sous-groupes de $(\mathbf{Z},+)$ ont l a forme $\mathbf{Z}\, w = \langle w \rangle = \{z\, w | z \in \mathbf{Z}\}$, $w \geq 0$ pour des raisons qui seront expos s au A1.1.3. Pour $w \geq 0$ choisi la relation: $x \approx y$, dans le cas o x-y est dans Zw, d fini une relation d quivalence. Une classe d quivalence a la forme $[x]_w = x + \mathbf{Z}\, w$, l ensemble de ces classes d quivalence est not par $\mathbf{Z}\, w$. L'ensemble de ce classes d' quivalence devient un groupe $(\mathbf{Z}_w , +)$ via l addition $[x]_w + [y]_w = [x + y]_w$ avec $[0]_w$ comme l ment neutre; l indice w pour $[x]_w$ est abandonn si w est donne par le contexte.

A0.3.2 Homomorphismes de groupes.

Une application $f :$ G $\rightarrow$ H entre de groupes G et H s appelle *homomorphisme* si pour tout g et $h\in$ G on a $f\ (g.h) = f\,(g).f\,(h)$.
Si f est une bijection, alors f^{-1} est aussi un homomorphisme; f s appelle alors *isomorphisme*. Pour $G = H$ f est appel *automorphisme*. On dit que G et H sont isomorphe si il existe un isomorphisme entre GG et H . La relation tre isomorphe a... tant une relation d quivalence, on parle de classes d isomorphisme. La description explicite de toutes les classes d isomorphisme de groupes est le tache principal de la th orie des groupes. Pour des groupes finis cet tache est essentiellement achev e. Pour les groupes ab liens finis, le th or me de classification est donn dans A0.3.3.

L ensemble Aut(G) des automorphismes de G constitue travers la loi de composition le *groupe des automorphismes* de G. Pour tout l ment g de G l application
$g.?.g^{-1} : G \rightarrow G : h \rightarrow g.h.g^{-1}$
d finit un automorphisme de G, appel *conjugaison* avec g. Si f : G $\rightarrow$ H est un isomorphisme alors l application
$f.?.f^{1}$: Aut (G) $\rightarrow$Aut (H) : $t \rightarrow f.\ t.f^{1}$
d fini un isomorphisme de groupes.

A0.3.3 Th or me sur les groupes ab liens finis.

On observe une suite strictement croissante $(p) = p_1 < p_2 < ... < p_t$ de nombres premiers. Pour tout nombre premier p_s de cette succession on a une suite croissante $(u(s))$: $u(s)_1 \leq u(s)_2 \leq ... \leq u(s)_{r\,(s)}$ de nombres positifs. Pour chaque indice s on forme le groupe $S(p_s) = \mathbf{Z}\ /(p_s^{u(s)1})\ \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\ /(p_s^{u(s)2})\ \mathbf{Z} + \ + \mathbf{Z}\ /(p_s^{u(s)r(s)})\ \mathbf{Z}$ enfin, on forme la somme directe $G((p), (u)) = S(p_1) + S(p_2) + ... + S(p_t)$ de ces groupes. Le th or me sur les groupes ab liens finis dit que *chaque groupe ab lien est isomorphe exactement un* G((p), (u)), c.- -d. les classes d isomorphisme des groupes ab liens finis sont en bijection avec les s quences $p_1 < p_2 < ... < p_t$ et $(u(s))$: $u(s)_1 \leq u(s)_2 \leq ... \leq u(s)_{r\,(s)}$, s =1, ..., t.

Le sous-groupe $S(p_s)$ de G((p), (u)) s appelle p_s-*Sylow groupe* de G((p), (u)).

Si pour un entier $w > 1$ on a la d composition en facteurs premi res suivante $w = p^{u(1)} \cdot p^{u(2)} \ldots p^{u(t)}$ avec $p_1 < p_2 < \ldots < p_t$, alors le groupe $\mathbf{Z}_w$ est isomorphe au groupe $G((p), (u)) = \mathbf{Z}_{u(1)} + \mathbf{Z}_{u(2)} + \ldots + \mathbf{Z}_{u(t)}$. Par exemple le groupe $\mathbf{Z}_{12}$ est isomorphe $\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_4$ du fait que $3^1 \cdot 2^2$.

A0.3.4 Op rations sur les groupes.

Soient G un groupe et M *un* ensemble. Une application $\tau : G + M \rightarrow M$ s appelle *Op ration* du groupe G sur l ensemble M si on a toujours :

$$\tau(e, m) = m \text{ et } \tau(g.h, m) = \tau(g, \tau(h, m)).$$

Si on abr ge la notation $\tau(g, m)$, par $g.m$ on obtient que $e.m = m$ et $(g.h).m = g.(h.m)$, ce qui peut s' crire $g.h.m$.

Un sous-ensemble $G.m = \{g.m | g \in G\}$ s appelle *lat rale* de l op ration de groupe. Les lat rales dans M forment une partition de M, l espace des lat rales de l op ration donn e. Les l ments m ayant la propri t que $G.m = \{m\}$ s appellent *points fixes* de l op ration et l ensemble des points fix es est not M^G .

A0.3.4.1 Exemple d une op ration de groupe .

Soit K le sous-groupe des conjugaisons dans le groupe des automorphismes $Aut(G)$ d un groupe G. On a l op ration de conjugaison par $K + G \rightarrow G : (f.?.f^{-1}, g) \rightarrow f.g.f^{-1}$. Les lat rales de cette op ration s appellent *classes des conjugaisons* dans G. Le groupe G est commutatif si $G^K = G$. Autres exemples seront pr sent s dans A3.

A1. Domaine de coefficients pour les sons

A1.1 Anneaux.

Un anneau est un groupe ab lien (R, +, 0), pour le quel il existe, en plus de l addition, une seconde loi de composition, la *multiplication* $\pi : R + R \rightarrow R$ que l'on va crire de fa on multiplicative: $\pi (r, s) = r \cdot s$.

On exige l existence d un l ment multiplicatif neutre, l unit 1 (plus exactement 1_R), c.- -d. $1 \cdot r = r \cdot 1 = r$ pour tout r dans R. Un anneau est ainsi d fini comme 5-tuple (R , + , 0 , . ,1) o on ne mentionne que R si les autres l ments sont clairement donn s par le contexte. Pour tout r, s, t, on :

a) *Loi distributive* : $r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t$ et $(s + t) \cdot r = s \cdot r + t \cdot r$;

b) *Loi associative*: $r \cdot (s + t) = (r \cdot s) \cdot t$ ce qu on peut crire comme $r.s.t$; Implicitement nous assumerons la loi suivante

c) *Loi commutative*: $r \cdot s = s \cdot r$

et nous d signerons explicitement comme *non-commutatifs* les anneaux pour les quelles cette troisi me loi n'est pas valable. Un l ment r d'un anneau est dit *invertible* ou *unitaire* s'il un inverse multiplicatif, c.- -d. un l ment not r^{-1} pour lequel $r \cdot r^{-1} = r^{-1} \cdot r = 1$. L ensemble R^x de ces l ments forme avec la multiplication un group (ab lien) (R^x, $\cdot$), le *groupe des unit s* de R. Si $R^x = R \setminus \{0\}$, alors R s appelle un *corps*. Plut t que $s \cdot t^{-1}$ on crit souvent s / t.

A1.1.1 Exemples d anneaux.

a) Les nombres entiers **Z**, les rationnels **Q** et les r els **R** sont des anneaux avec l'addition et la multiplication ordinaires; de m me pour $Z^x = \{\pm 1\}$ tandis que **Q** et **R** sont des corps. Si S est un sous-groupe d un anneau R qui contienne 1_R et pour tout l ments s, t leur composition $s \cdot t$, S s appelle *sous-anneau* de R. Ainsi les nombres rationnels u / v dont les nominateurs ont la forme $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$, o a, b, c, d sont nombres naturels, forment le sous-anneau $Z [{}^1/_2, {}^1/_3, {}^1/_5, {}^1/_7]$ de **Q**.

b) Le corps **C** des *nombres complexes* est comme groupe additif la somme directe $R^2 = R + R$, tandis que la multiplication est d finie travers

$(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$

L 1 ment unitaire est $1_C = (1,0)$ tandis que *l unit imaginaire* est $i = (0, 1)$ et satisfait $i^2 = -1_C$.

c) Le groupe $(\mathbf{Z}_w, +)$ devient un anneau si on pose $[\mathbf{x}]_w \cdot [\mathbf{y}]_w = [\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}]_w$. On $\mathbf{Z}_w^{\times} = \{[x] | x$ et y n ont pas de diviseur commun $>1\}$, en particulier $\mathbf{Z}_w$ est un corps ssi w est un nombre premier.

d) Pour un anneau quelconque R on peut construire dans R^2 l anneau des *fl ches* $R[\in]$ via la multiplication $(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c, a \cdot d + b \cdot c)$. Ici l unit de $R[\in]$ est (1,0) et on a $\in^2 = 0$ pour $\in = (0, 1)$;. On a $R[\in]^x = \{(r, s) \mid r \ R^x\}$.

A1.1.2 D composition en facteurs premiers dans $\mathbf{Z}$.

Chaque nombre entier z non nulle peut tre crit de fa on unique comme produit

$$z = \pm \cdot p^{u(1)} \cdot p^{u(2)} \cdot p^{u(t)}$$

o $p_1 < p_2 < ... < p_t$ est une succession de nombres premiers (positifs) et $u(1)$ jusqu'a $u(t)$ sont des exposants entiers positifs. De la il suit, en particulier que pour les fractionnes p/q, r/s, u/v et p'/q', r'/s', u'/v' les produits des puissances $x = 2^{p/q} \cdot 3^{r/s} \cdot 5^{u/v}$ et $x' = 2^{p'/q'} \cdot 3^{r'/s'} \cdot 5^{u'/v'}$ sont gales si et seulement si $p/q = p'/q'$, $r/s = r'/s'$ et $u/v = u'/v'$. Ceci vient du fait que pour $x^{q.q'.s.s'.u.v'} = x'^{q.q'.s.s'.u.v}$ on effectue l'unique d composition en facteurs premiers et on compare les puissances enti res de 2, 3, 5. Ainsi, les fr quences de la forme $132 \text{ Hz} \cdot 2^{p/q} \cdot 3^{r/s} \cdot 5^{u/v}$ peuvent tre inscrit dans $\mathbf{Q}^3$ comme triplette d exposants $(p/q, r/s, u/v)$ de fa on univoque et r versible.

A1.2 Homomorphismes d anneaux

Une application $f : R \to S$ d anneaux s appelle Homomorphisme (d anneaux) si f est un homomorphisme de groupes additifs tel que $f(r_1 \cdot r_2) = f(r_1) \cdot f(r_2)$ et $f(1_R) = 1_S$. Si f est

bijectif, alors f^{-1} est aussi un homomorphisme d anneaux et f est appel *isomorphisme* d anneaux. Exactement comme dans le cas des groupes, la composition d homomorphismes d anneaux est un homomorphisme d anneaux et la relation d isomorphie est une relation d quivalence. Un homomorphisme d anneaux induit toujours un homomorphisme de groupes sur les groupes unitaires correspondants.

A1.2.1 Exemples d Homomorphismes d'anneaux.

a) Pour tout entier w non n gatif l application de classes

$$p : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_w \ : x \to [x]$$

est un homomorphisme d anneaux.

b) L application

$$\mathbf{R} \to \mathbf{C} : a \to (a, 0)$$

est un homomorphisme d anneaux injectif et qui permet de consid rer les nombres r els comme un sous-ensemble de nombres complexes.
L application $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$: $(a.b) \to (a,-b)$ (passage au nombre complexes conjugu s) est un *Automorphisme* sur **C**, c.- -d. un isomorphisme sur lui m me.

A2. Modules, applications lin aires et applications affines.

A2.1 Modules

Pour un anneau R on consid re un R-module **P** avec la propri t **Mod1** et de **Mod2** de 4.1.1. Les propri t s **Mod2.5-9** pr sent s dans 4.1.1 sont les suivantes:

Mod2.5: $\mathbf{x-x} = 1.\mathbf{x} + (-1).\mathbf{x} = (1+(-1)).\mathbf{x} = 0.\mathbf{x} = \mathbf{0}$
Mod2.6: $(-r).\mathbf{x} = ((-1).r).\mathbf{x} = (-1).(r.\mathbf{x}) = -(r.\mathbf{x})$
Mod2.7: $r.\mathbf{0} = r.(0.\mathbf{0}) = (r.0).\mathbf{0} = 0.\mathbf{0} = \mathbf{0}$
Mod2.8: $= (r-s).\mathbf{x} = (r+(-s)).\mathbf{x} = r.\mathbf{x} + (-s).\mathbf{x} = r.\mathbf{x} +((-s).\mathbf{x}))=r.\mathbf{x} - s.\mathbf{x}$
Mod2.8: $= r.(r-s) = r.(x+(-1).y)= r.x+(-1).(r.y) = r.x - r.y$

A2.3 Applications affines

Une application affine est d finie au 4.2.2.1 comme la composition $D=e^t .H^\circ:M\rightarrow N$d'une application lin aire entre R-modules $H^\circ:M\rightarrow N$ et d'une translation e^t dans N. Les op rations H et t sont d termin es de fa on unique par l'application D puisque D(0)=t et $e^{-D(0)}.D=H$. La formule 4.2.2.1 Aff, implique que la composition de deux applications affines est galement affine. Puisque la partie translation de D est toujours bijective, D est bijectif si et seulement si la partie lin aire H est bijective. Dans ce cas D est appel un Isomorphisme affine et son inverse $D^{-1}=e^s.H^{-1}$ avec $s=-H^{-1}$ (t) est galement affine. L'ensemble des applications affine d'un module M sur lui-m me, les sym tries de M, est not Aff(M), le groupe des automorphismes affines de M est not $GL^{\rightarrow}$ (M). Ces deux structures seront tudi es plus en d tails au chapitre A3 avec M= $\mathbf{Z}^n$. L'ensemble P^ des applications affines d'un R-module P sur R, c'est dire des fonctions affines sur P, forme l'un des modules du R-module P* des formes lin aires sur P avec les m me restrictions concernant addition et multiplication scalaire. P^ est galement isomorphe P*+R, le deuxi me terme de l'addition tant form par l'ensemble des translations dans R.

A2.4 Modules de compositions locales

Nous nous restreignons ici R = **Q** . Pour une composition locale K dans un **Q**-module M (4.1.2), le module de K (4.2.3.1.3) est d finit comme un sous module **Q** K=<x_1-x_0, ,x_t —x_0>de M, o K={x_0 , x, , x $_n$ }. A noter que la d finition est ind pendante de la num rotation dans K. Lorsque nous avons un morphisme entre compositions locales $f^\circ:K\rightarrow L$ induit sur le module porteur par une application affine $F=e^t.H^\circ:M\rightarrow N$, la partie translation H restreinte **Q**K d finit une application lin aire **Q** $f^\circ:\mathbf{Q}K\rightarrow\mathbf{Q}L$ qui ne d pend pas de F mais de f. Pour la composition f.g de morphismes entre compositions locales on a **Q**(f.g)=**Q**f.**Q**g et $\mathbf{Q}\mathbf{1}_K=\mathbf{1}_K$. De ce fait, des compositions locales isomorphes ont des modules isomorphes.

Les points d'une composition locale de dimension r +1 sont dit tre en position g n rale lorsque dim(**Q**K)=r, sinon ils sont dit tre en position particuli re. Toute composition locale en position g n rale est isomorphe la composition standard de dimension r Δ_r ={e_0=0, e_1, ,e $_r$} o e $_1$, e_2, , e $_r$ forment la base standard de $\mathbf{Q}^r$. Avec la notation ci-dessus on peut assumer via la translation que x_0=0.**Q**K est alors un sous module de M avec x_1, , x_r comme base et un choix de composante lin aire W **Q** K dans M. L'application lin aire $H^\circ:M\rightarrow\mathbf{Q}^{r\circ}$: $x_s\rightarrow e_s$ et H(W) = 0 induisent un isomorphisme $h^\circ:K\rightarrow\Delta_r$. Cette r flexion implique que Aut(Δ_r) est le groupe sym trique S(Δ_r).

A2.5 Restriction des scalaires

Lorsque on a un homomorphisme d'anneau $\varphi^\circ:R\rightarrow S$ on peut transformer tout S-module M en un R-module $M_{[R]}$. Le groupe additif de M reste inchang et seul la multiplication scalaire est remplac pour r dans R et m dans M par r.m=φ(r).m. Cette construction permet la comparaison de compositions K sur M avec des

compositions sur R. Il suffit de transformer les modules porteurs des cartes de K de la fa on indiqu e ci-dessus et d'obtenir ainsi les compositions $K_{[R]}$ sur R.

Par le biais de l'homomorphisme d'anneau $\varphi^{\circ}:\mathbf{Z}\rightarrow S^{\circ}:z\rightarrow z.1_s$ tout S-module M devient un **Z** -module $M_{[Z]}$. Cependant, pour z > 0, on a z.m=$z.1_S$ .m=m+m+ +m (z termes) et (-1).m=-m, ce qui implique que $M_{[Z]}$ est la restriction de M sa structure de groupe ab lien. On peut, par exemple, consid rer $\mathbf{Q}_{[Z]}$ o **Z** est lui m me un sous- **Z** module, c'est dire un sous groupe. Un vecteur y pointant sur le cercle de rayon 1 et centr l'origine du plan euclidien des r els peut tre identifi par son angle 2,, .q et repr sent sur l'axe des abscisses y=y(q). Si on fait correspondre chaque nombre rationnel q pr cis ment y(q) alors les nombres entiers repr sentent exactement le vecteur y(0)=(1,0) alors que le groupe interm diaire **Z**.1/w, w>0 entier, est r partie, en partant de (1,0), sur les sommets d'un polygone r gulier de w c t s. Si l'on consid re les vecteurs de $\mathbf{R}^2$ comme des points du plan complexe **C**, l'application q→y(q) correspond un homomorphisme de groupe $\mathbf{Q}_{[Z]}\rightarrow\mathbf{C}^{\times}$ envoyant pr cis ment les entiers vers le 1 de $\mathbf{C}^{\times}$. Lorsque, dans le cadre de la param trisation des hauteurs, on part des hauteurs math matiques h=u.ln(f)+v vers les fr quences, le module $\mathbf{R}_{[Q]}$ est consid r par le m me homomorphisme $\mathbf{Q}\rightarrow\mathbf{R}$. Alors que **R** est unidimensionnel, dim($\mathbf{R}_{[Q]}$) est infini puisque on sait que, par exemple, avec „ = 3,14159... toute suite 1, π, π^2, π^3, , π^n est lin airement ind pendante sur **Q**. Afin de pouvoir saisir la structure des hauteurs, on ne consid re que les hauteurs de la forme:

$H=\log_b(2^p.3^s.5^r)=p.\log_b(2)+s.\log_b(3)+r.\log_b(5)$

La possibilit d'identifier chaque h par le triplet (p,s,r) des exposants dans $\mathbf{Q}^3$ signifie que les "vecteurs" $\log_b(2)$, $s.\log_b(3)$, $r.\log_b(5)$ sont lin airement ind pendants sur **Q** de telle sorte que le sous module < $\log_b(2)$, $\log_b(3)$, $\log_b(5)$> de $\mathbf{R}_{[Q]}$ est isomorphe $\mathbf{Q}^3$.

A2.5.1 Approximation dans l'espace de Euler

Soit x=(p,s,r) un vecteur quelconque de $\mathbf{R}^3$. Lorsque on consid re le vecteur de facteurs premier ($\log_b(2)$, $\log_b(3)$, $\log_b(5)$)sur une base b quelconque, alors le produit scalaire h(x)=(h.x) est une g n ralisation de la hauteur math matique h(x) quand x est l ment du module de Euler $\mathbf{Q}^3$, c'est dire du sous module $\mathbf{Q}^3$ de $\mathbf{R}^3_{[Q]}$. Soit φ un r el quelconque. Il existe alors pour tout δ>0 aussi petit qu'on le d sire un x dans $\mathbf{Z}^3$ (dans le module de Euler un point d'une chelle juste) tel que $|h(x)-\varphi|<\delta$. Nous calculons, sans perte de g n ralit , avec la base b = 2. Nous savons alors qu'il est possible d'atteindre $0<h(x)<\delta$ en choisissant x =(n, m, 0). Il est alors clair qu'un multiple entier x=z.x remplira les conditions que nous avons impos es φ.

A3 Les sym tries musicales et leurs groupes

A3.1 Sym tries du plan de g om trie affine

Nous consid rons les sym tries, c'est dire les applications affines D = e ^{t}.H sur $\mathbf{R}^2$. L'ensemble Aff($\mathbf{R}^2$) des sym tries peut tre d crit g om triquement de la fa on suivante: On fixe une composition locale $\Delta = \{u,v,w\}$ de trois points en position g n rale dans $\mathbf{R}^2$. L'application:

$$B(\Delta) = Aff(\mathbf{R}^2) \rightarrow (\mathbf{R}^2)^3 : D \rightarrow (D(u), D(v), D(w))$$

est une bijection entre ensembles. Du fait qu'une sym trie D induit un morphisme $d=D|\Delta^{\circ}:\Delta \rightarrow \{D(u)\}, D(v), D(w)\}$ de compositions locales et puisque Δ est g nerateur, d fixe H. De plus t peut tre d duit de d par l' galit t=d(u)-h(u). Ainsi B(Δ) est injectif. Soient, inversement, x, y, z trois points de $\mathbf{R}^2$. Une applications lin aire est alors d finie par v-u$\rightarrow$y-x et w-u $\rightarrow$z-x, car v-u et w-u forment une base dans $\mathbf{R}^2$. Une sym trie D=e^{t} .H est alors d finie avec t=x-H(u) et satisfait D(Δ)(D)={x,y,z}. Ainsi B(Δ) est galement surjectif. (Ces r flexions gardent leur validit lorsqu'elles sont appliqu es un anneau quelconque tant que Δ est une composition locale g n ratrice dans $\mathbf{R}^2$).

A3.1.1 Scisaillement

Soit une droite G du plan $\mathbf{R}^2$ (ne passant pas n cessairement par l'origine) et soient u,v,w en position g n rale de sorte que u et v sont sur G tandis que w est c t de G. Un scisaillement Spar rapport G est alors une sym trie laissant u et v fixes et d calant w en w+r.(v-u) avec r$\in \mathbf{R}$. Ainsi G reste fix point par point et w subit une translation parall lement G. La puissance n-i me de S, S ^{n} est le scisaillement qui laisse G fixe et d cale w en w+n.r.(v-u).

A3.1.2 Dilatation

Pour un point u de $\mathbf{R}^2$ et les deux scalaires r elles δ et σ , une dilatation D par rapport u par δ et σ est une transformation telle que D(u)=u et qui, pour toutes paire de points v et w distincts et non colin aire avec u, donne D(v)=u+δ.(u-v) et D(w)=u+σ.(w-u). Une dilatation avec $\delta=\sigma=-1$ correspond une r flexion par le point u ou encore une rotation de 180 degr s par rapport u.

A3.1.3 Translation - r flexion

Soit une droite G et soient les points u,v,w_ tels qu'en A3.1.1. Une Translation - r flexion est une sym trie telle que P(u)_est sur la droite G, et satisfaisant P(w)-P(u)=u-w_ et P(v)-P(u)=v-u _. Ainsi, P(v)_ est galement sur la droite G et P(w) est "de l'autre cot " de G dans la direction de la droite passant par w et u. P est alors une translation par P(u)-u_ suivit d'une r flexion "en biais" par rapport G dans la direction de la droite

passant par w et u. Le cas particulier o G=**R** .(1,1)_est la diagonale, u=P(u)=0_et w=(-1,1)_r sulte en un change des axes des coordonn es: le changement des param tres.

A5 Le lemme de Yoneda comme fondement pour la th orie des compositions globales

A5.1 Cat gories au lieu des ensembles

La th orie des cat gories part du fait qu'on ne s int resse pas vraiment aux ensembles et leurs l ments mais surtout aux relations entre tels objets. Alors peu importe si les objets sont des ensembles pures ou structur s comme des groupes, anneaux, modules, compositions locales ou globales. On se donne dans une cat gorie K des choses abstraites, appel es *morphismes*. On impose aux morphismes les propri t s suivantes:

K1 (composition). Pour tout couple (f,g) de morphismes il existe un troisi me morphisme, appel ¨°composition°¨ f.g de f et g.

K2 (associativit). Si on a d fini les compositions f.g et g.h, alors ils sont d finies aussi (f.g).h et f.(g.h) et on a (f.g).h = f.(g.h), qu on peut crire comme f.g.h.

Un morphisme e s appelle identit si chaque composition f.e ou e.g avec e, quand est d finie, a la propri t f.e=f et respectivement e.g=g.

K3 (existence des identit s). Pour chaque morphisme f on a une identit gauche°e $_L$ et droite e_R avec e_L .f = f , f.e_R = f et on note f: $e_R \rightarrow e_L$.

K4 (existence des compositions). Si e est l'identit droite (respectivement gauche) pour f (respectivement pour g), alors la composition f.g est bien d finie.

Pour la cat gorie **Me** des ensembles, les morphismes sont directement les applications

f: A → B entre les ensembles. Pour la cat gorie **Gr** des groupes ils sont les homomorphismes de groupes etc.

Un ensemble A dans **Me** est identifi avec l identit 1_A :A→A, de m me pour **Gr**. etc.
Un l ment x dans A est identifi avec l injection {x} →A: x→x.
On voit d j dans **Gr** la diff rence avec le langage des ensembles: un l ment quelconque x dans un groupe G ne peut pas tre identifi automatiquement travers un homomorphisme de groupes, puisque une injection {x}→G: x→x d ensembles n est pas en g n ral un homomorphisme de groupes.

Les morphismes dans une cat gorie rel vent donc pr cis ment du ¨°point de vue structural°¨.
Un groupe G dans **Gr** se laisse d crire seulement travers les homomorphismes f:H→G entrant dans G ou les homomorphismes h:G→H qui sortent de G.
Qu'est-ce qu on peut d duire sur G travers ce point de vue cat goriel? Cette question est r gl e par le lemme de Yoneda.

A5.2 Le lemme de Yoneda pour cat gories quelconques

Comme les ensembles le d montrent et comme on le d duit des axiomes K1-K4, il appara t intuitif que les identit s soient repr sent es comme les objets A, B, ... entre lesquels sont d finis des morphismes f:A →B. Nous d signons l ensemble des objets (identit s) de **K** par |**K**| Entre deux objets A et B on a donc un ensemble **K**(A,B) de morphismes, c.- -d. des f de **K** pour lesquels A et B soient respectivement une identit droite et gauche. Pour la cat gorie **Me** on obtient **Me**(A,B)={applications d ensembles de A dans B}. Pour **Gr** on a **Gr**(G,H)={homomorphismes de groupe de G dans H}; pour la cat gorie $Glob_R$ des compositions globales sur un anneau R on a $Glob_R(K,L)$={morphismes des compositions de *K* dans *L*} etc.

Le lemme de Yoneda part du fait que'on peut d crire un objet Y dans une cat gorie **K** travers l observation de Y comme ¨° tant vu par toutes les objets X°¨, c.- -d. travers la recherche de toutes les ensembles de morphismes **K**(X,Y).
Si on fixe un objet Y, alors on a d fini une application:

$$h_Y: |\mathbf{K}| \to |\mathbf{Me}| : X \to h_Y(X) = \mathbf{K}(X,Y)$$

En g n ral on a une application que l'on peut nommer de la m me fa on

$h_Y: \mathbf{K} \to \mathbf{Me}$

travers laquelle un morphisme f: A $\to$ B est envoy sur l application ensembliste

$$h_Y(f) : h_Y(B) \to h_Y(A) : g \to g.f$$

(g.f tant d finie par l axiome K4). Si la composition $f_1.f_2$ est d finie on a:

a) $h_Y(f_1.f_2) = h_Y(f_2) \,.\, h_Y(f_1)$

b) $h_Y(A)$identit sur $h_Y(A)$ que dans la perspective cat gorielle est identifi avec l ensemble $h_Y(A)$, ainsi que h_Y occupe sur le sous-ensemble $|\mathbf{K}|$ de **K** un valeur fonctionnel bien d fini.

Une application de **K** dans **Me** s appelle *foncteur* si elle a les propri t s a) et b). Dans ce sens formel Y a t remplac par son foncteur $h_Y: \mathbf{K} \to \mathbf{Me}$ qui repr sente intuitivement Y ¨en tant regard par tous les objets dans **K** ©.

Si g:Y $\to$ Z est un morphisme dans **K** on obtient pour chaque objet X dans **K** une application ensembliste

$h_g(X) : h_Y(X) \to h_Z(X) : f \to f.g$

L ensemble $h_g = \{h_g(X), X \text{ dans } |\mathbf{K}|\}$ a la propri t que pour chaque morphisme $u:X_1 \to X_2$ dans **K** est valable l galit suivante des compositions:

$h_g(X_1) : h_Y(u) = h_Z(u) : h_g(X_2) : h_Y(X_2) \to h_Z(X_1)$ (NAT)

Un syst me h_g d applications v rifiant (NAT) s appelle ¨transformation naturelle© de h_Y dans h_Z, qu on peut noter $h_g : h_Y \to h_Z$.

Soit Nat(h_Y , h_Z) l ensemble des transformations naturelles de h_Y dans h_Z. Une fois qu on a remplac les objets Y de **K** par leurs foncteurs h_Y, on remplace aussi le fait de mettre en rapport deux objets Y et Z par des morphismes g:Y $\to$ Z par le fait de mettre en relation les foncteurs correspondants h_Y et h_Z gr ce des transformations naturelles

$$N=\{N(X), X \text{ dans } |\mathbf{K}|\}, N: h_Y \to h_Z.$$

D une fa on intuitive on compare la somme des perspectives travers lesquelles on peut voir Y dans **K** (c.- -d. h_Y) avec la somme des perspectives travers lesquelles on peut voir Z (c.- -d. h_Z)

Gr ce les constructions pr c dentes on a pour tout couple Y, Z d objets dans **K** l ˚ ˙˚application de Yoneda˚¨

Yoneda (Y, Z) : **K**(Y, Z) → Nat(h_Y ,hZ) (YON)

La conclusion du lemme de Yoneda est que pour tout Y et Z l application de Yoneda est une bijection.

La cons quence la plus importante est la suivante. Si N: $h_Y \rightarrow h_Z$ est un isomorphisme, c.- -d. si chaque N(X) est une bijection, alors N est de la forme N = h_g, g:Y → Z et g est un isomorphisme. On a donc un morphisme inverse g^{-1}:Z → Y avec g^{-1}.g = identit sur Y et g.g^{-1}=identit sur Z. Et, vice-versa: chaque isomorphisme g: Y → Z induit un isomorphisme h_g:h_Y→h_Z des foncteurs

Y est donc isomorphe Z exactement quand on a la m me propri t pour h_Y et h_Z.

Cela signifie intuitivement que la classification des objets Y dans **K** est r alis e exactement quand on l a faite pour les foncteurs h_Y, c.- -d. un objet Y est d crit enti rement travers la ˙˚somme de ses perspectives˚¨ h_Y; c'est l la ˙˚Yoneda-philosophie˚¨.

A5.3 Les perspectives locales sont suffisants pour la description des compositions globales

Si **K** est la cat gorie $Glob_R$ on peut appliquer le lemme de Yoneda. Nous regardons la sous-cat gorie Loc_R de $Glob_R$, qui se compose uniquement des morphismes entre compositions locales sur R.

Ainsi pour une composition globale *Y* on peut limiter le foncteur h_Y :$Glob_R$ →**Me** Loc_R et obtenir ainsi un foncteur loc_Y : Loc_R →**Me**: *L* →.$Glob_R$ (*L*,*Y*).

A cela corresponde, comme au-dessous, pour des compositions globales quelconques *Y* et *Z* une application Yon (*Y*,*Z*): $Glob_R$ (*Y*,*Z*) → Nat(loc_Y , loc_Z).

qui, comme la Yoneda application YON, est elle m me-bijective, c.- -d. les compositions globales sont classifiables travers leurs ˙˚perspectives locales˚¨.

NOTES

[1] D s que un des objets principaux de cette tude est la th orie math matique de la musique de Guerino Mazzola, nous omettrons, d habitude, la sp cification de l auteur de cette th orie, en parlant, simplement, de la *Th orie Math matique de la Musique.* La convention nous permettra d viter de r p titions inutiles.

[2] Un *module* (ne pas confondre avec *modulo*, dont on parlera propos de la relation d quivalence) est un objet math matique qui repr sente la version affaiblie du concept plus connu d *espace vectoriel.* Le concept sera discut en d tail pour son importance, la fois math matique et musicale.

[3] A travers ce concept on peut formaliser en termes assez g n rales la notion de *transposition* dans la musique.

[4] On utilisera d une fa on quivalente les deux expressions car, d accord avec (Bent [1998], p.111) le terme anglais ¨°set-theory°¨ est d usage courant dans les crits analytiques en fran ais.

[5] En particulier (Andreatta [1997b]), (Andreatta [1997c]) et (Andreatta [1998]).

[6] *The Topos of Music*, para tre chez Birk user Verlag (Mazzola [1999]).

[7] Dans la th orie math matique de la musique de Guerino Mazzola le terme topos exprime la fois ¨°*la dimension logique et trascendente du concept de musique dans le sens aristot lique et kantien*°¨ *mais aussi le fait que* ¨°*le syst me des signes musicaux peut tre consid r comme un topos dans le sens math matique du terme*°¨ (Mazzola [1999], p. v).

[8] Les ¨°cartes locales°¨ sont des structures musicales l mentaires qui, judicieusement ressembl es, forment la composition musicale globale. Dans le cas particulier des canons rythmiques ces structures sont des rythmes p riodiques ou, plus souvent, des cellules d un rythme p riodique.

[9] Le lecteur int ress de mod les des canons rythmiques diff rents de ceux qui sont pr sent s dans les annexes cette tude peut s adresser l Equipe de Repr sentation Musicale de l IRCAM.

[10] De l allemand ¨°*Mathematische Musiktheorie*°¨.

[11] Le terme rel ve de la th orie math matique des cat gories qui g n ralise le concept de fonction entre ensembles celle de *morphisme* entre objets abstraits. Si on prend comme d finition intuitive de cat gorie celle d une collection d objets et de fl ches, on peut introduire d une fa on naturelle la notion de *foncteur* comme une sorte de fonction g n ralis e entre cat gories (Voir **Appendice A5** pour une d finition plus rigoureuse).

[12] Pour la d finition rigoureuse du concept de *groupe* on renvoie l **Appendice A0**. Etant donn l'importance fondamentale de cette structure alg brique dans la formalisation de plusieurs ph nom nes musicaux, on la retrouvera plusieurs fois dans le cours du pr sent paragraphe.

[13] Voir, par exemple, la table des correspondances entre certains d veloppements des math matiques et de la musique publi e dans (Xenakis [1981]) et reprise dans (Xenakis[1994], p.34-37).

[14] Parmi les propositions th oriques plus int ressantes du XIX me si cle, on peut citer celle de Camille Durutte, auteur de la c l bre *Technie, ou lois g n rales du syst me harmonique* , ouvrage publi e en 1855 et bas e sur le concept de congruence modulaire filtr , dans son application la musique, par les id es du math maticien et philosophe polonais Ho ne Wronski. Voire aussi (Orcalli [1993]) pour une tude plus approfondie sur les influences de la pens e wronskienne chez Durutte.

[15] Voir la section 1.3 pour une liste des emplois diff rents de ce terme dans les math matique.

[16] C est l l explication du terme math matique qui a t donn pour les racines n-i mes de l unit .

[17] La partie suivante repr sente un extrait de ma contribution *The Topos of Music.* Je remercie Guerino Mazzola de m avoir donn la possibilit de la reprendre dans ce contexte.

[18] Cf. (Lewin [1987], p.157-220) pour une approche th orique au probl me.

[19] Nous allons reprendre cet exemple dans le deuxi me chapitre.

[20] Voir section 2.3.

[21] ¨°*Knowledge comes through the sum of aspects or perspectives*°¨ (Mazzola [1999], p.115).

[22] Cf. p. 2
[23] ·°*En musique il n y a pas de contenu opposable la forme, parce qu il n y a pas de forme s parable du contenu*¨ (Hanslick [1986], p.163).

[24] Nous pr f rons parler d *objet* au lieu d *tre*, en rendant capable l objet d assumer les formes et les repr sentations variables c t du contexte. Un objet est un point, ou un voisinage d un point, ou le morphisme qui le repr sente...

[25] Un de premiers travaux musicologiques dont on trouve une recherche explicite des composantes locales et leur assemblage dans la forme globale d une ˇuvre musicale est l analyse de l ˚*Art de la fugue* de J. S. Bach par Wolfgang Graeser (Graeser [1924]). Dans l analyse de Graeser, une ·˚*forme contrapointique [ ] est un ensemble d ensembles d ensembles (de tons)*˚¨ (Graeser [1924], p.17).
[26] Nous allons reprendre cette probl matique dans la section finale de ce chapitre.
[27] Il n est pas inutile de souligner ici les diff rents emplois du terme *module* en math matiques:

1. le module d un nombre complexe $z = x+iy$ est sa longueur, c.- -d. $(x^2 + y^2)^{-}$.
2. le module dans un groupe cyclique $\mathbf{Z_n}$ est la cardinalit de l ensemble des classes de reste {[1], [2], ..., [n]=[0]}.

3. Dans une relation d quivalence ~ le module g n ralise le cas pr c dent o la relation d quivalence particuli re tait celle de congruence *modulo* (!) n.

[28] C est un des reproches qu on fait, par exemple, aux m thodes statistiques employ s par la th orie math matique de l information dans l analyse musicale. Voir (Fichet [1996]), (Bent [1999]).

[29] Voir Chapitre 3.
[30] Cette question est abord e dans le paragraphe **3.2** de *Geometrie der T ne* d di la physiologie de la perception. Voir aussi (Mazzola [1989]).

[31] Nous rappelons que l ensemble **Z** de nombres entiers relatifs est inclus proprement dans l ensemble **Q** des nombres rationnels **Q**, bien que les deux ensemble, d apr s Cantor, aient la m me cardinalit , c.- -d. le m me nombre d l ments.
[32] On note que pour simplifier les choses on a pris comme origine des axes coordonnes le do=$440 \cdot 2^{-1} \cdot 3 \cdot 5^{-1}$=32 hz.
[33] L exemple qui suive repr sente une lecture personnelle d un r sultat de th orie des groupes qui ne rel ve pas directement de la th orie math matique des cat gories. Quand m me il est assez significatif dans une r flexion plus g n rale sur la port e philosophique d un changement de paradigme comme celle qui privil gie les points de vues sur l objet plut t que l objet lui-m me.
[34] Dans une expression devenue commune parmi les math maticiens, ce groupe s appelle ·˚*le monstre*˚¨, et il est le plus grand groupe parmi les groupes soi-disant sporadiques (No l [1989], p.32).

[35] Cit par Mazzola dans (Mazzola [1990], p.180).
[36] Une version abr g e du pr sent chapitre a fait l objet d une pr sentation au CNET /CEMAMu le mercredi 19 mai 1999, en collaboration avec Carlos Agon (informaticien de l quipe de repr sentation musicale de l IRCAM dirig e par G rard Assayag) dans le cadre des Journ es d Informatique Musicale. Nous avons choisi de reprendre les points de cette intervention en discutant, surtout, la double origine de ce qu on appelle, d apr s Vuza *Canons r guliers compl mentaires de cat gorie maximale* (Vuza [1991]-[1995]). Ces canons repr sentent la fois une volution temporelle d un univers modal hors-temps , dont on discutera quelques aspects du point de vue la fois math matique et musical, mais aussi une transformation assez surprenante d un probl me de pavage dont les origines remontent la fin du XIX me si cle: la conjecture de Minkowksi.

[37] Ainsi nomm , comme nous l explique Vieru, d apr s un po te roumain.
[38] On n entre pas, ici, dans les d tails du fondement alg brique de ces structures. Le probl me sera approfondi dans le troisi me chapitre de cette tude.

[39] Le *nerf* du mode Bacovia met en vidence les quatre accords pr c dents comme sommets d un t tra dre.
[40] On verra dans la suite de ce paragraphe qu en r alit l op ration de Vieru repr sente la ·˚version modale˚¨, pourrait-on dire, le la notion de multiplication d accord chez Boulez.

[41] La citation est tir e d une tude de Fabien Levy intitul e ˙°Algorithmes et perception en France dans les musiques des ann es 1960-1970°: De la perception induite par la structure aux processus d duits de la perception°¨ (A para tre).
[42] Il faut noter que la propri t de factorisation qu on vient de d finir n est pas non plus une propri t locale, mais elle repr sente, dans le cadre de la th orie math matique de la musique, un exemple de *propri t globale.*

[43] Math matiquement on exprime cette propri t en disant que l ensemble **Q** a la puissance *discr te* , c.- -d. que **Q** peut tre mis en correspondance bijective avec l ensemble **Z** des entiers, contrairement l ensemble **R** des r els qui, d apr s George Cantor, n est pas d nombrable.

[44] Cette limitation (comme on le verra dans la suite de ce chapitre) nous permet d tablir une analogie compl te entre l univers hors-temps des classes modales et la nouvelle famille des classes rythmiques.

[45] La veste graphique, assez primitive, exprime bien l origine d une telle structure, qui remonte une p riode pr c dente de ma collaboration avec l quipe de Repr sentation Musicale de l Ircam (G rard Assayag et Carlos Augusto Agon). L exemple repr sente, en fait, un des mes premiers efforts dans l tude de la th orie de Vuza travers la notion alg brique de Groupes de Hajos. Le canon suivant est li une factorisation du groupe cyclique $\mathbf{Z_{108}}$ qui n a pas la propri t de Hajos (voir la suite de ce paragraphe). Le cas $\mathbf{Z_{108}}$ rentre parfaitement dans la th orie de Vuza, bien qu il ait t apparemment oubli (Vuza [1991] , p.279).

[46] Du nom du math maticien Hermann Minkowski, auteur des premiers travaux de th orie de nombres, au sens moderne du terme.

[47] La proc dure n est rien d autre qu un criblage , dans le style de Eratosth ne, d une partie de l ensemble **N** des nombres naturels.

[48] Repris dans (Messiaen [1992], p. 9).
[49] la classe r sultante est la classe rythmique obtenue en prenant l union des toutes les voix. Elle corresponde au point de vue (ou d coute) de l auditeur.
[50] Pour ne pas rendre trop lourde la pr sentation du sujet, on parle de ˙°canon rythmique correspondant°¨ lorsque on consid re le prototype de toute une famille de canons rythmiques correspondant au m me groupe cyclique et ayant le m me nombre de voix. On verra que cette derni re condition est essentielle pour diff rentier un canon Can(R,S) ayant une classe rythmique R et une classe m trique S de ce que Vuza appelle son ˙°inverse°¨ (Vuza, [1992a], p. 197), c.- -d. un canon Can(S,R) qui a les classes rythmiques et m triques invers es (Cf. la suite de cette section).

[51] On utilise, par commodit , la repr sentation abstraite du canon musical propos e par Carlos Agon. Les attaques sont indiqu es travers des cercles pleins et les restes sont masqu es (le distances entre les attaques sont toutes proportionnelles entre elles).
[52] On utilisera cette propri t de ˙°normalisation°¨ sur les classes m triques pour la construction d un nerf topologique associ au recouvrement d un canon rythmique selon les id es g n rales de la Th orie Math matique de la Musique (voir 3.3).

[53] Elle fut appel e dans cette tude la ˙°M-Conjecture°¨ dans l esprit d une recherche sur les relations entre math matique et musique qui nous avait conduit croiser, d une fa on surprenante, les travaux de Minkowski avec les intuitions musicales de Messiaen.

[54] Le titre de cette derni re section reprends une id e introduite par John Roeder dans son commentaire sur *Geometrie der T ne* (Roeder [1993]). Notre objectif est de montrer comment on peut cr er des r seaux conceptuels entre les m thodes utilis es dans la th orie math matique de la musique et les autres approches alg briques, comme le syst me d intervalles g n ralis s de l Am ricain David Lewin (qui g n ralise, entre autre, la th orie des ensembles de Allen Forte) et la construction centrale de Dan Vuza qu on appellera d apr s (Vuza [1982]) et en r sumant une ancienne terminologie bourbakiste, *un ensemble principal homog ne*.

[55] Voir la discussion sur la tradition am ricaine contenue dans le premier chapitre de cette tude.
[56] Voir le chapitre 2.4.
[57] On utilisera souvent, par commodit , l'expression anglaise au lieu de sa traduction fran aise.

[58] Voir (Lewin [1987]), p. 74).

[59] Nous rappelons que l inverse d un l ment x est l ment y tel que x.y = y.x = identit .

[60] Dans le sens d une unicit un isomorphisme pr s.
[61] Voir l **Appendice A2.3** pour une d finition rigoureuse de transformation affine.
[62] Voir **Appendice A2.3.**
[63] Voir le chapitre 1.3.
[64] Voir, par exemple, (Muzzulini [1995]).
[65] Cf. le chapitre 2.4.
[66] Cette question a t soulev e par Guerino Mazzola pendant la journ e "Math matiques/Musiques" l IRCAM. La nouvelle perspective sur ce probl me est pr sent e, dans la suite de cette section, d une fa on tr s informelle, mais elle exprime assez bien, il nous semble, la m thodologie diff rente qu il faudrait suivre pour int grer le mod le de Vuza l int rieur de la Th orie Math matique de la Musique. Je tiens remercier Guerino Mazzola pour m avoir adress ce point de vue nouveau sur le probl me.

[67] C.- -d. qu ils ne sont pas quivalents (du point de vue de la composition globale).
[68] Voir, par exemple (Amiot [1986]), (Chemillier [1987]).

[69] Cf. chapitre 1.5.
[70] Ce r sultat, qui donne une direction privil gi e la possibilit d une g n ralisation du mod le rythmique de Dan Tudor Vuza travers les outils de la th orie math matique de la musique, repr sente un des ach vements les plus significatifs de la r cente journ e math matiques/musique l IRCAM. Je tiens remercier Guerino Mazzola pour la longue conversation qu on a eue ensemble au lendemain de la journ e officielle et qui a conduit cette premi re tape vers une formulation radicale du probl me des canons musicaux travers l approche *fonctoriel*.
[71] Voir aussi le chapitre 2.4 propos d'une conjecture formul e dans l'esprit d'une recherche sur les relations entre les probl mes g om triques de Hermann Minkowski et les solutions compositionnelles d'Olivier Messiaen.
[72] Cf. Figure 18.
[73]