Introduction aux algèbres d'opérateurs I :
Des espaces de Hilbert aux algèbres stellaires

Jean-Yves Girard
Institut de Mathématiques de Luminy, UMR 6206 – **CNRS**
163, Avenue de Luminy, Case 930, F-13288 Marseille Cedex 09

girard@iml.univ-mrs.fr

Ce petit cours sur les algèbres d'opérateurs (Tende, 22-24 Septembre 2002) s'adresse à des non-spécialistes qui n'auraient pas l'intention de le devenir,typiquement des logiciens. Il n'aborde pas, ou très peu, les algèbres de von Neumann, qui sont un monde à part ; pour en savoir plus, on consultera [1] dont ces notes sont, pour l'essentiel, un condensé.

1 Espaces de Hilbert

1.1 Cauchy-Schwarz

Définition 1
Un espace de Hilbert *est la donnée d'un espace vectoriel* $\mathbb{H}$ *complexe, ainsi que d'une forme* sesquilinéaire[1], *i.e. linéaire en la première variable :*

$$\langle \lambda x + \lambda' x' \mid y \rangle = \lambda \langle x \mid y \rangle + \lambda' \langle x' \mid y \rangle \tag{1}$$

et anti-linéaire *en la seconde :*

$$\langle x \mid \mu y + \mu' y' \rangle = \bar{\mu} \langle x \mid y \rangle + \bar{\mu}' \langle x \mid y' \rangle \tag{2}$$

Cette forme sequilinéaire est de plus hermitienne *:*

$$\langle y \mid x \rangle = \overline{\langle x \mid y \rangle} \tag{3}$$

et strictement positive *:*

$$x \neq 0 \Rightarrow \langle x \mid x \rangle > 0 \tag{4}$$

Finalement, $\mathbb{H}$*, muni de la* norme $\|x\| := \langle x \mid x \rangle^{1/2}$ *doit être un* espace de Banach, *i.e., être complet.*

La condition (3) est équivalente à $\langle x \mid x \rangle \in \mathbb{R}$, en effet
$4\langle x \mid y \rangle = \langle x+y \mid x+y \rangle - \langle x-y \mid x-y \rangle + i\langle x+iy \mid x+iy \rangle - i\langle x-iy \mid x-iy \rangle$.
L'équation (3) est donc conséquence de (4).

Venons-en à la norme ; le point de départ est l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

[1] Le préfixe latin *sesqui* veut dire « un et demi ».

THÉORÈME 1 (CAUCHY-SCHWARZ)
$|\langle x \mid y\rangle|^2 \leq \langle x \mid x\rangle\langle y \mid y\rangle$, *l'égalité n'ayant lieu qu'en cas de colinéarité.*

Démonstration : On se place dans le cas où $x, y \neq 0$. Quitte à remplacer x par αx, $|\alpha| = 1$, on peut supposer que $\langle x \mid y\rangle \in \mathbb{R}$. Alors, pour $\lambda \in \mathbb{R}$,
$\langle x + \lambda y \mid x + \lambda y\rangle = \langle x \mid x\rangle + 2\lambda\langle x \mid y\rangle + \lambda^2\langle y \mid y\rangle \geq 0$. Ceci n'est possible que si le discriminant $b^2 - 4ac$ est négatif ou nul, i.e., si $\langle x \mid y\rangle^2 - \langle x \mid x\rangle\langle y \mid y\rangle \leq 0$, et l'égalité n'intervient que si $x + \lambda y = 0$ pour un λ approprié. □

Cauchy-Schwarz montre que $\langle x + y \mid x + y\rangle = \langle x \mid x\rangle + \langle y \mid y\rangle + \langle x \mid y\rangle + \overline{\langle x \mid y\rangle} \leq \langle x \mid x\rangle + \langle y \mid y\rangle + 2(\langle x \mid x\rangle\langle y \mid y\rangle)^{1/2} = (\langle x \mid x\rangle^{1/2} + \langle y \mid y\rangle^{1/2})^2$, i.e., que $\langle x \mid x\rangle^{1/2}$ vérifie l'inégalité triangulaire, ce qui justifie la dernière partie de la définition.

1.2 Espaces pré-hilbertiens

La pratique fait apparaître des espaces *préhilbertiens*, qui ne sont pas nécessairement séparés ; ils vérifient seulement :

$$\langle x \mid x\rangle \geq 0 \tag{5}$$

Dans la définition d'espace préhilbertien, on ne demande pas non plus la complétude.

On appelle *espace pré-hilbertien* un espace vectoriel complexe muni d'une forme sesquilinéaire positive ne vérifiant que (5). Alors $\langle x \mid x\rangle^{1/2}$ est une semi-norme, et dans une première étape, on peut *séparer* l'espace, i.e., quotienter par l'ensemble
$\mathbb{I} := \{z; \|z\| = 0\}$, qui est un sous-espace vectoriel sur lequel la forme est identiquement nulle. L'espace $\mathbb{H}/\mathbb{I}$ est alors muni d'une forme strictement positive, i.e., est un espace normé. En tant qu'espace normé, $\mathbb{H}/\mathbb{I}$ admet un *complété* qui est un espace de Banach, i.e., un espace vectoriel normé complet, et sur lequel la forme $\langle x \mid y\rangle$ se prolonge (uniquement) de façon à ce que l'équation $\langle x \mid x\rangle = \|x\|^2$ soit vérifiée. On obtient ainsi un espace de Hilbert, $\widehat{\mathbb{H}}$, le *séparé complété* de $\mathbb{H}$. La plupart des espaces de Hilbert courants sont en fait des séparés complétés d'espaces préhilbertiens.

La première partie de Cauchy-Schwarz (celle qui ne parle pas de l'égalité) persiste dans le cas préhilbertien, il suffit de faire attention au cas $\langle y \mid y\rangle = 0$: si $\langle x \mid x\rangle \neq 0$, on permute x et y, si $\langle x \mid x\rangle = 0$ on obtient $2\lambda\langle x \mid y\rangle \geq 0$ ce qui n'est possible qu'avec $\langle x \mid y\rangle = 0$.

1.3 Exemples

1.3.1 Dimension finie

L'exemple le plus naturel vient de la géométrie euclidienne, l'espace de Hilbert n'étant qu'un espace euclidien complexifié : au lieu de $\mathbb{R}^n$, on considère $\mathbb{C}^n$, muni de $\langle \vec{x} \mid \vec{y}\rangle = \sum_{1\leq i\leq n} x_i.\bar{y}_i$. La complexification permet de diagonaliser les rotations en résolvant l'équation $\det(M - \lambda I) = 0$, par exemple, pour une rotation d'angle α, $(\cos\alpha - \lambda)^2 + \sin^2\alpha = 0$, i.e., $\lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1 = 0$, équation qui n'a de racines réelles que pour $\cos\alpha = \pm 1$: les solutions complexes sont $\cos\alpha \pm i\sin\alpha$, et correspondent aux vecteurs propres $\sqrt{2}/2.(1, \pm i)$. L'involution sur la partie droite évite les vecteurs *isotropes*, i.e., de « norme » nulle : comparer l'interprétation euclidienne (bilinéaire) $\langle\sqrt{2}/2.(1,i) \mid \sqrt{2}/2.(1,i)\rangle = 1/2.(1+i^2) = 0$ avec la version hermitienne (sequilinéaire) $\langle\sqrt{2}/2.(1,i) \mid \sqrt{2}/2.(1,i)\rangle = 1/2.(1+i.(-i)) = 1$.

Il ne s'agit pas, loin s'en faut, de la seule façon de construire un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}^n$. On peut chercher la forme générale : si $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ est la base canonique, on peut poser $b_{ij} := \langle\mathbf{e}_i \mid \mathbf{e}_j\rangle$; la condition (3) devient $b_{ij} = \bar{b}_{ji}$, i.e., que la matrice (b_{ij}) est *hermitienne*, égale à sa *transconjuguée*, quant à la condition (4) elle dit que les racines du polynôme caractéristique de (b_{ij}) (qui sont nécessairement réelles) sont strictement positives ; en d'autres termes, (b_{ij}) est un hermitien strictement positif.

Il s'agit en fait d'une remarque générale : si $\mathbb{H}$ est un espace de Hilbert et si u est un *hermitien positif*, voir plus bas, $\langle u(x) \mid y\rangle$ définit une autre structure d'espace préhilbertien sur le même $\mathbb{H}$. L'espace est hilbertien par rapport à la nouvelle forme quand u est inversible.

1.3.2 Espaces de suites

Les espaces de suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes jouent un rôle essentiel. Nous allons nous attarder sur les ℓ^p $(1 \leq p \leq \infty)$; en pratique, on ne rencontre guère que les cas $p = 1, 2, \infty$.

Pour $1 \leq p < \infty$, on définit $\|(a_n)\|_p := (\sum_n |a_n|^p)^{1/p}$, et $\ell^p := \{x; \|x\|_p < \infty\}$. L'inégalité de Minkowsky :

$$(\sum_{1\leq i\leq N} |a_i+b_i|^p)^{1/p} \leq (\sum_{1\leq i\leq N} |a_i|^p)^{1/p} + (\sum_{1\leq i\leq N} |b_i|^p)^{1/p} \tag{6}$$

passe à la limite $N \to \infty$ et montre que $\|x\|_p$ est bien une norme, et que les ℓ^p sont en fait des espaces de Banach. Pour $1 < p, q < \infty$ et $1/p + 1/q = 1$, on s'assure que le dual de ℓ^p est bien ℓ^q ; en particulier le dual de ℓ^2 est bien ℓ^2, en accord avec le fait que ℓ^2 est un espace de Hilbert, donc auto-dual.

On définit de même $\|(a_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ et $\ell^\infty := \{x; \|x\|_\infty < \infty\}$ et on voit que le dual de ℓ^1 est ℓ^∞. Mais le dual de ℓ^∞ ne se réduit pas à ℓ^1 (ℓ^1 n'en est qu'un sous-espace clos) : il contient aussi, pour chaque ultrafiltre $\mathcal{U}$, la forme $\varphi_{\mathcal{U}}((a_n)) := \lim_{\mathcal{U}}(a_n)$. Donc, ℓ^p n'est *réflexif* (i.e., « égal » à son bidual) que pour $1 < p < \infty$. Ce qui est malheureux, vu que les cas $p = 1, \infty$ sont les plus « naturels ». Mais le passage de l'espace de Hilbert ℓ^2 aux algèbres d'opérateurs sur ℓ^2 permettr de simuler des situations du type ℓ^1 ou ℓ^∞ : la norme d'un opérateur est « du genre ℓ^∞ », alors que sa trace est « du genre ℓ^1 ».

ℓ^2 est l'exemple le plus standard d'espace de Hilbert, et d'ailleurs il généralise naturellement le cas de dimension finie. La forme hermitienne est définie par $\langle(a_n) \mid (b_n)\rangle = \sum_n a_n\bar{b}_n$; la somme est absolument convergente en vertu de $|\sum_{n<N} a_nb_n|^2 \leq (\sum_{n<N} |a_n|^2)(\sum_{n<N} |b_n|^2)$, qui n'est autre que Cauchy-Schwarz pour $\mathbb{C}^N$ et qui passe facilement à la limite. Une autre façon de dire la même chose : on fait la limite inductive (i.e., réunion) des Hilberts $\mathbb{C}^N$, et le résultat est un préhilbertien (séparé), dont le complété est isomorphe à ℓ^2.

L'importance particulière de ℓ^2 vient des *bases orthonormales* : tout Hilbert $\mathbb{H}$ admet une base orthonormale $(\mathbf{e}_i)_{i\in I}$, I étant de cardinal fixé, c'est le théorème d'orthonormalisation, voir *infra.* Les cas importants sont :

- ▶ I fini ; alors $\mathbb{H}$ est isomorphe à $\mathbb{C}^{\sharp(I)}$.
- ▶ I dénombrable ; alors $\mathbb{H}$ est isomorphe à ℓ^2.

Le cas « I non-dénombrable » n'est pas courant ; il faut beaucoup de termes nuls (tous sauf un nombre dénombrable) pour que le carré de la norme $\sum_{i\in I} |a_i|^2$ converge. Un Hilbert de base au plus dénombrable est *séparable*, i.e., admet un sous-ensemble dense dénombrable. La plupart des espaces intéressants sont séparables, avec pour seule exception les *algèbres de von Neumann* qui le sont rarement. Parmi celles-ci, ℓ^∞, qui admet un sous-ensemble non dénombrable, celui des fonctions caractéristiques de sous-ensembles de $\mathbb{N}$, formé de vecteurs à une distance mutuelle de 1. ℓ^∞, algèbre de von Neumann commutative, est le dual d'un espace séparable, ℓ^1 : quand on travaille avec des algèbres de von Neumann, on se concentre sur celles qui ont un *prédual* séparable.

1.3.3 Espaces de fonctions

Si (X, m) est un espace mesuré, on peut adapter, *mutatis mutandis*, la construction des espaces ℓ^p, ce qui donne les espaces $\mathcal{L}^p(X, m)$: la somme est remplacée par l'intégrale. Mais pour $1 \le p < \infty$, l'expression $\|f\|_p := (\int |f|^p \, dm)^{1/p}$ ne vérifie pas $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$: f est nulle, mais seulement à un ensemble *négligeable* près. On ne travaille pas vraiment avec des fonctions, mais avec des classes d'équivalence, par rapport à la relation « $f(x) = g(x)$ sauf sur un ensemble de mesure nulle » ; ainsi, $\mathcal{L}^\infty(X, m)$ est-il formé des fonctions bornées à un ensemble négigeable près. Et l'espace $\mathcal{L}(X, m)^2$ des fonctions de carré sommable, muni de la forme hermitienne $\langle f \mid g\rangle = \int f\bar{g} \, dm$ n'est pas un Hilbert, ce n'est qu'un pré-Hilbert. L'espace séparé (pas besoin de le compléter) est noté L^2 (ou encore $L^2(X, m)$).

L'espace L^1 correspond aux (classes de) fonctions sommables, i.e. telles que la norme $\int |f| \, dm$ soit finie, l'espace L^∞ correspond aux (classes de) fonctions essentiellement bornées, i.e., telles que la norme $\inf \{\lambda; m\{x; |f(x)| < \lambda\} = 0\}$ soit finie ; ce qui veut exactement dire qu'un élément de la classe de f est borné.

Le théorème d'orthonormalisation (théorème 2) montre, qu'au fond, les L^2 n'apportent rien de neuf ; ils font, par contre, considérablement varier le point de vue. Par exemple, si (X, m) est le segment $[0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue, une orthonormalisation typique se fait au moyen de la base $(\mathbf{e}_n; n \in \mathbb{Z})$, définie par $\mathbf{e}_n(x) = e^{2i\pi nx} = \cos 2\pi nx + i \sin 2\pi nx$. L'écriture de $f \in L^2$ comme $f = \sum_n a_n\mathbf{e}_n$ apparaît comme un développement de Fourier (en séries trigonométriques, car $2\cos 2\pi nx = \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_{-n}$, $2 \sin nx = \mathbf{e}_n - \mathbf{e}_{-n}$) et le fait que cette base réalise une isométrie entre deux espaces correspond à :

$$\int |f|^2 \, dm = \sum_n |a_n|^2 \tag{7}$$

qui est un cas particulier de la formule de Parseval (12).

1.4 L'espace dual

1.4.1 La médiane

C'est un pur calcul euclidien : considérons un triangle de somments $0, x, y$ et la médiane partant de 0, c'est à dire le vecteur $(x+y)/2$. Un calcul immédiat sur les formes, bi or sesqui-linéaires, nous donne :

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = 2(\|(x-y)/2\|^2 + \|(x+y)/2\|^2) \tag{8}$$

Cette égalité nous permet, dans certaines circonstances, de majorer la taille du troisième côté, $x-y$. En effet, si les côtés x, y ont des normes $\leq 1+\epsilon$ et si la médiane a une norme ≥ 1, on voit que $2\|(x-y)/2\|^2 \leq 2+4\epsilon+2\epsilon^2-2$, ce qui donne $\|x-y\|^2 \leq 8\epsilon+4\epsilon^2 \leq 12\epsilon$ (pourvu que $\epsilon \leq 1$).

1.4.2 Projection sur un convexe

Supposons que $E \subset \mathbb{H}$ soit un sous-ensemble fermé, non-vide de $\mathbb{H}$, et de surcroît *convexe* : si $x, y \in E$ et $0 \leq \lambda \leq 1$, alors $\lambda x + (1-\lambda)y \in E$.

PROPOSITION 1
Le minimum $\inf\{\|x\| \;; x \in E\}$ *est atteint en un point unique de E. Ce point est aussi le seul point $e \in E$ tel que $\Re\langle e \mid e-f\rangle$ soit négatif, pour tout $f \in E$.*

Démonstration : On suppose le minimum égal à 1 : si $x \neq y \in E$ avec $\|x\| = \|y\| = 1$, alors le point $(x+y)/2 \in E$ a une norme < 1 : $\|(x+y)/2\|^2 = 1 - \|(x-y)/2\|^2$, ce qui montre que le minimum ne peut être atteint qu'en un seul point.
Prenons maintenant une suite $x_n \in E$, telle que $\|x_n\| \leq 1+1/n^2$. Comme les médianes $(x_n + x_{n+k})/2$ sont dans E, leurs normes sont ≥ 1, ce qui nous donne, au vu de la remarque faite *supra*, $\|x_{n+k} - x_n\|^2 \leq 12/n^2$ et donc $\|x_{n+k} - x_n\| \leq 4/n$. Autrement dit les approximants x_n forment une suite de Cauchy ; cette suite converge donc dans l'espace de Banach $\mathbb{H}$ vers un élément e du fermé E.
Soit maintenant $f \in E$, alors pour $0 < \lambda < 1$ $e + \lambda(f-e) \in E$, et donc
$\|e + \lambda(f-e)\|^2 \geq 1$, ce qui s'écrit $2\lambda\Re\langle e \mid f-e\rangle + \lambda^2\|f-e\|^2 \geq 0$, ce qui n'est possible que si $\Re\langle e \mid e-f\rangle \leq 0$. e est le seul à vérifier cette propriété, car si e' est tel que $\Re\langle e' \mid e'-f\rangle \leq 0$ pour tout $f \in E$, alors
$\|e\|^2 = \|e'\|^2 + 2\Re\langle e' \mid e-e'\rangle + \|e-e'\|^2 \geq \|e'\|^2$, ce qui force $e = e'$. □

1.4.3 Sous-espaces supplémentaires

On applique la construction dans le cas suivant : au lieu de projeter l'origine sur un convexe quelconque, on projette un point quelconque sur un *sous-espace clos* donné, disons E ; soit donc π l'application ainsi obtenue. Que peut-on en dire ?

- D'abord, comme $0 \in E$, $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$.
- Ensuite, π est idempotente : $\pi^2 = \pi$.
- $\pi(x)$ est l'unique $y \in E$ tel que $\langle y-x \mid f\rangle = 0$ pour tout $f \in E$. C'est parce que E est un espace vectoriel et que la condition $\Re\langle y-x \mid y-f\rangle \leq 0$ pour

tout $f \in E$ devient $\bar{\lambda}\Re\langle y - x \mid f\rangle \leq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, ce qui n'est possible que si $\langle y - x \mid f\rangle = 0$.

- On en déduit que π est linéaire : par exemple, $\pi(x) = y, \pi(x') = y'$ impliquent que $y - x, y' - x'$ sont orthogonaux à E ; il en est de même de leur somme $(x + x') - (y + y')$, ce qui montre que $\pi(x + x') = y + y'$.
- Le *noyau* $\pi^{-1}(0)$ est un sous-espace clos égal à $E^{\perp} := \{x; \forall y \in E \langle x \mid y\rangle = 0\}$.
- π est un exemple (le plus typique) d'*hermitien positif* (voir *infra*) : en effet, $\langle \pi(x) \mid x\rangle = \langle \pi(x) \mid \pi(x)\rangle + \langle \pi(x) \mid x - \pi(x)\rangle = \langle \pi(x) \mid \pi(x)\rangle \geq 0$.

L'image de π est E, son noyau est $E^{\perp}$; le projecteur associé à $E^{\perp}$ est $I - \pi$. Ces espaces sont *supplémentaires*, c'est à dire que tout vecteur de $\mathbb{H}$ s'écrit de façon unique comme $x = e + e', e \in E, e' \in E^{\perp}$ avec, de plus e, e' *orthogonaux*, i.e., tels que $\langle e \mid e'\rangle = 0$, ce qui s'exprime par la relation de Pythagore :

$$\|x\|^2 = \|e\|^2 + \|e'\|^2 \tag{9}$$

1.4.4 L'anti-isomorphisme

Si $e \in \mathbb{H}$, $x \to \langle x \mid e\rangle$ est une forme linéaire continue : par Cauchy-Schwarz $|\langle x \mid e\rangle| < \|e\|\|x\|$, l'égalité étant atteinte pour $x = \lambda e$, ce qui montre que cette forme e^* a la norme $\|e\|$.

Réciproquement, toute forme linéaire continue sur $\mathbb{H}$ est de la forme e^* pour un e bien choisi — forcément unique, vu que $\langle x \mid e - f\rangle = 0$ pour tout x implique $\langle e - f \mid e - f\rangle = 0$. Soit donc φ une telle forme, qu'on supposera non-nulle, et considérons le noyau $E := \{x : \varphi(x) = 0\}$. Il est immédiat que E est un sous-espace fermé (continuité). C'est en fait un hyperplan, car noyau d'une forme linéaire non-nulle. Nous avons vu que cet hyperplan possède un supplémentaire orthogonal D qui est donc un espace de dimension 1. Si $b \in D, b \neq 0$, la forme linéaire b^* s'annule sur E, ce qui n'est possible que si φ est un multiple de b^*, i.e., si $\varphi = \lambda b^* = (\bar{\lambda} b)^*$.

Donc le dual $\mathbb{H}^{\sharp}$ de $\mathbb{H}$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{H}$ au moyen de l'application $b \to b^*$. Attention ! Il s'agit d'un *anti-isomorphisme*, qui préserve tout ce qu'on veut à part la multiplication par un scalaire : $(\lambda b)^* = \bar{\lambda} b^*$.

1.4.5 Topologie faible

Les formes linéaires b^* induisent la *topologie faible* sur $\mathbb{H}$: la suite (x_n) tend vers x ssi pour tout $b \in \mathbb{H}$ la suite $(\langle x_n \mid b\rangle)$ tend vers $\langle x \mid b\rangle$. L'intérêt de la topologie faible vient du résultat suivant :

Proposition 2
La boule unité de $\mathbb{H}$ est faiblement compacte.

Démonstration : J'explique l'idée : d'abord on va considérer $B = \{b \in \mathbb{H}; \|b\| \leq 1\}$, ce qui fait que $x \in \mathbb{H}$ de norme ≤ 1 s'identifie avec la fonction $b \to f_x(b)$ de B dans le disque unité $D = \{z; |z| \leq 1\}$, i.e., à un élément de l'espace D^B de *toutes* les fonctions de B dans D ! Ce monstre n'en est pas moins compact pour la topologie produit (théorème 19 « de Tychonov »), et il ne reste donc qu'à vérifier que les f_x

forment un sous-espace clos de D^B, autrement dit que si $f_{x_i}(b) = \langle x_i \mid b\rangle \to f(b)$ pour tout b, alors f est de la forme f_x. Mais f sera une forme anti-linéaire bornée sur $\mathbb{H}$, et donc de la forme désirée. □

Bien entendu, la convergence faible n'implique pas la convergence usuelle, ainsi dans ℓ^2, $x_i = (\delta_{ni})_{n\in N}$, avec $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ sinon, est une suite de vecteurs (en fait la base canonique) qui tend faiblement vers 0, mais dont la norme est constamment 1 et qui ne peut donc pas tendre vers 0 « normalement ». Bizarrement c'est le seul contre-exemple, à cause de la :

Proposition 3
Si $x_i \to x$ faiblement et si $\|x_i\| \to \|x\|$, alors $x_i \to x$ « normalement ».

Démonstration : Par hypothèse, $\langle x_i \mid b\rangle \to \langle x \mid b\rangle$ pour tout b ; faisons donc $b = x$! Ce qui nous donne $\langle x_i \mid x\rangle \to \langle x \mid x\rangle$ et donc $\langle x - x_i \mid x - x_i\rangle = \|x\|^2 + \|x_i\|^2 - 2\Re\langle x_i \mid x\rangle$ tend vers 0. □

La topologie faible est l'exemple d'une topologie *affaiblie*, i.e., obtenue à partie du dual de l'espace, c'est la topologie la moins fine, la plus faible, qui rend continues les formes linéaires continues (au sens de la norme). En conséquence, si $u \in \mathcal{B}(\mathbb{H}, \mathbb{K})$ (voir section 3.1) est continu en norme, il reste continu quand $\mathbb{H}$ et $\mathbb{K}$ sont munis de leurs topologies faibles. La réciproque est d'ailleurs vraie : si u est continu au sens des topologies faibles, l'image par u de la boule unité est un compact, et est donc bornée, i.e., continue en norme. En fait :

Proposition 4
L'image par un opérateur $u \in \mathcal{B}(\mathbb{H}, \mathbb{K})$ de la boule unité de $\mathbb{H}$ est un fermé de $\mathbb{K}$ (par rapport à la norme).

Démonstration : En effet, u est faiblement continue, donc l'image B' de la boule unité est faiblement compacte, donc fermée. Elle le reste dans toute topologie plus forte (qui a plus de fermés) □

Remarque 1
Mais l'image d'un opérateur borné n'est pas forcément fermée. L'exemple typique est fourni par l'opérateur u, qui à une suite $(x_n) \in \ell^2$ associe la suite (x_n/n). L'image de la boule unité par u est non seulement fermée en norme, mais *compacte*, i.e., u est ce qu'on appelle un *opérateur compact*. L'image de u est *dense*, puisqu'elle contient toutes les suites de support fini et donc, elle n'est pas fermée, puisque la suite $x_n = 1/n$ n'est pas dans l'image de u. Incidemment, u nous fournit l'exemple d'un opérateur (et c'est même un hermitien positif) injectif mais non inversible ; ce qui illustre la différence entre spectre (voir *infra*) et valeurs propres : $0 \in \mathrm{Sp}(u)$, mais il n'y pas de vecteur $z \neq 0$ tel que $u(z) = 0.z = 0$.

On rappelle aussi le résultat classique de *borne uniforme* :

PROPOSITION 5
Si $X \subset \mathbb{H}$ est faiblement borné, i.e., pout tout $y \in \mathbb{H}$, l'ensemble $\langle X \mid y\rangle := \{\langle x \mid y\rangle\ ; x \in X\}$ est borné, alors X est borné en norme.

Démonstration : Soit $E_n \subset \mathbb{H}$ le sous-ensemble $\{y; \langle X \mid y\rangle \leq n\}$; alors E_n est fermé et $\mathbb{H}$ est l'union des E_n. Par le théorème de Baire (théorème 23), un des E_n est d'intérieur non vide, autrement dit, il y a un y_0, un $r > 0$ et un n tels que $\langle X \mid y\rangle \leq n$ pour tout y tel que $\|y - y_0\| < r$. On peut se ramener à $r = 1$, auquel cas $\|X\| \leq 2n$. □

1.5 Bases orthonormales

DÉFINITION 2
Un système orthonormal *de $\mathbb{H}$, c'est une famille $(\mathbf{e}_i)$ indicée par un ensemble I, formée de vecteurs de norme 1 et deux à deux orthogonaux. $(\mathbf{e}_i)$ est appelé une* base *quand de plus l'espace vectoriel qu'il engendre est dense dans $\mathbb{H}$.*

PROPOSITION 6
Un espace de Hilbert admettant la base $(\mathbf{e}_i)_{i\in I}$ est isomorphe à $\ell^2(I)$.

Démonstration : Concrètement ça veut dire que l'on peut s'autoriser une écriture formelle $a = \sum_i a_i\mathbf{e}_i$, avec $a_i := \langle a \mid \mathbf{e}_i\rangle$. Le mode d'emploi de cette série formelle est le suivant :

$$\langle \sum_i a_i\mathbf{e}_i \mid \sum_i b_i\mathbf{e}_i\rangle = \sum_i a_i\bar{b}_i \tag{10}$$

la convergence étant assurée par :

$$\| \sum_i a_i\mathbf{e}_i\|^2 = \sum_i |a|_i^2 < \infty \tag{11}$$

□

i.e., la formule de Parseval :

$$\|x\|^2 = \sum_i |\langle x \mid \mathbf{e}_i\rangle|^2 \tag{12}$$

THÉORÈME 2 (ORTHONORMALISATION)
$\mathbb{H}$ admet une base orthonormale.

Démonstration : Par le lemme de Zorn, on considère un système orthonormal maximal $(\mathbf{e}_i)_{i\in I}$, et soit E la clôture de l'espace engendré par ce système. Si E était distinct de $\mathbb{H}$, on pourrait rajouter au système un vecteur de norme 1 pris dans le supplémentaire orthogonal de E. Donc $E = \mathbb{H}$. □

PROPOSITION 7
Deux bases orthonormales de $\mathbb{H}$ ont même cardinal, la dimension hilbertienne *de $\mathbb{H}$.*

On omet la démonstration qui n'est pas des plus passionnantes. On garde en tête que les cas importants sont les cas où le cardinal est fini ou dénombrable, i.e., le cas *séparable.*

2 Quelques constructions hilbertiennes

2.1 Sommes directes

Définition 3

Si $\mathbb{H}, \mathbb{K}$ *sont des espaces de Hilbert, on peut munir la somme directe algébrique* $\mathbb{H} \oplus \mathbb{K}$ *d'une structure d'espace de Hilbert, au moyen de :*

$$\langle x \oplus y \mid x' \oplus y' \rangle := \langle x \mid x' \rangle + \langle y \mid y' \rangle \tag{13}$$

En particulier, $\|x \oplus y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Cette définition s'étend à une somme indicée par un ensemble quelconque, e.g., dénombrable :

$$\langle \bigoplus_n x_n \mid \bigoplus_n x'_n \rangle := \sum_n \langle x_n \mid x'_n \rangle \tag{14}$$

Cette équation s'applique d'abord dans la somme directe algébrique et définit un espace préhilbertien séparé, que l'on complète. Ce complété est formé des sommes formelles $\bigoplus_n x_n$ telles que $\sum_n \|x_n\|^n < \infty$, pour lesquelles l'équation (14) fait toujours sens. En fait, ceci généralise le cas d'une base orthonormale, qui apparaît comme la décomposition d'un espace de Hilbert en somme directe d'espaces de dimension 1.

2.2 Produits tensoriels

Définition 4

Si $\mathbb{H}, \mathbb{K}$ *sont des espaces de Hilbert, on considère l'espace vectoriel engendré par les tenseurs formels* $x \otimes y, x \in \mathbb{H}, y \in \mathbb{K}$*. Cet espace est muni d'une unique forme sequilinéaire positive telle que :*

$$\langle x \otimes y \mid x' \otimes y' \rangle := \langle x \mid x' \rangle . \langle y \mid y' \rangle \tag{15}$$

L'espace de Hilbert $\mathbb{H} \otimes \mathbb{K}$ *est par définition le séparé complété de cet espace préhilbertien.*

$\mathbb{H} \otimes \mathbb{K}$ se construit en deux étapes :

Séparation : on quotiente par les vecteurs de norme nulle. De fait, le quotient ainsi obtenu (noté $\mathbb{H} \odot \mathbb{K}$) n'est rien d'autre que le produit tensoriel algébrique des espaces. En d'autres termes on aurait pu partir de $\mathbb{H} \odot \mathbb{K}$, en remarquant que l'équation (15) s'étend par sesquilinéarité en une forme strictement positive.

Complétion : il faut compléter $\mathbb{H} \odot \mathbb{K}$. On gardera en tête que, si $(\mathbf{e}_i)_{i \in I}, (\mathbf{f}_j)_{j \in J}$ sont des bases orthonormales de $\mathbb{H}, \mathbb{K}$, alors $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j)_{ij \in I \times J}$ est une base orthonormale de $\mathbb{H} \otimes \mathbb{K}$.

Remarque 2

On aurait tendance à caractériser le produit tensoriel au moyen d'un problème universel : une fonction linéaire sur $\mathbb{H} \otimes \mathbb{K}$, c'est une autre manière de parler d'une fonction bilinéaire sur $\mathbb{H} \times \mathbb{K}$. Rien n'est plus faux :

(i) Une fonction $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{H} \otimes \mathbb{K}, \mathbb{L})$ induit bien une fonction bilinéaire bornée, tout simplement parce que $x, y \mapsto x \otimes y$ est une application bilinéaire bornée.

(ii) Ça ne marche pas dans l'autre sens : ainsi, la fonction $x, y \mapsto \langle x \mid y \rangle$ est une fonction bilinéaire de norme 1 de $\mathbb{H} \times \mathbb{H}^\sharp$ dans $\mathbb{C}$. Elle vérifie $\varphi(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n) = \delta_{mn}$, ce qui ne correspond pas à un élément du dual de $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}^\sharp$ (qui est un espace de Hilbert), les coefficients ne formant pas une série de carré sommable. Moins abstraitement, il n'y a pas de *forme*[2] linéaire sur $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}^\sharp$ telle que $\varphi(\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n) = \delta_{mn}$, en effet, $\sum 1/n.\mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_n \in \mathbb{H} \otimes \mathbb{H}^\sharp$, mais $\varphi(\sum 1/n.\mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_n) = \sum_n 1/n = \infty$.

Le produit tensoriel (rassurons les fans des catégories) est bien solution d'un problème universel, mais par rapport à une version plus restrictive de morphisme, les opérateurs HS (Hilbert-Schmidt). *Grosso modo*, un opérateur u est Hilbert-Schmidt quand u^*u est à trace, voir *infra*. En fait, la définition la moins compréhensible, mais la plus synthétique du produit tensoriel, c'est l'espace des opérateurs HS de $\mathbb{H}^\sharp$ dans $\mathbb{K}$, muni de $\operatorname{tr}(v^*u)$, ce qui fait que $\|u\|^2 = \operatorname{tr}(u^*u)$, voir section 5.3.

2.3 Espace de Fock

Il y a en fait deux versions, la symétrique, et celle qui nous occupe ici, l'antisymétrique, version hilbertienne de l'*algèbre extérieure*. Si $\mathbb{H}$ est un Hilbert et $n \geq 2$, on note $\mathbb{H}^{[n]}$ le produit tensoriel de n copies de $\mathbb{H}$.

DÉFINITION 5
$\Lambda_n(\mathbb{H})$ est défini comme le séparé complété de l'espace préhilbertien $\mathbb{H}^{[n]}$, muni de l'unique forme $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_n$ vérifiant :

$$\langle x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \mid y_1 \otimes \ldots \otimes y_n \rangle_n = \det(\langle x_i \mid y_j \rangle) \tag{16}$$

Il convient de vérifier que la forme est positive. Or considérons le sous-espace clos $\mathbb{A} \subset \mathbb{H}^{[n]}$, formé des tenseurs *antisymétriques* : si σ est une permutation de $\{1, \ldots, n\}$, elle se propage en un unitaire σ de $\mathbb{H}^{[n]}$ vérifiant :

$$\sigma(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)} \tag{17}$$

et $\mathbb{A}$ est défini comme l'ensemble des $x \in \mathbb{H}^{[n]}$ tels que $\sigma(x) = (-1)^\sigma x$. La projection orthogonale π sur A est définie par :

$$\pi(x) = \frac{1}{n!} \sum_\sigma (-1)^n \sigma(x) \tag{18}$$

ce qui nous donne $\langle x \mid y \rangle_n = n! \langle \pi(x) \mid y \rangle = n! \langle \pi(x) \mid \pi(y) \rangle$. En d'autres termes, l'espace $\Lambda_n(\mathbb{H})$ est isomorphe au sous espace des vecteurs antisymétriques, *modulo* une homothétie de la norme, multipliée par le facteur $\sqrt{n!}$. Ceci pour que, si $x_1, \ldots, x_n$ sont orthogonaux de norme 1, la norme de $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$ soit 1, et non pas $\dfrac{1}{\sqrt{n!}}$.

[2] Forme (muliti-)linéaire : fonction (multi-)linéaire à valeurs dans les scalaires, ici, dans $\mathbb{C}$.

DÉFINITION 6
L'algèbre de Fock $\Lambda(\mathbb{H})$ *est définie comme la somme directe des* $\Lambda_n(\mathbb{H})$ *(avec* $\Lambda_0(\mathbb{H}) = \mathbb{C}, \Lambda_1(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$*), muni de la multiplication déduite par bilinéarité de :*

$$(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) \wedge (y_1 \otimes \ldots \otimes y_m) := x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_m \tag{19}$$

En fait on vérifie facilement que le produit est associatif (en particulier on pourra noter $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$ au lieu de $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$). Par contre, il n'est borné que localement, car la norme du produit, en tant application bilinéaire de $\Lambda_p(\mathbb{H}) \times \Lambda_q(\mathbb{H})$ dans $\Lambda_{p+q}(\mathbb{H})$ est majorée par $\sqrt{\begin{bmatrix} p \\ p+q \end{bmatrix}}$, la racine carrée d'un coefficient binomial, bore qu'on ne peut pas (fondamentalement) améliorer.

REMARQUE 3
On peut aussi, si l'on veut, voir $\Lambda_n(\mathbb{H})$ comme un sous-espace de $\mathbb{H}^{[n]}$, avec la norme induite, mais il faut faire attention à écrire $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = \sqrt{n!}.\pi(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n)$. Par exemple, pour $n = 2$, $x_1 \wedge x_2$ n'est pas l'antisymétrisé $1/2.(x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1)$ de $x_1 \otimes x_2$, mais son *renormalisé* $\sqrt{2}/2.(x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1)$.

3 Opérateurs bornés

3.1 Norme

Si $\mathbb{H}$ et $\mathbb{K}$ sont des Hilberts, on note $\mathcal{B}(\mathbb{H}, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications linéaires *bornées* de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{K}$, i.e., telles que la *norme* :

$$\|u\| := \sup\{\|u(x)\|; x \in \mathbb{H}, \|x\| \leq 1\} \tag{20}$$

soit finie. $\mathcal{B}(\mathbb{H}, \mathbb{K})$ est un espace de Banach et de plus, si $v \in \mathcal{B}(\mathbb{H}, \mathbb{K})$ et $u \in \mathcal{B}(\mathbb{K}, \mathbb{L})$, alors $uv \in \mathcal{B}(\mathbb{H}, \mathbb{L})$ est telle que $\|uv\| \leq \|u\|\|v\|$. Le cas le plus important est celui où $\mathbb{H} = \mathbb{K}$, et l'on note tout simplement $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ l'*algèbre* de Banach ainsi obtenue. Parmi les éléments de cette algèbre[3], l'unité, notée 1 ou I, de norme 1 (sauf le gag $\mathbb{H} = 0$).

3.2 Spectre

Dans une algèbre de Banach comme $\mathcal{B}(\mathbb{H})$, on définit le *spectre* d'un élément u :

DÉFINITION 7
Si $u \in \mathcal{B}$, $\mathrm{Sp}(u)$ *est l'ensemble des* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tels que* $u - \lambda.I$ *ne soit pas inversible.*

REMARQUE 4
Si $\mathbb{H}$ est de dimension finie, v est inversible ssi il est injectif : dire que $u - \lambda.I$ n'est pas inversible revient à dire que λ est valeur propre de u. Cette propriété n'est plus

[3] Les auteurs préfèrent ne pas mettre l'unité dans le cahier des charges de l'algèbre, ce que je ne fais pas : j'emploie « algèbre » dans le sens d'« algèbre unifère ».

vraie en dimension infinie, à cause des endomorphismes injectifs, mais non-surjectifs, voir remarque 1.

Si X est un espace compact, l'espace $\mathcal{C}(X)$ des fonctions continues à valeurs complexes sur X est une algèbre de Banach commutative. Si $f \in \mathcal{C}(X)$, alors $\mathrm{Sp}(f)$ est l'image de la fonction f.

Certains résultats font intervenir $\mathrm{Sp}'(u) := \mathrm{Sp}(u) \cup \{0\}$. Par exemple :

Proposition 8
$\mathrm{Sp}'(uv) = \mathrm{Sp}'(vu)$

Démonstration : Basée sur le fait que, si $1 - uv$ est inversible d'inverse a, alors : $(1 + vau)(1 - vu) = 1 - vu - vauvu + vau = 1 - vu + va(1 - uv)u = 1$; de même $(1 - vu)(1 + vau) = 1$, et donc $1 - vu$ est inversible. □

Remarque 5
Si u est une isométrie partielle (voir définition 9) de $\mathbb{H}$ sur un sous-espace propre de $\mathbb{H}$, alors $\mathrm{Sp}(u^*u) = \{1\} \neq \mathrm{Sp}(uu^*) = \{0, 1\}$.

Théorème 3
$\mathrm{Sp}(u)$ *est un compact non-vide.*

Démonstration : La démonstration se base sur la possibilité de developper l'inverse en série entière. Par exemple, si u est inversible, alors $u - \lambda.I$ le reste dans un voisinage de 0 : l'inverse est $\sum_n \lambda^n.u^{-(n+1)}$, qui va converger pour $|\lambda| < \|u^{-1}\|^{-1}$; cela montre que le spectre est fermé. De même le spectre est borné, car pour $\lambda > \|u\|$, la série $\sum_n \lambda^{-n}.u^n$ converge vers l'inverse de $I - \lambda^{-1}.u$. Le spectre est non-vide : soit φ une forme linéaire continue sur $\mathcal{B}$: si $\mathrm{Sp}(u) = \emptyset$, la fonction $\varphi \circ (u - \lambda.I)^{-1}$ va être holomorphe dans tout le plan complexe (fonction entière), et de plus, comme pour $|\lambda| > \|u\|$ $\|(u - \lambda.I)^{-1}\| \leq 1/(|\lambda| - \|u\|)$, cette fonction entière s'annule à l'infini. C'est le moment d'appliquer le théorème de Liouville « une fonction entière bornée est constante », et d'en déduire que $\varphi \circ (u - \lambda.I)^{-1}$ est identiquement nulle, en particulier, $\|\varphi(u^{-1})\| = 0$ quelque soit φ. Par le théorème de Hahn-Banach (théorème 24), ce n'est possible que si $u^{-1} = 0$, drôle de propriété pour un inverse. □

Remarque 6
Le théorème admet une version effective : on peut calculer la « taille » du spectre, i.e., le *rayon spectral* $\varrho(u) := \inf \{r ; \forall z \in \mathrm{Sp}(u) |z| \leq r\}$: c'est le diamètre de la plus petite boule de centre 0 contenant le spectre ; cette valeur est effectivement atteinte par compacité, i.e., il y a un élément du spectre de module $\varrho(u)$,... y compris quand $\varrho(u) = 0$, puisque le spectre est non-vide.

Le rayon spectral repose sur la version explicite du théorème de Liouville, qui se démontre très bien dans le cas d'une fonction de $\mathbb{C}$ dans un Banach. En effet, si φ est une fonction holomorphe dans un disque de rayon $> R > 0$, le théorème des résidus permet de calculer les dérivées successives de φ en 0, au moyen d'une intégrale sur le cercle de rayon R :

$$\varphi^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n n!}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R\varphi(Re^{2i\pi t})e^{-i(n+1)t}}{R^{n+1}} dt \tag{21}$$

Grosso modo, cette intégrale va diminuer quand R augmente. Si φ est bornée par M sur le disque de rayon R, on obtient les majorations suivantes pour les dérivées successives :

$$|\varphi^{(n)}(0)| \leq Mn!R^{-n} \tag{22}$$

et donc le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}\lambda^n$ associée à $\varphi(\lambda)$ est au moins égal à R. Ce qui montre que le rayon de convergence de la série de φ est égal au rayon du plus grand disque sur lequel φ est définie[4]. Mais il y a aussi une formule explicite pour le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n\lambda^n$, c'est $\liminf |a_n|^{1/n}$.

On applique ceci à la fonction[5] $(u - \lambda^{-1}I)^{-1}$, dont le rayon de convergence sera donc $\varrho(a)^{-1}$, et qui admet le développement en série $\sum \lambda^{n+1}u^n$. Cela nous donne $\liminf \|u^n\|^{1/n}$ comme valeur du rayon spectral ; ce qu'on améliore en remarquant que $\|u^{mn}\|^{1/n} \leq \|u^m\|$, qui donne $\liminf \|u^n\|^{1/n} = \lim \|u^n\|^{1/n} = \inf \|u^n\|^{1/n}$:

$$\varrho(u) = \lim \|u^n\|^{1/n} = \inf \|u^n\|^{1/n} \tag{23}$$

En particulier, si u est nilpotent, son rayon spectral est nul ; ce qui est bien connu en dimension finie, rappelons-nous les matrices de Jordan triangulaires strictes et donc avec des valeurs propres nulles. Nous verrons que, dans une algèbre stellaire, la norme d'un opérateur normal, e.g., hermitien, est égale à son rayon spectral.

PROPOSITION 9
Soit P un polynôme complexe ; alors $\mathrm{Sp}(P(u)) = P(\mathrm{Sp}(u))$.

Démonstration : Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, alors on peut écrire $P(u) - P(\lambda).I$ sous la forme $(u - \lambda.I)P'(u)$, qui n'est pas inversible, d'ou $P(\lambda) \in \mathrm{Sp}(P(u))$. Réciproquement, si $\mu \in \mathrm{Sp}(P(u))$, écrivons $P - \mu$ comme produit de facteurs du premier degré $\alpha(X - \lambda_1)\ldots(X - \lambda_k)$; dire que $\alpha(u - \lambda_1.I)\ldots(u - \lambda_k.I)$ est non-inversible, c'est dire que :

- Soit $\alpha = 0$, ce qui correspond au polynôme constant μ : ce cas est immédiat — *modulo* le fait que le spectre est non-nul — $P(\mathrm{Sp}(u)) = \{\mu\} = \mathrm{Sp}(\mu.I)$.
- Soit un des $u - \lambda_i.I$ est non-inversible. Alors $\lambda_i \in \mathrm{Sp}(u)$ et, comme $P(\lambda_i) - \mu = 0$, $\mu \in P(\mathrm{Sp}(u))$.

□

COROLLAIRE 9.1
L'equation $uv - vu = I$ n'a pas de solution parmi les opérateurs bornés.

[4]La majoration (22) donne immédiatement le théorème 3 : on fait tendre R vers l'infini avec M fixe !

[5]Prolongée continûment en 0 par la valeur 0.

Démonstration : $1 + vu = uv$, donc $1 + \mathrm{Sp}(vu) = \mathrm{Sp}(uv)$, ou encore $(1 + \mathrm{Sp}(vu)) \cup \{0\} = \mathrm{Sp}(vu) \cup \{0\}$, mais il n'y a pas de compact non-vide $\mathrm{Sp}(vu)$ vérifiant cette équation. En fait il y a des solutions, mais avec des opérateurs *non bornés*, auquel cas $\mathrm{Sp}(vu)$ n'est plus forcément compact, par exemple $\mathrm{Sp}(vu) = \mathbb{Z}$. □

La proposition suivante anticipe sur la définition de l'adjoint, autrement dit elle suppose que l'algèbre est munie d'une involution.

Proposition 10
$\mathrm{Sp}(u^*) = \overline{\mathrm{Sp}(u)}$ *; si u est inversible, alors* $\mathrm{Sp}(u^{-1}) = \mathrm{Sp}(u)^{-1}$.

Démonstration : (Seconde propriété) : si $\lambda \neq 0$ et $u - \lambda.I$ est inversible, alors $u^{-1} - \lambda^{-1}.I = -\lambda^{-1}.u^{-1}(u - \lambda.I)$ est aussi inversible. □

Remarque 7
J'anticipe sur la suite des évènements : je vais montrer que le spectre d'un opérateur n'est pas relatif à l'algèbre stellaire, voir *infra*, dans lequel on le place.

- En règle générale, si $u \in \mathcal{B} \subset \mathcal{C}$, son spectre décroît : $\mathrm{Sp}_{\mathcal{C}}(u) \subset \mathrm{Sp}_{\mathcal{B}}(u)$, vu que l'on a plus de chances d'inverser un élément dans une sur-algèbre.
- Il y a une limitation technique à cette diminution de spectre. Dans $\mathcal{B}$, si u n'est pas inversible, mais cependant limite d'une suite (u_n) d'éléments inversibles, il est immédiat que $\|u_n^{-1}\| \to \infty$: en effet si (u_n) (ou une de ses sous-suites) reste bornée, on a $\|uu_n{}^{-1} - I\| = \|(u - u_n)u_n{}^{-1}\| \to 0$, et donc $uu_n{}^{-1}$ s'approche de I, mais à distance < 1 de I, on est toujours inversible (série entière convergente), et si $uu_n{}^{-1}$ est inversible, u l'est aussi, contradiction. Par contre, si le même u est inversible dans $\mathcal{C}$, la fonction $v \mapsto v^{-1}$ est continue et bornée dans un voisinage de u, mais on a vu que l'inverse (dans $\mathcal{B}$, mais c'est le même) n'est borné dans aucun voisinage de u. On applique ça au cas d'un point frontière λ du spectre $\mathrm{Sp}_{\mathcal{B}}(u)$: si $u - \lambda.I$ n'est pas inversible, mais limite des $u_n - \lambda.I$ inversibles (tout ça dans $\mathcal{B}$), cette situation persiste dans $\mathcal{C}$.
- En résumé, si le spectre décroît, sa frontière augmente ! Par exemple $\mathrm{Sp}_{\mathcal{B}}(u)$ est le disque fermé de rayon 1, et $\mathrm{Sp}_{\mathcal{C}}(u)$ est le même disque privé du disque ouvert de rayon 1/2.
- Dans le cas qui nous intéresse, on en déduira qu'un hermitien u inversible dans l'algèbre stellaire $\mathcal{C}$ l'était déjà dans $\mathcal{B}$, vu que 0 est point frontière (le spectre d'un hermitien est réel, voir *infra*, et donc formé de points frontières).
- On en déduit que si $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ sont des algèbres stellaires, $\mathcal{B}$ est une sous-algèbre *pleine* de $\mathcal{C}$, i.e. que tout élément $u \in \mathcal{B}$ inversible dans $\mathcal{C}$ l'est déjà dans $\mathcal{B}$. En effet, uu^*, hermitien, est bien inversible dans $\mathcal{C}$, et le reste dans $\mathcal{B}$, ce qui fait que u est inversible à droite dans $\mathcal{B}$. De même, en considérant u^*u, on obtient l'inversibilité à gauche.

3.3 Adjoints

Si $u \in \mathcal{B}(\mathbb{H}, \mathbb{K})$, u induit une application linéaire $u^\sharp$ du dual $\mathbb{K}^\sharp$ de $\mathbb{K}$ dans le dual $\mathbb{H}^\sharp$ de $\mathbb{H}$. Or $\mathbb{K}^\sharp$ et $\mathbb{H}^\sharp$ sont anti-isomorphes à $\mathbb{K}$ et $\mathbb{H}$, autrement dit $u^\sharp$ définit une fonction u^* de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{H}$; cette fonction est linéaire, car les deux « anti » s'annulent. En fait, u^* est l'unique opérateur satisfaisant l'adjonction :

$$\langle u(x) \mid y \rangle = \langle x \mid u^*(y) \rangle \tag{24}$$

Les propriétés de u^* sont les suivantes :

(i) $u \mapsto u^*$ est anti-linéaire, en particulier $(\lambda.u)^* = \bar{\lambda}.u^*$.

(ii) $u \mapsto u^*$ est involutive : $u^{**} = u$; comme toute bonne involution, elle renverse la composition $(uv)^* = v^*u^*$, et dans le cas $\mathbb{H} = \mathbb{K}$, $I^* = I$.

(iii) $u \mapsto u^*$ est une isométrie : $\|u^*\| = \|u\|$. En effet, par Cauchy-Schwarz, $\|u\| = \sup\{|\langle u(x) \mid y\rangle| \; ; \|x\|, \|y\| \geq 1\}$, etc.

(iv) *Last but not least*, $\|uu^*\| = \|u\|^2$: $\|uu^*\| = \sup\{|\langle uu^*(x) \mid y\rangle| \; ; \|x\|, \|y\| \leq 1\} \geq \sup\{|\langle uu^*(x) \mid x\rangle| \; ; \|x\| \leq 1\} = \sup\{|\langle u^*(x) \mid u^*(x)\rangle| \; ; \|x\| \leq 1\} = \|u^*\|^2$ et donc, $\|uu^*\| \geq \|u\|^2$, dont on tire $\|uu^*\| = \|u\|^2$.

Une algèbre de Banach munie d'une involution vérifiant (i)—(iv)[6] est dite *algèbre stellaire.*

EXEMPLE 1

L'exemple le plus naturel d'algèbre stellaire est $\mathcal{B}(\mathbb{H})$. Plus généralement, une sous-algèbre de $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ close pour la norme et auto-adjointe (close par adjonction) est la forme la plus générale d'algèbre stellaire (théorème 14).

Il y a un exemple plus élémentaire d'algèbre stellaire : l'algèbre des fonctions continues sur un compact X, muni de la multiplication, l'adjonction étant la conjugaison, tout cela défini ponctuellement, avec :

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|; x \in X\} \tag{25}$$

La particularité de $\mathcal{C}(X)$, c'est d'être commutative. Le théorème 12 nous dira d'ailleurs que toute algèbre stellaire commutative est de cette forme.

3.4 Petite taxinomie des opérateurs

Les éléments d'une algèbre stellaire, et donc les opérateurs sur un Hilbert, sont principalement étudiés en fonction de leur relation à leur propre adjoint. Voilà les cas les plus typiques :

Normal : se dit d'un opérateur qui commute à son adjoint : $uu^* = u^*u$. Alors l'algèbre stellaire engendrée par u est commutative et u possède une espèce de « diagonalisation ». Parmi les opérateurs normaux se trouvent les hermitiens et les unitaires.

Unitaire : se dit d'un opérateur u d'inverse u^*, i.e., tel que $uu^* = u^*u = I$. Ce sont les *isométries* de $\mathbb{H}$, car $\langle u(x) \mid u(y)\rangle = \langle x \mid u^*u(x)\rangle = \langle x \mid y\rangle$, et ils forment donc un groupe. Le spectre d'un unitaire est inclus dans le cercle $\mathcal{U} = \{z; |z| = 1\}$. C'est évident, car $\|u\| = 1$ (à cause de $\|uu^*\| = \|u\|^2$) et donc $\mathrm{Sp}(u)$ est inclus dans le disque unité $\mathcal{D}$; il en est de même de $\mathrm{Sp}(u^*) = \mathrm{Sp}(u)^{-1}$, ce qui montre que $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathcal{D} \cap \mathcal{D}^{-1} = \mathcal{U}$.

[6](iii) découle en fait de $\|u\|^2 \leq \|uu^*\|$ qui implique $\|u\|^2 \leq \|u\|\|u^*\|$.

Hermitien : (ou *auto-adjoint*) se dit d'un opérateur u égal à son adjoint, en d'autre termes tel que $\langle u(x) \mid x\rangle$ soit réel pour tout x. Le spectre d'un hermitien est réel (voir *infra*), et les bornes extrêmes de son spectre sont les réels $\sup\{\langle u(x) \mid x\rangle; \|x\| = 1\}$ et $\inf\{\langle u(x) \mid x\rangle; \|x\| = 1\}$. L'hermitien typique (c'est même un théorème, tout hermitien s'écrit ainsi) est une somme $u + u^*$.

Symétries : se dit d'un hermitien unitaire, i.e., tel que $u = u^* = u^{-1}$. Son spectre est inclus dans $\{-1, +1\}$, et de fait on peut « diagonaliser » u comme la différence des projecteurs (voir *infra*) $(I + u)/2$ (espace propre de $+1$) et $(I - u)/2$ (espace propre de -1).

Projecteur : se dit d'un hermitien idempotent : $u = u^* = u^2$. Son spectre est inclus dans $\{0, +1\}$, et u correspond à une projection orthogonale sur un sous-espace clos, l'image de u.

Hermitien positif : se dit d'un hermitien tel que $\langle u(x) \mid x\rangle \geq 0$ pour tout x. Les hermitiens positifs sont particulièrement importants, car la structure d'ordre de $\mathbb{R}$ supplèe aux défaillances de la topologie, par exemple dans les questions de convergence de séries. Les hermitiens positifs ont un spectre inclus dans $\mathbb{R}^+$. L'hermitien positif typique (c'est encore un théorème, ils sont tous de cette forme) est un produit uu^*, on peut même supposer u hermitien, et, mieux, u lui-même positif : le fait capital est qu'un hermitien positif a une *racine carrée.*

L'analogie courante est la suivante : les opérateurs sont une version « non-commutative » de leur spectre, autrement dit, les hermitiens sont les « réels non-commutatifs », les unitaires jouant le rôle des arguments complexes $e^{i\theta}$, et d'ailleurs, la *décomposition polaire* (*infra*) exprime tout opérateur comme le produit d'un module (hermitien positif) et d'une isométrie (partielle, cependant).

REMARQUE 8
Le rayon spectral d'un opérateur hermitien est égal à sa norme :
$\|u^{2n}\| = \|(u^n)^*u^n\| = \|u^n\|^2$, ce qui fait que $\|u^{2^n}\| = \|u\|^{2^n}$ d'où
$\varrho(u) = \lim \|u^{2^n}\|^{2^{-n}} = \|u\|$. Même remarque pour un opérateur normal :
$\varrho(u)^2 = \varrho(uu^*) = \|uu^*\| = \|u\|^2$.

Les opérateurs normaux forment une classe bâtarde, car dénuée de toute *socialisation* : alors que les unitaires socialisent par produit (si u, v sont unitaires, uv l'est aussi) et que les hermitiens socialisent par somme (si u, v sont hermitiens, $u + v$ l'est aussi), on n'a rien de tel pour les opérateurs normaux. Bien qu'ils comprennent beaucoup plus que les unitaires et les hermitiens, les opérateurs normaux sont avant tout un artifice rhétorique qui évite de dupliquer les résultats qui sont valables à la fois dans le cas unitaire et dans le cas hermitien.

3.5 Le calcul spectral

Soit u un élément hermitien d'une algèbre stellaire $\mathcal{B}$; la plus petite sous-algèbre $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ contenant u (et donc forcément u^*, puisque $u^* = u$) est commutative. Nous allons montrer que $\mathcal{B}_0$ est isomorphe à l'algèbre des fonctions complexes continues sur le spectre de u, $\mathcal{C}(\mathrm{Sp}(u))$. Ce résultat se généralise : toute algèbre stellaire commutative est isomorphe à une algèbre $\mathcal{C}(X)$ où X est un espace compact, voir *infra.*

Si P est un polynôme, nous savons définir $P(u)$, qui est un opérateur normal. De plus $\mathrm{Sp}(P(u)) = P(\mathrm{Sp}(u))$, ce qui montre que $\|P(u)\| = \sup\{|P(z)|\ ; z \in \mathrm{Sp}(u)\}$ et en particulier si P, Q coincident sur $\mathrm{Sp}(u)$ (ce qui ne peut vraiment se produire que quand le spectre est fini), on obtient $P(u) = Q(u)$. On a donc une isométrie linéaire d'une partie de $\mathcal{C}(\mathrm{Sp}(u))$ (les fonctions f qui sont des restrictions de polynômes à $\mathrm{Sp}(u)$) ; mais ces fonctions sont denses dans $\mathcal{C}(\mathrm{Sp}(u))$d (Stone-Weierstraß, théorème 22), et donc nous avons effectivement construit une isométrie.

THÉORÈME 4
À chaque fonction complexe continue f sur $\mathrm{Sp}(u)$, on peut associer un opérateur $f(u) \in \mathcal{B}$ tel que :

(i) $\|f(A)\| = \|f\|$;

(ii) $\mathrm{Sp}(f(u)) = f(\mathrm{Sp}(u))$;

(iii) $1(u) = I$;

(iv) $\iota(u) = u$ *si* ι *est la fonction identité :* $\iota(z) = z$;

(v) $(af + bg)(u) = af(u) + bg(u)$;

(vi) $(fg)(u) = f(u)g(u)$;

(vii) $\bar{f}(u) = (f(u))^*$;

(viii) $f(u)$ *est normal ; il est hermitien exactement quand* f *est à valeurs réelles ;*

(ix) $f(u)v = vf(u)$ *si* v *commute à* u.

Démonstration : Tout ça est à peu près évident, sauf

(ii) On a un plongement isométrique de $\mathcal{C}(\mathrm{Sp}(u))$ dans $\mathcal{B}$, d'où il résulte que le spectre de $f(u)$ dans $\mathcal{B}_0$, soit $\mathrm{Sp}(f(u))$ est inclus dans le spectre de $f(u)$ dans $\mathcal{C}(\mathrm{Sp}(u))$, soit $\mathrm{Sp}_{\mathcal{B}_0}(f(u)) = f(\mathrm{Sp}(u))$. Ce n'est qu'un début, mais c'est assez pour démontrer le (vii).

(vii) qui repose sur le fait que $\bar{\iota} = \iota$, i.e., que $\mathrm{Sp}(u)$ est réel. Il y a une manière très élégante de le démontrer, on forme e^{iu} et on voit tout de suite que c'est un unitaire (son inverse est e^{-iu}) et donc de spectre (dans $\mathcal{B}_0$) inclus dans le cercle $\mathcal{U}$: par ce qui précède, $e^{i\mathrm{Sp}(u)} \subset \mathcal{U}$, ce qui n'est possible que si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}$.

(ii) J'ai trouvé plus didactique d'annoncer à l'avance, voir remarque 7, (car on peut être dérouté par une définition sensible *a priori* au contexte) le fait que le spectre ne dépend pas de l'algèbre dans laquelle on le prend. On utilise uniquement le fait que le spectre d'un hermitien est réel, ce qu'on vient d'établir.

□

L'exemple le plus typique d'application du théorème : si u est positive, son spectre est formé de réels positifs, on pourra donc définir la racine carrée (notée $u^{1/2}$ ou $\sqrt{u}$) de u. En attendant, la propriété suivante est bien pratique et bien jolie :

Proposition 11
Tout opérateur est combinaison linéaire de deux hermitiens (ou de quatre unitaires).

Démonstration : $u + u^*$ est hermitien, $u - u^*$ est anti-hermitien (égal à l'opposé de son adjoint), et donc $u = 1/2(u + u^*) + i/2(-i(u - u^*))$. Un hermitien de norme ≤ 1 se décompose lui-même en moyenne de deux unitaires : si $f(t) = t + i\sqrt{1 - t^2}$, il est immédiat que $f(t)\bar{f}(t) = \bar{f}(t)f(t) = 1$, $f(t) + \bar{f}(t) = 2t$, et donc $f(u)$ est unitaire et $u = 1/2(f(u) + \bar{f}(u))$. □

Remarque 9
Si $\mathbb{H}$ est de dimension finie n, tout hermitien de $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ est diagonalisable ; en fait les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ énumèrent, avec répétitions, le spectre de u. $f(u)$ n'est rien d'autre que l'opérateur dont la matrice (dans la même base), a les coefficients diagonaux $f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)$.

Remarque 10
Peut-on étendre le théorème 4 au cas où u est un opérateur normal ? On a bien envie de définir $f(u)$ au moyen d'approximations uniformes au moyen de polynômes en $z, \bar{z}$ et tout va reposer sur un point que nous ne sommes pas encore en mesure d'établir : si $P(X, Y)$ est un polynôme, alors $\mathrm{Sp}(P(u, u^*)) = \{P(z, \bar{z})\ ; z \in \mathrm{Sp}(u)\}$. Cela est évident à partir d'un résultat à venir (théorème 12) ; en effet, il suffit de se placer dans l'algèbre commutative engendrée par u, u^* et on peut, sans vergogne, remplacer u par une fonction continue ι sur un compact X, auquel cas $P(u, u^*)$ devient la fonction $\varphi(z) = P(\iota(z), \iota(\bar{z}))\ldots$

Ça peut permettre de définir des amusettes genre « logarithme d'un opérateur » ; il faut évidemment pouvoir définir le log de façon continue sur le spectre, ce qui sera possible si par exemple $\mathrm{Sp}(u)$ ne contient aucun réel négatif ou nul.

3.6 Hermitiens positifs

Définition 8
Un opérateur u est positif *quand il est hermitien de spectre inclus dans $\mathbb{R}^+$. Les opérateurs hermitiens sont ordonnés (voir théorème 5) par $u \leq v$ ssi $v - u$ est positif.*

Théorème 5
Soit $\mathcal{C}^+$ l'ensemble des hermitiens positifs de $\mathcal{C}$;

(i) *$\mathcal{C}^+$ est un cône fermé dans $\mathcal{C}$;*

(ii) *Si $u, -u \in \mathcal{C}^+$, alors $u = 0$.*

Démonstration : (i) On utilise la remarque suivante : si u est hermitien et $a \geq \|u\|$, u est positif ssi $\|u - aI\| \leq a$ (immédiat en regardant le spectre). Ceci permet de montrer que $\mathcal{C}^+$ est fermé. Ça permet aussi de montrer la clôture par somme : si $\|u - \|u\|I\| \leq \|u\|$, $\|v - \|v\|I\| \leq \|v\|$, alors $\|u + v - aI\| \leq a$, avec $a = \|u\| + \|v\|$. La clôture par mutiplication par un scalaire ≥ 0 est immédiate.

(ii) Immédiat : u est normal de spectre $\{0\}$, donc de norme 0.

□

Quleques propriétés des hermitiens positifs :

Théorème 6
Un hermitien u peut être exprimé sous la forme d'une différence $u^+ - u^-$ d'hermitiens positifs, tels que $u^+u^- = u^-u^+ = 0$. Cette expression est unique et de plus $\|u\| = \sup(\|u^+\|, \|u^-\|)$.

Démonstration : Soient $f^+(x) = \sup(x, 0), f^-(x) = -\inf(x, 0)$, alors $u^+ = f^+(u)$ et $u^- = f^-(u)$ sont positifs et vérifient les propriétés désirées. L'unicité est un peu plus délicate : si $u = v - w, vw = wv = 0$, alors $u^n = v^n + (-1)^n w^n$ et donc, si P est un polynôme à terme constant nul, $P(u) = P(v) + P(-w)$; ce genre de polynôme est suffisant pour approximer f^+ et f^- et on conclut que $f^+(u) = f^+(v) - f^+(-w)$, $f^-(u) = f^-(v) - f^-(-w)$; comme v, w sont positifs, $f^+(-w) = f^-(v) = 0$, $f^+(v) = v$, $f^-(-w) = -w$, i.e., $u^+ = v$, $u^- = - - w = w$. □

Remarque 11
Ceci n'établit en rien une structure de treillis sur les hermitiens : on a quelque chose qui ressemble à $\sup(u, 0)$, mais u et 0 commutent ! Si on se restreint à des algèbres commutatives, il y a bien treillis (ce n'est pas tuant à établir, puisqu'on est moralement dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, on prend le sup des fonctions. Par contre $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ est un « anti-treillis » : deux hermitiens positifs ont un sup ss'ils commutent.

Cela permet d'établir des résultats folkloriques, genre « tout opérateur est combinaison de 4 hermitiens positifs »... Mais continuons avec des résultats plus nerveux :

Théorème 7
Si $u \in \mathcal{C}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $u \in \mathcal{C}^+$;

(ii) $u = v^2$ *pour un v hermitien ;*

(iii) $u = v^*v$ *pour un v quelconque.*

De plus dans le cas (ii), v peut être choisi lui-même positif, auquel cas le choix est unique.

Dans le cas où $\mathcal{C}$ est de la forme $\mathcal{B}(\mathbb{H})$, on peut rajouter les équivalents suivants :

(iv) $u = v^*v$ *pour un opérateur v dans un $\mathcal{B}(\mathbb{H}, \mathbb{K})$;*

(v) $\langle u(x) \mid x\rangle \geq 0$ *pour tout x de $\mathbb{H}$.*

Démonstration : La partie la plus difficile du théorème repose sur le :

Lemme 7.1
Si $-u^*u \in \mathcal{C}^+$, alors $u = 0$.

Démonstration : On écrit $u = v + iw$, avec v, w hermitiens ; observons que v^2 et w^2, de spectre positif, sont positifs. D'autre part le spectre de uu^* est (au nombre 0 près) le même que celui de u^*u, et donc est inclus dans $\mathbb{R}^-$ et donc l'hermitien $-uu^*$ est positif. On observe alors que $u^*u + uu^* = v^2 + w^2$, ou encore, $u^*u = (-uu^*) + v^2 + w^2$, ce qui ne se peut que si les deux membres sont nuls. Comme $\|u^*u\| = \|u\|^2 = 0$, $u = 0$. □

Revenons à nos moutons hermitiens :

(i) → (ii) : il suffit de prendre $h = \sqrt{u}$, ce qui nous donne une solution positive. Tordons le cou à l'unicité[7] : si k est une autre racine carrée positive de u, alors k, u et $\sqrt{u}$ appartiennent à l'algèbre stellaire engendrée par k, qui est faite des $f(k)$, en particulier $u = k^2$ et $k = \sqrt{k^2} = \sqrt{u}$.

(ii) → (iii) : immédiat.

(iii) → (i) : $u = v^*v$ admet une décomposition $u^+ - u^-$, et soit $w = vu^-$: $w^*w = u^-v^*vu^- = u^-(u^+ - u^-)u^- = -(u^-)^3$. Mais $(u^-)^3$ a un spectre positif, ce qui fait que l'hermitien $-w^*w$ est positif, et donc nul par le lemme. Il en est de même de $(u^-)^3$. Il est facile de conclure que $u^- = 0$.

(ii) → (iv) : immédiat.

(iv) → (v) : $\langle v^*v(x) \mid x\rangle = \langle v(x) \mid v(x)\rangle \geq 0$.

(v) → (i) : $\langle u(x) \mid x\rangle \geq 0$ fait de u un hermitien. Mais $0 \leq \langle uu^-(x) \mid u^-(x)\rangle = \langle u^+u^-(x) \mid u^-(x)\rangle - \langle u^-u^-(x) \mid u^-(x)\rangle = -\langle u^-u^-(x) \mid u^-(x)\rangle \leq 0$, ce qui montre que $\langle u^-u^-(x) \mid u^-(x)\rangle = 0$, i.e., $\langle (u^-)^3(x) \mid x\rangle = 0$, ce qui n'est possible (généralités sur les formes hermitiennes positives) que si $(u^-)^3 = 0$, ce qui nous amène à $u^- = 0$.

□

COROLLAIRE 7.1
Si $u \in \mathcal{C}^+$ alors $v^*uv \in \mathcal{C}^+$; si, de plus, $v \in \mathcal{C}^+$ et u, v commutent, alors $uv \in \mathcal{C}^+$.

Démonstration : Dans le second cas, $\sqrt{u}, \sqrt{v}$ appartiennent à la plus petite algèbre stellaire engendrée par u, v, qui est commutative ; donc ils commutent. On écrit alors $uv = \sqrt{v}.u.\sqrt{v} = (u.\sqrt{v})^*u.\sqrt{v} \geq 0$. Le premier cas est très proche : $v^*uv = v^*\sqrt{u}.\sqrt{u}.v = (\sqrt{u}.v)^*(\sqrt{u}.v)$. □

COROLLAIRE 7.2
Si u est un hermitien de $\mathcal{B}(\mathbb{H})$, les bornes de $\mathrm{Sp}(u)$ *sont :*

$$m(u) = \inf\{\langle u(x) \mid x\rangle \; ; \|x\| = 1\} \tag{26}$$
$$M(u) = \sup\{\langle u(x) \mid x\rangle \; ; \|x\| = 1\} \tag{27}$$

Démonstration : Vient de (v) et de $m(u) = \sup\{\lambda \; ; \lambda.I \geq u\}$, $M(u) = \inf\{\lambda \; ; u \geq \lambda.I\}$. □

PROPOSITION 12
Soient u, v positifs, alors :

(i) *Si $u \leq v$, et u inversible, alors $v^{-1} \leq u^{-1}$;*

(ii) *Si $u \leq v$, alors $\sqrt{u} \leq \sqrt{v}$.*

[7] Ce qui suit peut servir dans beaucoup d'autres cas.

Démonstration : (i) $u \leq v$ et u inversible impliquent $0 < m(u) \leq m(v)$, et donc v est inversible. On obtient $v^{-1/2}uv^{-1/2} \leq I$, donc $\|u^{1/2}v^{-1}u^{1/2}\| = \|u^{1/2}v^{-1/2}\|^2 = \|v^{-1/2}uv^{-1/2}\| \leq 1$, ce qui donne $u^{1/2}v^{-1}u^{1/2} \leq I$, qui redonne $v^{-1} \leq u^{-1}$.

(ii) On continue avec u inversible pour le moment. Nous avions obtenu $\|u^{1/2}v^{-1/2}\| \leq 1$; remarquant que $\|v^{-1/4}u^{1/2}v^{-1/4}\| = \|u^{1/2}v^{-1/4}v^{-1/4}\| \leq 1$, qui est une conséquence de $\varrho(ab) = \varrho(ba)$ (proposition 8), et donc $v^{-1/4}u^{1/2}v^{-1/4} \leq I$, ce qu'on transforme en $\sqrt{u} \leq \sqrt{v}$. Il faut encore établir le résultat quand u n'est pas inversible : pour cela, on remplace u, v par $u + \epsilon.I, v + \epsilon.I$, et on remarque que $\sqrt{u + \epsilon.I} \to \sqrt{u}$, $\sqrt{v + \epsilon.I} \to \sqrt{v}$ quand $\epsilon \to 0$, et le résultat est donc conséquence de la continuité de la relation d'ordre, i.e., de la fermeture topologique de $\mathcal{C}^+$.

□

Remarque 12

Il ne faudrait pas croire que ce type de résultat se généralise dans le style « si f est croissante, alors f préserve l'ordre des hermitiens ». Exemple typique, la fonction $f(u) = u^2$, voir *infra.* En fait $h \mapsto h^a$ préserve l'ordre exactement quand $0 \leq a \leq 1$.

3.7 La décomposition polaire

On utilise notre connaissance des hermitiens pour établir un résultat qui généralise — dans la mesure du possible — la décomposition familière $\rho e^{i\theta}$ d'un complexe.

Définition 9

Un opérateur $u \in \mathcal{B}(\mathbb{H}, \mathbb{K})$ est une « isométrie partielle » quand u^*u est un projecteur.

Remarquons qu'un hermitien v est un projecteur ssi $\mathrm{Sp}(v) \subset \{0, 1\}$, puisqu'alors $v^2 = v$ résulte du fait que $t^2 = t$ sur le spectre. En particulier, si u^*u est un projecteur, la proposition 8[8] nous montre que $\mathrm{Sp}(uu^*) \subset \{0, 1\}$ et donc uu^* est aussi un projecteur. On préférera cependant la démonstration plus explicite, basée sur la formule :

$$uu^*u = u \tag{28}$$

facile à établir : $(u^*uu^* - u^*)(uu^*u - u) = (u^*u)^3 - 2(u^*u)^2 + u^*u = 0$, donc $v := u^*uu^* - u^*$ est tel que $vv^* = 0$, et donc $\|v\|^2 = \|vv^*\| = 0$, d'où $v = 0$.

Soient E et F les sous-espaces (appelés *espace initial, espace final*) correspondant respectivement à u^*u et uu^*.

Proposition 13

u induit une bijection isométrique entre E et F.

Démonstration : Si $x \in E$, $\|x\|^2 = \langle u(x) \mid u(x)\rangle = \langle u^*u(x) \mid x\rangle = \langle x \mid x\rangle = \|x\|^2$, et donc u induit une isométrie de E dans $\mathbb{K}$. Elle est en fait à valeurs dans F, car $uu^*(u(x)) = uu^*u(x) = u(x)$. Elle est à valeurs sur F, car on peut appliquer le raisonnement à u^* qui fait le trajet inverse. □

[8] Ou plutôt sa démonstration.

En général les isométries partielles se composent mal, le cas typique étant celui de deux projecteurs ne commutant pas ; c'est même le cas le plus général : pour que la composée uv de deux isométries partielles u, v soit une isométrie partielle, il faut et il suffit que le projecteur final vv^* de v commute au projecteur initial u^*u de u.

THÉORÈME 8 (DÉCOMPOSITION POLAIRE)
Soit $u \in \mathcal{B}(\mathbb{H}, \mathbb{K})$; soit E le sous-espace initial de u, i.e., le supplémentaire orthogonal de $\ker u$, F son sous-espace final, i.e., la clôture topologique $\mathrm{cl}(\mathrm{im}\, u)$ de $\mathrm{im}\, u$:

(i) *Si* $\mathrm{abs}\, u = |u| := (u^*u)^{1/2} \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$, *alors* $\ker |u| = \ker u, \mathrm{im}\, |u| = \mathrm{cl}(\mathrm{im}\, u)$ *et* $\|\mathrm{abs}\, u\| = \|u\|$.

(ii) *Il existe une unique isométrie partielle ι de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{K}$ telle que $u = \iota|u|$ et* $\ker \iota = \ker u$.

(iii) *ι admet E pour sous-espace initial, F comme sous-espace final.*

(iv) *Soit u_1 un hermitien positif et ι_1 une isométrie partielle telle que* $\ker u_1 = \ker \iota_1$ *et $u = \iota_1 u_1$, alors $\iota_1 = \iota$ et $u_1 = |u|$.*

Démonstration : Un exercice facile, basé sur l'égalité
$\|u(z)\|^2 = \langle u(z) \mid u(z)\rangle = \langle u^*u(z) \mid z\rangle = \langle |u|^2(z) \mid z\rangle = \langle |u|(z) \mid |u|(z)\rangle = \||u(z)|^2\|$.
□

En particulier, on voit que $|u| = \iota^* u$, $|u|^* = \iota|u|\iota^* = (uu^*)^{1/2}$ et la décomposition polaire de u^* est $(\iota^*, |u|^*)$. Autrement dit, $u = \iota|u| = |u^*|\iota$.

Nous allons appliquer la décomposition polaire pour prouver le résultat suivant, qui n'est pas du tout évident *a priori*.

PROPOSITION 14
Soit $x \in \mathbb{H} \otimes \mathbb{K}$; alors il existe des familles orthonormales $\{\mathbf{e}_n\}$, $\{\mathbf{f}_n\}$ et une suite (t_n) de réels positifs de carré sommable telle que $x = \sum_n t_n \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{f}_n$.

Démonstration : Si $a \in \mathbb{H}$, on peut définir $u(a) \in \mathbb{K}$ par l'équation $\langle u(a) \mid b\rangle = \langle x \mid a \otimes b\rangle$. u est une application *anti-linéaire* de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{K}$, i.e., une application linéaire du dual $\mathbb{H}^\sharp$ dans $\mathbb{K}$. Elle admet donc une décomposition polaire, $u = \iota|u|$. $|u|$ est un hermitien de $\mathcal{B}(\mathbb{H}^\sharp) = \mathcal{B}(\mathbb{H})$. On anticipe en remarquant que $|u|$ est HS (Hilbert-Schmidt), donc compact et diagonalisable dans une base $\{\mathbf{e}_n\}$, avec des valeurs propres (t_n) de carré sommable. On pose $\iota(\mathbf{e}_n) = \mathbf{f}_n$. Le vecteur $x' = \sum_n t_n \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{f}_n$ est tel que $\langle x' \mid e_m \otimes f_n\rangle = \delta_{mn} t_m = \langle \iota|u|(\mathbf{e}_m) \mid \mathbf{f}_m\rangle = \langle x \mid \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{f}_n\rangle$, ce qui donne $x = x'$ (il faudrait en fait compléter le système orthonormal $(\mathbf{f}_n)$ en une base. . .) □

La décomposition est unique dans le sens suivant :

(i) Les réels t_n, du moins ceux qui sont > 0, sont uniques, on peut les arranger en une suite décroissante $t_0 \geq t_1 \geq t_2 \geq \ldots$, finie ou tendant vers 0.

(ii) On ne peut assurer l'unicité de $\mathbf{e}_n \otimes \mathbf{f}_n$ que si la valeur propre t_n est simple. Si $t_n = \ldots = t_{n+k}$ apparaît avec la multiplicité $k + 1$, c'est le sous-espace de dimension $k+1$ engendré par $\mathbf{e}_n \otimes \mathbf{f}_n, \ldots, \mathbf{e}_{n+k} \otimes \mathbf{f}_{n+k}$ qui est uniquement défini.

4 États et représentations

4.1 $*$-isomorphismes

Un *$*$-homomorphisme* d'une algèbre stellaire $\mathcal{B}$ dans une algèbre stellaire $\mathcal{C}$ est une fonction φ préservant la structure *algébrique*, y compris l'unité et l'adjonction. Le résultat suivant établit en quelque sorte, le caractère algèbrique de la norme :

THÉORÈME 9
Soit φ un $*$-homomorphisme de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}$; alors

(i) *φ est de norme au plus* 1.

(ii) *Si φ est injectif, il est alors isométrique. On parle alors d'un* $*$-isomorphisme.

Démonstration : Un $*$-homomorphisme preserve : l'inversibilité (si $uv = I$, alors $\varphi(u)\varphi(v) = \varphi(I) = I$), l'autao-adjonction (si $u = u^*$, $\varphi(u) = \varphi(u^*) = \varphi(u)^*$), la positivité (si $u = vv^*$, alors $\varphi(u) = \varphi(vv^*) = \varphi(v)\varphi(v)^*$).
Si $\varphi(u) - \lambda I$ est non inversible, c'est que $u - \lambda I$ ne l'était pas : $\mathrm{Sp}(\varphi(u)) \subset \mathrm{Sp}(u)$ et donc $\varrho(\varphi(u)) \leq \varrho(u)$. Pour un hermitien v, $\|\varphi(v)\| = \varrho(\varphi(v)) \leq \varrho(v) = \|v\|$. en prenant $v := uu^*$, on obtient $\|\varphi(u)\|^2 = \|\varphi(v)\| \leq \|v\| = \|u\|^2$, ce qui prouve (i).
Supposons que $\|\varphi(u)\| < \|u\|$; on peut supposer u de norme 1 et, quitte à le remplacer par uu^*, que u hermitien positif. Soit $\lambda := \|\varphi(u)\| < 1$ et soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f(x) = 0$ pour $x \leq \lambda$, $f(1) = 1$. Alors $f(u) \neq 0$ puisque $1 \in \mathrm{Sp}(u)$, alors que $f(\varphi(u)) = 0$, puisque $\mathrm{Sp}(\varphi(u)) \subset [0, \lambda]$. Puisque, par (i), φ est continu, $\varphi(f(u)) = f(\varphi(u)) = 0$; φ n'est donc pas injectif, ce qui prouve (ii). □

En particulier, une algèbre stellaire *simple* $\mathcal{B}$ (sans idéal bilatère fermé autre que $\mathcal{B}$ et 0), n'admet qu'une seule semi-norme *stellaire*, i.e., telle que $\|uu^*\| = \|u\|^2$. En effet, toute semi-norme stellaire induit une algèbre stellaire séparée complétée $\mathcal{C}$ et un $*$-homomorphisme φ de $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{C}$. Si φ n'est pas isométrique, c'est qu'elle n'est pas injective, auquel cas le noyau de φ définit une idéal bilatère clos non trivial.

PROPOSITION 15
L'algèbre stellaire $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices $n \times n$ sur $\mathbb{C}$ est simple.

Démonstration : Pour $1 \leq i, j \leq n$ soit B_{ij} la matrice avec un seul coefficient non nul, égal à 1, celui d'indice ij. Si $M = (\lambda_{ij})$, alors $\sum_{1 \leq k \leq n} B_{ki} M B_{jk} = \lambda_{ij} I$: si $\mathcal{I}$ est un idéal bilatère non nul, il contient donc I. □

$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est isomorphe à $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$, l'adjoint correspondant à la *transconjuguaison* (transposition + conjugaison). En dimension infinie, $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ contient un unique idéal bilatère clos non trivial : celui des opérateurs *compacts*, voir *infra*.

La fonction φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{C})$ qui remplace chaque coefficient a_{ij} par une matrice de taille $m \times m$ formée de coefficients tous égaux à a_{ij} sur la diagonale, nuls en dehors, est un $*$-isomorphisme. Si $n_0 < n_1 < \ldots < n_k < \ldots$ est une suite croissante d'entiers dont chacun divise le suivant, on obtient ainsi un système direct d'algèbres stellaires. Ce système admet une limite directe algébrique munie d'une (unique) norme stellaire, ce qui permet de le compléter pour en faire une algèbre stellaire, la limite directe du système. On peut classer les algèbres ainsi obtenues par l'exposant de chaque nombre premier dans la suite n_k (un entier ou ∞), ce qui permet de les caractériser à isomorphisme près. L'exemple le plus courant est celui de $n_k := 2^k$, ce qui donne les exposants : ∞ pour 2, 0 pour $p > 2$, ce qu'on écrit 2^∞ (algèbre CAR). Mais on pourrait tout aussi bien construire une algèbre correspondant à $3^\infty \cdot 5^2 \cdot 11^\infty$, ou encore à $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots$

4.2 États

Définition 10

On appelle état *sur une algèbre stellaire $\mathcal{B}$ une forme linéaire ρ positive : $\rho(u^*u) \in \mathbb{R}^+$ et normalisée : $\rho(I) = 1$.*

Exemple 2

L'état le plus typique de $\mathcal{C}(X)$ est $\rho_x(f) := f(x)$, qui est *pur*, voir *infra* ; une combinaison linéaire convexe d'états purs, i.e., une somme de Riemann, est un état. En résumé, un état sur $\mathcal{C}(X)$ est une mesure de masse 1.

L'état le plus typique de $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ est $\rho_x(u) := \langle u(x) \mid x \rangle$, où $\|x\| = 1$ (état pur) ; une combinaison linéaire convexe d'états purs, par exemple, en dimension finie, la trace normalisée $1/k \sum_{1 \leq i \leq k} \langle \mathbf{e}_i \mid \mathbf{e}_i \rangle$ est un état. Plus généralement, ce peut être un $\rho(u) := \mathrm{tr}(uv)$, où v est un hermitien positif de *trace* 1 (ici encore j'anticipe).

Sur l'algèbre CAR (la limite directe des $\mathcal{M}_{2^k}(\mathbb{C})$, voir *supra*), les traces normalisées induisent un état (appelé *trace*). Plus généralement, on peut construire un état sur l'algèbre CAR comme limite directe d'états ρ_k sur $\mathcal{M}_{2^k}(\mathbb{C})$, par exemple, en se donnant $\lambda_k \in [0, 1]$[9]. Ètant donnée $m \in \mathcal{M}_{2^{k+1}}(\mathbb{C})$, que l'on écrit comme une matrice formée de matrices 2×2, on remplace chacune de ces matrices $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ par $\lambda_k a + (1 - \lambda_k)d$, ce qui donne $m' \in \mathcal{M}_{2^k}(\mathbb{C})$; on définit $\rho_{k+1}(m) := \rho_k(m')$. Le cas $\lambda_k = 1/2$ est celui de la trace ; le cas $\lambda_k = 0$ correspond à un état pur. La construction GNS (*infra*) construit, à partir des suites (λ_k), des représentations de l'algèbre CAR, qui jouent un rôle important dans la théorie des *algèbre de von Neumann*.

Les états forment un ensemble convexe : si ρ, ρ' sont des états et $0 \leq \lambda \leq 1$, alors $\lambda\rho + (1 - \lambda)\rho'$ est encore un état. Cet espace est compact en topologie *faible*, i.e., pour la convergence simple. Le théorème de Krein-Milman (théorème 20) dit alors que cet ensemble est la fermeture convexe de l'ensemble de ses points extrémaux. On rappelle qu'un point d'un convexe est *extrémal* si on ne peut pas l'écrire sous la forme d'une combinaison convexe (non-triviale, i.e., avec $\lambda \neq 0, 1$). Typiquement, les points extrêmes du triangle $\{\alpha, \beta, \gamma \,;\, \alpha + \beta + \gamma = 1\}$ sont les sommets correspondant à $\alpha = 1$, à $\beta = 1$, à $\gamma = 1$. Le triangle est l'exemple d'un *simplexe*, i.e., d'un convexe compact avec unicité de la décomposition en combinaison convexe d'éléments extrémaux, ce qui est faux pour, disons, un carré.

Définition 11

On appelle état pur *un état extrémal.*

[9] Par symétrie, $\lambda_k \in [0, 1/2]$ suffit.

Quelques petites propriétés des états, d'abord

Proposition 16
$\rho(u^*) = \overline{\rho(u)}$

Démonstration : Il suffit de montrer que $\rho(u) \in \mathbb{R}$ pour u hermitien. Or comme $\|u\|I \pm u \geq 0$, $\rho(\|u\|I \pm u) \geq 0$, et donc $\rho(u) = 1/2(\rho(\|u\|I + u) - \rho(\|u\|I - u) \in \mathbb{R}$. □

Théorème 10
Une fonctionnelle linéaire ρ sur $\mathcal{C}$ telle que $\rho(I) = 1$ est un état ssi elle est bornée et sa norme $\|\rho\| := \sup\{|\rho(u)|; \|u\| \leq 1\}$ est égale à 1.

Démonstration : Supposons que ρ est un état, et soit $u \in \mathcal{C}$, quitte à multiplier u par un scalaire de module 1, on supposera que $\rho(u) \geq 0$. On va démontrer que $\rho(u) \leq \|u\|$. Pour ça on écrit $u = v + iw$, v, w hermitiens, et on observe que $v \leq \|u\|I$, et donc $\rho(v) \leq \|u\|$, mais $\rho(u)^* = \overline{\rho(u)}$ implique $\rho(u) = \rho(v)$.

Réciproquement, si $\|\rho\| := \sup\{\rho(u); \|u\| \leq 1\} = 1$, soit u hermitien, et écrivons $\rho(u) = a + ib$, il faut montrer que $a \geq 0, b = 0$. Pour s positif suffisamment petit, $\|I - su\| \leq 1$, et donc $1 - sa \leq |1 - s(a + ib)| = \rho(I - su) \leq 1$, ce qui montre que $a \geq 0$, ce qui règle le problème de a. On définit maintenant $v_n = u - aI + inbI$ et on observe que :

$$\|v_n\|^2 = \|v_n^* v_n\| = \|(u - aI)^2 + n^2 b^2 I\| \leq \|u - aI\|^2 + n^2 b^2 \tag{29}$$

et donc $(n + 1)^2 b^2 = |\rho(v_n)|^2 \leq \|u - aI\|^2 + n^2 b^2$ pour tout n, absurde. □

Proposition 17
Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, il y a un état ρ tel que $\rho(u) = \lambda$.

Démonstration : Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha\lambda + \beta \in \mathrm{Sp}(\alpha u + \beta I)$, et donc $|\alpha\lambda + \beta| \leq \|\alpha u + \beta I\|$. Autrement dit, on peut définir une forme linéaire bornée ρ_0 sur le sous-espace de $\mathcal{C}$ engendré par u, I : elle vérifie $\rho_0(u) = \lambda$, $\rho_0(I) = 1$, $\|\rho_0\| = 1$. Par Hahn-Banach (théorème 26), elle s'étend en une forme continue de même norme sur tout l'espace. Par le théorème précédent, il s'agit d'un état vérifiant $\rho(u) = \lambda$. □

Théorème 11
Soit $u \in \mathcal{C}$; alors

(i) *Si $\rho(u) = 0$ pour tout état ρ, alors $u = 0$;*
(ii) *Si $\rho(u) \in \mathbb{R}$ pour tout état ρ, alors u est hermitien ;*
(iii) *Si $\rho(u) \in \mathbb{R}^+$ pour tout état ρ, alors u est positif ;*
(iv) *Si u est normal, alors il y a un état ρ tel que $|\rho(u)| = \|u\|$.*

Démonstration : (i) On obtient $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$, et donc, si u est hermitien, $u = 0$. Pour le cas général, il suffit d'écrire $u = v + iw$, avec v, w hermitiens.

(ii) Ça donne $u - u^* = 0$.

(iii) Le spectre est en plus inclus dans $\mathbb{R}^+$.

(iv) C'est parce que $\varrho(u) = \|u\|$ quand u est normal (remarque 8).

$\square$

Remarque 13
Par Krein-Milman, le théorème reste valable si on remplace partout « état » par « état pur », et (i)-(iii) sont obtenus facilement. Le (iv) résulte de considérations sur les faces :

Définition 12
Une face *d'un convexe compact K, c'est un sous-ensemble convexe F tel que, si $\lambda a + (1-\lambda)b \in F$ et $0 < \lambda < 1$, alors $a, b \in F$.*

En tant que convexe compact, une face F de K vérifie Krein-Milman, donc a des points extrémaux. Il est immédiat que ces points extrémaux sont encore extrémaux dans K.

Proposition 18
Si φ est une fonction affine continue de K dans $\mathbb{C}$, et si z est un élément de l'image de φ de module maximum, alors l'ensemble $F = \varphi^{-1}(z)$ est une face fermée.

Démonstration : F est un convexe fermé. Si $k = \lambda k' + (1-\lambda)k''$ avec $0 < \lambda < 1$, et si $\varphi(k) = z$, alors $|\varphi(k')| \leq |\varphi(k)|$ (ou $|\varphi(k'')| \leq |\varphi(k)|$), mais alors
$|\varphi(k')| = |\varphi(k)| = |\varphi(k'')|$. $\square$

Si $\rho(u) = z$ avec $|z| = \|u\|$, on applique la proposition à la fonction $\rho \mapsto \rho(u)$, et on en déduit que $\rho(u) = z$ sur une face fermée non-vide, et donc que $\rho_0(u) = z$ pour un état pur ρ_0.

En général un état, pur ou non, induit un espace de Hilbert, en effet, $\langle u \mid v\rangle := \rho(v^*u)$ définit une forme hermitienne sur $\mathcal{C}$. Cauchy-Schwarz nous donne alors l'inégalité :

$$|\rho(v^*u)|^2 \leq \rho(u^*u)\rho(v^*v) \tag{30}$$

4.3 Algèbres commutatives

Théorème 12
Toute algèbre stellaire commutative est isomorphe à $\mathcal{C}(X)$ pour un X compact approprié.

Démonstration : C'est presque de l'*abstract nonsense*, il suffit de prendre pour X l'ensemble des états purs, avec une difficulté, la frontière extrême d'un convexe compact n'est pas toujours fermée, donc remettons cette difficulté à plus tard. Il est clair qu'on peut associer à u la fonction $\rho \mapsto \rho(u)$: c'est une isométrie d'après ce qui précède et même un morphisme d'algèbres par le théorème 13 qui suit. Donc $\mathcal{C}$ est isomorphe à un sous-espace (fermé) de $\mathcal{C}(X)$. Ce sous-espace sépare les points (point (i) de la remarque 13), est clos par somme, produit, et conjugaison... on conclut par Stone-Weierstraß(théorème 22), que le sous-espace, c'est *tout* $\mathcal{C}(X)$.

Je suis allé très vite, car cette manipulation est extrêmement familière ; Bourbaki fait justement (et perfidement, vous voyez qui il vise, des gens qui l'ont d'ailleurs amplement mérité) remarquer que ce n'était point le cas du temps de Gel'fand. $\square$

La démonstration réclame la clôture de la frontière extrême. Elle résulte du :

Théorème 13
Les états purs d'une algèbre stellaire commutative $\mathcal{C}$ sont exactement les caractères *de $\mathcal{C}$, i.e., ceux qui satisfont $\rho(uv) = \rho(u)\rho(v)$. C'est un ensemble clos, donc compact.*

Démonstration : Si ρ est extrémal et si $0 \leq v \leq I$, on peut considérer $\rho'(u) := \rho(uv)$, qui est une fonctionnelle positive $\leq \rho$. On peut considérer $\rho''(u) := \rho(u(1-v))$, qui en est une autre, et on écrira $\rho = \rho(v).(1/\rho(v)\rho') + (1-\rho(v))(1/(1-\rho(v).\rho'')$, ce qui fait que ρ est une combinaison convexe, ce qui force $\rho = 1/\rho(v).\rho'$, ou encore, $\rho(uv) = \rho(u)\rho(v)$, ce qui s'étend par bilinarité à tous les v. Il faut faire un peu attention à $\rho(v) = 0$, mais alors $\rho' = 0$.

Réciproquement, tout caractère est borné et vérifie $\|\rho\| = \rho(1)$, donc est un état. Si $\rho = \lambda(\rho') + (1-\lambda)\rho''$ avec $0 < \lambda < 1$, et u hermitien, on a $\rho'(u)^2 \leq \rho'(u)^2$ par Cauchy-Schwarz (30), de même pour ρ''. On écrit $0 = \rho(u^2) - \rho(u)^2 =$
$\lambda\rho'(u^2) + (1-\lambda)\rho'' - (u^2) - (\lambda\rho'(u) + (1-\lambda)\rho''(u) \geq \lambda(1-\lambda)(\rho'(u) - \rho''(u))^2$, ce qui fait que ρ', ρ'' coincident sur tous les hermitiens et sont donc identiques. □

4.4 Le théorème GNS

Alias Gel'fand-Neumark-Segal, ce théorème permet de représenter toute algèbre stellaire comme une sous-algèbre d'un $\mathcal{B}(\mathbb{H})$. Je donne juste une idée de la méthode.

(i) Etant donné un état ρ, on peut considérer l'espace $\mathcal{C}$, muni de la forme hermitienne $\langle u \mid v\rangle := \rho(v^*u)$, comme un espace préhilbertien. Appelons $\mathbb{H}_\rho$ le séparé complété de $\mathcal{C}$. Comme la norme d'espace préhilbertien est inférieure à la norme originale, l'espace a seulement besoin d'être séparé, autrement dit, $\mathbb{H}_\rho$ est le quotient de $\mathcal{C}$ par l'idéal à gauche fermé $\mathcal{L}_\rho = \{u \in \mathcal{C} \,; \rho(u^*u) = 0\}$.

(ii) La représentation π_ρ associée à ρ est définie par $\pi_\rho(u)(v + \mathcal{L}_\rho) := uv + \mathcal{L}_\rho$. $u \mapsto \pi_\rho(u)$ est un morphisme d'algèbres stellaires de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{B}(\mathcal{L}_\rho)$. Tout se ramène à $\|\pi_\rho(u)(v + \mathcal{L}_\rho)\|^2 = \rho(v^*u^*uv) \leq \rho(v^* \cdot \|u\|^2 I \cdot v) \leq \|u\|^2\langle v \mid v\rangle$.

(iii) Cette représentation est *cyclique*. Cela veut dire qu'il y a un vecteur x_ρ, tel que les $\pi_\rho(u)(x_\rho)$ soient denses dans $\mathcal{L}_\rho$. En fait :

$$\rho(u) = \langle \pi_\rho(u)(x_\rho) \mid x_\rho\rangle \tag{31}$$

Bien entendu, le vecteur cyclique x_ρ naturel est la classe de l'identité, $I + \mathcal{L}_\rho$, et l'équation (31) se ramène pour l'essentiel à $\langle \pi_\rho(u)(x_\rho) \mid x_\rho\rangle = \rho(I^*uI) = \rho(u)$.

(iv) Ces représentations ne sont pas fidèles, i.e., isométriques. Mais on peut sommer des représentations, c'est à dire faire agir $\mathcal{C}$ sur des sommes directes. Si on prend la somme directe de tous les $\mathbb{H}_\rho$ (il suffit de se restreindre aux états purs), on obtient une représentation fidèle, en effet, pour u normal, il y a un ρ tel que $\|\pi_\rho(u)\| = \|u\|$, et on passe tout de suite au cas général par la technique u^*u.

En résumé, nous avons prouvé, du moins dans les grandes lignes, le célèbre théorème :

Théorème 14
Tout algèbre stellaire est isomorphe à une sous-algèbre d'un $\mathcal{B}(\mathbb{H})$.

5 La trace

5.1 Opérateurs compacts

Définition 13

Un opérateur $u \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ est compact *quand l'image par u de la boule unité de $\mathbb{H}$ est compacte au sens de la topologie de la norme.*

Proposition 19

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *u est compact ;*

(ii) *u est continue comme fonction de la boule unité de $\mathbb{H}$ (avec la topologie faible) dans $\mathbb{H}$ (avec la topologie de la norme) ;*

(iii) *Si une suite (x_n) converge faiblement vers x, alors $(u(x_n))$ converge en norme vers $u(x)$;*

(iv) *Toute suite bornée (x_n) de $\mathbb{H}$ a une sous-suite $(x_{n(k)})$ telle que $(u(x_{n(k)}))$ converge en norme ;*

(v) *L'image par u de la boule unité de $\mathbb{H}$ est précompacte.*

Démonstration : **(i) $\to$ (ii) :** u est continue si on met la topologie faible à l'arrivée, i.e., sur l'image de la boule ; mais cet espace était déjà compact par rapport à la topologie de la norme, et donc (théorème 21) les deux topologies coïncident.

(ii) $\to$ (iii) : la partie non-triviale, c'est que la suite (x_n) est bornée en norme : on utilise la borne uniforme de (proposition 5) ;

(iii) $\to$ (iv) : immédiat ;

(iv) $\to$ (v) : immédiat, car il s'agit de la compacité d'un espace métrique ;

(v) $\to$ (i) : car l'image de la boule unité est fermée en norme, proposition 4.

□

Proposition 20

(i) *Les opérateurs compacts forment un idéal bilatère fermé pour la norme ;*

(ii) *u est compact ssi $|u|$ l'est ; si u est compact, u^* l'est ;*

(iii) *Si f est une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que $f(0) = 0$, et si u est compact, alors $f(u)$ est compact ;*

(iv) *Si $0 \leq u \leq v$ et v est compact, alors u est compact.*

Démonstration : (i) À peu près évident.

(ii) On utilise la décomposition polaire : $u = \iota|u|$, $|u| = \iota^* u$, $u^* = \iota^* u \iota^*$ et le fait que les compacts forment un idéal bilatère.

(iii) f peut être approximée par des polynomes à coefficient constant nul. Pour un tel polynôme, $P(u) = uP'(u)$ est compact, et donc $f(u)$ est compact comme limite en norme d'opérateurs compacts.

(iv) Alors $\sqrt{v}$ est compact par (iii). D'autre part
$\|\sqrt{u}(x)\|^2 = \langle u(x) \mid x\rangle \leq \langle v(x) \mid x\rangle \leq \|\sqrt{v}(x)\|^2$. On en déduit que $\sqrt{u}$ est compact par l'équivalent (ii) de la proposition 19, et son carré u est encore compact.

□

Il est facile de voir qu'un projecteur orthogonal est compact exactement quand il est de rang fini, car si (x_n) énumère un système orthonormal dans l'image de π, $\pi(x_n) = x_n$ n'a pas de sous-suite convergente.

Si $0 \neq \lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et si u est compact, alors le plus grand projecteur E tel que $\lambda E \leq u$, noté E_λ, est forcément de rang fini, puisque λE_λ est compact. Posons, pour $n \geq 0$:

$$\lambda_n = \sup\{\lambda\,; \dim(E_\lambda) > n\} \tag{32}$$

On voit que la suite (λ_n) est décroissante au sens large : $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots$, et énumère le spectre de u, avec répétitions, et omission possible de la valeur 0. Enfin, au cas où la suite est infinie, elle tend vers 0. En fait, si on remplace la suite par une suite strictement décroissante, énumérant la partie non-nulle du spectre sans répétitions, soit (μ_n), on voit que $u = \mu_0 E_{\mu_0} + \mu_1(E_{\mu_1} - E_{\mu_0}) + \mu_2(E_{\mu_2} - E_{\mu_1}) + \ldots$, la somme infinie étant prise au sens de la convergence en norme, et la dimension des espaces E_{μ_0}, $E_{\mu_1} - E_{\mu_0}$, $E_{\mu_2} - E_{\mu_1}$,... correspond à la multiplicité de $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots$ dans la suite des λ_n. En résumé :

THÉORÈME 15
Un opérateur positif est compact ssi il est diagonalisable, et si la suite (λ_n) de ses valeurs propres non nulles (avec répétitions) est finie ou tend vers 0.

COROLLAIRE 15.1
Un opérateur est compact ssi il est limite d'opérateurs de rang fini, i.e., l'idéal bilatère des opérateurs compact est la clôture de l'idéal bilatère des opérateurs de rang fini.

PROPOSITION 21
Si $\mathbb{H}$ est de dimension finie, et si $0 \leq u \leq v$ sont des hermitiens positifs de valeurs propres respectives $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_N$, $\mu_1 \leq \ldots \mu_N$, alors pour tout n $\lambda_n \leq \mu_n$.

Démonstration : Évident à partir de $\lambda_n = \inf\{\|EuE\|; \dim E = n\}$ et de $\mu_n = \inf\{\|EvE\|; \dim E = n\}$ (lemme suivant). □

LEMME 21.1
$\lambda_n = \inf\{\|EuE\|; \dim E = n\}$

Démonstration : Ecrivons $\mathcal{H} = \mathcal{K}_i \oplus \mathcal{K}'_i$, où $\mathcal{K}_i$ est l'espace engendré par des vecteurs propres $x_1, \ldots, x_i$ correspondant à $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$; $\mathcal{K}_n$ est un E tel que $\|EuE\| = \lambda_n$. Réciproquement, étant donné E de dimension n, la fonction qui projette E sur $\mathcal{K}_{n-1}$ n'est pas injective et donc un élément non-nul $x \in E$ appartient à $\mathcal{K}'_{n-1}$; mais alors, $\|u(x)\| \geq \lambda_n \|x\|$, et donc $\|EuE\| \geq \lambda_n$. □

COROLLAIRE 21.1
Si (λ_n) *et* (μ_n) *sont les énumérations des spectres des opérateurs compacts positifs* $0 \leq u \leq v$ *par ordre décroissant et avec répétitions, alors pour tout* n $\lambda_n \leq \mu_n$*.*

Les opérateurs compacts correspondent à l'idée de suite tendant vers 0. On peut raffiner cette idée en celle de suite de carré sommable (opérateurs de Hilbert-Schmidt) ou encore de suite sommable (opérateurs à trace).

5.2 Opérateurs de Hilbert-Schmidt

PROPOSITION 22
Si $(\mathbf{e}_m), (\mathbf{f}_n)$ *sont des bases orthonormales de* $\mathbb{H}, \mathbb{K}$*, on définit, pour* $u \in \mathcal{B}(\mathbb{H}, K)$ *le nombre* $N(u) \in [0, \infty]$ *par :*

$$N(u) := \sum_m \sum_n |\langle u(\mathbf{e}_m) \mid \mathbf{f}_n \rangle|^2 \tag{33}$$

Le nombre $N(u)$ *ne dépend pas du choix des bases de* $\mathbb{H}$ *et* $\mathbb{K}$*.*

Démonstration : On réduit le problème progressivement :

(i) Il suffit de montrer que la valeur diminue toujours dans un changement de base.

(ii) Un changement de base s'exprime par composition avec des unitaires : $N(aub) \leq N(u)$ quand a, b sont unitaires, ou plus généralement, de norme 1.

(iii) On décompose le travail en deux $N(au) \leq N(u)$, $N(ub) \leq N(u)$, les deux étapes se déduisent l'une de l'autre au moyen de l'adjonction.

(iv) $N(au) \leq N(u)$ se réduit, en fixant $\mathbf{f}_n$ et en introduisant $y = u^*(\mathbf{f}_n)$ à l'inégalité :

$$\sum_m |\langle a(\mathbf{e}_m) \mid y \rangle|^2 \leq \sum_m |\langle \mathbf{e}_m \mid y \rangle|^2 \tag{34}$$

soit $\|a^*(y)\|^2 \leq \|y\|^2$ (formule de Parseval, equation (12)).

□

On a en fait établi, outre l'indépendance de $N(u)$ du choix des bases, les formules :

$$N(aub) \leq \|a\|^2 \|b\|^2 N(u) \tag{35}$$

$$N(u) := \sum_m \|u(\mathbf{e}_m)\|^2 = \sum_m \langle u^* u(\mathbf{e}_m) \mid \mathbf{e}_m \rangle \tag{36}$$

DÉFINITION 14
$u \in \mathcal{B}(\mathbb{H}, \mathbb{K})$ *est dit* Hilbert-Schmidt *(ou encore HS (!)), quand* $N(u)$ *est bornée. La quantité* $\|u\|_2 := \sqrt{N(u)}$ *est alors la* norme HS *de* u*.*

THÉORÈME 16

(i) *L'ensemble des opérateurs HS est un idéal bilatère auto-adjoint de* $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ *;*

(ii) u *est HS ssi* $|u|$ *l'est ;*

(iii) *Si* $0 \leq u \leq v$ *et* v *est HS, alors* u *l'est ;*

(iv) *Tout opérateur HS est compact ;*

(v) *Un hermitien positif compact est HS ssi la suite associée* (λ_n) *est de carré sommable.*

Démonstration : (i) Cela repose pour l'essentiel sur le fait que $\|\cdot\|_2$ est une norme telle que $\|u^*\|_2 = \|u\|_2$ et $\|aub\|_2 \leq \|a\|\|u\|_2\|b\|$.

(ii) Immédiat (décomposition polaire et idéal).

(iii) Parce que $N(u) \leq N(v)$, ce qui est immédiat sur l'équation (33).

(iv) On se ramène au cas hermitien positif à l'aide de (ii) et on observe que les projecteurs E_λ (voir ce qui précède le théorème 15), qui sont HS par (iii) sont de rang fini : un projecteur de rang infini n'est pas HS, car (33) diverge. On ce qui nous donne une suite de valeurs propres $(\lambda_n)\ldots$ et par le théorème 15 u est compact.

(v) Dans une base pour laquelle u est diagonale, (36) s'écrit $N(u) = \sum_n \lambda_n^2$.

□

Remarque 14
L'idéal des HS n'est pas fermé en norme, puisqu'il contient les opérateurs de rang fini et qu'il y a des compacts non HS. *Idem* pour l'idéal des opérateurs à trace.

5.3 Produits tensoriels

Nous allons donner l'autre définition du produit tensoriel.

Définition 15
Si $\mathbb{H}, \mathbb{K}$ *sont des espaces de Hilbert, on définit le produit tensoriel* $\mathbb{H} \otimes \mathbb{K}$ *comme l'espace des fonctions*[10] *HS de* $\mathbb{H}^\sharp$ *dans* $\mathbb{K}$*, muni de la forme :*

$$\langle u \mid v \rangle := \sum_m \langle u(\mathbf{e}_m) \mid v(\mathbf{e}_m) \rangle \tag{37}$$

Il est facile de montrer que la somme de l'équation (37) converge, car bornée par $\|u\|_2\|v\|_2$, en fait $\langle u \mid u \rangle = N(u)$ par (36). C'est un espace de Hilbert.

Le lien avec la définition de la section 2.2 se fait ainsi :

(i) Si $x \in \mathbb{H}, y \in \mathbb{K}$, on peut considérer le HS $x \otimes y$ défini par $(x \otimes y)(z) := \langle x \mid z \rangle y$.

(ii) Réciproquement, si h est un élément du produit tensoriel au sens de la section 2.2, on lui associe un HS φ de $\mathbb{H}^\sharp$ dans $\mathbb{K}$: $\langle \varphi(z) \mid y' \rangle := \langle h \mid z \otimes y' \rangle$.

Il ne reste qu'à démontrer que ces deux transformations sont des isométries réciproques, ce qui est sans surprise.

On termine dans l'*abstract nonsense* en remarquant que la formule (33) peut s'étendre au contexte multilinéaire, par exemple dans le cas d'un opérateur bilinéaire borné de $\mathbb{H} \times \mathbb{K}$ dans $\mathbb{L}$, il suffit de faire une triple sommation. Ça permet de définir le

[10] Il s'agit de fonctions « antilinéaires » de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{K}$.

produit tensoriel ternaire, et *modulo* l'utilisation de l'adjoint, ça permet aussi de voir que le produit tensoriel résoud un problème universel par rapport aux applications bilinéaires HS. Mais on est quand même pas tout à fait dans le cadre catégorique standard, puisqu'on ne pas faire une catégorie de morphismes HS, l'identité n'étant HS qu'en dimension finie. C'est en tout cas suffisant pour donner une définition naturelle du produit tensoriel de deux opérateurs bornés, par exemple

DÉFINITION 16
Si $u \in \mathcal{B}(\mathbb{H}), v \in \mathcal{B}(\mathbb{K})$, alors $u \otimes v \in \mathcal{B}(\mathbb{H} \otimes \mathbb{K})$ est défini par :

$$(u \otimes v)(f) := vfu^\sharp \tag{38}$$

5.4 Opérateurs à trace

PROPOSITION 23
Si u est positif, alors la quantité $\mathrm{tr}(u) \in [0, \infty]$:

$$\mathrm{tr}(u) := \sum_n \langle u(\mathbf{e}_n) \mid \mathbf{e}_n \rangle \tag{39}$$

ne dépend pas du choix de la base.

Démonstration : En effet, $\mathrm{tr}(u) = N(\sqrt{u})$ par l'équation (36). □

DÉFINITION 17
On appelle opérateur à trace *un opérateur u tel que $\|u\|_1 := \mathrm{tr}(|u|)$ soit fini.*

PROPOSITION 24
Les condition suivantes sont équivalentes

(i) *u est un hermitien positif à trace ;*

(ii) *Pour tout opérateur borné a, la série $\sum_n |\langle u(\mathbf{e}_n) \mid a(\mathbf{e}_n)\rangle|$ converge.*

auquel cas $\|u\|_1 = \sup\{\sum_n |\langle u(\mathbf{e}_n) \mid a(\mathbf{e}_n)\rangle| \ ; \|a\| \leq 1\}$.

Démonstration : **(i) → (ii) :** Si u est à trace et $\|a\| \leq 1$, $\sqrt{u}$ est HS et aussi $\sqrt{u}a$, avec $\|\sqrt{u}\|_2, \|\sqrt{u}a\|_2 \leq \sqrt{\|u\|_1}$, et alors la série $\sum_n \langle u(\mathbf{e}_n) \mid a(\mathbf{e}_n)\rangle$ (qui correspond au produit scalaire $\langle \sqrt{u} \mid \sqrt{u}a\rangle$ dans $\mathbb{H}^\sharp \otimes \mathbb{H}$) converge, en fait $\sum_n |\langle u(\mathbf{e}_n) \mid a(\mathbf{e}_n)\rangle| \leq \|\sqrt{u}\|_2.\|\sqrt{u}a\|_2 \leq \|u\|_1$ par Cauchy-Schwarz.

(ii) → (i) : immédiat, prendre $a = I$.

□

THÉORÈME 17

(i) *L'ensemble des opérateurs à trace forme un idéal bilatère auto-adjoint de $\mathcal{B}(\mathbb{H})$; de plus $\|u+v\|_1 \leq \|u\|_1 + \|v\|_1$, en particulier $\|\cdot\|_1$ est une norme sur cet idéal.*

(ii) *Si $0 \leq u \leq v$ sont positifs et v est à trace, alors u l'est ;*

(iii) *Tout opérateur à trace est HS (et donc compact) ; en fait l'idéal des opérateurs à trace est le carré de l'idéal des opérateurs HS ;*

(iv) *Un hermitien positif compact est à trace ssi la suite associée* (λ_n) *est sommable.*

Démonstration : (i) Immédiat à partir du (ii) de la proposition 24.

(ii) Alors $0 \leq \sqrt{u} \leq \sqrt{v}$, et on applique le (iii) du théorème 16.

(iii) En fait $u = \iota(\sqrt{|u|})^2$ exprime un opérateur à trace comme un multiple du carré d'un opérateur HS.

(iv) Tout simplement parce que la trace de u s'exprime dans une base où u est diagonale comme la somme des λ_n.

□

Théorème 18

La fonction trace, *qui associe à tout opérateur u à trace la quantité :*

$$\mathrm{tr}(u) := \sum_n \langle u(\mathbf{e}_n) \mid \mathbf{e}_n \rangle \tag{40}$$

vérifie les propriétés suivantes :

Linéaire : $\mathrm{tr}(u+v) = \mathrm{tr}(u) + \mathrm{tr}(v)$, $\mathrm{tr}(\lambda u) = \lambda \mathrm{tr}(u)$ *;*

Hermitienne : $\mathrm{tr}(u^*) = \overline{\mathrm{tr}(u)}$ *;*

Bornée : $\mathrm{tr}(u) \leq \|u\|_1$ *;*

Positive : $\mathrm{tr}(u) \geq 0$ *pour u positive ;*

Fidèle : $\mathrm{tr}(u) > 0$ *pour u positive et $u \neq 0$;*

Cyclique : *Si u est à trace et a est bornée, alors* $\mathrm{tr}(ua) = \mathrm{tr}(au)$.

Démonstration : On a fait à peu près tout ce qu'il fallait pour que la démonstration soit immédiate, par exemple la proposition 24 montre que le produit au reste à trace quand u l'est. On peut s'attarder un instant sur la cyclicité : si a est un unitaire, alors $ua = a^*(au)a$, i.e., ua se comporte comme au, *modulo* un changement de base, ce qui montre l'égalité dans ce cas. En général, on écrira a comme combinaison de quatre unitaires, et on concluera. □

On peut mettre en dualité les opérateurs à trace et les opérateurs bornés, par :

$$\langle u \mid a \rangle := \mathrm{tr}(a^* u) \tag{41}$$

On voit que :

$$\begin{aligned} |\langle u \mid a \rangle| &\leq \|u\|_1 \|a\| && (42) \\ \|u\|_1 &= \sup\{|\langle u \mid a \rangle| \, ; \|a\| \leq 1\} && (43) \\ \|a\| &= \sup\{|\langle u \mid a \rangle| \, ; \|u\|_1 \leq 1\} && (44) \end{aligned}$$

Par exemple, on établit (44) en prenant $u := yx^*$, avec $yx^*(z) := \langle z \mid x \rangle y$:
$\langle yx^* \mid a \rangle = \mathrm{tr}(a^* yx^*) = \mathrm{tr}(yx^* a^*) = \mathrm{tr}(y(a(x)^*)) = \langle y \mid a(x) \rangle$.

La dualité opérateurs à trace/opérateurs bornés ressemble à la dualité ℓ^1/ℓ^∞.

A Résultats standards

Quelques « classiques » de la topologie, de la théorie des espaces de Banach.

A.1 Espaces compacts

Théorème 19 (de Tychonov)
Le produit d'une famille quelconque d'espaces compacts est compact.

Corollaire 19.1
Beaucoup d'espaces, munis de la convergence simple, sont compacts, ainsi :

(i) *La boule unité de $\mathbb{H}$ est faiblement compacte ;*

(ii) *La boule unité de $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ est faiblement compacte ;*

(iii) *L'espace des états d'une algèbre stellaire est faiblement compact.*

Sur un convexe compact, le standard est :

Théorème 20 (de Krein-Milman)
Tout convexe compact est l'enveloppe convexe fermée de sa frontière extrême, i.e., de l'ensemble de ses points extrêmaux.

Un résultat souvent utilisé est le suivant :

Théorème 21
Il n'y a pas de topologie séparée *moins fine qu'une topologie compacte.*

Démonstration : Si X, X' dénotent le même ensemble muni respectivement d'une topologie compacte et d'une topologie séparée plus faible, alors la fonction identique de X dans X' est continue et envoie donc tout compact, i.e., tout fermé, sur un compact. En d'autres termes son inverse est continue et les deux topologies coïncident. □

Sans oublier le classique :

Théorème 22 (de Stone-Weierstrass)
Si X est compact, si $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(X)$ est une sous-algèbre qui sépare les points :
$\forall x, y \in X (x \neq y \Rightarrow \exists f \in \mathcal{A} f(x) \neq f(y)$ *et stable par conjugaison :* $f \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{f} \in \mathcal{A}$*,*
alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(X)$.

A.2 Théorème de Baire

Théorème 23 (de Baire)
Dans un espace métrique complet[11], l'union d'une famille dénombrable de fermés d'intérieurs vides (ce qu'on appelle un ensemble maigre*) est d'intérieur vide.*

Parmi les conséquences :

[11] Ou un espace localement compact.

Théorème 24 (de l'application ouverte)
Une application linéaire bornée surjective *d'un Banach E dans un Banach F est* ouverte, *i.e., l'image de la boule unité de E contient un homothétique non-nul de la boule unité de F.*

Corollaire 24.1
Si de plus l'application est injective, son inverse est borné.

Théorème 25 (du graphe fermé)
Une application linéaire u du Banach E dans le Banach F est continue ssi son graphe est fermé.

Démonstration : Si le graphe G est fermé, c'est un espace de Banach, et la première projection est une bijection *bornée* de G sur E, dont l'inverse est donc borné... □

A.3 Hahn-Banach

C'est un théorème qui prend plusieurs formes, on en donne juste une

Théorème 26 (d'extension)
Une forme linéaire bornée sur un sous-espace E' du Banach E se prolonge à tout l'espace en une forme bornée de même norme.

Attention, il s'agit d'une *forme*, i.e., d'une fonction linéaire à valeurs dans $\mathbb{C}$.

B Dimension finie

B.1 La diagonalisation

Références

[1] R. V. Kadison and J. R. Ringrose. **Fundamentals of the theory of operator algebras, vol. I**. Pure and applied mathematics. Academic Press, 1983. (*vol. III contains the solutions of exercises of vol. I*).