Chapitre 1

Espace I. Topos.

« C'est le thème du topos qui est ce « lit » où
viennent s'épouser la géométrie et l'algèbre,
la topologie et l'arithmétique, la logique mathématique
et la théorie des catégories, le monde du continu
et celui des structures « discontinues » ou « discrètes ».
Il est ce que j'ai conçu de plus vaste, pour saisir avec finesse,
par un même langage riche en résonnances géométriques,
une « essence » commune à des situations
des plus éloignées les unes des autres. »

A. Grothendieck, *Récoltes et Semailles*, p. 59.

Les deux premiers chapitres évoquent deux points de vue mathématiques les plus avancés et les plus profonds sur la notion commune d'*espace* : à savoir, la géométrie des topos et la géométrie non commutative. Chacune représente un aboutissement de la très longue maturation de la pensée mathématique autour de la problématique de la « localité » et des rapports du « local » au « global ».

Nous commençons par la géométrie des topos, initiée par Alexander Grothendieck dans les années 1960, vaste extension de la topologie générale. D'inspiration algébro-géométrique, la notion de topos intègre et fusionne les notions fondamentales de surface de Riemann et de faisceau[1], notions que nous déclinerons tour à tour. Après une introduction très condensée au point de vue catégorique, nous indiquerons ensuite le chemin mathématique qui relie « topos » et « logos ».

[1]pour le lecteur pressé de lire la « morale de l'histoire », signalons d'emblée qu'elle se trouve aux paragraphes 1.4.2 et 1.6.1.

1.1 Topologie générale.

Ce qu'on appelle aujourd'hui Topologie générale est l'étude mathématique *qualitative* des « lieux » et des « relations spatiales » : elle théorise les notions de proximité, frontière, localité, continuité, *etc*... et leurs liens mutuels.

On peut sans doute faire remonter le projet de la topologie (analysis situs, en latin) à Leibniz, mais c'est Riemann qui en jeta les bases dans sa célèbre dissertation, et la Topologie générale fut ensuite axiomatisée par Hausdorff (1914).

Topologie désigne à la fois un chapitre des Mathématiques et un objet mathématique dont s'occupe cette discipline.

1.1.1 Ce que c'est.

Lisons donc la définition d'une topologie dans le « texte canonique » : Bourbaki, *Topologie générale*, chapitre 1[2].

> « DÉFINITION 1 . *On appelle structure topologique (*ou plus brièvement *topologie) sur un ensemble X une structure constituée par la donnée d'un ensemble $\mathfrak{O}$ de parties de X possédant les propriétés suivantes :*
>
> (O_I) *Toute réunion d'ensembles de $\mathfrak{O}$ est un ensemble de $\mathfrak{O}$.*
>
> (O_{II}) *Toute intersection finie d'ensembles de $\mathfrak{O}$ est un ensemble de $\mathfrak{O}$.*
>
> *Les ensembles de $\mathfrak{O}$ sont appelés ensembles ouverts.*
>
> DÉFINITION 2 . *On appelle espace topologique un ensemble muni d'une structure topologique.*
>
> Les éléments d'un espace topologique sont appelés *points*. [...] L'axiome (O_I) implique en particulier que la réunion de la partie vide de $\mathfrak{O}$, c'est-à-dire *l'ensemble vide*, appartient à $\mathfrak{O}$. L'axiome (O_{II}) implique en particulier que l'intersection de la partie vide de $\mathfrak{O}$, c'est-à-dire de *l'ensemble X*, appartient à $\mathfrak{O}$. »[3].

Écoutons à présent le commentaire du poète mathématicien J. Roubaud[4] :

> J'ai lu et relu d'innombrables fois ces définitions, toute cette première page et les pages suivantes, sans rien comprendre, littéralement sans rien comprendre. Mais je n'ai pris que peu à peu conscience du fait que la difficulté essentielle venait non d'une extrême impénétrabilité du sujet (ce n'est certes pas le cas) ni d'une incapacité congénitale de ma part à le comprendre (heureusement), mais de ce que je ne savais pas lire.

---

[2]Hermann, 1971.

[3]ce commentaire de Bourbaki sur la définition 1, qui semble de prime abord assez obscur, explique que, comme conséquence des axiomes, dans tout espace topologique X, le tout X et la partie vide $\emptyset$ sont des ouverts : pour Bourbaki (bon barbier selon Ockham), une réunion vide de parties (de X) est la partie vide, une intersection vide de parties est la partie pleine. Cela se justifie pleinement du point de vue « catégorique », mais guère du point de vue pédagogique, et bien d'autres exposés préfèrent être clairs et pécher par redondance en ajoutant aux axiomes (O_I) et (O_{II}) l'axiome suivant lequel X et $\emptyset$ sont des ouverts.

[4]*Mathématique : (récit)*, Seuil 1997, p. 159-160.

> [...] Le mode de lecture romanesque, l'extrême rapidité qui m'était coutumière depuis l'enfance pour la dévoration des romans, ne pouvait à l'évidence pas me servir dans ces circonstances nouvelles.
>
> [...] Restait la poésie. [...] (à la différence de ce qui se passait pour la prose) je relisais la poésie sans cesse jusqu'au point d'une réappréhension de tous ses éléments au présent, dans la simultanéité du temps intérieur. [...] Je me mis donc, et sans réfléchir, à lire les paragraphes du chapitre 1 du livre de Topologie comme s'il s'agissait d'une séquence de poèmes.

Qu'est-ce donc que comprendre une notion mathématique ?

C'est plus subtil, apparemment que comprendre une démonstration. Comprendre littéralement - connaître la signification des termes employés dans la définition formelle - n'est pas suffisant : il faut un complément heuristique. Il ne suffit pas de savoir lire. Il faut disposer d'exemples significatifs pour donner corps à la définition, et éventuellement de contre-exemples pour la baliser. Il faut par ailleurs saisir la motivation et surtout l'usage de la notion, ce qui relève tant de la connaissance de l'histoire de la discipline que de la pratique. Enfin et surtout, il faut voir « fonctionner » la définition dans divers contextes.

Revenant aux espaces topologiques, l'exemple de base est la droite réelle $\mathbb{R}$ munie de la topologie dont les ouverts sont les réunions (éventuellement infinies) d'intervalles privés de leurs extrémités ; et plus généralement, l'espace $\mathbb{R}^n$ à n dimensions muni de la topologie dont les ouverts sont les réunions de boules ouvertes[5].

1.1.2 Voisinages.

Un *voisinage* d'un point $x \in X$ est une partie de X contenant un ouvert contenant x.

Si cette notion dérive de celle d'ouvert, on récupère, réciproquement, la notion d'ouvert à partir de celle de voisinage : un ouvert est une partie de X qui est voisinage de chacun de ses points. Ces notions sont ainsi logiquement équivalentes et il est donc possible de définir, de manière équivalente, une topologie par une axiomatique des voisinages. Cette axiomatique consiste en fait à dire que l'ensemble $\mathfrak{V}(x)$ des voisinages d'un point quelconque $x \in X$ forme un *filtre* (à savoir :

(V_I) Toute partie de X qui contient un élément de $\mathfrak{V}(x)$ (c'est-à-dire un voisinage de x) est un élément de $\mathfrak{V}(x)$,

(V_{II}) Toute intersection finie de parties de X qui sont des éléments de $\mathfrak{V}(x)$ est un élément de $\mathfrak{V}(x)$,

(V_{III}) Le vide n'est pas un élément de $\mathfrak{V}(x)$ (en effet x appartient à chacun de ses voisinages),)

en ajoutant que

[5] la boule ouverte de centre x et de rayon r est l'ensemble des points à distance strictement inférieure à r de x.

(V_{IV}) si V est un voisinage de x, il en existe un autre W tel que V soit voisinage de chacun des points de W.

Revenons au problème de la compréhension des notions mathématiques. Il suit de ce que nous en avons dit qu'il s'agit d'un processus progressif - qui peut passer par le malentendu. Il est en tout cas fort utile de se forger une représentation (même fantaisiste) donnant un contenu intuitif à la présentation formelle - sans jamais toutefois confondre celle-ci avec celle-là.

Écoutons l'évocation de Roubaud à propos du filtre des voisinages[6] :

> C'est ici que le mot *filtre*, et l'image qu'aussitôt il évoque vient s'interposer entre la topologie telle qu'elle est [...] et le souvenir que j'en ai gardé.
>
> Cela veut dire qu'il ne m'était pas possible alors, qu'il ne m'est pas possible encore aujourd'hui de ne pas voir ces filtres, et surtout de ne pas les voir comme liés, et même surimprimés à une représentation mentale de ces objets exaspérants qu'étaient les cafés-filtres des cafés.
>
> [...] Je pense tout particulièrement à la lenteur générale de l'écoulement de leur contenu, cette soupe brunâtre qualifiée sans honte de café, qui m'amenait à les saisir, en dépit de toutes mes expériences antérieures, avant l'achèvement du trajet de haut en bas du liquide et par conséquent à me brûler les doigts ; puis à me brûler la langue en essayant de m'en débarrasser trop tôt en les buvant. Je les vois et je vois aussitôt quelque chose comme une icône d'espace topologique, une sorte de grande prairie de « points », chacun placé au-dessous d'une tasse-filtre, son « filtre de voisinages ».
>
> [...] Cette image donnait à l'idée de point une tout autre représentation que celle de la géométrie élémentaire scolaire et elle s'est pour moi entièrement substituée à la première.
>
> Et je ne vous parlerai pas des divins et singuliers ultrafiltres.
>
> [...] Si je m'y attarde un peu, le paysage glisse vers autre chose, vers un support de narration ; il devient un paysage « carrollien », où une licorne vient boire dans les tasses avec une unique paille au-dessus de son unique corne. Elle en fausse la topologie, bien sûr. [...] Tel est le scénario irrémédiablement frivole, mathématiquement irresponsable, dont j'accompagne en pensée l'idée de topologie. [...] On ne commande pas aisément ce qui peuple notre espace intérieur, et ses lointains.

1.1.3 Intérieur et frontière.

L'*intérieur* d'une partie A de X est l'ensemble des points de A dont A est un voisinage. On le note $\overset{o}{A}$.

C'est encore une notion logiquement équivalente à celle d'ouvert : une partie est ouverte si et seulement si elle est son propre intérieur. On peut donc définir une topologie, de manière alternative, par une axiomatique des intérieurs, qui est la suivante [7] :

$$\overset{o}{X} = X, \quad \overset{o}{A} \subset A, \quad (A \overset{o}{\cup} B) = \overset{o}{A} \cup \overset{o}{B}, \quad \overset{oo}{A} = \overset{o}{A}.$$

[6] *op. cit.* pp. 164-165, 199.

[7] C'est cette axiomatique qui est utilisée, par exemple, par A. Badiou, *Logiques des Mondes*, Seuil 2006, ch. VI.

La *frontière* d'une partie A de X est l'ensemble des points de X qui ne sont ni à l'intérieur de A, ni à l'intérieur du complémentaire de A.

Voici la vision « éthologique » de l'intérieur et de la frontière (d'un territoire) que propose le mathématicien R. Thom[8], fondateur d'une théorie topologique de la morphogenèse :

> Si l'on examine les emplois actuels du mot *lieu* en français, on observera qu'un lieu demande toujours un habitant qui en fait sa résidence. [...] De là l'hypothèse que le mot *topos* implique un être humain ou un animal qui séjourne (normalement) en ce lieu.
>
> [...] On peut partir de l'hypothèse (simpliste) qu'Aristote, s'imaginant un être vivant, le dotera d'un territoire. [...] Mais ce domaine aura, dans la pratique, des bornes que l'individu préférera ne pas franchir. De là la notion [...] de limites : les *eschata*.
>
> [...] En fait, selon la conception ici proposée, la théorie des lieux serait liée à un problème central de l'éthologie actuelle : comment un animal (ou un humain) se repère-t-il au sein de son territoire ?

1.1.4 De l'espace topologique au treillis de ses ouverts.

Bien que moins « intuitive » que la notion de voisinage, la notion d'ouvert s'avère souvent techniquement plus utile.

L'ensemble $\mathfrak{O}$ des ouverts d'un espace topologique X est muni d'une structure de *treillis* : c'est un ensemble (partiellement) ordonné[9] (par l'inclusion $\subset$), muni de deux lois de composition associatives $\cap$ et $\cup$ (en général : la borne inférieure et la borne supérieure ; ici, l'intersection et la réunion) qui vérifient la propriété suivante :

pour tous $U, V \in \mathfrak{O},\ U \cap (U \cup V) = U \cup (U \cap V) = U.$

En associant à l'espace topologique $(X, \mathfrak{O})$ le treillis des ouverts $\mathfrak{O}$, il semble donc qu'on oublie les points de X. Or il n'en est rien : sous une condition extrêmement faible de séparation des points - la *sobriété*, toujours vérifiée en pratique[10] - on ne perd rien : *on peut reconstruire l'ensemble X à partir du treillis $\mathfrak{O}$*.

L'idée pour retrouver les points est simple : on identifie un point $x \in X$ au filtre de ses voisinages ouverts.

Ici, comme dans toute la suite, on utilise les symboles « ensemblistes » usuels : $\cap$ pour l'intersection de deux ou plusieurs parties d'un ensemble, $\cup$ pour leur réunion, $X \setminus A$ pour le complémentaire de la partie A dans l'ensemble X, $A \subset X$ pour indiquer que A est une partie de X, $x \in X$ pour indiquer que x est un élément de X (ou, en langage géométrique, que x est un point de l'espace X), $\emptyset$ pour l'ensemble vide.

[8] Aristote topologue, *Revue de Synthèse* (1999), 39-48.

[9] un ordre (partiel) $\leq$ sur un ensemble X est une relation binaire $x \leq y$ entre des éléments de X, qui vérifie les conditions suivantes : $x \leq x,\quad (x \leq y \text{ et } y \leq x) \Rightarrow x = y,\quad (x \leq y \text{ et } y \leq z) \Rightarrow x \leq z.$

[10] la définition technique, que nous donnons pour les lecteurs-mathématiciens qui se sont aventurés dans ce livre, est la suivante : X est sobre si pour tout fermé (*i.e.* complémentaire d'un ouvert) non vide A qui ne s'écrit pas comme réunion propre de deux fermés, il existe un unique point x tel que A soit le plus petit fermé contenant x.

1.1.5 Applications continues.

Une application[11] $f : X \to Y$ entre espaces topologiques est dite *continue* si l'image *inverse* par f de tout ouvert de Y est un ouvert de X ; autrement dit, si pour tout ouvert V de Y, l'ensemble U des points de X que f envoie dans V est un ouvert de X.

Une application continue f induit donc une application f^*, dans l'autre sens, entre le treillis des ouverts de Y et celui des ouverts de X.

Dans le cas particulier où l'espace but Y est $\mathbb{R}$ (la droite rélle) ou $\mathbb{C}$ (le plan complexe)[12] muni de sa topologie naturelle, on dit que f est une *fonction*[13] *continue* (à valeurs réelles ou complexes).

Terminons ce paragraphe en concluant que la topologie générale a réussi à *formaliser les notions de voisinage, frontière, continuité* (et bien d'autres : limites, connexité, compacité, *etc*...) *de manière purement qualitative*, sans faire appel à la notion de distance ou de mesure.

1.2 L'idée de surface de Riemann. Sites.

1.2.1 « Ambiguïtés ».

Tout polynôme, tel que x^2 ou bien $x^3 + x$, définit une fonction continue d'une variable, réelle ou complexe : $x \mapsto x^2, \;\; x \mapsto x^3 + x$.

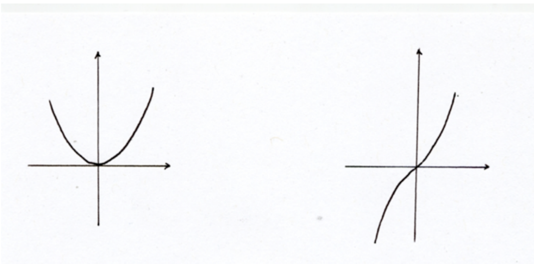

FIG. 1.1 –

La situation est plus délicate pour une fonction algébrique telle que $\sqrt{x}$ ou bien $\sqrt{x^3 + x}$. Elle définit bien une fonction (continue) d'une variable réelle posi-

[11]c'est-à-dire une règle f qui associe à tout élément de X un élément de Y. On la note souvent $x \mapsto f(x)$, x désignant un élément quelconque de X. On dit que f est une *bijection* si tout élément de Y est l'image par f d'un et d'un seul élément de X.

[12]rappelons que les nombres complexes s'écrivent sous la forme $z = x + \sqrt{-1}y$ où x et y sont des nombres réels, et $\sqrt{-1}$ est le nombre « imaginaire » racine carrée de -1. Ainsi, $\mathbb{C}$ s'identifie canoniquement à $\mathbb{R}^2$ (en décomposant tout nombre complexe z en sa partie réelle x et sa partie imaginaire y), ce qui donne la topologie sur $\mathbb{C}$.

Rappelons par ailleurs que le conjugué de z, noté $\bar{z}$, est le nombre complexe $x - \sqrt{-1}y$; le module de z, noté $|z|$, est la racine carrée de $z\bar{z} = x^2 + y^2$.

[13]De manière générale, une *fonction* f sur un ensemble X est une règle qui associe à tout élément de X (ou parfois, selon le contexte, seulement à certains d'entre eux) un nombre réel ou complexe. Cette notion fondamentale en Mathématiques, depuis Euler, formalise l'idée de dépendance d'une quantité par rapport à des quantités variables.

tive. En revanche, elle n'est pas bien définie en tant que fonction d'une variable complexe : si l'on part d'un point x non nul, et qu'on tourne autour de 0, cette fonction variera continûment, mais en revenant à x au bout d'un tour, la valeur ne sera pas la valeur initiale, mais son opposé : $-\sqrt{x}$ ou $-\sqrt{x^3+x}$. On n'obtiendra la valeur initiale qu'au bout d'un second tour.

Il y a donc une ambiguïté (dans notre exemple : un signe) qui empêche de considérer une fonction algébrique comme une fonction (d'une variable complexe) bien définie.

1.2.2 Revêtements à plusieurs feuillets.

C'est Riemann qui a trouvé comment lever l'ambiguïté et donner à ces « fonctions multiformes » f le statut d'authentiques fonctions bien définies[14]. Pour cela, il convient de regarder f comme une fonction définie non pas sur le plan complexe $X = \mathbb{C}$ ou l'un de ses ouverts, mais sur un *revêtement à plusieurs feuillets* de $\mathbb{C}$, appelé *surface de Riemann* de f.

L'exemple de $f(x) = \sqrt{x}$ est trivial à cet égard : on considère une autre copie Y de $\mathbb{C}$ qu'on voit comme revêtement à deux feuillets du plan complexe original X *via* la fonction $y \mapsto x = y^2$ (les deux feuillets se touchent au point de ramification $y = 0$). Alors f devient la fonction identique $y \mapsto y = \sqrt{x}$ sur Y.

Nettement plus subtil est le cas de $f(x) = \sqrt{x^3+x}$. Sa surface de Riemann est encore un revêtement à deux feuillets (qui se touchent en trois points de ramification), qui n'est plus du tout le plan complexe, mais a la forme d'une bouée.

1.2.3 Du treillis des ouverts aux sites de Grothendieck.

Retenons de cela que pour traiter correctement des fonctions algébriques, il convient de remplacer les ouverts de X par des revêtements à plusieurs feuillets d'ouverts de X.

Grothendieck, élargissant cette idée aux *variétés algébriques* de dimension quelconque[15], a proposé de généraliser « catégoriquement » la notion de topologie de la manière suivante, en introduisant les sites.

Un *site* est une catégorie $\mathcal{S}$ muni de la donnée, pour chaque objet U de $\mathcal{S}$, de familles $(U_i \to U)$ (dites couvrantes) de morphismes de but U, stables par changement de base U et composition.

Tout espace topologique classique fournit un site : le treillis de ses ouverts (vu comme catégorie, les morphismes étant donnés par les inclusions[16]), une famille couvrante de but l'ouvert U étant une collection d'ouverts U_i contenus dans U dont la réunion est égale à U.

La première application (et la plus importante, sans doute) de cette généralisation de la notion de topologie est la construction du site étale attaché à une

[14] voir par exemple l'ouvrage classique de H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche*, 1913.

[15] *grosso modo*, une variété algébrique est un espace défini par des équations polynomiales (à plusieurs variables). Aucune familiarité avec cette notion n'est requise ici, les variétés algébriques n'étant mentionnées qu'à l'occasion d'allusions « historiques » sporadiques.

[16] voir plus bas, 1.5.1.

variété algébrique X, dont les objets sont les morphismes $U \to X$ « étales » - variante algébrique de la notion de revêtement non ramifié (cas où les feuillets « ne se touchent pas »)[17].

1.3 Du local au global. Faisceaux.

> Un des traits caractéristiques du développement des Mathématiques depuis le milieu du XIX^{e} siècle, c'est que les recherches mathématiques les plus différentes aient pu être poursuivies à un double point de vue, le point de vue local et le point de vue global. L'étude locale se porte vers l'élément, le plus souvent infinitésimal, de la réalité [...] L'étude globale cherche au contraire à caractériser une totalité indépendamment des éléments qui la composent ; elle s'attaque d'emblée à la structure de l'ensemble [...].
>
> La dualité du point de vue local et du point de vue global s'est tout d'abord présentée aux mathématiciens comme une opposition entre deux modes d'étude, irréductibles l'un à l'autre. Il semblait qu'il fallût choisir entre ces deux conceptions incompatibles [...]

écrivait le philosophe A. Lautman[18] peu d'années avant l'introduction des faisceaux.

1.3.1 Données locales (préfaisceaux).

Les espaces topologiques les plus familiers sont ceux qui sont *localement* isomorphes à des ouverts de $\mathbb{R}^n$. On les appelle *variétés* topologiques de dimension n. Par exemple, la sphère est une variété de dimension deux ; en effet, tout point de la sphère admet une calotte sphérique comme voisinage ouvert, et une telle calotte est isomorphe (par « aplatissement ») à un disque ouvert, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

En général, bien entendu, les variétés ne sont pas *globalement* isomorphes à des ouverts de $\mathbb{R}^n$ (par exemple, la sphère n'est pas isomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^2$). C'est la source des problèmes de passage du local au global (problèmes de recollement, en particulier), qui sont fondamentaux en Géométrie. Un concept universel pour poser et traiter ces problèmes est celui de *faisceau*, introduit par J. Leray vers 1945 et mis au point par H. Cartan.

Pour commencer, on formalise l'idée de données locales par la notion de préfaisceau : un *préfaisceau* $\mathcal{F}$ sur un espace topologique X est une règle qui associe à chaque ouvert U de X un ensemble $\mathcal{F}(U)$ (de « données locales ») et à chaque inclusion d'ouverts $V \subset U$ une application dite de *restriction* $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$. On demande que pour une inclusion composée $W \subset V \subset U$, la restriction correspondante soit la composée des restrictions.

Les éléments de $\mathcal{F}(U)$ s'appellent les *sections* de $\mathcal{F}$ au-dessus de U.

Un morphisme de préfaisceau $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est la donnée, pour tout ouvert U d'une application $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ compatible aux applications de restriction.

[17] Ce site pallie l'absence de théorème des fonctions implicites en Géométrie algébrique.

[18] Essai sur les notions de structure et d'existence en Mathématiques. Réédition Vrin 2006, p. 133.

1.3.2 Recollement de données locales compatibles (faisceaux).

Un préfaisceau $\mathcal{F}$ est un faisceau si toute famille $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ de sections « locales » compatibles (*i.e.* telles que les restrictions de s_i et s_j coïncident dans $\mathcal{F}(U_i \cap U_j)$) se recolle en une unique section « globale » $s \in \mathcal{F}(\bigcup U_i)$ (dont la restriction à U_i est s_i). Ici les U_i sont des ouverts quelconques de X.

Par exemple, si X est un espace topologique, les fonctions continues forment un faisceau sur X. Si X est en outre une variété lisse[19], on dispose du *faisceau tangent* $\mathcal{T}_X$ des champs de vecteurs[20] sur X.

1.3.3 Théorie des obstructions et cohomologie des faisceaux.

L'obstruction à recoller des données locales compatibles s'exprime donc en général par le fait qu'un certain préfaisceau n'est pas un faisceau. Mais on peut souvent aller plus loin, et donner à une telle obstruction le statut d'un objet mathématique.

Voici un cas typique. Considérons un faisceau abélien $\mathcal{F}$ (c'est-à-dire un faisceau de groupes commutatifs), et un sous-faisceau abélien $\mathcal{G}$. On peut alors former le quotient au sens naïf : c'est le préfaisceau qui associe à tout ouvert U le groupe quotient $\mathcal{F}(U)/\mathcal{G}(U)$. En général, ce n'est pas un faisceau : l'obstruction à ce qu'il en soit ainsi peut être vue comme un élément d'un certain « groupe de cohomologie » $H^1(\mathcal{G})$.

La Théorie des obstructions a pour objet de fournir des interprétations « cohomologiques » aux obstructions à diverses constructions mathématiques : recollement, déformation, *etc*... Par exemple, l'obstruction à déformer un variété X peut être vue comme un élément du groupe de cohomologie $H^1(X, \mathcal{T}_X)$ du faisceau tangent.

Dans un second volet, la théorie fournit des critères généraux pour l'annulation de ces groupes de cohomologie - annulation qui entraîne l'absence d'obstruction au problème posé.

Par ailleurs, les obstructions elles-mêmes, une fois interprétées cohomologiquement, posent des problèmes de recollement, qui conduisent à considérer aussi des obstructions supérieures, « vivant » dans des groupes $H^i(U, \mathcal{F}),\ i > 1$. La cohomologie des faisceaux[21], c'est-à-dire la théorie de ces groupes $H^i(U, \mathcal{F})$, est un outil souple et puissant, fondamental en Géométrie analytique ou algébrique.

1.4 Faisceaux sur un site. Topos de Grothendieck.

1.4.1 Ce que c'est.

Comme Grothendieck l'a observé, la définition des préfaisceaux et faisceaux se transpose à tout site $\mathcal{S}$: un préfaisceau sur $\mathcal{S}$ est un foncteur contravariant $\mathcal{F}$

[19] on s'étendra au chapitre 5 sur cette notion.

[20] c'est-à-dire la donnée, pour tout point x de X d'un vecteur tangent $\vec{v}(x)$ qui varie de manière continue et même lisse avec x.

[21] dont les pionniers sont Leray, Borel, Cartan, Serre et Grothendieck.

de $\mathcal{S}$ vers la catégorie des ensembles, et c'est un faisceau si pour toute famille couvrante $(U_i \to U)$, une section globale $s \in \mathcal{F}(U)$ s'identifie à une famille de sections locales $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ « compatibles ».

Dans le cas où $\mathcal{S} = \mathfrak{O}$ est le treillis des ouverts d'un espace topologique X, on retrouve bien la notion de faisceau sur X.

Grothendieck appelle *topos* toute catégorie $\mathcal{X}$ équivalente à la catégorie $\mathcal{F}aisc_{\mathcal{S}}$ des faisceaux sur un site.

Exemples : • le topos ponctuel, *i.e.* la catégorie des faisceaux sur l'espace réduit à un point, n'est autre que la catégorie des ensembles.

• Si G est un groupe, la catégorie des ensembles sur lesquel G opère est un topos.

• Le topos étale d'une variété algébrique X est la catégorie des faisceaux sur le site étale de X.

Chaque topos donne lieu à une théorie de cohomologie. Celle du topos étale, appelée *cohomologie étale* s'est avérée parfaitement adaptée à la Géométrie algébrique et a constitué l'outil principal de démonstration des conjectures de Weil[22].

1.4.2 Espaces et topos.

Des sites différents peuvent donner des topos équivalents. En revanche, le topos des faisceaux sur un espace topologique (sobre) détermine cet espace - nous verrons comment ci-dessous (5.4). C'est en ce sens qu'on peut dire que la notion de topos généralise celle d'espace topologique tout en englobant à la fois l'idée de surface de Riemann et celle de faisceau de Leray[23]. Au bout de ce double mouvement, on a remplacé les espaces topologiques par les topos de faisceaux associés :

$$\text{Espace topologique} \quad (X, \mathfrak{O}) \rightsquigarrow \text{Site} \quad \mathfrak{O} \rightsquigarrow \text{Topos} \quad \mathcal{X} = \mathcal{F}aisc_X.$$

Ce faisant, *on n'a rien perdu, puisqu'on peut reconstruire l'espace topologique*[24] *à partir du topos associé, et on a gagné une structure beaucoup plus souple, puisque les topos permettent essentiellement toutes les opérations familières dans la catégorie des ensembles. En mettant l'accent sur les conditions de recollement, on a ainsi extrait les propriétés intrinsèques de localisation de X en « oubliant » ses points.*

Comme l'écrit Grothendieck[25] :

> Cette notion [de topos] constitue une extension insoupçonnée, pour mieux dire, *une métamorphose de la notion d'espace*. [...] Elle possède les deux

---

[22]ces conjectures arithmético-géométriques qui datent de 1949 concernent le nombre de solutions modulo un nombre premier - ou plus généralement dans un corps fini - d'un système d'équations polynômiales à coefficients entiers. Elles étaient l'horizon des recherches de Grothendieck, et ont finalement été démontrées en partie par lui-même, et puis par Deligne (1973). Voir 8.5 sur la signification et le rôle des conjectures en général.

[23]pour plus de précisions, voir le survol de L. Illusie, What is a topos ?, *Notices of the AMS* 51, 9 (2004), 1060-1062.

[24]supposé sobre.

[25]« Récoltes et Semailles », notes miméographiées (désormais accessibles sur la Toile comme fichier pdf), §56-57.

caractères complémentaires essentiels pour toute généralisation fertile, que voici.

Primo, la nouvelle notion n'est pas trop vaste, en ce sens que dans les nouveaux « espaces », les intuitions et les constructions « géométriques » les plus essentielles, familières pour les bons vieux espaces d'antan, peuvent se transposer de façon plus ou moins évidente. [...]

Et secundo, la nouvelle notion est en même temps assez vaste pour englober une foule de situations qui jusque là, n'étaient pas considérées comme donnant lieu à des intuitions de nature « topologico-géométrique » - aux intuitions, justement, qu'on avait réservées par le passé aux seuls espaces topologiques ordinaires.

1.5 Interlude : catégories, foncteurs, adjonction.

1.5.1 Catégories.

Les catégories ont fait leur apparition discrète à plusieurs reprises dans ce chapitre. La notion de foncteur vient même d'être évoquée. Il est temps de faire halte pour préciser ces notions fondamentales.

De l'aveu de l'un des fondateurs de la théorie, S. MacLane[26],

> c'est une notation (la flèche) qui a conduit à un concept (catégorie).

Plus précisément, c'est l'introduction[27] de la notation extrêmement suggestive $X \xrightarrow{f} Y$ pour désigner une application au moyen d'une flèche, et celle des diagrammes commutatifs
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "q"] \\ S \arrow[r, "g"] & T \end{tikzcd}$$
qui lui emboîte le pas, qui sont à l'origine directe de la notion de catégorie.

Une *catégorie* $\mathcal{C}$ consiste d'une part en une collection d'*objets* A, et d'autre part en la donnée, pour tout couple d'objets (A, B), d'un ensemble $\mathcal{C}(A, B)$ dont les éléments sont appelés *morphismes* ou *flèches* de A vers B (notés $A \xrightarrow{f} B$).

On requiert que les morphismes se composent lorsque cela fait sens (*i.e.* le composé gf de $f \in \mathcal{C}(A, B)$ et de $g \in \mathcal{C}(B, C)$ est un élément de $\mathcal{C}(A, C)$), la composition étant associative[28]. On requiert aussi qu'il y ait un morphisme identité 1_A de A vers lui-même, qui composé avec tout morphisme de source ou de but A, ne le modifie pas.

On dit que $f \in \mathcal{C}(A, B)$ est un *isomorphisme* s'il admet un inverse, *i.e.* s'il existe $g \in \mathcal{C}(B, A)$ tels que $fg = 1_B$, $gf = 1_A$; que f est un *automorphisme* si de plus $A = B$.

C'est l'accent mis sur les flèches (et leur composition) qui fait la spécificité du

[26] *Categories for the working mathematician*, Springer (1978), Notes du ch. 1.
[27] au tout début des années 1940, dans le contexte de la Topologie algébrique.
[28] notion précisée en 2.1.

concept mathématique de catégorie[29]. Faute d'avoir pris en compte ce point capital, bien des tentatives d'exportation de concepts catégoriques hors des Mathématiques ont échoué dans le trivial ou l'inconsistant.

L'exemple de base est la catégorie Ens des ensembles (les morphismes entre deux ensembles étant les applications quelconques entre ces ensembles). On en déduit d'autres catégories par addition de structure : par exemple la catégorie des espaces topologiques (objets : espaces topologiques, morphismes : applications continues).

Dans les exemples de cette nature, la spécificité du point de vue catégorique (par opposition au point de vue ensembliste) consiste à ne considérer et manipuler que les espaces et surtout les morphismes qui les relient, et non les points de ces espaces : *on occulte délibérément la structure interne des objets, pour mettre l'accent sur leurs rapports mutuels.*

Voici quelques exemples de catégories dont les objets ne se donnent pas (du moins d'emblée) comme ensembles structurés :

• la catégorie $\mathcal{F}aisc_X$ des faisceaux sur un espace topologique fixé X,

• tout groupe peut être vu comme une catégorie à un seul objet, les morphismes étant les éléments du groupe,

• tout ensemble (partiellement) ordonné $(X, \leq)$ - par exemple un treillis - peut être vu comme une catégorie (objets : les éléments x de X, morphismes de x vers y : un seul si $x \leq y$, aucun sinon).

1.5.2 Foncteurs.

De même que les ensembles sont reliés par des applications, les catégories sont reliées par des foncteurs, qui agissent tant sur les objets que sur les morphismes.

Un *foncteur* (covariant) $\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ associe à chaque objet A de $\mathcal{C}$ un objet $\phi(A)$ de $\mathcal{D}$ et à chaque morphisme $f \in \mathcal{C}(A, B)$ un morphisme $\phi(f) \in \mathcal{D}(\phi(A), \phi(B))$. On requiert que ϕ préserve les identités et la composition.

Soulignons que c'est la *variance* de F (*i.e.* le fait qu'un morphisme entre A et B se reflète en un morphisme de $F(A)$ vers $F(B)$) qui est ici fondamentale : c'est de cette variance qu'il s'agit lorsqu'on parle du caractère *fonctoriel* d'une règle $A \mapsto F(A)$.

Un *foncteur contravariant* ψ de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ est un foncteur $\psi : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$, où $\mathcal{C}^{op}$ désigne l'opposée de $\mathcal{C}$, qui s'obtient en prenant les mêmes objets et en renversant le sens des flèches : $\mathcal{C}^{op}(A, B) = \mathcal{C}(B, A)$.

Donnons deux types d'exemples, d'allure banale, mais très utiles en pratique :

• si $\mathcal{C}$ est une catégorie d'ensembles enrichis d'une structure (espaces topologiques, *etc*...), on dispose d'un foncteur d'oubli $\mathcal{C} \to Ens$: ensemble sous-jacent.

• Tout objet A de $\mathcal{C}$ donne lieu à un foncteur contravariant de $\mathcal{C}$ vers Ens : $\mathcal{C}(?, A)$ (où ? désigne un objet variable). Un foncteur contravariant de cette forme est dit *représentable* (par A).

[29] au reste, les objets sont logiquement secondaires, voire superflus : on peut identifier l'objet A au morphisme 1_A, et donc penser aux objets comme à des morphismes particuliers.

Dans un topos, le foncteur contravariant qui à tout objet U associe l'ensemble de ses sous-objets est représentable par un objet Ω appelé classifiant. Pour le topos ponctuel, Ω est l'ensemble à deux éléments.

Les foncteurs eux-mêmes (de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$) peuvent être vus comme objets d'une nouvelle catégorie : un morphisme (on dit aussi *transformation naturelle*) entre deux foncteurs ϕ_1, ϕ_2 est une règle qui associe fonctoriellement à tout objet A de $\mathcal{C}$ un morphisme $u_A \in \mathcal{D}(\phi_1(A), \phi_2(A))$ (« fonctoriellement » voulant dire que pour tout $f \in \mathcal{C}(A, B)$, on a $\phi_2(f) \circ u_A = u_B \circ \phi_1(f)$).

Deux catégories $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ sont dites *équivalentes* s'il existe des foncteurs *quasi-inverses* $\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D},\ \psi : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$; quasi-inverses voulant dire que $\psi \circ \phi$ et $\phi \circ \psi$ sont isomorphes aux foncteurs identiques $Id_{\mathcal{C}}$ et $Id_{\mathcal{D}}$ respectivement[30].

Le *lemme de Yoneda* dit précisément que $A \mapsto \mathcal{C}(?, A)$ induit une équivalence entre $\mathcal{C}$ et la catégorie des foncteurs représentables de $\mathcal{C}$ vers Ens. En particulier, le foncteur $\mathcal{C}(?, A)$ détermine[31] l'objet A.

Ce lemme a inspiré nombre de gloses et d'interprétations. L'interprétation perspectiviste, qui énonce qu'« un objet s'identifie à l'intégrale des points de vue sur cet objet », est éclairante[32], mais guère rigoureuse : il faudrait en effet convenir que les « points de vue » réciproques sont les morphismes de la catégorie que l'on considère ; or il semble difficile d'admettre que la composition d'un point de vue de A sur B avec un point de vue de B sur C détermine un point de vue de A sur C, comme il serait requis dans une catégorie...

On voit bien sur cet exemple les difficultés des généralisations philosophiques d'énoncés mathématiques, qui ne laissent pas d'être éclairantes en dépit de leurs incohérences en tant qu'interprétations.

1.5.3 Foncteurs adjoints.

Soit $(\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D},\ \psi : \mathcal{D} \to \mathcal{C})$ un couple de foncteurs allant en sens opposés.

Ces foncteurs sont dits *adjoints* si pour tout objet A de $\mathcal{C}$ et tout objet B de $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}(A, \psi(B))$ s'identifie[33] à $\mathcal{D}(\phi(A), B)$.

Il s'agit là d'un concept aussi fondamental que difficile à comprendre : c'est semble-t-il un cas extrême d'« hysteresis » entre compréhension littérale et compréhension réelle. On prendra garde à ne surtout pas confondre cette notion avec celle d'inverse ou de quasi-inverse : il n'y a ici d'inversion que le sens des foncteurs[34].

Bien des foncteurs d'oubli $\psi : \mathcal{D} \to Ens$ admettent un adjoint à gauche ϕ, $\phi(A)$ correspondant à l'objet « libre » de base A (c'est par exemple le cas lorsque

[30] C'est le primat des morphismes sur les objets, dans la perspective catégorique, qui impose cette notion d'équivalence de catégories, au détriment de celle d'isomorphisme de catégories.

[31] à isomorphisme unique près.

[32] à condition d'insister sur le fait que le point de vue de l'objet sur lui-même, crucial dans la démonstration du lemme, fait partie de l'intégrale, ce qui censure bien des gloses abusives.

[33] fonctoriellement en A et B bien entendu. Noter que la notion n'est pas symétrique ; on dit que ϕ est adjoint à gauche de ψ, et ψ adjoint à droite de ϕ.

[34] Il y a une analogie formelle (et non fortuite) avec la définition des opérateurs adjoints ϕ et ψ sur un espace euclidien ou de Hilbert $\mathcal{H}$ qu'on verra au chapitre suivant (*cf.* 2.4.1, 2.4.2) : pour tout couple de vecteurs x, y de $\mathcal{H}$, $\langle x, \psi(y)\rangle = \langle \phi(x), y\rangle$.

$\mathcal{D}$ est la catégorie des espaces vectoriels : $\phi(A)$ est l'espace vectoriel de base A, *cf.* 2.2.3).

Bien des foncteurs d'inclusion admettent un adjoint à gauche :

• l'inclusion de la catégorie des faisceaux dans celle des préfaisceaux a un adjoint à gauche appelé *faisceautisation*,

• l'inclusion de la catégorie des espaces topologiques sobres dans celle de tous les espaces topologiques a un adjoint à gauche qu'on pourrait appeler « cure de désintoxication ».

D'autre part, bien des foncteurs diagonaux $\mathcal{D} \to \mathcal{D}^I$ admettent à la fois un adjoint à gauche (appelé limite inductive et noté $\varinjlim_I$) et un adjoint à droite (appelé limite projective et noté $\varprojlim_I$).

1.5.4 Application : morphismes de topos et points d'un topos.

Soit $f : X \to Y$ une application continue. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur X, on définit un faisceau $f_*\mathcal{F}$ sur Y par $f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$. Si $\mathcal{G}$ est un faisceau sur Y, on définit un faisceau $f^*\mathcal{G}$ sur X par $f^*\mathcal{G}(U) = \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{G}(V)$; en particulier, si f est l'inclusion d'un point $y \in Y$, l'ensemble $f^*\mathcal{G}(\{y\})$ est la *fibre de $\mathcal{G}$ en y*.

On obtient ainsi un couple de foncteurs adjoints

$$(f^* : \mathcal{F}aisc_Y \to \mathcal{F}aisc_X,\ f_* : \mathcal{F}aisc_X \to \mathcal{F}aisc_Y) :$$
$$\mathcal{F}aisc_Y(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}) = \mathcal{F}aisc_X(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}).$$

On peut maintenant préciser comment on récupère un espace topologique (sobre) X à partir du topos $\mathcal{X} = \mathcal{F}aisc_X$ de ses faisceaux : l'idée est simplement d'identifier un point $x \in X$ au foncteur « fibre en x » : $\mathcal{X} \to Ens$.

Plus généralement, Grothendieck définit la notion de morphisme de topos $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ comme la donnée d'un couple de foncteurs adjoints $f = (f^* : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}, f_* : \mathcal{X} \to \mathcal{Y})$, f^* commutant aux limites projectives finies[35].

Prenant pour $\mathcal{X}$ le topos ponctuel, on obtient la notion de *point* du topos $\mathcal{Y}$.

Mais il existe des topos exotiques sans aucun point !

1.6 Topos et Logique intuitionniste.

1.6.1 Les topos entre Géométrie et Logique.

La transition est excellemment présentée par P. Cartier[36] :

> [Grothendieck] avait remarqué que les faisceaux sur un espace donné formaient une catégorie qui avait, en gros, toutes les propriétés de « la » catégorie des ensembles. Or, après les résultats d'indécidabilité de Gödel et de

[35] c'est-à-dire des $\varprojlim_I$ avec I fini.

[36] « Grothendieck et les motifs », Prépublication IHES (2000). Voir aussi P. Cartier, « Catégories, logique et faisceaux ; modèles de la théorie des ensembles », Séminaire Bourbaki, exposé 513, 1978.

Cohen en théorie des ensembles, il y a non pas *une* théorie des ensembles, mais *divers modèles* non équivalents de la théorie des ensembles (au sens logique de « modèle »). Il était donc naturel d'explorer les relations entre topos et modèles de la théorie des ensembles. [...]

Il appartint à d'autres (surtout Bénabou, Lawvere et Tierney) de résoudre l'énigme : les topos sont exactement les modèles de la théorie des ensembles, mais dans une logique particulière, qu'on appelle « intuitionniste », et où le prinicipe du tiers exclu n'est pas valable. Il est très remarquable que cette logique ait été inventée par un fameux topologue, Brouwer, et qu'avec un peu de recul, elle s'impose naturellement en vertu du fait que l'intérieur de l'adhérence d'un ensemble ouvert ne lui est pas égal.

Mais l'invention des topos donne une liberté inouïe au jeu mathématique, et permet de briser le carcan de « la » théorie des ensembles. Rejouer une pièce mathématique bien connue dans le décor nouveau d'un topos exotique peut amener des surprises, et faire découvrir des accents nouveaux dans des vers ressassés ; parfois, cette nouvelle représentation révèle des trésors mathématiques. D'un point de vue plus général, un topos porte en lui sa propre logique, et définit donc une espèce de logique modale, ou plutôt une logique du *hic* et du *nunc*, une logique spatio-temporelle où la valeur de vérité d'une assertion peut dépendre du lieu et du temps.

1.6.2 Règles du calcul propositionnel : formulaire.

Nous nous limiterons à la logique des propositions, pour simplifier au maximum. Mais ce qui suit s'étend à la logique des prédicats[37] et même à la logique plus sophistiquée des « types ».

Commençons par rappeler le formulaire des règles de déduction en logique des propositions. Si p et q sont des propositions (ou formules logiques), notons $\neg p$ la négation de p, $p \wedge q$ la conjonction de p et q, $p \vee q$ leur disjonction, $p \Rightarrow q$ la proposition « p implique q », et $\vdash$ l'inférence : de p on infère q.

Le tableau des axiomes et règles de déduction est le suivant (en notant 0 le faux et 1 le vrai) :

$$0 \vdash p, \quad p \vdash 1, \quad p \vdash p,$$

$$\neg p \vdash (p \Rightarrow 0), \quad (p \Rightarrow 0) \vdash \neg p,$$

$$\frac{p \vdash q,\ q \vdash r}{p \vdash r},$$

$$\frac{p \vdash q \wedge r}{p \vdash q}, \quad \frac{p \vdash q \wedge r}{p \vdash r}, \quad \frac{p \vdash q,\ p \vdash r}{p \vdash q \wedge r},$$

$$\frac{p \vee q \vdash r}{p \vdash r}, \quad \frac{p \vee q \vdash r}{q \vdash r}, \quad \frac{p \vdash r,\ q \vdash r}{p \vee q \vdash r},$$

$$\frac{p \wedge q \vdash r}{p \vdash (q \Rightarrow r)}, \quad \frac{p \vdash (q \Rightarrow r)}{p \wedge q \vdash r}.$$

[37]la logique des prédicats fait intervenir les quantificateurs universel $\forall$ et existentiel $\exists$, qui du reste peuvent s'interpréter comme adjoints à gauche et à droite respectivement d'un même foncteur.

(par la notation « fractionnaire », on entend que le dénominateur se déduit du numérateur).

On a alors $p \vdash \neg\neg p$ et $\neg\neg\neg p \vdash \neg p$, mais l'inférence $\neg\neg p \vdash p$ ne se déduit pas des règles précédentes et n'est pas valide en Logique intuitionniste. Cette inférence est l'axiome supplémentaire (tiers exclu) qu'impose la Logique classique.

1.6.3 Logique intuitionniste et treillis de Heyting.

Si l'inférence $\vdash$ est interprétée comme une relation d'ordre $\leq$, le calcul des propositions forme un *treillis de Heyting*[38], c'est-à-dire un treillis avec plus petit élément (noté 0) et plus grand élément (noté 1), ayant la propriété que le foncteur $y \mapsto ? \wedge y$ du treillis dans lui-même admet un adjoint à droite (c'est $y \mapsto ? \Rightarrow y$).

Mieux, une proposition p est valide en Logique intuitionniste si et seulement son interprétation dans tout treillis de Heyting l'est.

Le treillis des ouverts $\mathfrak{O}$ d'un espace topologique X est un treillis de Heyting. L'inférence $\vdash$ s'y interprète comme l'inclusion $\subset$ (des ouverts les uns dans les autres), la conjonction $\wedge$ s'interprète comme l'intersection $\cap$, $\vee$ comme la réunion $\cup$, et la *négation* $\neg$ *comme l'intérieur du complémentaire*[39] :

$$\neg\, U = (X \overset{o}{\setminus} U).$$

Plus généralement, dans tout topos $\mathcal{X}$, le treillis des sous-objets d'un objet A de $\mathcal{X}$ (treillis dont l'ensemble sous-jacent est $\mathcal{X}(A, \Omega)$ par définition du classifiant Ω), est un treillis de Heyting.

La Logique intuitionniste s'interprète donc dans tout topos de Grothendieck. Le classifiant apparaît comme *faisceau de valeurs de vérités*. Dans le topos ponctuel, cette logique devient classique : $\Omega = \{0, 1\}$.

Ce qu'on vient d'esquisser n'est que le début de la logique toposique[40], qui a précédé la Logique des interactions évoquée au chapitre suivant - tout en lui demeurant complémentaire.

Bien que cela dépasse largement notre cadre, nous ne pouvons omettre, en terminant, de signaler que la logique toposique forme le substrat mathématique de la logique de l'apparaître dans la philosophie d'A. Badiou et irrigue la construction des principaux concepts de son livre *Logiques des Mondes*[41].

Les topos jouent aussi un rôle fondamental dans la théorie mathématique de la musique de G. Mazzola[42], où ils permettent notamment d'effectuer le passage du local au global dans le contexte « discret » des compositions musicales.

[38] on dit aussi *algèbre de Heyting.*

[39] cette interprétation topologique de la Logique intuitionniste fait ressortir la non-validité du tiers-exclu : par exemple si X est la droite, et U la droite privée d'un point, $\neg\, U = \emptyset$, et $\neg\neg\, U = X$ qui n'est pas contenu dans U, de sorte que $\neg\neg\, U \vdash U$ n'est pas valide.

[40] pour les besoin de la Logique, la notion de topos que Lawvere et Tierney et leurs successeurs utilisent est un peu plus générale que celle de Grothendieck.

[41] Seuil 2006.

[42] *The topos of Music*, Birkhäuser 2002.