Chapitre 6

Dualité.

La dualité est présente depuis la nuit des temps dans la pensée humaine.

Elle a traversé toute la philosophie occidentale, de Platon à Descartes et au-delà, en se modifiant considérablement. Elle a hanté la physique : rappelons le rôle capital joué par la dualité onde-corpuscule, dont l'histoire s'étend de Huygens et Newton à Heisenberg et De Broglie.

Aussi est-il curieux de constater que la dualité ne fait son entrée que tardivement dans l'histoire des Mathématiques, aux alentours de 1820 (à propos de Géométrie projective). Cette idée fondamentale a peu à peu essaimé, sous divers avatars, dans toutes les branches des Mathématiques, tout en conservant son sens originel précis.

6.1 Dualité linéaire.

6.1.1 Débuts et vicissitudes de la Géométrie projective.

C'est dans le contexte de la Géométrie projective que la dualité apparaît en Mathématiques. Nous allons donc commencer par dire quelques mots de cette dernière.

On considère que son acte de naissance est le traité de 1822 du capitaine Poncelet intitulé « Traité des Propriétés Projectives des Figures ». Mais il s'inspire fortement de la Géométrie descriptive de ses maîtres Monge et L. Carnot[1].

L'histoire singulière de ces trois personnages mérite sans doute d'être très brièvement évoquée. Chacun d'eux fut non seulement géomètre, mais aussi ingénieur, administrateur et homme public (politique ou militaire).

[1]et, pour remonter davantage dans le temps, les transformations projectives et les points à l'infini avaient été étudiés et utilisés un siècle avant eux par Desargues dans sa théorie de la perspective centrale, qui eut le malheur de déplaire aux artistes, et tomba en oubli malgré le soutien de Descartes. Voir 7.3.1

Monge, jacobin puis bonapartiste, fut le cofondateur de l'École Normale et de l'École Polytechnique.

Carnot, montagnard modéré, général, créa les 14 armées de la République en 1793 ; proscrit en 1795 puis banni, il fut entre-temps élu à l'Académie et exclu l'année suivante pour céder son fauteuil (sur l'instigation de Monge !) à... Bonaparte, qui le rappela comme ministre de la guerre. Il fut réélu à l'Académie en 1800 et banni à nouveau, comme régicide, sous la restauration (qui exclut Monge à son tour de l'Académie).

Quant à Poncelet, lieutenant dans la campagne de Russie, il fut laissé pour mort sur le champ de Krasnoié en 1812. Fait prisonnier et transféré par marche forcée (1500 kilomètres) dans les prisons de Saratov, il y reconstitua l'enseignement de Monge et Carnot, puis développa *ab ovo* la Géométrie projective, avant de rentrer en France en 1814, où il finit sa carrière comme général commandant Polytechnique. Connu pour son goût de la polémique[2], il réussit à se brouiller avec quasiment tous les contemporains notables qui s'intéressèrent à ses travaux : admirateurs et disciples (qu'il accusait de plagiat) comme adversaires.

La Géométrie projective avait pour objet d'étudier celles des propriétés des figures qui sont stables par projection (e.g. les propriétés d'incidence), dans l'espace « projectif » (espace complété par un plan à l'infini). L'enthousiasme qui habitait les disciples est palpable dans cette vigoureuse citation de Gergonne :

> Il ne s'agit pas moins que de commencer, pour la géométrie, mal connue depuis près de deux mille ans sans qu'on s'en occupe, une ère tout-à-fait nouvelle ; il s'agit d'en mettre tous les anciens traités à peu près au rebut, de leur substituer des traités d'une forme tout-à-fait différente, des traités vraiment philosophiques qui nous montrent enfin cette étendue, réceptacle universel de tout ce qui existe, sous sa véritable physionomie, que la mauvaise méthode d'enseignement adoptée jusqu'à ce jour ne nous avait pas permis de remarquer ; il s'agit, en un mot, d'opérer dans la science une révolution aussi impérieusement nécessaire qu'elle a été jusqu'ici peu prévue.
>
> Ce n'est précisément pas parce que la nouvelle doctrine promet une moisson plus abondante de théorèmes qu'elle mérite toute notre attention. Qu'importent, en effet, quelques théorèmes de plus qui demeureront peut-être éternellement sans applications ? [...] Mais, comme toutes les révolutions, celle qui se prépare dans la science de l'étendue, et que M. Poncelet regarde peut-être à tort comme étant presque achevée, doit compter pour adversaires, ou tout au moins pour spectateurs indifférents, tous ceux qui n'y auront pas coopéré.

Un peu plus loin :

> Ce qu'il y a de plus important et de plus éminemment philosophique dans ces recherches, c'est, ce nous semble, d'une part cette double face de la géométrie que son dernier mémoire a pour objet de mettre en évidence, et de l'autre la possibilité de démontrer, sans aucune sorte de calculs ni de constructions, la totalité peut-être des théorèmes qui ne dépendent ni des relations d'angles ni des relations de longueur.

[2]ce goût n'a pas disparu dans la profession, mais ses tenants omettent de rendre hommage au grand ancêtre !

Ce à quoi fait allusion Gergonne, c'est d'une part le principe de dualité (*cf.* ci-dessous), et d'autre part le « principe de continuité »[3] de Monge-Poncelet qui exprime que la déformation continue d'une configuration n'altère pas ses propriétés descriptives quitte à interpréter correctement les modifications survenues (par exemple une sécante devenant tangente, *etc*...).

Ce dernier principe, proche de la métaphysique de Leibniz (« la Nature ne procède pas par sauts »), fut sévèrement critiqué, notamment par Cauchy. À titre d'exemple, voyons comment on en dérive, en un tour de main, le théorème de Bézout selon lequel deux courbes dans le plan projectif, de degrés m et n, s'intersectent en mn points (comptés avec multiplicité) : on peut toujours faire dégénérer, par déformation, une courbe plane de degré m en une réunion de m droites en position générale, et dans ce cas le résultat devient évident.

La Géométrie projective (au sens de Poncelet et Gergonne) s'étiola vers le milieu du XIXe siècle, en partie parce qu'elle ne faisait plus guère qu'accumuler des résultats sans portée générale, mais aussi parce que le principe de continuité de Poncelet était mathématiquement mal fondé (il dut attendre plus d'un siècle un fondement rigoureux et général).

Assez récemment, toutefois, on assiste à un vif regain d'intérêt, voire une résurrection, en raison d'interactions insoupçonnées avec d'autres disciplines, comme

• la Physique théorique : les idées de la symétrie-miroir notamment ont permis de résoudre tout une hiérarchie de problèmes réputés inaccessibles de Géométrie projective.

• l'imagerie scientifique : plus précisément, la Photogrammétrie, où l'on se pose le problème de reconstituer une image 3D à partir de sections planes (photographies). Voir le projet zürichois d'application à la reconstruction des Bouddhas de Bamiyan (dynamités par les Talibans)[4].

6.1.2 Dualité en Géométrie projective.

L'histoire de la dualité en Mathématiques débute donc par la découverte commune de Gergonne et de Poncelet (source de leur polémique)[5].

Poncelet remarque d'abord la symétrie de certains énoncés (ou configurations) de Géométrie projective plane si l'on échange dans ces énoncés les mots « point » et « droite ».

Par exemple la configuration formée de trois points sur une droite admet comme duale la configuration formée de trois droites concourantes : les relations

[3] que Monge appelait « principe des relations contingentes ».

[4] http ://www.photogrammetry.ethz.ch/research/bamiyan/pub/index.html

[5] voir J.D. Gergonne, Réflexion sur le précédent article. Annales de Gergonne, 17 (1826-1827), 272-276 (http ://www.numdam.org)

J.D. Gergonne, Polémique mathématique. Réclamation de M. le capitaine Poncelet (extraite du bulletin universel des annonces et nouvelles scientifiques) ; avec des notes. Annales de Gergonne, 18 (1827-1828), p. 125 (http ://www.numdam.org)

J.V. Poncelet, Traité des propriétés projectives des figures, 1822. http ://imgbase-scd-ulp.u-strasbg.fr/thumbnails.php ?album=433 d'incidence sont inversées. Le tétraèdre est auto-dual, le dual d'un cube est un octaèdre, le dual d'un icosaèdre est un dodécaèdre. La duale de la duale est la configuration originale.

Poncelet déduit de là un principe général de dualité qui permet de démontrer automatiquement de nouveaux théorèmes à partir d'anciens.

Un peu plus tard, Chasles[6] proposera une autre variante, dynamique, de la dualité projective, qui échange translations et rotations autour d'un axe :

> Mais ne peut-on pas supposer, maintenant, que les deux mouvements inséparables des corps de l'Univers doivent donner lieu à des théories mathématiques, dans lesquelles ces deux mouvements joueraient identiquement le même rôle ? Et alors, le principe qui unirait ces deux théories, qui servirait à passer de l'une à l'autre, comme le théorème sur lequel nous avons basé la dualité géométrique de l'étendue au repos [...], pourrait jeter un grand jour sur les principes de la philosophie naturelle.
>
> Peut-on prévoir même où s'arrêteraient les conséquences d'un tel principe de dualité ? Après avoir lié deux à deux tous les phénomènes de la nature et les lois mathématiques qui les gouvernent, ce principe ne remonterait-il point aux causes même de ces phénomènes ?

Nous reviendrons sur cette mystérieuse dualité de Chasles à la fin du chapitre.

6.1.3 Formes linéaires et dualité.

Plutôt que la dualité projective, c'est la dualité linéaire, c'est-à-dire entre espaces vectoriels qui est désormais considérée comme fondamentale en Mathématiques.

Soit V un espace vectoriel (réel ou complexe). Son dual V^* est l'espace vectoriel formé des *formes linéaires* sur V, c'est-à-dire des fonctions linéaires (à valeurs réelles ou complexes selon le cas).

On a donc un accouplement de dualité entre V^* et V, qui à la forme linéaire $v^* \in V^*$ et au vecteur v associe le nombre (réel ou complexe)

$$< v^*, v >= v^*(v).$$

Cet accouplement permet, au rebours, de voir v comme un forme linéaire sur V^*, c'est-à-dire un élément du bidual V^{**}. Lorsque V est de dimension finie, ceci permet d'identifier V et son bidual V^{**}.

Dans le cas d'un espace euclidien V, on a déjà un poduit scalaire $< , >$ sur V. Celui-ci permet d'identifier V avec son propre dual V^*.

Le lien avec le cas projectif est le suivant. Plutôt que de voir un espace projectif P de dimension n comme un espace usuel vectoriel complété à l'infini, on peut le voir comme l'espace des droites $P(V)$ d'un espace vectoriel de dimension $n+1$.

L'espace projectif dual P^* n'est autre que l'espace $P(V^*)$ attaché à l'espace vectoriel dual.

---

[6] *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie*, 1837, cité dans G. Châtelet, *Les enjeux du mobile*, Seuil, ch. 5.

6.2 Dualités catégoriques.

6.2.1 Exemple primordial : espaces vectoriels de dimension finie.

Voyons la dualité linéaire d'un point de vue catégorique : soit Vec la catégorie des espaces vectoriels (réels ou complexes, au choix) de dimension finie. La dualité transforme tout objet V de Vec en un autre V^*, et $V^{**} \overset{can}{\cong} V$. Mais on a plus : la dualité est un foncteur contravariant : elle transforme tout morphisme (c'est-à-dire toute application linéaire) $F : V \to W$ en un autre qui va dans l'autre sens $F^* : W^* \to V^*$, l'*adjoint de* F, et vis-à-vis de la composition, on a la formule

$$(GF)^* = F^*G^*.$$

Ceci amène à généraliser, et appeler *dualité* dans une catégorie quelconque toute auto-équivalence *contravariante* (elle renverse le sens des flèches) et *involutive* (on dit aussi : réflexive : en l'appliquant deux fois, on trouve l'identité).

6.2.2 Autres exemples.

• *Inversion dans un groupe* : tout groupe peut être vu comme catégorie à un seul objet, les éléments du groupe étant les (auto)morphismes de cet objet. L'inversion $g \mapsto g^{-1}$ est une dualité (au sens catégorique).

• *Ensembles ordonnés* : tout ensemble (partiellement) ordonné Δ peut être vu comme une catégorie (il y a une flèche - et une seule - entre x et y si et seulement si $x \leq y$). Une dualité est une involution de Δ qui inverse l'ordre.

Cas particulier : en Logique classique (et plus généralement dans un treillis de Boole), la négation est une dualité[7], qui échange « et » (l'inf) et « ou » (le sup) ; en Logique intuitionniste, ce n'est plus une dualité au sens précédent car l'involutivité est perdue.

Autre cas particulier : soit V un espace vectoriel de dimension finie, et soit $S \subset V$ un convexe (i.e contenant tout l'intervalle joignant deux quelconques de ses points) contenant 0. Son *polaire* $S^* \subset V^*$ est le convexe, contenant 0, formé des v^* tels que

$$< v^*, v > \leq \ 1$$

pour tout $v \in S$. On a $S^{**} = S$. La polarité échange réunion et intersection. Dans un espace euclidien (donc autodual), la polarité est donc une dualité sur l'ensemble ordonné par inclusion des convexes contenant 0.

6.2.3 Produit tensoriel et dualité.

Rappelons (4.2.5) qu'il existe la notion de produit tensoriel $V \otimes W$ de deux espaces vectoriels (de dimension finie). Étant donné un troisième espace vectoriel $U \in Vec$, on a alors un isomorphisme canonique

$$Hom(U \otimes V^*, W) \overset{can}{\cong} Hom(U, V \otimes W) :$$

[7] dualité de De Morgan, *Formal Logic : or, The calculus of inference, necessary and probable*, 1847.

les foncteurs $- \otimes V^*$ et $V \otimes -$ sont adjoints (*cf.* 1.5.3). La notion de dualité est donc subordonnée à celle de produit tensoriel.

En fait cela s'étend, dans le contexte de Tannaka (*cf.* 4.3.3), aux représentations de groupes compacts. Le $\otimes$ permet de retrouver le produit du groupe, et la dualité permet de retrouver l'inverse.[8]

6.3 Dualités analytiques.

6.3.1 Dualité linéaire topologique.

En dimension infinie, on n'a plus $V = V^{**}$: V est seulement un sous-espace de V^{**}.

Par ailleurs, on l'a déjà vu (*cf.* 2.2.4), l'Algèbre linéaire ne marche pas seule en dimension infinie, il faut y mettre de la topologie, par exemple au moyen de normes. Ainsi, si V est un espace vectoriel topologique (par exemple un espace de Hilbert), on définit son *dual* comme l'espace vectoriel des formes linéaires *continues* sur V. En ce sens, l'espace de Hilbert est auto-dual.

6.3.2 Distributions.

L'idée de base est la suivante : on part d'un espace de fonctions-test ϕ qui ne posent pas de problèmes (lisses et nulles hors d'un compact).

Alors toute fonction (mesurable[9]) f définit une forme linéaire sur cet espace :

$$< f, \phi >= \int f\phi \, dt.$$

Si f est lisse, on a

$$< \frac{df}{dt}, \phi >= - < f, \frac{d\phi}{dt} > .$$

Cela suggère de considérer, suivant L. Schwartz, toutes les formes linéaires[10] D (appelées *distributions*) sur l'espace de fonctions-test, et de *définir* la dérivée $\frac{dD}{dt}$ de D par la formule

$$< \frac{dD}{dt}, \phi >= - < D, \frac{d\phi}{dt} > .$$

Exemple : la distribution de Dirac δ, définie par $\delta(\phi) = \phi(0)$. C'est la dérivée de la fonction-marche d'escalier de Heaviside (qui vaut 0 pour $t < 0$, 1 pour $t > 0$). En fait, toute distribution est, localement, la dérivée itérée d'une fonction continue.

[8] *Note :* Parfois, on va même jusqu'à appeler « dualité » tout couple d'anti-équivalences adjointes entre deux catégories. Par exemple, la dualité de Gelfand entre algèbres stellaires commutatives et espaces compacts (*cf.* 2.5.2).

[9] *cf.* 2.3.1, en prenant pour $\mathfrak{B}$ la plus petite tribu contenant les ouverts et les parties de mesure nulle. Dans le cadre de ces leçons, il suffit de savoir que toutes les fonctions qu'on rencontre en pratique sont mesurables - en fait, on ne peut construire de fonction non mesurable sans invoquer l'axiome du choix non dénombrable.

[10] continues, par rapport à une topologie sur les fonctions-test qui tient compte de toutes les dérivées.

Ainsi *toute fonction, même non dérivable (= non différentiable), devient dérivable au sens des distributions*. En un sens, on évacue d'emblée, à l'aide de cette géniale idée de dualité, la question des singularités ! Mais il y a un prix à payer : il est très difficile de *multiplier* les distributions (et davantage encore de les diviser), ce qui rend délicat leur emploi dans les problèmes non-linéaires.

6.3.3 Transformée de Fourier. Dualité onde-corpuscule.

La transformée de Fourier d'une fonction f est la fonction $\hat{f}$ définie par

$$\hat{f}(\omega) = \int f(t)e^{-i\omega t}dt.$$

Plus f est concentrée, plus $\hat{f}$ est diffuse.

La transformation de Fourier s'étend en un automorphisme de l'espace des distributions « tempérées »[11]. Elle a la vertu d'échanger dérivation et multiplication par $i\omega$.

La transformation de Fourier permet de passer d'une fonction des positions et du temps (q, t) à une fonction des impulsions et de la fréquence (p, ω). Ce que Heisenberg nous a appris à voir comme un changement de repère en mécanique quantique, associé à la dualité onde-particule.

La dualité onde-particule stipule que tous les objets du domaine quantique présentent simultanément des propriétés d'ondes et de particules, ces deux aspects ne pouvant adéquatement être pris isolément.

L'origine de ce principe remonte à la concurrence entre la théorie ondulatoire de la lumière de Huygens et celle, corpusculaire, de Newton. Avec la théorie des ondes électromagnétiques de Maxwell, la théorie ondulatoire (qui rendait compte du phénomène de polarisation) sembla occulter sa concurrente, avant que les travaux d'Einstein, de Broglie, Heisenberg et d'autres n'imposent le principe de dualité. Les relations d'incertitude de Heisenberg limitent les points de vue en dualité.

6.3.4 Transformée de Legendre. Mécanique lagrangienne et Mécanique hamiltonienne.

La dualité est aussi très importante dans les problèmes d'extrémaux et d'optimisation (en Mécanique, Économie mathématique, transport optimal[12], *etc*...). Elle apparaît souvent *via* la notion de transformée de Legendre.

Soit V un espace vectoriel réel (de dimension finie, ou un Hilbert, disons) et soit V^* son dual.

Soit $f : V \to \mathbb{R}$ une fonction convexe (c'est-à-dire majorée sur tout segment par la fonction affine qui prend les mêmes valeurs aux extrémités du segment). Sa transformée de Legendre $f^* : V^* \to \mathbb{R}$ est la fonction convexe définie par

$$f^*(v^*) = sup < v^*, v > -f(v),$$

[11] variante des distributions obtenue en prenant pour fonctions-test les fonctions lisses rapidement décroissantes à l'infini.

[12] des remblais... une théorie initiée par Monge et actuellement très active.

où v^* désigne un élément quelconque de V^*. On a

$$f^{**} = f.$$

(on ignore ici les discontinuités). On a donc

$$< v^*, v > \leq \; f^*(v^*) + f(v),$$

c'est-à-dire la majoration du *produit* scalaire par la *somme* d'une fonction du premier argument et d'une fonction du second argument. On peut choisir la fonction convexe f arbitrairement, et tirer de là (et du fait que le minimum de $f - v^*$ est $-f^*(v^*)$) beaucoup d'inégalités fondamentales de l'Analyse (inégalités de Hölder, Minkowski, ...).

Voici un exemple en Mécanique rationnelle. En prenant pour V l'espace des vitesses q', et pour V^* l'espace des impulsions p, la transformée de Legendre de $\frac{mq'^2}{2}$ est $\frac{p^2}{2m}$. C'est le cas particulier le plus élémentaire du fait que le passage du lagrangien $L(q, q', t)$ à l'hamiltonien

$$H(p, q, t) = pq' - L(q, q', t)$$

(avec $p = \frac{\partial L}{\partial q'}$) est une transformée de Legendre (par rapport à q'). L'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial q'}) = \frac{\partial L}{\partial q}$$

est alors équivalente aux équations de Hamilton

$$p' = -\frac{\partial H}{\partial q}, \; q' = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

p et q sont les coordonnées usuelles de l'espace des phases (impulsions et positions) ; le prime désigne bien sûr la dérivée temporelle.

6.4 Dualités géométriques/homologiques.

6.4.1 Dualité de Poincaré.

Les nombres de Betti b_i d'une variété M (compacte orientable) de dimension n sont définis en termes de « triangulations » (par exemple si M est la sphère, $b_0 = b_n = 1$, et les autres b_i sont nuls). La première manifestation de la dualité de Poincaré (1893) est que

$$b_i = b_{n-i}.$$

L'argument[13] exploite une sorte de dualité entre cellules, qui généralise la dualité de Poncelet-Gergonne entre polyèdres.

En termes de ces cellules, on définit en fait des espaces vectoriels d'*homologie* $H_i(M)$, dont la dimension est b_i. La dualité de Poincaré proprement dite est que

$$H_i(M) = (H_{n-i}(M))^*.$$

[13] d'abord troué, et corrigé à plusieurs reprises par Poincaré.

6.4.2 Dualité de de Rham-Hodge.

Soit ω une *i-forme différentielle* : une expression du type

$$\omega = \sum f_{j_1,\ldots,j_i} \cdot dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_i}, \quad j_1 < \ldots < j_i,$$

où les x_j sont des coordonnées locales sur M, et $f_{j_1,\ldots,j_i}$ des fonctions sur M. On peut l'intégrer sur les i-cellules σ, d'où un accouplement

$$< \omega, \sigma > = \int_\sigma \omega.$$

On peut définir le bord $d\omega$, qui est une $i+1$-forme différentielle, et on a la « formule de Stokes »

$$< d\omega, \sigma > = < \omega, \partial\sigma >$$

où $\partial\sigma$ est le bord de la cellule σ. On a $dd\omega = 0$.

Supposons M muni d'une structure riemannienne : l'espace tangent en tout point est un espace euclidien de dimension n. À partir de la dualité entre i-plans et $(n$-$i)$-plans dans un tel espace, Hodge a introduit un *opérateur* $*$, involutif (au signe près), qui transforme i-formes différentielles en $(n$-$i)$-formes différentielles sur M. Cet opérateur de Hodge permet de définir d'abord le *cobord* $\partial\omega = * d * \omega$ (qui est une $(i$-$1)$-forme différentielle), puis les espaces vectoriels de *cohomologie* de de Rham-Hodge $H^i(M)$ formés des i-formes différentielles de bord et cobord nuls (formes dites *harmoniques*).

Le théorème de de Rham-Hodge affirme que l'intégration induit une dualité

$$H_i(M) = (H^i(M))^*$$

(la terminologie « homologie/cohomologie » et la notation par indice inférieur/supérieur indiquent d'ailleurs la dualité). En outre, traduite en terme de cohomologie de de Rham-Hodge, la dualité de Poincaré est induite par l'opérateur $*$ de Hodge.

Ces dualités sont contravariantes par rapport aux applications continues entre variétés.

Ces dualités géométriques ont de nombreux avatars, mais nous préférons terminer par une application dans le contexte de l'électromagnétisme de Maxwell.

6.4.3 Dualité de Maxwell.

Les équations de Maxwell pour les champs électrique E et magnétique B dans l'espace-temps (vide) $\mathbb{R}^4$ s'écrivent

$$\nabla \times B = \frac{\partial E}{\partial t}, \ \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t},$$

$$\nabla.B = 0, \nabla.E = 0.$$

Elles sont donc invariante par $E \mapsto B,\ B \mapsto -E$. C'est l'exemple primordial de dualité en physique classique.

Dans le dernier chapitre de son livre *Les enjeux du mobile*, G. Châtelet restitue la longue quête de Faraday, Maxwell et Hamilton, à partir d'une intuition du philosophe Schelling, pour interpréter géométriquement la dualité électricité-magnétisme. Le symbole ∇ de Hamilton lui-même (que celui-ci introduisait *via* ses quaternions) en est dérivé.

En termes modernes, la dualité implicite dans les équations de Maxwell s'explicite comme une dualité mathématique de la façon suivante. Selon les idées des « théories de jauge (abéliennes) », les composantes de E et de B sont les 6 composantes[14] d'une 2-forme différentielle ω sur l'espace de Minkowski $(\mathbb{R}^4, ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - c^2dt^2)$, qui s'avère être un bord, donc vérifier

$$d\omega = 0,$$

(ce qui traduit la 1ère et la 4ème équations de Maxwell), tandis que l'équation de jauge (Yang-Mills) s'écrit

$$\partial\omega = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$d * \omega = 0$$

(ce qui traduit la 2ème et la 3ème équations de Maxwell, compte tenu de ce que l'action de l'opérateur $*$ de Hodge se traduit par $E \mapsto B,\ B \mapsto -E$).

Ainsi ce « tire-bouchon » qu'est *l'opérateur de Hodge en dimension* 4 *rend compte non seulement de la dualité de Maxwell, mais aussi de la dualité de Chasles (en dimension* 3*), qu'il unifie* : « la rotation est à la translation ce que le magnétisme est à l'électricité ».

C'est pour conserver cette symétrie en présence de charges et de courants que Dirac a fait l'hypothèse du monopôle magnétique (non encore détecté expérimentalement). Plus récemment, on s'est aperçu que la symétrie complète est récupérée dans le cadre d'une théorie de jauge à 4 supersymétries en dimension 4, qui échange courte et longue échelles (Sen, 1994), ce qui a mené aux *dualités étranges* qui hantent les théories de cordes d'aujourd'hui.

Sous des dehors très divers, toutes ces dualités sont au fond des variations sur le même thème, la dualité linéaire (deux espaces « se regardant en chiens de faïence, crocs apparents » $<\ >$).

---

[14] les composantes de E sont celles de ω en les $dx_i \wedge dt$, celles de B sont celles de ω en les $dx_i \wedge dx_j$.