Séminaire MaMuX

IRCAM - Paris, 27 janvier 2007

Gammes diatoniques généralisées

Franck. Jedrzejewski@Cea.fr

Fréquences

$$Freq = 2^r . 3^s . 5^t$$

	Freq	r	s	t
C	1	0	0	0
Db	16/15	4	-1	-1
D	9/8	-3	2	0
Eb	6/5	1	1	-1
E	5/4	-2	0	1
F	4/3	2	-1	0
F#	45/32	-5	2	1
G	3/2	-1	1	0
Ab	8/5	3	0	-1
A	5/3	0	-1	1
Bb	16/9	4	-2	0
B	15/8	-3	1	1

Rapport de fréquences = F1/F2

unisson = 1
octave = 2
quinte juste = 3/2
tierce majeure juste = 6/5

Valeurs en cents

1200 log (F1/F2) / log(2)

1 octave = 1200 cents
1 demi-ton tempéré = 100 cents

Système tempéré

Division de l'octave en 12 parties égales
demi-ton = 2^(1/12) = 100 cents

Tempéraments et Systèmes acoustiques

Ensemble de fréquences choisies dans un intervalle donné

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{q} = 2^{p}$$

L'équation n'a pas de solution entière.

12 quintes $\approx$ 7 octaves

$$\text{Comma pythagoricien} = \frac{\text{12 quintes}}{\text{7 octaves}} = \frac{(3/2)^{12}}{2^{7}} = \frac{531441}{524288} = \text{23 cents}$$

$$\text{Comma syntonique} = \frac{\text{1 tierce pythagoricienne}}{\text{1 tierce naturelle}} = \frac{81/64}{5/4} = \frac{81}{80}$$

$$= \text{22 cents}$$

Tempéraments et Systèmes acoustiques

- Systèmes tempérés et micro-tempérés

Systèmes à n degrés : $X = a^{n}$ $a = 2^{1/n}$

- Systèmes pythagoriciens

Répétition de la quinte naturelle (3/2) - Répartition du comma pythagoricien

- Systèmes mésotoniques

Quinte diminuée d'une fraction de Cs - Répartition du comma syntonique

- Tempéraments historiques

Différentes partitions

- Systèmes harmoniques

Fondés sur la suite des sons harmoniques naturels

- Systèmes non-octaviants

Serge Cordier (TEQJ) - Wendy Carlos - Bohlen-Pierce, etc...

- Systèmes "justes"

Harry Partch - Ben Johnston - Ervin Wilson, etc...

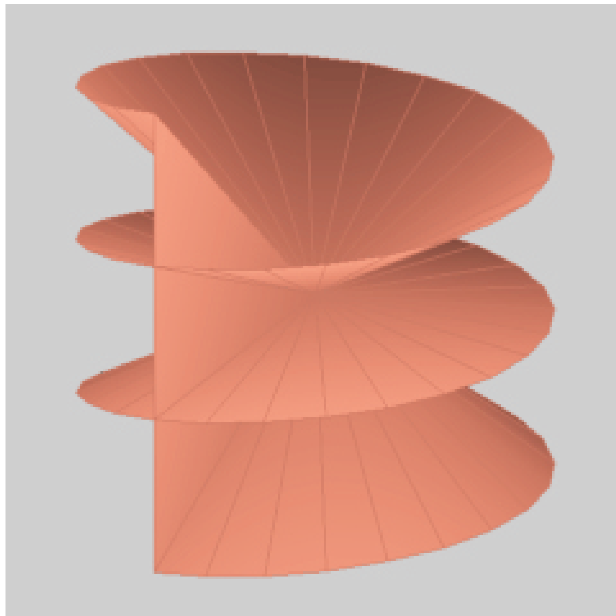
Spirale des quintes

Fx	Cx	Gx	Dx	Ax	Ex	
$3^{13}/2^{20}$	$3^{14}/2^{22}$	$3^{15}/2^{23}$	$3^{16}/2^{25}$	$3^{17}/2^{26}$	$3^{18}/2^{28}$	
F#	C#	G#	D#	A#	E#	B#
$3^6/2^9$	$3^7/2^{11}$	$3^8/2^{12}$	$3^9/2^{14}$	$3^{10}/2^{15}$	$3^{11}/2^{17}$	$3^{12}/2^{19}$
F	C	G	D	A	E	B
$2^2/3$	1	$3/2$	$3^2/2^3$	$3^3/2^4$	$3^4/2^6$	$3^5/2^7$
Fb	Cb	Gb	Db	Ab	Eb	Bb
$2^{13}/3^8$	$2^{12}/3^7$	$2^{10}/3^6$	$2^8/3^5$	$2^7/3^4$	$2^5/3^3$	$2^4/3^2$
					Ebb	Bbb
					$2^{18}/3^{10}$	$2^{16}/3^9$

Sur la surface log(z)

Systèmes à n sons

surface : $z^{1/n}$



Well-Formed Scales

Inventées en 1989 par David Clampitt et Norman Carey.
Etudiées ensuite par John Clough, Jack Douthett, Vittorio Cafagna, Thomas Noll, Gerald Meyerson, etc.

Une WFS est une gamme construite avec un générateur unique (a.z mod N) qui donne toujours le même nombre de sauts intevalliques

Exemple : L’ensemble {0, 1, 3, 5, 6, 8, 10} (Forte 7-35) est engendré par 5z mod 12 est une gamme bien formée (5z = 0, 5, 10, 3 = 15 mod 12, 8 = 20 mod 12, etc.)
(0) 1 3 (5) 6 8 (10) 0 1 (3) 5 6 (8) 10 0 (1) 3 5 (6)
Mais l’ensemble {0, 1, 2, 3, 5, 7, 8, 10} (8-23) n’est pas bien formé
(0) 1 2 3 (5) 7 8 (10) --> Pb : Différents steps

Propriété de Myhill : Une WFS a exactement un ou deux intervalles consécutifs.
Si elle en a deux, on dit qu’elle est non dégénérée (WFS*)

Carey-Clampitt ont montré les équivalences :
S est une gamme bien formée non dégénérée (WFS*)
équivaut à S est autosimilaire
équivaut à S vérifie la propriété de Myhill

John Clough et Jack Doutthett (1991) ont défini les
Gammes bien réparties (Maximally Even Sets) :
où les notes consécutives sont aussi éloignées que possible.
Un MES de p notes sur ZN s’écrit en notant [x] la partie entière de x
0, [p/N], [2p/N], ..., [(N-1)p/N] à une translation près

MES est différent de WFS

Systèmes cycliques

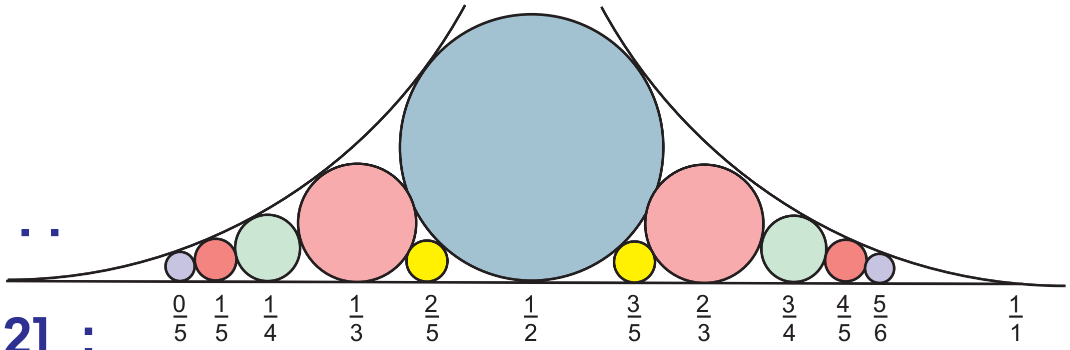
(Well-Formed Tone Systems)

On se fixe un nombre w (e.g. w=3)
On considère la suite :

$$\ldots, \frac{1}{w^3}, \frac{1}{w^2}, \frac{1}{w}, 1, w, w^2, w^3, \ldots$$

Pour la valeur w = 3, on a

. . ., 1/27, 1/9, 1/3, 1, 3, 9, 27, . . .



Les valeurs sont recadrées dans [1, 2] :

. . ., 32/27, 16/9, 4/3, 1, 3/2, 9/8, 27/16, . . .

Puis réordonnées par ordre croissant

Pour chaque n (= nombre de sons) , on obtient un système acoustique différent

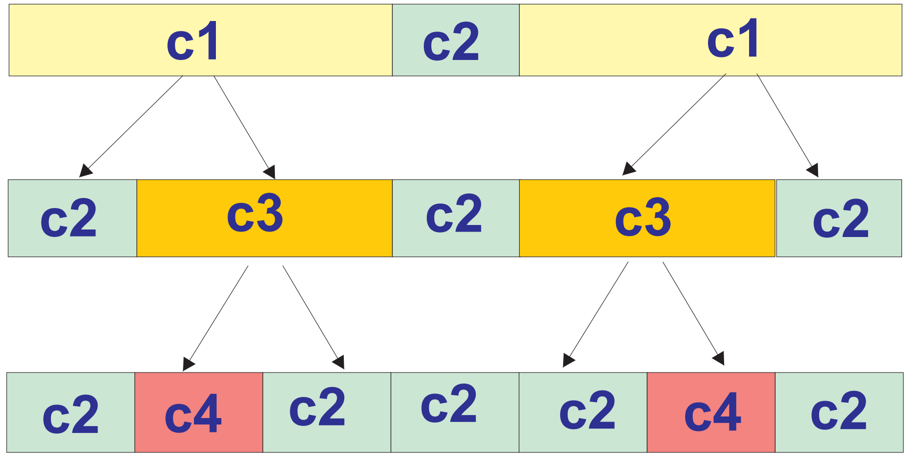
Ces systèmes s’emboitent les uns dans les autres comme des poupées russes

Le plus petit écart intervallaire de chaque échelle est un comma

Systèmes cycliques

Cas des échelles pythagoriciennes : w = 3

- Pour {1/3, 1, 3} on a {C(1), F (4/3), G (3/2)}
L3 = c1 c2 c1
avec c0 = 3/2, c1 = 4/3 et c2 = c0/c1 = 9/8
- Pour {1/9, 1/3, 1, 3, 9 } on a
L5 = c2 c3 c2 c3 c2
avec c3= c1/c2 = 32/27
- Pour k = 3, n = 2k+1 = 5,
L7 = c2 c4 c2 c2 c2 c4 c2
avec c4= c3/c2 = 256/243



Echelles pythagoriciennes			
3	2 c1	1 c2	c2 = c0/c1 = 9/8 = 204 cents
5	3 c2	2 c3	c3 = c1/c2 = 32/27 = 294 cents
7	5 c2	2 c4	c4 = c3/c2 = 256/243 = 90 cents
12	7 c4	5 c5	c5 = c2/c4 = 2187/2048 = 114 cents
17	12 c4	5 c6	c6 = c5/c4 = $3^{12}/2^{19}$ = 23 cents
29	17 c6	12 c7	c7 = c4/c6 = $2^{27}/3^{17}$ = 67 cents
41	29 c6	12 c8	c8 = c7/c6 = $2^{46}/3^{29}$ = 43 cents
53	41 c6	12 c9	c9 = c8/c6 = $2^{65}/3^{41}$ = 2 cents
65	53 c9	12 c10	c10 = c6/c9 = $3^{53}/2^{84}$ = 3.6 cents

Fractions continues

On se donne $\omega \in [1, 2[$ un élément générateur. Pour approcher les solutions entières de

$$\omega^q = 2^p$$

on contruit une approximation des rationnels p/q tels que

$$\frac{p}{q} = \frac{\log \omega}{\log 2} = \log_2 \omega$$

La décomposition du nombre $\log_2 \omega$ en fractions continues

$$\log_2 \omega = [a_0, a_1, a_2, ...] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots.}}}$$

Les convergentes sont les nombres

$$[a_0],\ [a_0, a_1],\ [a_0, a_1, a_2],\ [a_0, a_1, a_2, a_3], \ldots.$$

Semi-convergentes

Pour chaque convergente $[a_0, a_1, a_2, ..., a_n]$, avec $a_n > 1$,

on appelle **semi-convergentes** les nombres

$$[a_0, a_1, ..., a_{n-1}, 1], [a_0, a_1, ..., a_{n-1}, 2], ..., [a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n - 1]$$

Exemple : Pour la quinte $\omega = 3/2$,

$$\alpha = \log_2(3/2) = [0, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 23, 2, 2, 1, 1, 55, ...]$$

Les convergentes sont les nombres

$$1, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{12}, \frac{24}{41}, \frac{31}{53}, \frac{179}{306}, \frac{289}{665}, etc$$

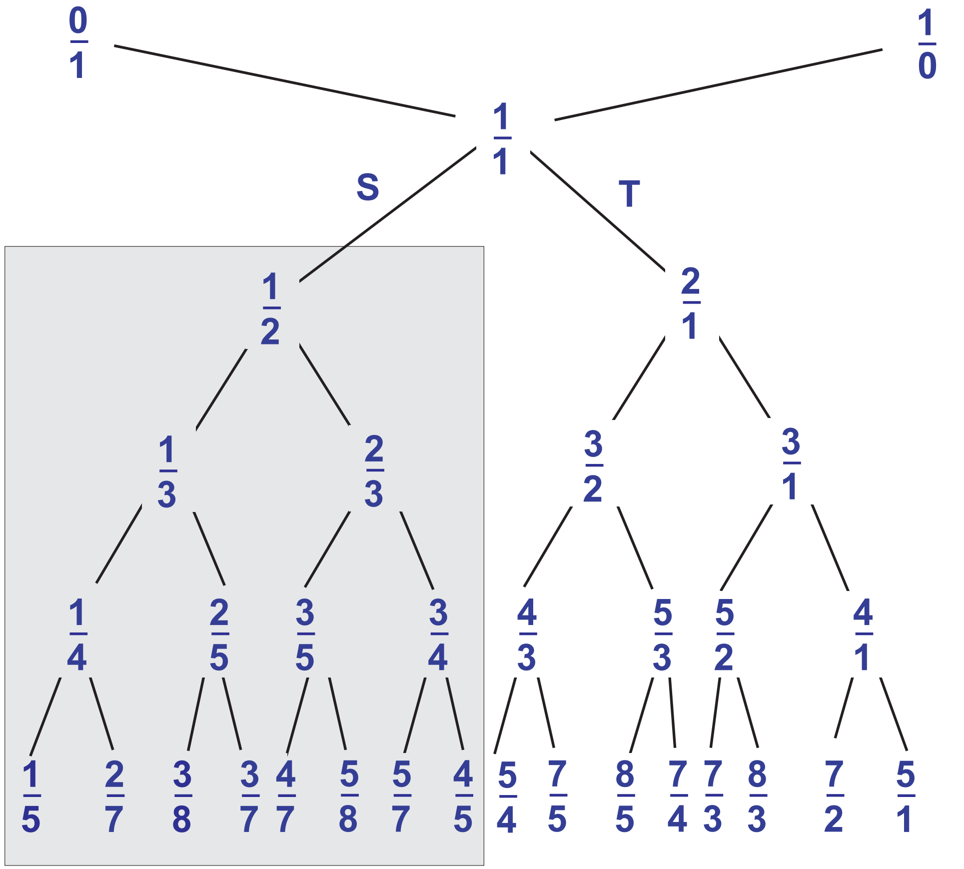
Les semi-convergentes sont les nombres.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{7}{12}, \frac{10}{17}, \frac{17}{29}, \frac{24}{41}, \frac{31}{53}, \frac{55}{94}, \frac{86}{147}, \frac{117}{200}, \frac{148}{253}, \frac{179}{306}, etc.$$

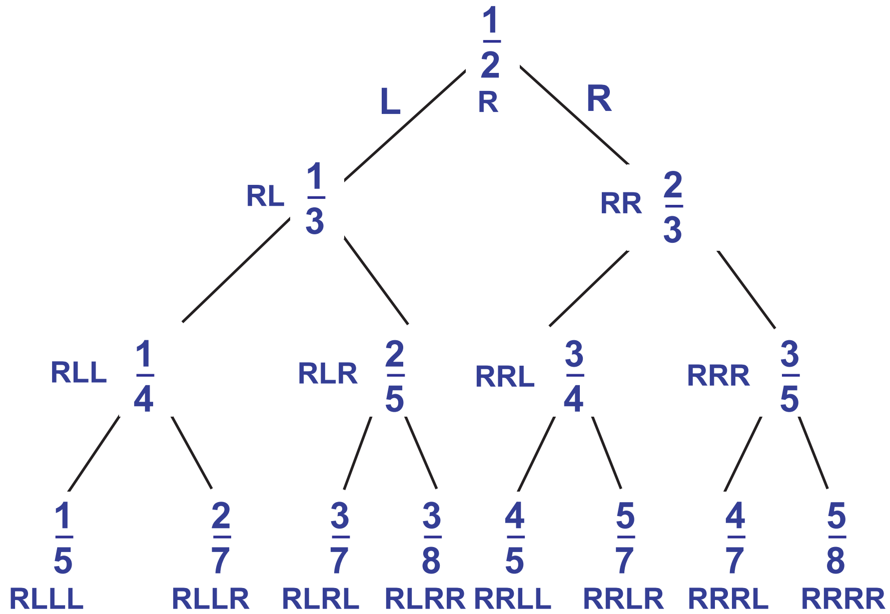
Théorème. Les dénominateurs des semi-convergentes de $\alpha = \log_2 \omega$ sont les cardinaux des gammes bien formées d'une même hiérarchie.

Arbre de Stern-Brocot

On redéfinit l'arbre de Stern-Brocot :



$$\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{p + p'}{q + q'}$$



$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad R(x) = 1/L(x)$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L(x) = 1 + x$$

Arbre de Stern-Brocot tressé

A chaque noeud de l'arbre, on associe

• Un mot u sur l'alphabet $\{R, L\}$ correspondant au trajet suivi dans l'arbre.
• Une fonction $A(x)$ obtenue en remplaçant dans le mot u les occurences de R et L par la composition des fonctions

$$L(x) = 1 + x,\ R(x) = 1/L(x)$$

et une fonction $B(x) = 1/A(x)$.
• La fraction $B(1)$.
• Une matrice $\mathcal{A}$ obtenue en remplaçant chaque occurence de R et L dans u par le produit des matrices

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Systèmes cycliques

Deux résultats essentiels :

Théorème 1. Soit $0 < \omega < 1$ et $1, p_1/q_1, p_2/q_2, ..., p_n/q_n, ...$ les semi-convergentes de $\alpha = \log_2(\omega)$. Chaque semi-convergente p_n/q_n détermine une hiérarchie de $(n-1)$ gammes bien formées non-dégénérées $W_1 \subset W_2 \subset ...W_{n-1}$ dont les cardinaux sont les dénominateurs des semi-convergentes $q_1, q_2, ...q_{n-1}$. Pour chaque $j = 1, 2, ..., n-1$, la gamme W_j est l'image de l'ensemble U_{q_j} de q_j entiers adjacents par l'application $U_{q_j} \to \mathbb{Z}_{q_n}$, $z \to p_n z$ mod q_n. Si q_j est pair $(q_j = 2k)$, l'ensemble U_{q_j} est défini par $U_{2k} = \{-k+1, ..., -1, 0, 1, ..., k\}$ et si q_j est impair $(q_j = 2k+1)$ l'ensemble est $U_{2k+1} = \{-k+1, ..., -1, 0, 1, ..., k\}$.

Systèmes cycliques

Théorème 2. La hiérachie des gammes bien formées non-dégénérées du théorème 1 est isomorphe à la hiérarchie des systèmes acoustiques bien formés. Pour chaque $j = 1, 2, ..., n-1$, si la matrice $\mathcal{A}_j$ associée à la semi-convergente $p_j/q_j = A(1)$ est notée

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

alors les deux intervalles constitutifs x et y du système acoustique bien formé sont solutions du système

$$\begin{cases} x^a y^b = 2 \\ x^c y^d = \omega \end{cases}$$

et donnés par les formules suivantes

$$x = \left(\frac{2^d}{\omega^b}\right)^{1/(ad-bc)} \quad , \qquad y = \left(\frac{\omega^a}{2^c}\right)^{1/(ad-bc)}$$

Systèmes pythagoriciens

On choisit $\omega = 3/2, n = 5$ et la semi-convergente $p_5/q_5 = 7/12$. On construit la hiérarchie des gammes bien formées pour $j = 1, 2, 3, 4$ avec $z \rightarrow p_5 z$ mod q_5.

• $q_1 = 2$. La gamme a deux degrés. Elle est isomorphe à l'image de {0,1} par l'application $z \rightarrow 7z$ mod 12. C'est la gamme bien formée {0, 7} de $\mathbb{Z}_{12}$. Le mot associé dans l'arbre de Sterrn-Brocot tressé est R et la matrice associée

$$\mathcal{A} = \mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le système cyclique associé (T_1) a deux intervalles constitutifs donnés par la résolution des équations $xy = 2$, $x = \omega$, i.e. $x = \omega$ et $y = 2/\omega$. Si on note $c_0 = y = 2/\omega$ et $c_1 = x = \omega$ on a

$$T_1 = c_0 c_1$$

et le système

$$C \text{ (1)} - \ G \ (\omega) - \ C' \text{ (2)}$$

• $q_2 = 3$. La gamme a trois degrés. Elle est isomorphe à l'image de $\{-1, 0, 1\}$ par l'application $z \rightarrow 7z$ mod 12. C'est la gamme bien formée {0, 5, 7} de $\mathbb{Z}_{12}$. Le mot de l'arbre de Stern-Brocot tressé est RR et la matrice associée

$$\mathcal{A} = \mathcal{R}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le système cyclique associé (T_2) a deux intervalles constitutifs donnés par la résolution des équations $x^2y = 2$, $xy = \omega$, i.e. $x = 2/\omega = c_1$ et $y = \omega^2/2 \equiv c_2$.

$$T_2 = c_1 c_2 c_1$$

et

$$C\ (1) -\ F\ (2/\omega) -\ G\ (\omega) -\ C'\ (2)$$

• $q_3 = 5$. La gamme a cinq degrés. Elle est isomorphe à l'image de $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ par l'application $z \to 7z$ mod 12. C'est la gamme bien formée{0, 2, 5, 7, 10} de $\mathbb{Z}_{12}$. Le mot de l'arbre de Stern-Brocot tressé est RRR et la matrice associée

$$\mathcal{A} = \mathcal{R}^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Le système cyclique associé (T_3) a deux intervalles constitutifs donnés par la résolution des équations $x^3y^2 = 2$, $x^2y = \omega$, i.e. $x = \omega^2/2 = c_2$ et $y = 4/\omega^3 \equiv c_3$.

$$T_3 = c_2c_3c_2c_3c_2$$

et

$$C\ (1) -\ D\ (\omega^2/2) -\ F\ (2/\omega) -\ G\ (\omega) -\ B\flat\ (4/\omega^2) -\ C'\ (2)$$

• $q_4 = 7$. La gamme a sept degrés. Elle est isomorphe à l'image de $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ par l'application $z \longrightarrow 7z$ mod 12. C'est la gamme bien formée {0, 2, 3, 5, 7, 9, 10} de $\mathbb{Z}_{12}$. Le mot de l'arbre de Stern-Brocot tressé est $RRRL$ et la matrice associée

$$\mathcal{A} = \mathcal{R}^3\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Le système cyclique associé (T_4) a deux intervalles constitutifs donnés par la résolution des équations $x^5y^2 = 2$, $x^3y = \omega$, i.e. $x = \omega^2/2 = c_2$ et $y = 8/\omega^5 \equiv c_4$.

$$T_4 = c_2c_1c_2c_2c_2c_1c_2$$

et

C (1)– D ($\omega^2/2$)– $E\flat$ ($4/\omega^3$)– F ($2/\omega$)– G (ω)– A ($\omega^3/2$)– $B\flat$ ($4/\omega^2$)– C' (2)

• $q_5 = 12$. La gamme a 12 degrés. Elle est isomorphe à l'image de $\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ par l'application $z \to 7z$ mod 12. C'est la gamme bien formée

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

de $\mathbb{Z}_{12}$. Le mot de l'arbre de Stern-Brocot tressé est $RRRLR$ et la matrice associée

$$\mathcal{A} = \mathcal{R}^3\mathcal{L}\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Le système cyclique associé (T_5) a deux intervalles constitutifs donnés par la résolution des équations $x^7y^5 = 2$, $x^4y^3 = \omega$, i.e. $x = 8/\omega^5 = c_4$ et $y = \omega^7/8 \equiv c_5$.

$$T_5 = c_4c_5c_4c_5c_4c_5c_4c_4c_5c_4c_5c_4$$

et

$$C\ (1) - D\flat\ (8/\omega^5) - \ D\ (\omega^2/2) - \ E\flat\ (4/\omega^3) - \ E\ (\omega^4/4) - \ F\ (2/\omega) -$$

$$F\sharp\ (\omega^6/8) - \ G\ (\omega) - \ A\flat\ (8/\omega^4) - \ A\ (\omega^3/2) - \ B\flat\ (4/\omega^2) - \ B\ (\omega^5/4) - \ C'\ (2)$$

Autres hiérarchies pythagoriciennes

Au lieu de prendre $n = 5$ et la semi-convergente $p_5/q_5 = 7/12$, on aurait pu prendre une autre valeur de n et l'application

$$z \longrightarrow p_n \cdot z \mod q_n$$

Par exemple pour $n = 6$, la semi-convergente $p_6/q_6 = 10/17$ et la définition $U_j = \{0, 1, ..., j-1\}$ conduit aux gammes bien formées suivantes

q_j	W_j
2	$\{0,\ 10\}$
3	$\{0, 3, 10\}$
5	$\{0, 3, 6, 10, 13\}$
7	$\{0, 3, 6, 9, 10, 13, 16\}$
12	$\{0, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 16\}$

Systèmes dorés et mésotoniques

Les systèmes dorés sont construits sur le nombre d'or d''où dérive la quinte dorée $\omega = 2^{\frac{15-\sqrt{5}}{22}}$. Les systèmes mésotoniques diminuent les quintes d'une fraction r de comma syntonique. Dans le mésotonique classique, $r = 1/4$ et la quinte vaut $(5^{1/4})$. Dans les deux cas, les premières valeurs des semi-convergentes sont les mêmes

$$\{1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{7}{12}, \frac{11}{19}, \frac{18}{31}, \frac{29}{50}, ...\}$$

La hiérarchie des systèmes acoustiques bien formés construit sur $z \longrightarrow 11z \bmod 19$ avec pour ensemble $U_j = \{0, 1, ..., j-1\}$ conduit aux gammes suivantes

q_j	W_j
2	$\{0,\ 11\}$
3	$\{0, 3, 11\}$
5	$\{0, 3, 6, 11, 14\}$
7	$\{0, 3, 6, 9, 11, 14, 17\}$
12	$\{0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 12, 14, 15, 17\}$

Vers une défintion du diatonisme

Soit m un entier positif. Une gamme *m*-**diatonique** est une gamme bien formée non dégénérée de générateur m dont le complément n'a pas deux notes consécutives.

Exemple :$A = \{0, 1, 2, 3, ..., N - 2\}$ est une gamme 1-diatonique de $\mathbb{Z}_N$.
$B = \{0, 2, 4, .., 2k\}$ et une gamme 2-diatonique de $\mathbb{Z}_{2k+1}$.

• Il n'existe pas de gamme 2-diatonique dans $\mathbb{Z}_{2k}$.

• Si A est une gamme *m*-diatonique, le cardinal de A est maximum, i.e. il n'existe pas de gamme B de générateur *m* de cardinal $|B| < |A|$ tel que B soit une gamme *m*-diatonique.

Gammes diatoniques généralisées

Une **gamme diatonique généralisée** A du tempérament égal à N sons ($N \geq 12$) est une gamme *m*-diatonique qui vérfie la propriété
(S) *Il n'existe pas de gamme bien formée non-dégénérée W entre A et A^c, i.e. telle que le cardinal $|W|$ vérifie $|A^c| \leq |W| \leq |A|$*
et dont le générateur m ($2 < m \leq trunc(N/2)$) minimise pour toutes les gammes possibles la différence $|A| - |A^c|$.

Une gamme *sous-diatonique* est une gamme *m*-diatonique vérifiant la propriété (S) dont le générateur ne vérifie pas la condition de minimalisation.

Exemple. Pour $N = 12$, la gamme diatonique usuelle $A =${si, do, ré, mi, fa, sol, la} $\simeq \{0, 1, 3, 5, 6, 8, 10\}$ est une gamme 5-diatonique. Son complémentaire est isomorphe à la gamme de générateur 5, $\{0, 3, 5, 8, 10\}$ qui n'est pas 5-diatonique. Le seul ensemble $\{0, 1, 3, 5, 8, 10\}$ de générateur 5 entre A et A^c n'est pas bien formé. Donc vérifie (S).

Gammes majeures généralisées

Une **gamme tonale généralisée** est une gamme *m*-diatonique ($m > 1$) qui contient un ensemble à transpositions limitées. Une **gamme majeure généralisée** est une gamme diatonique généralisée qui contient un ensemble à transpositions limitées qui a parmi toutes les gammes possibles le plus petit cardinal.

- Si N est premier, il n'existe pas de gamme majeure généralisée.

Exemple. Pour $N = 14$, la gamme $\{0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12\}$ est diatonique et contient l'ensemble à transpositions limitées $\{0, 3, 7, 10\}$. L'ensemble $\{0, 1, 2, 5, 6, 7, 10, 11\}$ est une gamme 5-engendrée qui contient l'ensemble à transpositions limitées $\{0, 7\}$, mais qui n'est pas une gamme 5-diatonique (son complémentaire a des notes adjacentes).

Gammes diatoniques et majeures généralisées

L'astérisque indique les gammes majeures.

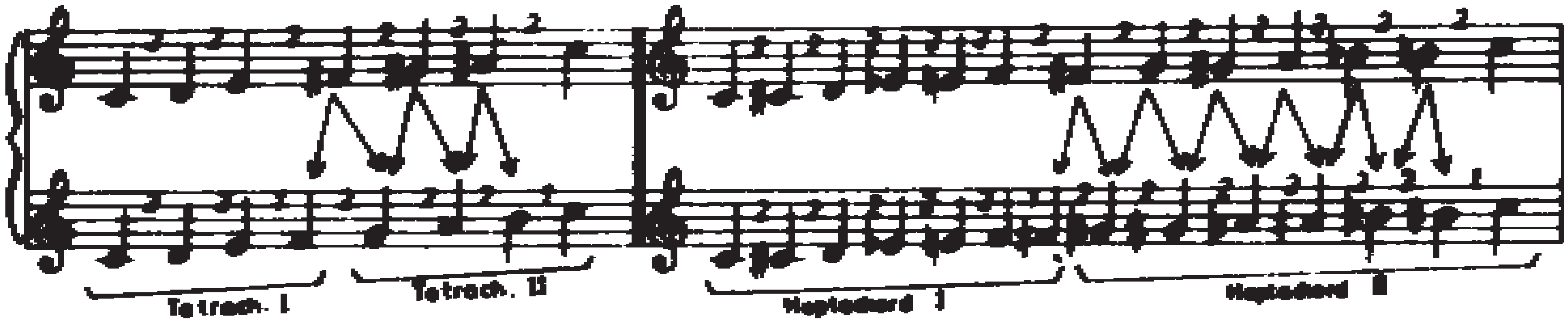
N	Gamme diatonique D	m	$\|D\|$
12^*	$\{0,1,3,5,6,8,10\}$	5	7
13	$\{0,2,4,5,7,9,10,12\}$	5	8
14^*	$\{0,1,3,4,6,7,9,10,12\}$	3	9
15	$\{0,2,4,6,8,10,12,14\}$	2	8
16^*	$\{0,1,3,5,7,8,10,12,14\}$	7	9
17	$\{0,1,3,5,6,8,10,11,13,15\}$	5	10
18^*	$\{0,2,4,5,7,9,10,12,14,15,17\}$	5	11
19	$\{0,2,4,5,7,8,10,12,13,15,16,18\}$	8	12
20^*	$\{0,1,3,5,7,9,10,12,14,16,18\}$	9	11
21	$\{0,1,3,4,6,8,9,11,12,14,16,17,19\}$	8	13
22^*	$\{0,1,3,5,6,8,10,11,13,15,16,18,20\}$	5	13
23	$\{0,1,3,5,7,8,10,12,14,15,17,19,21\}$	7	13
24^*	$\{0,1,3,5,7,9,11,12,14,16,18,20,22\}$	11	13

Gammes diatoniques et majeures généralisées

N	Gamme diatonique D	m	$\|D\|$
24*	$\{0, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 12, 14, 16, 18, 20, 22\}$	11	13
25	$\{0, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 24\}$	9	14
26*	$\{0, 2, 4, 6, 7, 9, 11, 13, 14, 16, 18, 20, 21, 23, 25\}$	7	15
27	$\{0, 1, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 16, 18, 20, 21, 23, 25\}$	5	16
28*	$\{0, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26\}$	13	15
29	$\{0, 1, 3, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 19, 21, 23, 25, 27\}$	9	16
30*	$\{0, 1, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 24, 26, 28\}$	7	17
31	$\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 22, 24, 26, 28, 20\}$	11	17
32*	$\{0, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 228, 30\}$	15	17
33	$\{0, 2, 4, 6, 7, 9, 11, 13, 14, 16, 18, 20, 21, 23, 25, 27, 28, 30, 32\}$	7	19
34*	$\{0, 2, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15, 17, 18, 20, 22, 24, 26, 27, 29, 31, 33\}$	9	19
35	$\{0, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 23, 25, 27, 29, 31, 33\}$	11	19
36*	$\{0, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34\}$	17	19

Chromatisme diatonisé

Inventé par Ivan Wyschnegradsky
Echelle de 13 sons = gamme tonale dans l’univers des quarts de ton
Construite par enchaînement de deux heptacordes



24 transpositions appelées “positions”

Chromatisme diatonisé

Prélude Opus 22, no 3.

Chromatisme diatonisé généralisé

La théorie de Wyschnegradsky se généralise à un tempérament égal de N degrés.

Théorème. Soit k un entier $k \geq 2$. L'ensemble

$$W_k = \{0, 1, 3, 5..., 2k+1, 2k+2, 2k+4, ..., 4k+2\}$$

est une gamme diatonique généralisée de $|W_k| = 2k+3$ degrés, dont le générateur est $m = 2k+1$ dans le tempérament égal à N tons, et

$$N = m + |W_k| = 4k+4$$

L'échelle W_k est une gamme majeure généralisée qui contient l'ensemble à transpositions limitées $\{0, 2k+2\}$.

Références

Agmon (Eytan), "Coherent Tone Systems: A Study in the Theory of Diatonicism". Journal of Music Theory 40/1 (1996): 39-59.

Cafagna (Vittorio), and Noll (Thomas), "Algebraic Investigations into Enharmonic Identification and Temperament". In G. Di Maio and C. di Lorenzo (Eds.), Proceedings of the 3rd International Conference Understanding and Creating Music, Caserta (2003).

Carey (Norman), Distribution Modulo 1 and Musical Scales. Ph.D Dissertation. University of Rochester (1998). Carey (Norman), "On Coherence and Sameness, and the Evaluation of Scale Candidacy Claims". Journal of Music Theory 46 (2002): 1-56.

Carey (Norman), "Coherence and Sameness in Well-formed and Pairwise Well-Formed Scales". Journal of Mathematics and Music 1 (2007).

Carey (Norman), and Clampitt (David), "Aspects of Well-Formed Scales". Music Theory Spectrum 11/2 (1989): 187-206.

Carey (Norman), and Clampitt (David), "Self-Similar Pitch Structures, their Duals, and their Rhythmic Analogues". Perspectives of New Music 34/2 (1996): 62-87.

Clampitt (David), Pairwise Well-Formed Scales: Structural and Transformational Properties, Ph.D Dissertation: State University of New York at Buffalo (1997).

Clough (John), "Aspects of Diatonic Sets". Journal of Music Theory 23 (1979): 45-61.

Clough (John), and Myerson (Gerald), "Variety and Multiplicity in Diatonic Systems". Journal of Music Theory 29/2 (1985): 249-270.

Clough (John), and Myerson (Gerald), "Musical Scales And the Generalized Circle of Fifths". The American Mathematical Monthly 93/9 (1986): 695-701.

Clough (John) and Douthett (Jack), "Maximally Even Sets". Journal of Music Theory 35 (1991): 93-173.

Clough (John), Engebretsen (Nora), and Kochavi (Jonathan), "Scales, Sets, and Interval Cycles: A Taxonomy". Music Theory Spectrum 21 (1999): 74-104.

Gould (Mark), "Balzano and Zweifel: "Another Look at Generalized Diatonic Scales", Perspectives of New Music, 38/2 (2000): 88-105.

Haluška (Jan), The Mathematical Theory of Tone Systems, Marcel Dekker, New-York (2003).

Jedrzejewski (Franck), ed. La loi de la Pansonorité Ivan Wyschnegradsky (version de 1953), Genève, Contrechamps (1996),

Jedrzejewski (Franck), Mathématiques des systèmes acoustiques, Tempéraments et modèles contemporains, Paris, L'Harmattan (2002).

Références

Jedrzejewski (Franck), Dictionnaire des musiques microtonales, Paris, L'Harmattan (2003).
Jedrzejewski (Franck), Mathematical Theory of Music. Editions IRCAM/Delatour France. Sampzon (2006).
Lewin (David), Generalized Musical Intervals and Transformations. Yale University Press, New Haven (1987).
Noll (Thomas), "Facts and Counterfacts: Mathematical Contributions to Music-Theoretical Knowledge" (2006) to appear.
Noll (Thomas), "Musical Intervals And Special Linear Transformations", submitted to Journal of Mathematics and Music, (2006).
Vicinanza (Domenico), "Paths on the Stern-Brocot Tree and Winding Numbers of Modes". Proceedings of the ICMC, Barcelona (2005).
Wyschnegradsky (Ivan), 24 Préludes in Vierteltonsystem, Préface, M.P. Belaieff, Frankfurt, (1979) 2-5.