Séminaire MaMuX

IRCAM, 2 février 2008

Propriétés cyclotomiques des canons apériodiques

Franck. Jedrzejewski@Cea.fr

Canons

Un canon est un couple (R, S) de sous-ensembles de $\mathbb{Z}_n$ tel que

$$R \oplus S = \mathbb{Z}_n$$

Exemple pour $n = 8$,

$$\{0, 2, 5, 7\} \oplus \{0, 4\} = \mathbb{Z}_8$$

Sous forme de table

	0	1	2	3	4	5	6	7
R	1		1			1		1
$R+4$		1		1	1		1	

Polynôme caractéristique

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{Z}_n$ on définit son polynôme caractéristique

$$A(x) = \sum_{a \in A} x^a$$

Pour $R = \{0, 2, 5, 7\}$

$$R(x) = 1 + x^2 + x^5 + x^7$$

La somme directe $R \oplus S$ a pour polynôme le produit

$$R(x)S(x) = 1 + x + \ldots + x^{n-1} \mod x^n - 1$$

Et l'union de deux sous-ensembles $R \cup S$ a pour polynôme caractéristique la somme

$$R(x) + S(x)$$

On transfère ainsi un calcul ensembliste sur l'algèbre des polynômes.

Groupes de Hajós

Un sous-ensemble de $\mathbb{Z}_n$ est périodique si

$$\exists r \in \mathbb{Z}_n \backslash \{0\}, \; A = A + r$$

Soit G un groupe abélien, **G est un groupe de Hajós**, si un des deux facteurs de la décomposition $G = R \oplus S$ est périodique.

Le canon (R, S) **est apériodique** si $\mathbb{Z}_n = R \oplus S$ est un groupe de non-Hajós.

Théorème de Sands-de Brujin. (R, S) est un canon apériodique si et seulement si $n = pqn_1n_2n_3$, avec $pn_1 \geq 2$, $qn_2 \geq 2$ et $gcd(n_1p, n_2q) = 1$.

$n =$ 72, 108, 120, 144, 168, 180, 200, 216, 240, 252, 264, 270, 280, 288, 300, 312, 324, 336, 360, 378, 392, 396, 400, 408, 432, 440, 450, 456, 468, 480, 500, 504, 520, 528, 540, 552, 560, 576, 588, 594, 600, 612, 616, 624, 648, 672, 675, 680, 684, 696, 700, 702, 720, 728, 744, 750, 756, 760, 784, 792, 800, 810, 816, 828, 864, 880, 882, 888, 900, 912, 918, 920, 936, 945, 952, 960, 968, 972, 980, 984, 1000.

Equivalence de canons

Deux canons (R, S) et (R', S') de même longueur $|R| = |R'|$ et $|S| = |S'|$ sont équivalents s'il existe un translation T_j et une permlutation σ de $\mathcal{S}_{|S|}$

$$T_j(R + s_i) = R' + s_{\sigma(i)}$$

pour $i = 1, 2, ..., |S|$. Les voix de (R, S) sont les voix de (R', S') a une permutation près.

Action du groupe cyclique $\mathbf{C_n}$. Pour $n = 8$, $\{0, 2, 5, 7\} \xrightarrow{\sigma} \{7, 0, 2, 5\} \xrightarrow{T_1} \{0, 1, 3, 6\}$

	0	1	2	3	4	5	6	7
R	1	1		1			1	
$R + 4$			1		1	1		1

Action du groupe diédral $\mathbf{D_n}$. $\{0, 2, 5, 7\} \xrightarrow{-x} \{0, 6, 3, 1\} \sim \{0, 1, 3, 6\}$.

Action du groupe affine $\mathbf{A_n}$. $S \sim S'$ si et seulement si $S' = aS + b$. Ex : $\{0, 2, 5, 7\} \xrightarrow{7x} \{0, 14, 35, 49\} \sim \{0, 6, 3, 1\}$

Algorithme de Vuza

Vuza a proposé un algorithme pour construire les canons apériodiques.

n	p_1	p_2	n_1	n_2	n_3	$S(C_n)$	$R(C_n)$	$S(D_n)$	$R(D_n)$	$S(A_n)$	$R(A_n)$
72	2	3	2	3	2	3	6	3	3	1	2
120	2	5	2	3	2	8	6	6	3	2	2
120	2	3	2	5	2	16	20	12	10	5	3
144	2	3	4	3	2	6	36	6	18	1	6
144	2	3	2	3	4	3	2808	3	?	1	?
168	2	3	2	7	2	104	42	65	21	15	4
168	2	7	2	3	2	16	6	11	3	3	2
180	2	3	2	3	5	3	?	3	?	1	?
180	2	3	2	5	3	16	?	12	?	5	?
200	2	5	2	5	2	125	20	75	10	8	3

MAIS : Les solutions de Vuza ne décrivent pas tous les canons apériodiques.

Cas n=72

Sous l'action du groupe cyclique, on a 3 solutions S (et 6 solutions R)

$$\begin{aligned} S_1 &= \{0,18\} \oplus \{0,8,16\} = \{0,8,16,18,26,34\} \text{ de structure } [8,8,2,8,8,38] \\ S_2 &= \{0,18\} \oplus \{0,8,40\} = \{0,8,18,26,40,58\} \text{ de structure } [8,10,8,14,18,14] \\ S_3 &= \{0,18\} \oplus \{0,8,64\} = \{0,22,38,40,54,56\} \text{ de structure } [22,16,2,14,2,16] \end{aligned}$$

Sous D_n on a les mêmes solutions. Sous le groupe affine, il n'y a qu'une solution

$$S_2 = 5S_1 \text{ et } S_3 = 7S_1$$

Pour la solution R, il y a 6 solutions sous C_n, mais 3 solutions sous D_n

$$\begin{aligned} R_1 &= \{0,1,5,6,12,25,29,36,42,48,49,53\} \text{ et } [1,4,1,6,13,4,7,6,6,1,4,19] \\ R_2 &= \{0,5,6,9,12,29,33,36,42,48,53,57\} \text{ et } [5,1,3,3,17,4,3,6,6,5,4,15] \\ R_3 &= \{0,6,11,12,15,35,36,39,42,48,59,63\} \text{ et } [6,5,1,3,20,1,3,3,6,11,4,9] \end{aligned}$$

Sous l'action du groupe affine, il n'y a que 2 solutions,

$$R_3 = 7R_2$$

Décomposition cyclotomique pour n=72

Le polynôme caractéristique de S se factorise en polynômes cyclotomiques

$$S(x) = 1 + x^8 + x^{16} + x^{26} + x^{34} = \phi_3\phi_4\phi_6\phi_{12}^2\phi_{24}\phi_{36}(x)$$

L'ensemble des indices est noté

$$T_S = \{3, 4, 6, \underline{12}, \underline{12}, 24, 36\}$$

Pour R, la même décomposition donne

$$T_R = \{2, 8, 9, 18, 72\}$$

Et la réunion des deux ensembles est l'ensemble des diviseurs de n

$$T_S \cup T_R \cup \{1\} = \text{diviseurs}(72)$$

Problème : Déterminer $\mathbf{T_S}$ et $\mathbf{T_R}$ pour un canon apériodique.

Structure non cyclotomique n=72

Pour $n = 72$, on a trois solutions qui s'écrivent

$$\begin{aligned} S_1(x) &= 1 + x^8 + x^{16} + x^{26} + x^{34} = \phi_3\phi_4\phi_6\phi_{12}^2\phi_{24}\phi_{36}(x) \\ S_2(x) &= S_1(x)(1 - x^8 + x^{24}) = S_1(x)\psi_1(x) \\ S_3(x) &= S_1(x)(1 - x^8 + x^{16}) = S_1(x)\psi_2(x) \end{aligned}$$

Problème :

Etudier la partie non-cyclotomique, i.e. la structure algébriques des fonctions ψ

$$\begin{aligned} S_1(x) &= S_2(x)(1 + x^8 - x^{40}) = S_2(x)\psi_3(x) \\ S_1(x) &= S_3(x)(1 - x^{32} + x^{48}) = S_2(x)\psi_4(x) \end{aligned}$$

On a la relation

$$\psi_1\psi_3 + \psi_2\psi_4 = 2$$

Polynômes cyclotomiques

Si on note μ_n le groupe des racines de l'unité $\zeta^n = 1$,

$$\phi_n(x) = \prod_{d|n} (x - \zeta) \ \in \mathbb{Z}[x]$$

Exemples : $\phi_0(x) = x$,

$$\begin{array}{ll} \phi_1(x) = x - 1 & \phi_4(x) = x^2 + 1 \\ \phi_2(x) = x + 1 & \phi_6(x) = x^2 - x + 1 \\ \phi_3(x) = x^2 + x + 1 & \phi_{12}(x) = x^4 - x^2 + 1 \end{array}$$

Propriétés élémentaires

(1) Pour tout entier n,

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \phi_d(x) = \prod_{d|n} (x^d - 1)^{\mu(n/d)}$$

où μ est la fonction de Moebius $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = 0$ si n est un carré, $\mu(n) = -1$ si n est le produit de nombres premieirs distincts.

(2) Si p est premier

$$\phi_p(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{p-1}$$

(3) Pour une puissance x^p

$$\phi_s(x^p) = \begin{cases} \phi_{ps}(x) & \text{si } p \text{ est un facteur de } s \\ \phi_s(x)\phi_{ps}(x) & \text{si } p \text{ n'est pas un facteur de } s \end{cases}$$

(4) Si s et p sont premiers entre eux

$$\phi_s(x^p) = \prod_{r||p} \phi_{rs}(x)$$

Construire des canons apériodiques

Théorème 1. Si (S, R) est un canon apériodique de $\mathbb{Z}_n$, r un entier $r > 1$, alors le canon

$$S' = rS \oplus \{0, 1, ..., r-1\} \text{ et } R' = rR$$

défini par les polynômes

$$S'(x) = (1 + x + ... + x^{r-1})S(x^r) \text{ et } R'(x) = R(x^r)$$

(S', R') est un canon apériodique de $\mathbb{Z}_{rn}$.
Exemple. $n = 72$, $r = 2$,

$$\begin{aligned} S(x) &= \phi_3\phi_4\phi_6\phi_{12}^2\phi_{24}\phi_{36}(x) \\ R(x) &= \phi_2\phi_8\phi_9\phi_{18}\phi_{72}\psi(x) \end{aligned}$$

(S', R') est un canon apériodique pour $n = 144$

$$\begin{aligned} S'(x) &= S(x^2) = \phi_3\phi_6\phi_8\phi_{12}\phi_{24}^2\phi_{48}(x) \\ R'(x) &= R(x^2) = \phi_4\phi_{16}\phi_9\phi_{18}\phi_{36}\phi_{144}\psi(x^2) \end{aligned}$$

La solution "canonique"

Théorème. Pour $n = pqn_1n_2n_3$, le canon

$$\begin{aligned} S &= qn_2n_3\{0,1,...,n_1-1\} \oplus pn_1n_3\{0,1,...,n_2-1\} \\ R &= A \cup T_1(B) \cup ... \cup T_{n_3-1}(B) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} A &= n_2n_3(\{0,1,..,q-1\} \oplus qn_1\{0,1,...,p-1\}) \\ B &= n_1n_3(\{0,1,...,p-1\} \oplus pn_2\{0,1,..,q-1\}) \end{aligned}$$

est un canon apériodique.
On pose $n_1 = r^{\alpha+1}$, $n_2 = s^{\beta+1}$ et $n_3 = t^{\gamma+1}$. On calcule les polynômes caractéristiques :

$$S(x) = \prod_{u|r^{\alpha+1}} \phi_u\left(x^{t^{\gamma+1}s^{\beta+1}q}\right) \prod_{u|s^{\beta+1}} \phi_u\left(x^{t^{\gamma+1}r^{\alpha+1}p}\right)$$

$$
\begin{aligned}
S(x) &= \phi_r\left(x^{t^{\gamma+1}s^{\beta+1}q}\right)\phi_{r^2}\left(x^{t^{\gamma+1}s^{\beta+1}q}\right)...\phi_{r^{\alpha+1}}\left(x^{t^{\gamma+1}s^{\beta+1}q}\right). \\
& \phi_s\left(x^{t^{\gamma+1}r^{\alpha+1}p}\right)\phi_{s^2}\left(x^{t^{\gamma+1}r^{\alpha+1}p}\right)...\phi_{s^{\beta+1}}\left(x^{t^{\gamma+1}r^{\alpha+1}p}\right)
\end{aligned}
$$

Pour calculer $R(x)$, on calcule d'abord les polynômes $A(x)$ et $B(x)$

$$
\begin{aligned}
A(x) &= \phi_q\left(x^{t^{\gamma+1}s^{\beta+1}}\right)\phi_p\left(x^{qr^{\alpha+1}s^{\beta+1}t^{\gamma+1}}\right) \\
B(x) &= \phi_p\left(x^{r^{\alpha+1}t^{\gamma+1}}\right)\phi_q\left(x^{pr^{\alpha+1}s^{\beta+1}t^{\gamma+1}}\right)
\end{aligned}
$$

L'ensemble T_R

$$T_R = T_A \cap T_B \cup \{t, t^2, ..., t^{\gamma+1}\}$$

Pour se débarasser des puissances de x, il faut utiliser la propriété suivante

$$
\phi_s(x^p) = \begin{cases} \phi_{ps}(x) & \text{si } p \text{ est un facteur de } s \\ \phi_s(x)\phi_{ps}(x) & \text{si } p \text{ n'est pas un facteur de } s \end{cases}
$$

et donc distinguer les cas où s et p sont premiers entre eux ou non. D'où les 14 cas suivants.

Les 14 cas

Pour les canons apériodiques, $n = pqn_1n_2n_3$. On pose $n_1 = r^{\alpha+1}$, $n_2 = s^{\beta+1}$ et $n_3 = t^{\gamma+1}$. Comme $gcd(n_1p, n_2q) = 1$, on a nécessairement

$$\begin{array}{cc} p \neq q & p \neq s \\ q \neq r & r \neq s \end{array}$$

Il reste 14 cas à étudier (on note uniquement les entiers premiers distincts)

1	pqrst	8	pqrqq
2	pqrsr	9	pqpst
3	pqrsp	10	pqpsp
4	pqrsq	11	pqpsq
5	pqrqt	12	pqpqt
6	pqrqr	13	pqpqp
7	pqrqp	14	pqpqq

Cas 1 : pqrst tous distincts

Si p, q, r, s, t sont tous distincts on peut "descendre" les puissances, on a :

$$\begin{aligned} T_S &= r\{1,q\}\{1,r,...,r^{\alpha}\}\{1,s,...,s^{\beta+1}\}\{1,t,...,t^{\gamma+1}\} \cup \\ & s\{1,p\}\{1,r,...,r^{\alpha+1}\}\{1,s,...,s^{\beta}\}\{1,t,...,t^{\gamma+1}\} \end{aligned}$$

De même, pour les polynômes $A(x)$

$$A(x) = \phi_q\left(x^{t^{\gamma+1}s^{\beta+1}}\right)\phi_p\left(x^{qr^{\alpha+1}s^{\beta+1}t^{\gamma+1}}\right)$$

on a

$$\begin{aligned} T_A &= q\{1,s,...,s^{\beta+1}\}\{1,t,...,t^{\gamma+1}\} \cup p\{1,q\}\{1,r,...,r^{\alpha+1}\} \cdot \\ & \{1,s,...,s^{\beta+1}\}\{1,t,...,t^{\gamma+1}\} \end{aligned}$$

Idem pour $B(x)$

$$B(x) = \phi_p\left(x^{r^{\alpha+1}t^{\gamma+1}}\right)\phi_q\left(x^{pr^{\alpha+1}s^{\beta+1}t^{\gamma+1}}\right)$$

on a

$$\begin{aligned} T_B &= q\{1,p\}\{1,r,...,r^{\alpha+1}\}\{1,s,...,s^{\beta+1}\}\{1,t,...,t^{\gamma+1}\} \cup \\ & \quad p\{1,r,...,r^{\alpha+1}\}\{1,t,...,t^{\gamma+1}\} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} T_R &= T_A \cap T_B \cup \{t,t^2,...,t^{\gamma+1}\} \\ &= \{t,t^2,...,t^{\gamma+1}\} \cup q\{1,s,...,s^{\beta+1}\}\{1,t,...,t^{\gamma+1}\} \\ & \quad \cup p\{1,r,...,r^{\alpha+1}\}\{1,t,...,t^{\gamma+1}\} \\ & \quad \cup pq\{1,r,...,r^{\alpha+1}\}\{1,s,...,s^{\beta+1}\}\{1,t,...,t^{\gamma+1}\} \end{aligned}$$

Si $\alpha=\beta=\gamma=0$. Les indices des polynômes cyclotomiques de S sont

$$T_S = r\{1,q\}\{1,s\}\{1,t\} \cup s\{1,p\}\{1,r\}\{1,t\}$$

Pour $n=2310, p=2, q=3, r=5, s=7, t=11$, les indices sont

$$\begin{aligned} T_S &= 5\{1,3\}\{1,7\}\{1,11\} \cup 7\{1,2\}\{1,5\}\{1,11\} \\ &= \{5,7,14,15,35,35,55,70,77,105,154,165,385,385,770,1155\} \end{aligned}$$

Les entiers 35 et 385 interviennent deux fois dans le calcul des indices, ce qui signifie que les polynômes cyclotomiques associés ϕ_{35} et ϕ_{385} interviendront deux fois dans le produit ϕ_S :

$$\phi_S(x) = \phi_5\phi_7\phi_{14}\phi_{15}\phi_{35}^2\phi_{55}\phi_{70}\phi_{77}\phi_{105}\phi_{154}\phi_{165}\phi_{385}^2\phi_{770}\phi_{1155}(x)$$

Les indices du polynôme R se calculent de la même manière en utilisant la formule précédente

$$T_R = \{t\} \cup [q\{1, s\} \cup p\{1, r\} \cup pq\{1, r\}\{1, s\}] \cdot \{1, t\}$$

Pour $n = 2310$,

$$\begin{aligned} T_R &= \{11\} \cup 3\{1, 7\}\{1, 11\} \cup 2\{1, 5\}\{1, 11\} \cup 6\{1, 5\}\{1, 7\}\{1, 11\} \\ &= \{2, 3, 6, 10, 11, 21, 22, 30, 33, 42, 66, 110, 210, 231, 330, 462, 2310\} \end{aligned}$$

Cas 2 : pqrsr

En remplaçant t par r dans $S(x)$

$$\begin{aligned} S(x) &= \phi_r\left(x^{r^{\gamma+1}s^{\beta+1}q}\right)\phi_{r^2}\left(x^{r^{\gamma+1}s^{\beta+1}q}\right)\ldots\phi_{r^{\alpha+1}}\left(x^{r^{\gamma+1}s^{\beta+1}q}\right)\cdot \\ &\quad \phi_s\left(x^{r^{\gamma+1}r^{\alpha+1}p}\right)\phi_{s^2}\left(x^{r^{\gamma+1}r^{\alpha+1}p}\right)\ldots\phi_{s^{\beta+1}}\left(x^{r^{\gamma+1}r^{\alpha+1}p}\right) \end{aligned}$$

On descend les puissances de r

$$\begin{aligned} S(x) &= \phi_{r^{\gamma+2}}\left(x^{s^{\beta+1}q}\right)\phi_{r^{\gamma+3}}\left(x^{s^{\beta+1}q}\right)\ldots\phi_{r^{\alpha+\gamma+2}}\left(x^{s^{\beta+1}q}\right)\cdot \\ &\quad \phi_s\left(x^{r^{\alpha+\gamma+2}p}\right)\phi_{s^2}\left(x^{r^{\alpha+\gamma+2}p}\right)\ldots\phi_{s^{\beta+1}}\left(x^{r^{\alpha+\gamma+2}p}\right) \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} S(x) &= \prod_{u|qs^{\beta+1}}\phi_{ur^{\gamma+2}}(x)\prod_{u|qs^{\beta+1}}\phi_{ur^{\gamma+3}}(x)\ldots\prod_{u|qs^{\beta+1}}\phi_{ur^{\alpha+\gamma+2}}(x) \\ &\quad \prod_{v|pr^{\alpha+\gamma+2}}\phi_{vs}(x)\prod_{v|pr^{\alpha+\gamma+2}}\phi_{vs^2}(x)\ldots\prod_{v|pr^{\alpha+\gamma+2}}\phi_{vs^{\beta+1}}(x) \end{aligned}$$

D'où

$$
\begin{aligned}
T_S &= r^{\gamma+2}\{u,\ u \mid qr^{\alpha}s^{\beta+1}\} \cup s\{v,\ v \mid pr^{\alpha+\gamma+2}s^{\beta}\} \\
&= r^{\gamma+2}\{1,q\}\{1,r,...,r^{\alpha}\}\{1,s,...,s^{\beta+1}\} \cup \\
&\quad s\{1,p\}\{1,r,...,r^{\alpha+\gamma+2}\}\{1,s,...,s^{\beta}\}
\end{aligned}
$$

De même,

$$
\begin{aligned}
T_R &= \{r,r^2,...,r^{\gamma+1}\} \ \cup \ q\{1,s,...,s^{\beta+1}\}\{1,r,...,r^{\gamma+1}\} \\
&\quad \cup p\{1,r,...,r^{\alpha+1}\} \ \cup \ pq\{1,r,...,r^{\alpha+1}\}\{1,s,...,s^{\beta+1}\}
\end{aligned}
$$

Pour $\alpha = \beta = \gamma = 0$,

$$
\begin{aligned}
T_S &= r\{1,q\}\{1,s\}\{1,p\} \ \cup \ s\{1,r\}\{1,p,p^2\} \\
T_R &= \{p\} \ \cup \ q\{1,s\}\{1,p\} \ \cup \ p^2\{1,r\} \ \cup \ p^2q\{1,r\}\{1,s\}
\end{aligned}
$$

Pour $n = 420$, $p = 2$, $q = 3$, $r = 5$, $s = 7$

$$
\begin{aligned}
T_S &= \{5,7,10,14,15,28,30,35,53,60,70,105,140,210\} \\
T_R &= \{2,3,4,6,12,20,21,42,60,84,420\}
\end{aligned}
$$

Cas 13 : pqpqp

Les deux solutions

$$
\begin{aligned}
T_S &= p^{\gamma+2}\{1,...,p^{\alpha}\}\{1,q,...,q^{\beta+2}\} \ \cup \ q\{1,q,...,q^{\beta}\}\{1,...,p^{\alpha+\gamma+3}\} \\
T_R &= \{p,...,p^{\gamma+1}\} \ \cup \ \{p^{\alpha+\gamma+3}\} \ \cup \ q^{\beta+2}\{1,p,...,p^{\gamma+1}\} \ \cup \ \{q^{\beta+2}p^{\alpha+\gamma+3}\}
\end{aligned}
$$

Si $\alpha = \beta = \gamma = 0$,

$$
\begin{aligned}
T_S &= p^2\{1,q,q^2\} \ \cup \ q\{1,p,p^2,p^3\} \\
T_R &= p \ \cup \ p^3 \ \cup \ q^2\{1,p\} \ \cup \ q^2p^3
\end{aligned}
$$

Si $n = 72$, $p = 2$, $q = 3$

$$
\begin{aligned}
T_S &= \{3,4,6,12,12,24,36\} \\
T_R &= \{2,8,9,18,72\}
\end{aligned}
$$

Cas 14 : pqpqq

Les deux solutions

$$
\begin{aligned}
T_S &= p\{1, ..., p^{\alpha}\}\{1, q, ..., q^{\beta+\gamma+3}\} \ \cup \ q^{\gamma+2}\{1, q, ..., q^{\beta}\}\{1, ..., p^{\alpha+2}\} \\
T_R &= \{q, ..., q^{\gamma+1}\} \ \cup \ \{q^{\beta+\gamma+3}\} \ \cup \ p^{\alpha+2}\{1, q, ..., q^{\gamma+1}\} \ \cup \ \{q^{\beta+\gamma+3} p^{\alpha++2}\}
\end{aligned}
$$

Si $\alpha = \beta = \gamma = 0$,

$$
\begin{aligned}
T_S &= q^2\{1, p, p^2\} \ \cup \ p\{1, q, q^2, q^3\} \\
T_R &= \{q, q^3, p^2, p^2 q, p^2 q^3\}
\end{aligned}
$$

Si $n = 108$, $p = 2$, $q = 3$

$$
\begin{aligned}
T_S &= \{2, 6, 9, 18, 18, 36, 54\} \\
T_R &= \{3, 4, 12, 27, 108\}
\end{aligned}
$$

La canon de Fripertinger

Pour $n = 108$, le canon de longueur 18

$$\begin{aligned} R &= A \cup T_4(B) \cup T_8(C) \\ &= \{0, 4, 8, 9, 10, 18, 26, 40, 44, 46, 54, 62, 63, 72, 76, 80, 82, 98\} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} C &= n_1 n_2 n_3 \{0, 1, ..., pq - 1\} \\ &= 18\{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \end{aligned}$$

n'est pas solution de Vuza, n'est pas une solution "canonique". Son polynôme caractéristique

$$R(x) = \phi_3 \phi_4 \phi_{12} \phi_{27} \phi_{108} \psi(x)$$

avec

$$\psi(x) = 1 - x + x^3 + ... + x^{33} - x^{35} + x^{36}$$

La structure cyclotomique est conservée, mais le reste est compliqué.

Le canon de Lagarias-Szabo

Lagarias-Szabo ont proposé le canon suivant pour réfuter une conjecture de Tijdeman

$$\begin{aligned} U &= 36\{0,1,..,4\} \oplus 100\{0,1,2\} \oplus 225\{0,1\} \\ V &= 30\{0,1,2,6,7,8,10,11,12,13,16,17,18,19,22,23,25,26,28,29\} \\ &\cup 18\{7,17,27,37,47\} \ \cup \ 20\{11,26,41\} \ \cup \ 75\{5,11\} \end{aligned}$$

Les indices des polynômes cyclotomiques

$$\begin{aligned} T_U &= \{2,3,5,6,6,10,10,12,15,18,20,30,30,30,45,50,60,60, \\ &\quad 75,90,90,150,150,180,300,450\} \\ T_V &= \{4,9,25,36,100,225,900\} \end{aligned}$$

Le polynôme

$$V(x) = \phi_4\phi_9\phi_{25}\phi_{36}\phi_{100}\phi_{225}\phi_{900}\psi(x)$$

a pour reste

$$\psi(x) = 1 - x^2 - x^3 + \ldots - x^{427} - x^{428} + x^{430}$$

Lagarias, Szabo *Universal Spectra and Tijdeman's Conjecture on Factorization of Cyclic Groups*, 2000.
La solution canonique correspond au cas 12, *pqpqt*

$$\begin{aligned} S &= 100\{0,1,2\} \oplus 225\{0,1\} \\ R &= A \cup T_1(B) \cup \ldots \cup T_{24}(B) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} A &= 75\left(\{0,1,2\} \oplus 6\{0,1\}\right) \\ B &= 6\left(6\{0,1,2\} \oplus \{0,1\}\right) \end{aligned}$$

$\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$, $t = 5$, $p = 2$, $q = 3$ (ou l'inverse $p = 3$, $q = 2$)

$$\begin{aligned} T_R &= \{4, \underline{5}, 9, \underline{20}, 25, 36, \underline{45}, 100, \underline{180}, 225, 900\} \\ &= T_V \cup \{5, 20, 45, 180\} \\ &= T_V \cup 5\{1,4\}\{1,9\} \end{aligned}$$

La solution de Lagarias-Szabo modifie la structure cyclotomique de la solution canonique.

Conclusions

- La décomposition cyclotomique de la solution canonique est connue pour toute valeur de n.

- Tout *canon périodique* vérifie la condition (T2) de Coven-Meyerowitz.

- La *solution canonique* vérifie la condition (T2) de Coven-Meyerowitz.

- Pour montrer que la conjecture de Flugede est vraie en dimension 1 ou pour montrer que (T2) est vraie pour tout canon, il suffit de montrer que la condition qu'un canon apériodique vérifie (T2) est équivalente à la condition que la solution canonique vérifie (T2). Comme cette dernière condition est vraie, il s'ensuivra que Flugede est vraie.