Index terminologique

algèbre . . . **2.2.5**,
algèbre de Lie . . . **4.1.2**, 4.3.5, 4.4.3,
algèbre de von Neumann . . . **2.6**, 4.3.5, 7.3.3,
algèbre stellaire . . . **2.4.3**, 2.5, 2.6,
analyticité . . . 4.1.2, **5.5.1**, 7.1.3,
application . . . **1.1.5**, 1.3.1, 1.5.1, 1.5.2,
application linéaire . . . **2.2**, 2.4.3, 2.5.2, 4.1.1, 4.1.2, 4.3.3, 4.4.4, 6.2.1,
associativité . . . 1.1.4, 1.5.1, **2.1**, 2.2.1, 2.2.5, 2.7, 3.1.2,
automorphisme, isomorphisme . . . **1.5.1**, 3.1.2, 3.3, 3.4, 4.2.4, 6.3.3,
base . . . **2.2.3**, 2.4.1, 2.4.2, 4.1.1, 4.2.2, 4.2.5, 4.3.1, 4.3.2,
bifurcation . . . **5.3.1**, 5.3.2,
bijection . . . **1.1.5**, 7.2.1, 7.2.2,
caractère . . . 2.5.1, **4.3.1**,
cardinal . . . **7.2.2**, 7.2.4,
carquois . . . **4.4.4**,
catastrophe . . . **5.4.3**, 5.5.3,
catégorie . . . 1.2.3, 1.4.1, **1.5.1**, 1.5.2, 1.6.1, 2.2.2, 3.3.2, 4.2.1, 4.3.3, 6.2.2,
champ de vecteurs . . . 1.3.2, **5.2.1**,
cohomologie . . . 1.3.3, 1.4.1, **6.4.2**,
(non) commutativité . . . 1.3.3, 1.5.1, **2.1**, 2.3.5, 2.5.2, 2.6.1, 2.6.5, 3.1.2, 4.1.1, 4.3.1, 4.3.2,
compacité, compactification . . . **2.3.2**, **7.3.2**,
complétude, complétion . . . **2.3.2**, **7.3.3**,
composition . . . 1.2.3, 1.3.1, **1.5.1**, 1.5.2, **2.1**, 2.2, 2.4.3, 4.1.1, 4.2.3, 6.2.1,
conjugaison . . . 2.6.3, **3.1.3**, 4.3.1,
continuité . . . **1.1.5**, 1.3.2, 1.5.1, 2.2.5, 2.3.2, 2.4.3, 2.5.2, 4.2.5, 5.2.1, 6.1.1, 6.3.1, **7.1.4**,
corps . . . **3.1.2**, 3.1.3, 3.3.1,
covariance, contravariance . . . 1.4.1, **1.5.2**, 6.2.1,
déploiement . . . **5.4.1**, 5.4.3, 5.5.2,
dérivabilité, dérivée, différentiabilité . . . 2.3.3, 4.1.2, **3.4**, 5.1.1, 6.3.2, **7.1.2**,
diagramme de Dynkin . . . **4.4.3**, 4.4.4, 5.4.2, 5.4.3, 5.5.3,
dimension . . . 1.1.1, **1.3.1**, 2.2, **2.2.3**, 2.4.2, 2.6.2,
discriminant . . . **5.4.1**, 5.4.3,
distribution . . . **6.3.2**, 6.3.3, 7.3.3,
divergence . . . 3.4, 3.6, **7.4.1**, 7.4.2,
éclatement . . . **5.5.2**, 5.5.3,
équation algébrique . . . **3.1.1**,
équation différentielle . . . **3.4**, 4.2.5, 7.2.3,
équivalence de catégories . . . 1.4.1, **1.5.2**,
espace de Hilbert . . . **2.4.2**, 4.3.2, 7.3.3,
espace dual . . . **6.1.3**, 6.3.1,
espace euclidien . . . 1.5.3, **2.4.1**, 2.4.2, 2.5.1, 4.3.1, 4.3.2, 4.4.3, 6.1.3,
espace topologique . . . **1.1.1**, 1.1.4, 1.2.3, 1.3.1, 1.4.1, 1.4.2, 1.5.4, 1.6.3, 2.5.1, 2.5.2, 5.3.3,
espace vectoriel . . . 1.5.3, 2.2, **2.2.1**, 2.4.1, 2.6.2, 3.1.2, 3.4, 4.1.1, 4.1.2, 4.2.5, 4.4.4, 6.1.3,
évanescence . . . **5.4.2**, 5.5.2,
facteur . . . 2.6, **2.6.1**,
facteur moyennable . . . **2.6.4**, 7.3.3,
faisceau . . . 1.3.1, **1.3.2**, 1.3.3, 1.4.1, 1.4.2, 1.5.1, 1.5.3, 1.5.4,
fibre . . . **1.5.4**, 7.3.3,

filtre **1.1.2**, 1.1.4,
fonction **1.1.5**, 1.2.1, 1.2.2, 2.2.5, 2.3, 2.4.2, 2.5.2, 3.4, 4.1.2, 5.2, 5.2, 6.3.2, 7.1.2,
foncteur 1.4.1, **1.5.2**, 1.5.3, 1.5.4, 3.3.2, 6.2.1, 6.2.3,
foncteurs adjoints **1.5.3**, 1.5.4, 1.6.2, 1.6.3, 6.2.3,
forme différentielle **6.4.2**, 6.4.3,
forme linéaire **6.1.3**, 6.3.1,
forme normale **5.3.1**,
généricité **5.1.1**, 5.3,
groupe 1.3.3, 1.4.1, 2.2.1, **3.1.2**,
groupe de Galois **3.1.2**, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 4.3.3,
groupe de Lie simple **4.4.3**,
groupe fini simple **4.4.2**,
groupe fondamental (de Poincaré) **3.3.2**, 3.3.3, 4.2.5, 8.5,
intérieur **1.1.3**, 1.6.3,
intégrale 2.5.2, 3.5, **7.1.2**,
langage ensembliste **1.1.3**, 7.2.5,
limite 1.5.3, 3.3.1, 3.3.2, 7.1.4, 7.3.2, 7.3.3,
lissité **4.1.2**, 5.5.1,
matrice **2.2.3**, 2.3.5, 2.6.1, 3.4, 4.1.1,
mesurabilité, mesure . . . . **2.3.1**, 2.5.2 , 4.3.2, 7.4.1,
monodromie 3.4, **4.2.5**,
morphisme 1.2.3, 1.3.1, **1.5.1**, 1.5.2, 2.2.2, 4.2.4,
nombre algébrique, nombre transcendant **3.3.1**, **3.5**,
nombre (réel, complexe) **1.1.5**, **7.2.1**,
norme . . . . **2.4.1**, 2.4.2, 2.4.3, 2.5.2 , 6.3.1, 7.3.3,
obstruction 1.3.3, 3.2.3,
opérateur **2.2**, 2.4, 2.5, 2.6, 4.1.1,
opérateur adjoint 1.5.3, **2.4.1**, 2.6.1, 6.2.1,
opérateur unitaire **2.4.1**, 2.6.2, 4.3.1, 4.3.2, 4.3.4,
ordinal **7.2.2**, 7.2.3,
ordre **1.1.4**, 1.5.1, 6.2.2, 7.2.2,
orthogonalité **2.4.1**, 4.4.3,
point critique **5.2**, 5.4,
présentation **4.2.3**,
projecteur (orthogonal) **2.4.1**, 2.6.2,
produit scalaire **2.4.1**, 2.4.2, 4.3.1, 4.3.2, 6.1.3,
produit tensoriel **4.2.5**, 4.3.3, 6.2.3,
prolongement analytique **5.5.1**, 7.4.1, 7.4.2,
racine d'une équation algébrique **3.1.1**, 3.1.2,
renormalisation 3.6, 7.4.2,
représentation **4.2.4**,
représentation linéaire **4.2.5**, 4.3, 4.4, 7.3.3,
résolubilité 3.1.1, **3.1.3**, 3.2.4, 3.4,
revêtement **1.2.2**, 1.2.3, 3.3.2, 3.3.3,
singularité 3.4, 4.2.5, **5.1.1**, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 6.3.2,
site **1.2.3**, 1.4.2,
stabilité 4.1.2, **5.3.3**,
surface de Riemann **1.2.2**, 1.4.2, 3.3.2,
symplectique 4.4.3, **5.4.3**, 5.5.3,
topos **1.4**, 1.5.4, 1.6,

trace **4.1.1**, 4.3.1,
transformée de Fourier **6.3.3**,
transformée de Legendre **6.3.4**,
treillis **1.1.4**, 1.1.5, 1.2.3, 1.4.1, 1.6.3, 3.2.2, 6.2.2,
variété **1.3.1**, 1.3.3, 2.3.5,
variété algébrique **1.2.3**, 1.4.1,
variété analytique **5.5.1**, 5.5.2,
variété lisse 1.3.2, **5.1.1**, 5.5.2,
variété riemannienne 2.3.3, **6.4.2**,

Index de mathématiciens cités

Abel N. (1802-1829) 3.1.1, 3.2.3,
Arnold V. (1937-) 5.3.2, 5.4.2, 5.4.3,
Bolzano B. (1781-1848) 7.1.4,
Bourbaki N. (1935-) 1.1.1, 7.2.5,
Burnside W. (1852-1927) 4.3.1, 4.4.2,
Cantor G. (1845-1918) 2.2, 2.3.1, 7.1.4, 7.2.1, 7.2.2, 7.2.4,
Carnot L. (1753-1823) 6.1.1,
Cartan É. (1869-1951) 4.4.3,
Cartan H. (1904-2008) 1.3.1, 7.3.3,
Cauchy A. (1789-1857) 7.1.4,
Cayley A. (1821-1895) 3.1.2, 5.2.4,
Chasles M. (1793-1880) 6.1.2, 6.4.3,
Cohen P. (1934-2007) 7.2.4,
Connes A. (1947-) 2.3.5, 2.6.3, 2.6.4, 3.5,
Dedekind R. (1831-1916) 2.2, 4.3.1, 7.1.4, 7.2.1, 7.2.5,
Desargues G. (1591-1661) 6.1.1, 7.3.1,
Drinfeld V. (1954-) 3.3.3,
Euler L. (1707-1783) 7.1.2, 7.1.4, 7.4.1, 7.4.2,
Fourier J. (1768-1830) 2.4.2, 6.3.3,
Frobenius F. (1849-1917) 4.3.1, 4.4.2,
Galois É. (1811-1832) 3.1, 3.2, 3.4, 4.4.2,
Gauss F. (1777-1855) 2.3.3,
Gelfand I. (1913-) 2.5.1, 2.5.2, 4.3.5,
Gergonne J. (1771-1859) 6.1.1, 6.1.2,
Girard J.-Y. (1947-) 2.7, 8.1,
Gödel K. (1906-1978) 7.2.4, 7.2.5,
Goodstein R. (1912-1985) 7.2.3,
Grassmann H. (1809-1877) 2.2,
Grothendieck A. (1928-) 1.2.3, 1.4.1, 1.4.2, 1.5.4, 1.6.1, 3.3.2, 3.3.3, 3.5, 4.3.3, 7.3.3,
Hausdorff F. (1868-1942) 1.1,
Hilbert D. (1862-1943) 2.4.2,
Hironaka H. (1931-) 5.5.2,
Hodge W. (1903-1975) 6.4.2,
Jones V. (1952-) 2.6.5,
Klein F. (1849-1925) 3.2.2, 3.3.2,
Killing W. (1847-1923) 4.4.3,
Lagrange L. (1736-1813) 3.1.1, 4.1.2, 6.3.4, 7.1.2, 7.1.3, 7.1.4,

Laplace P.-S. (1749-1827) 4.1.2, 7.2.3,
Leibniz G. (1646-1716) 1.1, 7.1.1,
Leray J. (1906-1998) 1.3.1, 1.4.2, 7.3.3,
Liouville J. (1809-1882) 3.4,
MacLane S. (1909-2005) 1.5.1,
Monge G. (1746-1818) 6.1.1,
Newton I. (1643-1727) 2.6.1, 6.3.3, 7.1.1,
Novikov P. (1901-1975) 4.2.3,
Peano G. (1858-1932) 2.2, 7.2.3,
Perelman G. (1966-) 8.5,
Poincaré H. (1854-1912) 3.3.2, 6.4.1,
Poncelet V. (1788-1867) 6.1.1, 6.1.2,
Ramis J.-P. (1943-) 3.4,
Riemann B. (1826-1866) 1.1, 1.2.2, 2.3.1, 2.3.3, 3.3.2, 7.1.4, 7.3.2, 7.4.2,
Riesz F. (1880-1956) 2.5.2, 2.6.1,
Schwartz L. (1915-2002) 6.3.2,
Thom R. (1923-2002) 5.4.3,
Thurston W. (1946-) 8.5,
Viète F. (1540-1603) 3.1.1,
von Neumann J. (1903-1957) 2.6.1, 2.6.2, 4.3.5,
Weierstrass K. (1815-1897) 5.5.1, 7.1.4, 7.3.3,
Weyl H. (1885-1955) 4.3.2, 4.3.4, 4.4.3, 5.4.3,
Whitney H. (1907-1989) 5.3.2,
Woodin H. (1955-) . . . . 7.2.4.

Glossaire des structures de base

Notions et notations ensemblistes

Ces notions traitent des « multiplicités », dans la plus grande généralité.

L'*ensemble vide* est noté $\emptyset$.
La notation $x \in X$ veut dire : x appartient à l'ensemble X, *i.e.* est un *élément* de X.
La notation $A \subset X$ veut dire : A est une *partie* de X, *i.e.* est un ensemble d'éléments de X.
Si A et B sont deux parties de X, $A \cap B$ désigne leur *intersection* (ensemble des éléments appartenant à A et à B), $A \cup B$ leur *réunion* (ensemble des éléments appartenant à A ou à B). $X \setminus A$ désigne le *complémentaire* de la partie A dans X (ensemble des éléments de X n'appartenant pas à A).
Le *produit cartésien* $X_1 \times \ldots \times X_n$ d'ensembles $X_1, \ldots, X_n$ est l'ensemble des suites $(x_1, \ldots, x_n)$ avec $x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n$. Si $X_1 = \ldots = X_n = X$, on le note X^n.

Une *application* d'un ensemble (*source*) X vers un ensemble (*but*) Y est une règle f qui associe à tout élément x de X un élément $f(x)$ de Y. On utilise souvent les notations $f : X \to Y$, $X \xrightarrow{f} Y$ et $x \mapsto f(x)$. On dit parfois *fonction* au lieu d'application, surtout lorsque Y est l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ou bien l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
L'*application identique* de X est l'application de X dans X qui ne modifie aucun élément. Elle est notée id_X ou 1_X.
La *composée* d'une application $f : X \to Y$ et d'une application $g : Y \to Z$ est l'application de X vers Z (notée $g \circ f$ ou simplement gf) définie par $x \mapsto g(f(x))$.

Le *graphe* de $f : X \to Y$ est l'ensemble des couples $(x, f(x))$, lorsque x parcourt les éléments de X (lorsque X et Y sont des intervalles de $\mathbb{R}$, c'est la notion familière de courbe plane représentant la fonction f).
On dit que f est une *bijection* si tout élément y de Y est l'image par f d'un et d'un seul élément $f^{-1}(y)$ de X ; ce qui permet de définir la bijection inverse $f^{-1} : Y \to X$.
L'*image inverse* $f^{-1}(B)$ d'une partie B de Y par une application $f : X \to Y$ est la partie de X formée de tous les éléments que f applique dans B.

Notions topologiques

Ces notions traitent qualitativement des « lieux » et des « relations spatiales ».

Un *espace topologique* est un ensemble X muni d'une collection $\mathfrak{O}$ de parties dites *ouvertes*, qui comprend $\emptyset$ et X, qui est stable par réunion et par intersection finie. Les éléments de X sont appelés *points*. L'exemple de base est celui de $X = \mathbb{R}$ en prenant pour $\mathfrak{O}$ la collection de toutes les réunions d'intervalles privés de leurs extrémités (et plus généralement $\mathbb{R}^n$, en remplaçant intervalles privés de leurs extrémités par boules privées de leur circonférence).
La partie complémentaire d'une partie ouverte est dite *fermée*.
On appelle *voisinage* d'un point $x \in X$ toute partie de X qui contient une partie ouverte à laquelle x appartient.

Une application $f : X \to Y$ entre espaces topologiques est dite *continue* si l'image inverse de toute partie ouverte de Y est une partie ouverte de X (lorsque X et Y sont des intervalles de $\mathbb{R}$, cela correspond à la notion « intuitive » : on peut « tracer le graphe de f sans lever le crayon »).
On dit que f est un *isomorphisme* (ou *homéomorphisme*) si f est une bijection continue dont l'inverse f^{-1} est aussi continue.

Une *variété* topologique de dimension n est un espace topologique X qui est réunion de parties ouvertes U_i (appelés *cartes*) isomorphes à des ouverts de $\mathbb{R}^n$ (on démontre que la dimension n est alors définie sans ambiguïté). Sur les intersections $U_i \cap U_j$, on dispose donc de bijections, appelées *changements de cartes*, d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ vers un autre. Selon les propriétés particulières de ces changements de cartes, lissité, analyticité, *etc*..., on parle de variétés lisses, analytiques, *etc*...

Un espace topologique X est *compact* si, de quelque manière qu'on l'écrive comme réunion de parties ouvertes U_i, X est déjà réunion d'un nombre fini d'entre les U_i.

Notions algébriques

La notion de groupe modélise l'aspect « opératoire » de toutes sortes de « symétries ».

Un *groupe* est un ensemble G muni d'une application $G \times G \xrightarrow{\cdot} G$ *associative* (*i.e.* vérifiant $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$), qui admet un *élément neutre* 1_G (*i.e.* tel que $1_G \cdot x = x \cdot 1_G = x$), et eu égard à laquelle tout élément $x \in G$ admet un inverse x^{-1} (*i.e.* tel que $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1_G$). L'exemple de base est le groupe des permutations des éléments d'un ensemble X, pour la composition, l'élément neutre étant l'application identique de X (en fait, tout groupe est sous-groupe d'un groupe de permutations).
Un groupe G est dit *commutatif* ou *abélien* si on a $x \cdot y = y \cdot x$ pour tout $(x, y) \in G^2$. L'exemple de base est le groupe des entiers, pour l'addition.

Un *morphisme* (ou *homomorphisme*) de groupes $f : G \to H$ est une application de G vers H telle que $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ pour tout $(x, y) \in G^2$. Par exemple, étant donné $g \in G$, la *congugaison* par g est le morphisme de G dans lui-même défini par $h \mapsto ghg^{-1}$.

En termes informels, un corps est un ensemble dans lequel il est possible d'« effectuer des additions, des soustractions, des multiplications et des divisions (sauf par 0) ».

Précisément, un *corps* est un ensemble K muni de deux applications $K \times K \overset{+,\cdot}{\to} K$, telles que $(K, +)$ soit un groupe abélien (dont l'élément neutre est noté 0), que $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ soit aussi un groupe abélien (dont l'élément neutre est noté 1), les deux étant reliés par *distributivité* : $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$. Les exemples de base sont le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels (fractions), le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, et le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

La notion d'espace vectoriel donne un substrat aux combinaisons linéaires, qui mobilisent à la fois l'addition de certaines « grandeurs » entre elles et leur multiplication par des « nombres ».

Précisément, un *espace vectoriel* sur un corps K est la donnée d'un groupe abélien $(V, +)$ et d'une application $K \times V \overset{\cdot}{\to} V$ associative (eu égard aux lois $\cdot$ de K et V), vérifiant

$$1 \cdot v = v,\ \lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w,\ (\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$$

pour tout $(\lambda, \mu, v, w) \in K^2 \times V^2$. Les éléments de V sont appelés *vecteurs* (le *vecteur nul* ou *origine* est l'élément neutre de $+$). L'exemple de base est $\mathbb{R}^n$, $+$ étant l'addition coordonnée par coordonnée, $\cdot$ étant la multiplication de chaque coordonnée par un même nombre.

Une application $f : V \to W$ entre espaces vectoriels sur K est dite *linéaire* si elle préserve les combinaisons linéaires, *i.e.* $f(\lambda \cdot v + \mu \cdot w) = \lambda \cdot f(v) + \mu \cdot f(w)$ pour tout $(\lambda, \mu, v, w) \in K^2 \times V^2$. Lorsque $V = W$, on parle d'*opérateur (linéaire)* sur V. Lorsque f est une bijection, son inverse est linéaire. Le groupe des opérateurs linéaires inversibles (pour la composition) est noté $GL(V)$.

Notions catégoriques

La notion de catégorie fournit un point de vue très général sur les objets mathématiques où l'on occulte délibérément leur structure interne pour mettre l'accent sur leurs rapports mutuels.

Une *catégorie* $\mathcal{C}$ consiste d'une part en une collection d'*objets* A, et d'autre part en la donnée, pour tout couple d'objets (A, B), d'un ensemble $\mathcal{C}(A, B)$ dont les éléments sont appelés *morphismes* ou *flèches* de A vers B. On requiert que les morphismes se composent lorsque cela fait sens (*i.e.* le *composé* gf de $f \in \mathcal{C}(A, B)$ et de $g \in \mathcal{C}(B, C)$ est un élément de $\mathcal{C}(A, C)$), la composition étant associative (*i.e.* vérifiant $h(gf) = (hg)f$) ; on requiert aussi qu'il y ait un morphisme identité 1_A de A vers lui-même, qui composé avec tout morphisme de source ou de but A, ne le modifie pas. Les exemples de base sont la catégorie des ensembles (les morphismes étant les applications), la catégorie des espaces topologiques (les morphismes étant les applications continues), la catégorie des espaces vectoriels (les morphismes étant les applications linéaires).
On dit que $f \in \mathcal{C}(A, B)$ est un *isomorphisme* s'il admet un inverse, *i.e.* s'il existe $g \in \mathcal{C}(B, A)$ tels que $fg = 1_B,\ gf = 1_A$; que f est un *automorphisme* si de plus $A = B$.

De même que les ensembles sont reliés par des applications, les catégories sont reliées par des foncteurs, qui agissent tant sur les objets que sur les morphismes.

Un *foncteur* $\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ associe à chaque objet A de $\mathcal{C}$ un objet $\phi(A)$ de $\mathcal{D}$ et à chaque morphisme $f \in \mathcal{C}(A, B)$ un morphisme $\phi(f) \in \mathcal{D}(\phi(A), \phi(B))$. On requiert que ϕ préserve les identités et la composition. Le foncteur identique $Id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est celui qui ne modifie ni objet ni morphisme.
Les foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ peuvent être vus comme les objets d'une nouvelle catégorie : un morphisme (ou *transformation naturelle*) de ϕ_1 vers ϕ_2 est une règle qui associe à tout objet A de $\mathcal{C}$ un morphisme $u_A \in \mathcal{D}(\phi_1(A), \phi_2(A))$, de sorte que pour tout morphisme $f \in \mathcal{C}(A, B)$ dans $\mathcal{C}$, on ait $\phi_2(f) \circ u_A = u_B \circ \phi_1(f)$.
Deux catégories $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ sont dites *équivalentes* s'il existe des foncteurs $\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D},\ \psi : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tels que les foncteurs composés $\psi\phi$ et $\phi\psi$ soient isomorphes aux foncteurs identiques $Id_{\mathcal{C}}$ et $Id_{\mathcal{D}}$ respectivement.