

Leçons de Mathématiques contemporaines à l'IRCAM

Yves André¹

6 février 2009

¹École Normale Supérieure, Département de Mathématiques, 45 rue d'Ulm, 75005 Paris, France, andre@dma.ens.fr

an die Glasperlenspieler

Introduction.

Ce petit livre rassemble et complète des « leçons de Mathématiques contemporaines » données par l'auteur à l'IRCAM¹ en 2008/2009, devant un public d'intellectuels venant d'horizons divers.

Son propos est de donner accès à la pensée mathématique d'aujourd'hui, en présentant, au cours de chaque leçon, un concept central, une idée-force des Mathématiques à des non-mathématiciens.

Il ne s'agit pas d'un cours au sens usuel : il n'y a ni parcours graduel univoque, ni visée de transmission d'un quelconque savoir-faire mathématique.

Il ne s'agit pas non plus d'une introduction historique, ni d'une apologie, ni d'une anthologie, ni d'un catalogue raisonné, ni d'un survol panoramique² (encore que l'on puisse tirer de ces pages des tables d'orientation pour un assez vaste pan des Mathématiques contemporaines) ; ni d'une « entreprise scientifico-caritative », comme disait G. Châtelet, et nous nous abstiendrons de déployer

la panoplie puérile charriée par le big-bang (qui ne cesse de commencer),
le chaos (qui neutralise tout), [...] le fractal (qui fascine surtout les esprits un peu simples)³,

ainsi que les néo-indivisibles de la prétendue « analyse non-standard » et les guirlandes tressées autour des théorèmes de Gödel - bref, les thèmes-bateaux qu'une certaine vulgarisation mathématique ressasse sur un ton guilleret.

Il existe heureusement des exemples réussis de vulgarisation⁴ qui, loin de ces lieux communs et des amusettes de « mathématiques récréatives », invitent en douceur à de vrais voyages sur les terres de l'Algèbre, de la Géométrie ou de l'Analyse, et permettent parfois d'en apercevoir quelque sommet.

¹Institut de Recherche et Coordination Acoustique/Musique, Paris.

²pour un catalogue raisonné, commenté et mis en perspective, des notions et résultats de base des Mathématiques, on recommande le livre *Mathematics, Form and Function* de S. MacLane : cet ouvrage limpide et extrêmement soigné permet d'acquérir rapidement un solide bagage mathématique.

Pour un panorama, on pourra consulter les conférences d'initiation par divers auteurs : *Leçons de mathématiques d'aujourd'hui*, vol. I, II, Cassini. Contrairement au présent livre, ces deux volumes, ainsi que celui de MacLane, s'adressent d'abord à un public d'étudiants en Mathématiques.

³Gilles Châtelet, *Les enjeux du mobile*, Seuil 1993, introduction.

⁴voir par exemple *Dimensions* sur www.dimensions-math.org

Mais le présent livre se situe sur un tout autre plan. Basé sur la conviction que les Mathématiques sont une pensée avant d'être une technique, son objectif est précisément de contribuer à *ouvrir cette pensée vivante méconnue à d'autres formes de pensée contemporaines*, dans l'espoir de susciter des résonances.

Pour mieux saisir la singularité de ce projet mené à l'IRCAM, on peut imaginer ce que serait son « symétrie » : donner accès à la musique d'aujourd'hui à des non-connaisseurs (par exemple mathématiciens), non par le biais d'un cours intensif de solfège ou d'un discours musicologique, mais par une confrontation, préparée, aux œuvres elles-mêmes. L'analogie laisse penser que la compréhension passe par une phase de « choc », qu'il s'agit de dépasser ; elle suggère de ne pas chercher à s'appropriier le contenu de ces leçons sur le mode des dictées musicales, mais de *construire sa propre écoute* - dans une démarche qui

viserait à une saisie rationnelle de l'allusion et de l'apprendre sur l'apprendre [... sans] confondre l'apprendre avec une razzia sur un butin informatif⁵.

Les cinq principes qui guident cette entreprise sont les suivants.

1) Parmi les éléments constitutifs des mathématiques vivantes - formation de concepts, raisonnement, calcul... - , c'est l'*élément conceptuel* que nous privilégierons, presque exclusivement.

2) Les concepts fondamentaux dont il s'agira seront non seulement situés, mais effectivement *présentés*. Il ne sera donc pas question de les enrober d'un discours décoratif et métaphorique, mais d'aller « à la chose même » (nous essaierons en contrepartie de réduire les détails techniques au minimum compatible avec cette rude exigence).

3) Pour atténuer l'impression d'hermétisme des Mathématiques si souvent évoquée, nous choisirons ces concepts fondamentaux sur le critère qu'ils condensent des points de vue mathématiques sur des *notions communes*, c'est-à-dire n'appartenant pas en propre aux Mathématiques : espace, symétrie, singularité, dualité, infini... Chacun pourra confronter ces points de vue à ceux qui lui sont plus familiers (musicaux, architecturaux, philosophiques...) sur les mêmes notions communes, et disposer ainsi d'un point d'ancrage.

4) Nous nous attacherons à dessiner avec netteté les *mouvements de pensée et enjeux* entourant chacun de ces concepts. Quelques perspectives historiques seront évoquées ça et là, non pour elles-mêmes, mais comme moyen d'éclairer ces enjeux. Surtout, nous nous évertuerons à restituer

ce surplus de sens que l'écriture formalisée croit bon d'évacuer, alors même que là gît l'essence de la pensée mathématique⁶.

5) Les concepts présentés réapparaîtront discrètement au fil des chapitres sous diverses perspectives, de manière à favoriser une compréhension rétrospective et surtout à laisser entrevoir la fascinante et mystérieuse *unité* des Mathématiques (les chapitres seront néanmoins assez largement indépendants pour pouvoir circuler librement de l'un à l'autre⁷).

⁵G. Châtelet, *loc. cit.*

⁶F. Patras, *La pensée mathématique contemporaine*, PUF 2001, p. 6.

⁷L'index et le glossaire peuvent aider en cas de désorientation passagère.

Par ailleurs, sans tabler sur aucun prérequis mathématique (ce qui ne revient pas à nier le rôle de la culture mathématique dans l'appropriation de ces leçons), nous supposons le lecteur non seulement rompu à la pensée spéculative, mais aussi animé d'un fort intérêt *a priori* pour la pensée mathématique en général et ses liens avec d'autres modes de penser.

Remerciements. Je remercie l'IRCAM et son directeur, Frank Madlener, ainsi que le séminaire MaMuX d'avoir accueilli ce projet. Je remercie Moreno Andreatta et François Nicolas d'en avoir assuré l'organisation avec beaucoup de dynamisme. C'est grâce à la fidélité d'un public très motivé et interactif que le projet a pu aboutir.

Les nombreuses discussions avec François Nicolas qui ont nourri ce projet, son soutien et son enthousiasme constants m'ont été très précieux ; je l'en remercie.

Je remercie tous les collègues qui m'ont encouragé dans cette entreprise, et tout particulièrement Pierre Cartier pour sa lecture critique très attentive et les corrections et suggestions qu'il m'a communiquées.