

LA VÉRITÉ DU BEAU
DANS LA MUSIQUE

Collection *Musique/Sciences*

dirigée par Jean-Michel Bardez & Moreno Andreatta

La collection *Musique/Sciences* contribue à la mise en perspective des rapports entre deux types de pensée qui ont entretenu des liens étroits depuis l'Antiquité : la pensée musicale et la pensée scientifique. Le *quadrivium* souvent cité (qui regroupait musique, astronomie, géométrie et arithmétique) nous rappelle simplement qu'à une époque imprégnée de souffle divin il n'était pas inquiétant de concevoir ces deux pensées comme jumelles. Au cours du XX^e siècle, musique et science ont développé de nouvelles articulations, particulièrement en établissant des relations profondes avec les mathématiques et en ouvrant progressivement la recherche musicale à l'utilisation de l'informatique. La modélisation, dans ses aspects à la fois théoriques, analytiques et compositionnels, est, plus que jamais, au cœur d'une réflexion musicologique générale riche d'implications philosophiques qui viennent irriguer les savoirs musicaux et scientifiques. On n'amoindrit pas le plaisir de l'écoute lorsqu'elle est plus active, plus consciente de certains aspects générateurs — bien au contraire.

Cette collection pluridisciplinaire proposera des ouvrages aussi bien en français et en anglais qu'en édition bilingue ou en plusieurs langues.

Déjà parus

André Riotte, Marcel Mesnage, *Formalismes et modèles musicaux*, 2 vol.

Carlos Agon, Gérard Assayag, Jean Bresson (ed.), *The OM Composer's Book*, vol. I

Franck Jedrzejewski, *Mathematical Theory of Music*

Moreno Andreatta, Jean-Michel Bardez, John Rahn (ed.), *Around Set Theory.*
A French/American Musicological Meeting

Moreno Andreatta, Jean-Michel Bardez, John Rahn (ed.), *Autour de la Set Theory.*
Rencontre musicologique franco-américaine

À paraître

Rozalie Hirs and Bob Gilmore (ed.), *Contemporary compositional techniques and OpenMusic*

Jean Bresson, Carlos Agon, Gérard Assayag (ed.), *The OM Composer's Book*, vol. II

Emmanuelle Rix et Marcel Formosa (dir.), *Vers une sémiotique générale du temps*
dans les arts

Guerino Mazzola
en collaboration avec Yun-Kang Ahn

LA VÉRITÉ DU BEAU DANS LA MUSIQUE

Quatre leçons à l'École normale supérieure

Préface d'Yves André

Collection *Musique/Sciences*



Comité éditorial

Carlos Agon, Ircam/CNRS, Paris
Gérard Assayag, Ircam/CNRS, Paris
Marc Chemillier, université de Caen
Ian Cross, université de Cambridge
Philippe Depalle, université McGill, Montréal
Xavier Hascher, université de Strasbourg
Alain Poirier, Conservatoire national supérieur de musique et de danse de Paris
Miller Puckette, université de Californie, San Diego
Hugues Vinet, Ircam/CNRS, Paris

Coordination éditoriale

Claire Marquet, Dany Baudouin et Moreno Andreatta

Mise en page

Yun-Kang Ahn

Conception couverture

Belleville

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays.

Le code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 n'autorise, aux termes de l'article L. 122-5, 2e et 3e a), d'une part, « que les copies ou reproductions strictement réservées à l'usage du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, « que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration ». « Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou ayant cause, est illicite » (article L.122-4). Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

ISBN 2-7521-0029-9

2007 by Editions DELATOUR FRANCE/Ircam-Centre Pompidou

www.editions-delatour.com

www.ircam.fr

Sommaire

Préface	xi
Avant-propos	xv
I Introduction	1
1 La pensée derrière le calcul	3
2 Pourquoi du vrai dans le beau ?	7
3 Le programme de ce livre	9
II Composition — la musicologie expérimentale	13
4 Les Big Bang en physique, biologie et culture	15
4.1 Le Big Bang de la physique	15
4.2 Le Big Bang de la biologie	16
4.3 Le Big Bang de la culture	17
5 L'univers de la musique entre fait et fiction	19
5.1 L'harmonie pythagoricienne préétablie	19
5.2 Schoenberg et le temps de Planck	20
5.3 Un principe anthropique ?	21
6 La révolution des points de Grothendieck	23
6.1 La limite des outils de la musicologie traditionnelle	23
6.2 Un point est une flèche	24
6.3 La logique géométrique des topoi	27
7 L'idée boulézienne de l'analyse transductive	29
7.1 Analyse stérile, analyse créatrice et l'œuvre ouverte	30
7.2 L'idée topologique de la transduction	31

7.3	Le plan de notre transduction	32
7.4	Le profit de la transduction ?	33
8	Le modèle quantique	35
8.1	Quantification des points de Grothendieck	35
8.1.1	Le modèle de Schoenberg	36
8.1.2	La reconstruction mathématique du modèle	38
8.2	Optimisation de la modulation	42
9	Les mondes de Ratz et Uhde	45
9.1	Monde, antimonde, catastrophes	45
9.2	La modélisation de la topographie modulante	48
9.2.1	Modulations standard	49
9.2.2	Quanta et catastrophes	51
9.3	Les germes du travail motivique	53
10	Reconstruction créatrice	55
10.1	Transduction par variation des paramètres	56
10.1.1	L'architecture modulante	57
10.1.2	La construction du germe motivique et du thème principal	58
10.2	Motivique et modulation dans le noyau	60
10.2.1	La structure motivique	60
10.2.2	La modulation dans le noyau	62
10.3	Commentaires conclusifs	63
III	Contrepoint — le principe anthropique	65
11	La variation du modèle	67
11.1	Historicité et système	67
11.2	De l'analyse créatrice à la création de modèles	68
11.3	Penser aujourd'hui la musique du futur	69
12	Intervalles et tangentes	71
12.1	Le tore des tierces	71
12.2	L'espace des tangentes	73
12.3	Orientation contrapuntique	74
13	L'autocomplémentarité contrapuntique	75
13.1	L'autocomplémentarité <i>AC</i> du contrepoint classique	75
13.2	L'autocomplémentarité dans l'EEG	78
14	Le dévissage de l'identité	83
14.1	La contradiction intérieure du concept de tension contrapuntique	83
14.2	Affaiblir la contradiction par des symétries contrapuntiques	84
14.3	Le dévissage de l'identité	85

14.4	Le théorème contrapuntique	87
15	Extension du modèle aux dichotomies fortes	89
15.1	Les dichotomies fortes	89
15.2	La géométrie des dichotomies	90
15.3	Le théorème contrapuntique généralisé	92
16	Le contrepoint du futur	93
16.1	La dualité des dichotomies et des gammes	93
16.2	Déformation du contrepoint classique ?	94
16.3	Pour une théorie créative de la musique	95
IV	Interprétation — la théorie infinitésimale	97
17	Le caractère infinitésimal de l'interprétation	99
17.1	La substance dans l'interprétation	99
17.2	La structure infinitésimale de l'interprétation	101
17.3	Quatre types de globalisation	103
18	Le langage des champs interprétatifs	105
18.1	Les champs interprétatifs	105
18.2	Deux exemples illustratifs de champs interprétatifs	107
18.3	La « magie » des conditions initiales	109
19	Hiéarchies de cellules interprétatives	113
19.1	La catégorie des cellules interprétatives	113
19.2	Hiéarchies cellulaires	115
20	La généalogie des hiéarchies interprétatives	117
20.1	La généalogie de l'articulation du tempo	117
20.2	Le stemma : généalogie interprétative	119
20.3	Premières remarques sur les opérateurs interprétatifs	120
20.3.1	Le SplitOperator	121
20.3.2	Expression analytique	121
21	Analyse de la « Rêverie »	123
21.1	La théorie et le module <i>MetroRubette</i>	123
21.2	Application : une analyse	127
22	Opérateurs interprétatifs	131
22.1	La fonction des opérateurs analytiques	131
22.2	Opérateurs de tempo	132
22.3	Opérateurs de Lie	133

23 La science expérimentale de l'interprétation	135
23.1 Nécessité et précision des logiciels	135
23.2 La leçon des premières expériences	136
23.3 Théorie inverse de l'interprétation	137
23.3.1 Vers une théorie mathématique de la critique?	137
23.3.2 Un paradigme stématisque de la théorie inverse	138
23.3.3 Argerich et Horowitz	141
 V Corporéité — l'intelligence de la gestuelle	 143
24 Symbole, diagramme, gestuelle	145
24.1 La crise du 18 mai 2002	145
24.2 La gestuelle des pianistes	147
24.3 Le formalisme gestuel du théâtre « nô »	150
24.4 La gestuelle chez Brecht et Merleau-Ponty	152
24.5 Cavaillès, Deleuze, Châtelet, Alunni	153
24.6 Ontologies et sémiotiques	154
24.7 Gestuelle et intelligence incorporée	157
24.8 Gestuelle et temporalité	157
 25 La main du pianiste	 159
25.1 Interprétation gestuelle et sonore	159
25.2 Géométrie et dynamique	161
25.3 Implémentation de la théorie	162
25.4 Une première expérience	163
 26 Théorie de la gestuelle	 165
26.1 Des gestes physiques aux gestes topologiques	165
26.2 Hypergestes	166
26.3 Du geste au symbole : la topologie algébrique	168
 VI Epilogue	 171
27 Les directions du futur	173
27.1 Les lignes directrices	173
27.2 Technologie et pratique	175
 Bibliographie	 177

Préface

Les affinités mystérieuses entre musique et mathématique forment l'un de ces lieux communs qu'on ose à peine évoquer en raison de leur banalité, et qu'on ose encore moins penser en raison de leur difficulté.

Au-delà du lieu commun, on assiste actuellement à un renouage remarquable entre mathématique et musique. Le coup d'envoi de ce bouillonnement conceptuel semble avoir été la rencontre organisée par la *European Mathematical Society* en 1999 sur ce thème. L'intérêt est réciproque, comme le montrent d'une part les séminaires mathématique-musique à l'*IRCAM* et d'autre part la journée annuelle de la *Société Mathématique de France* dédiée à ce thème en 2008. Ce nouveau dialogue entre deux domaines de la pensée ne tend vers aucune hybridation et dépasse largement le cadre des problèmes combinatoires dont la musique est une source intarissable.

Dans ce renouage, dont la philosophie est souvent partie prenante, l'œuvre de Guerino Mazzola occupe une place décisive. Sa monumentale théorie mathématique de la musique, édifiée quelque 270 ans après celle de Leonhard Euler, s'appuie résolument sur les mathématiques contemporaines. Si son architecture conceptuelle s'inspire de l'informatique théorique, il s'agit pourtant avant tout d'une *géométrisation*, au sens profondément renouvelé et élargi qu'Alexander Grothendieck a donné, dans les années 60, à la géométrie : c'est la théorie des *topos*, apte à saisir dans un même langage précis les structures continues et discrètes, que requiert au XXI^e siècle un objet aussi complexe que la musique.

La théorie de Mazzola est exposée avec grande rigueur dans les 1200 pages de son traité *The Topos of Music*. Or dans cette forêt d'idées, dans ces inévitables méandres techniques, il est facile de perdre le sens général de l'entreprise, et difficile en revanche d'en saisir la nature exacte en raison de ses multiples aspects (est-ce un domaine constitué des mathématiques, un faisceau cohérent de modélisations, ou une géométrisation de théories musicales ou musicologiques ?).

Avec *La vérité du beau dans la musique*, qui constitue à la fois une introduction et un prolongement au traité, Guerino Mazzola répond au besoin d'une présentation complémentaire, synthétique et non technique, de sa théorie. Dans un style très libre, alerte et parfois provocant,

avec un sens aigu de la formule, et mêlant exemples concrets et aperçus profonds, il nous livre bien des clés sur ses stratégies, ses points de vue philosophiques, ses idées-force mathématiques, et les modalités subtiles de leur mise en œuvre du côté musical.

Tout topos est un monde qui porte en lui-même sa propre logique : comme dit Pierre Cartier, il « définit une logique du *hic* et du *nunc*, une logique spatio-temporelle où la valeur de vérité d'une assertion peut dépendre du lieu et du temps ». *La vérité du beau dans la musique* nous montre comment la logique du topos de la musique converge, plus largement, vers une logique du beau dans la musique.

Yves André

Directeur de recherches au CNRS,
Département de Mathématiques,
École normale supérieure, Paris.

*Je savourais
outré mesure
toutes les amertumes de
ton délirant
amour*

*

Avant-propos

*« Beauty is truth, truth beauty »—that is all
Ye know on earth, and all ye need to know¹.*
John Keats

Au printemps 2005, François Nicolas me donna la chance privilégiée de présenter quelques-unes de mes méthodes et résultats dans un cours à l'Ecole normale supérieure de Paris. Pendant ce cours, qui fut fréquenté par d'éminents scientifiques tels que Thierry Paul ou Yves André, j'appris que non seulement les calculs sont importants dans la théorie mathématique de la musique, mais aussi, et peut-être plus profondément, les pensées dont les calculs sont l'expression opérative. Ces expériences et les leçons que je pus tirer des discussions fort inspirantes me persuadèrent qu'il serait essentiel de publier les perspectives de la pensée au-delà des calculs dans un petit volume, et, naturellement, dans la langue de culture par excellence : le français.

Ma sincère gratitude va à Yun-Kang Ahn qui sut rendre compréhensible un texte parfois trop sibyllin et qui s'est occupé de la version finale du manuscrit. Ma gratitude va également à François Nicolas, qui non seulement sut me diriger dans la bonne direction thématique dans ce cours, mais qui se prêta au travail délicat d'une lecture critique du livre. Je suis très reconnaissant à Yves André qui a non seulement suivi mon cours, mais aussi voulu m'honorer avec un avant-propos d'un mathématicien et pianiste de haute sophistication. La production du layout très attractif en couleurs fut possible par un support généreux de la fondation Art Mentor Lucerne. Je voudrais vivement remercier la fondation pour ce beau support. *Last but not least* ma grande reconnaissance va à Moreno Andreatta qui, inspiré par un esprit singulier de communication globale mathémusicienne, suscita la publication au sein de la collection « Musiques/Sciences » des éditions Delatour.

Minneapolis, novembre 2007

Guerino Mazzola

¹« Beauté est vérité, vérité est beauté »— c'est tout ce que nous savons sur Terre, et tout ce que tu dois savoir.

Première partie

Introduction

Chapitre 1

La pensée derrière le calcul

*Aller Genuss ist musikalisch, mithin mathematisch*¹.
Novalis

Souvent, pour le non-mathématicien, faire des mathématiques est synonyme de calcul. Le mathématicien ressemble à une machine calculatrice sophistiquée plutôt qu'à un penseur. Ce préjugé reste valable pour toute spécification mathématique d'un domaine quelconque, que ce soit la théorie mathématique de l'évolution biologique ou alors la théorie mathématique de la musique.

Dans ma recherche personnelle, j'ai bien souvent mis en relief les aspects d'un calcul rigoureux et supprimé la perspective d'une réflexion derrière ces procédés. Ceci n'est pas un hasard : les mathématiciens ont tendance à ne prendre au sérieux que ce qui relève du calcul, que ce qui se présente donc comme condensation dans les symboles d'une formule.

Ceci étant, parler de théorie mathématique de la musique peut rebuter certains musicologues et amateurs de musique, se demandant si des formules peuvent apporter une valeur ajoutée à la compréhension musicale.

Toutefois, il est absolument faux de réduire les mathématiques au simple calcul. Je me sens obligé dans ce chapitre introductif de corriger ces préjugés et de fournir la part de réflexion derrière des formules trop sibyllines. Non, les mathématiciens ne s'abstiennent point de la pensée quand ils écrivent leurs formules, mais il est vrai qu'ils devraient les expliquer car les formules mêmes ne suffisent pas à la compréhension de ce qu'elles décrivent.

Pour un sujet tel que la musique, la réduction à une formule est particulièrement pernicieuse car la sémantique de toute forme en musique est loin d'être secondaire et le signifié des formes musicales est indispensable pour comprendre la substance de la musique.

Pourtant, ceci ne veut pas dire que les formules d'une théorie mathématique de la musique soient superflues ou de nature purement technique, que l'on pourrait s'en passer dès qu'il s'agit de comprendre la substance musicale. Ces formules ont un signifié, mais elles ne s'y réduisent pas, elles sont les indispensables expressions de ce signifié. La musique exige à la fois la précision et la profondeur, et elle se venge par une incompréhension totale dès que nous nous abstenons de l'une ou de l'autre de ces deux qualifications existentielles.

¹Toute jouissance est musicale, donc mathématique.

C'est exactement la qualification de précision qui est commune à la musique et aux mathématiques. L'autre spécification, la profondeur, est, en mathématiques, transfigurée en abstraction. C'est ce qui rend les mathématiques aussi puissantes, mais également difficiles à aborder même pour un certain nombre d'intellectuels. On a l'habitude de dire que l'abstrait entraîne le vague, le générique privé de la rigueur du concret. Mais c'est le contraire qui est exact : c'est l'abstrait qui s'avère être le noyau de la rigueur apparente.

Nous aurions plutôt tendance à attribuer la profondeur de la musique à sa réalisation concrète et matérielle dans l'interprétation vécue. Suivant Paul Valéry, « c'est l'exécution du poème qui est le poème » et, plus spécifiquement pour la musique, Theodor W. Adorno préconise la formule « Musik interpretieren : Musik machen ». La musique ne se fait que dans l'interprétation. Elle trouve sa facticité, son existence dans le concret.

Nous serions donc encouragés à établir une dichotomie substantielle *mathématique* — *musique* basée sur l'antagonisme existentiel *abstrait* — *concret*. Une dichotomie qui mettrait en question l'utilité des mathématiques pour la musique malgré leur affinité au niveau de la précision, en particulier la précision d'une « écriture à la lettre », comme l'a observé le compositeur François Nicolas. Un des buts centraux de cet ouvrage sera de montrer que cet antagonisme est trompeur pour deux principales raisons.

Tout d'abord la nature de l'abstraction mathématique n'est nullement le refuge dans le *hyperourianios topos* des idées éternelles platoniciennes dont nous ne pouvons que tracer les contours moyennant des symboles magiques. Bien au contraire, il s'avère que l'abstraction mathématique consiste plutôt en une réduction à la substance de l'acte de connaissance qui est si merveilleusement mis au point par la réinvention du concept de *point* par Alexandre Grothendieck. Avec le renvoi atomique de la flèche catégorielle, le morphisme, ce que Tommaso Campanella avait défini comme la seule certitude de notre architecture du savoir, Grothendieck (et avec lui les logiciens de la théorie des topos, Wilam Lawvere et Charles Ehresmann) introduit le sujet actif (le domaine d'une flèche) vis-à-vis de l'objet (le codomaine de la flèche) du désir du savoir et avec ces deux pôles crée une dynamique concrète qui dissout le fantôme de l'objectivité platonicienne.

Au surplus, du côté de la musique, le concret d'une œuvre ne peut être valorisé que dans sa tension par rapport au non-joué, à l'antithèse de la facticité compositionnelle et interprétative. Ceci est manifeste dans deux directions principales : d'abord celle du silence des sons auxquels on ne touche pas, la sensation omniprésente du chemin sonore choisi parmi la multiplicité des chemins possibles. Et ensuite celle de la fiction du développement spatio-temporel, voire culturel et historique, dans laquelle la facticité de l'œuvre concrétisée doit s'insérer comme vecteur du renouvellement perpétuel et manifeste dans l'entreprise de la Nouvelle Musique. Et même dans la réalisation concertante d'une œuvre, l'interprétation concrète ne gagne son intérêt que dans la mesure où elle met en évidence un fait général, une vérité abstraite qui transcende l'éphémère du présent de la masse sonore. Helga de la Motte a poussé à l'extrême cette perspective : « Die Musik hat in ihrer Fähigkeit, die abstrakten Prinzipien des Universums darzustellen, die Wissenschaften übertroffen². »

Dans ce contrepoint ontologique, l'essence du geste dans la flèche des mathématiques s'oppose donc au vecteur du pointeur vers le générique de la musique. Voilà que la formule mathématique gagne une signification bien remarquable. Dans le langage des mathématiques

²Dans sa capacité de représenter les principes abstraits de l'univers, la musique a dépassé les sciences.

contemporaines, une formule n'énonce que la commutativité d'un diagramme de flèches, en des mots plus significatifs : *l'harmonie de gestes*. Par contre, l'énoncé musical met en œuvre un pointeur vers des principes abstraits de l'univers, c'est-à-dire *un geste d'harmonies*. Tandis que l'activité du mathématicien crée la mise en formule de gestes, celle du musicien crée la mise en gestes de formules.

Ces compétences sont parfaitement complémentaires, ce que nous représentons par un diagramme montrant l'association³ des processus.

$$\text{formules} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{musique}} \\ \xleftarrow{\text{mathématique}} \end{array} \text{gestes}$$

Cette articulation suggère l'indispensabilité de leur accord et laisse soupçonner un appauvrissement sensible pour ceux qui décident d'éliminer l'une d'elle en faveur de l'autre dans l'ensemble de leurs stratégies ontologiques⁴. Nous voudrions persuader le lecteur de ce livre de la fécondité de cette double compétence pour une approche plus riche et plus profonde aussi bien des mathématiques que de la musique.

³Mathématiquement parlant on a ici la situation d'une adjonction de foncteurs.

⁴Il va de soi que — mutatis mutandis — une telle association pourrait aider à comprendre le rôle mystérieux des mathématiques dans la fondation de la physique, un sujet fort apparenté au nôtre.

Chapitre 2

Pourquoi du vrai dans le beau ?

*Musik soll nicht schmücken, sie soll wahr sein*¹.
Arnold Schoenberg

L'idée d'une association entre la gestuelle et les formules qui serait induite par les opérations opposées de la musique et des mathématiques ne s'arrête pas au niveau d'un accouplement de transformations catégorielles, mais déclenche une démarche sémantique touchant aux valeurs caractéristique des deux agents : la valeur du *vrai* pour les mathématiques vis-à-vis de la valeur du *beau* pour la musique. Il est en fait un des miracles de la mise en scène compositionnelle des formules d'harmonie que leur valeur logique (s'il en est question) est transfigurée en esthétique, perspective qui chez le mélomane — après coup — écrase l'aspect logique initial par une cohérence du plaisir.

Cette apparente victoire du bonheur esthétique sur la rigueur logique est une perpétuelle inspiration contre la pénétration de la froideur mathématique dans les territoires du beau. C'est toutefois une satisfaction superficielle qui n'est rendue possible que par une double ignorance, soit de la nature de l'esthétique, soit de celle des mathématiques. L'émotion issue de l'esthétique (mais non identifiée comme telle !) n'est en fait pas séparée d'une logique de sa production, ceci ayant été reconnu par la théorie cognitive des émotions. Loin d'un sentiment élémentaire du type des *qualia* psychologiques (tel que la faim, la nausée), le bonheur esthétique résulte d'une synergie bien structurée. D'un autre côté, la froideur du raisonnement mathématique, sa logique impitoyable, n'est que la condensation d'un processus bien plus « tempéré » que la nature morte d'un énoncé sobre dans le style de Nicolas Bourbaki.

Le problème qui résulte de ces apparents antagonismes est que la richesse floue des couleurs du beau semble s'opposer à la pauvre expressivité de la rigueur du vrai et du faux. Or, la logique s'occupe du vrai, i.e. de ce qui est le cas, et de ce qui ne l'est pas. Mais « être le cas » ou non n'est pas a priori réduit au seul point du « oui » ou du « non » de la logique classique. En d'autres mots : pourquoi faudrait-il que l'extension de ce qui est le cas ou non occupe un aussi simple terrain que le « oui » et le « non » ?

D'autre part, si l'on analyse les conditions de l'esthétique dans la musique, on doit d'abord la séparer d'une satisfaction sentimentale indécomposable, fait déjà reconnu par Eduard Hans-

¹Musique ne doit pas orner, elle doit être vraie.

lick dans les deux premiers chapitres de son célèbre traité *Du beau dans la musique* [24]. Dans son ouvrage, Hanslick insiste sur un noyau esthétique d'une nature très particulière, c'est-à-dire sur la caractérisation du contenu de la musique qui ne serait que « des formes sonores en mouvement² ». Ceci signifie que le beau dans la musique ne se trouve que dans ces formes en mouvement, et non dans des émotions ou des pensées ultérieures. Néanmoins, ces formes sont pour Hanslick expression d'un langage (bien sûr au-delà des mots ordinaires, donc plutôt d'un système sémiotique) et résultent du « travail de l'intellectualité du compositeur avec du matériel ayant une potentialité mentale³ ». Il en résulte que la qualité esthétique s'oriente vers les formes en question et plus précisément vers la structure intellectuelle incarnée dans ces formes. Le jugement esthétique serait donc, d'après Hanslick, un jugement sur la qualité autonome de formes. Cette qualité est en fait précisée au cours du dernier chapitre lorsque Hanslick met en relief le rôle crucial du *thème* dans son évolution organique au cours de la composition. La forme n'est donc pas amorphe, mais doit suivre des règles d'évolutions, une logique de déploiement du germe thématique. Nous voilà arrivés à un point où la nature de l'esthétique, telle qu'elle est décrite par Hanslick, se rapproche d'un processus tout à fait compatible avec un logos générique, un processus dont la nature se retrouvera aussi dans l'embryologie goethéenne des compositions d'Anton Webern.

Notre question doit s'approcher de trois perspectives : d'un côté, nous devons questionner un possible enrichissement du paysage des valeurs de la logique ; d'autre part, nous aurons à réfléchir sur un possible renforcement logique des valeurs de nature esthétique, et en troisième lieu, si nous arrivons à répondre par l'affirmative aux deux premières interrogations, nous devrons situer ces deux interprétations dans un site unificateur naturel.

Soyons clair sur ce projet : il ne s'agit de réduire ni la richesse esthétique ni la rigueur logique, mais de les réconcilier au sein d'un environnement strictement plus riche. Concernant un tel enrichissement, il y a un point qui me semble très critique par rapport au problème de l'articulation d'une « logique du beau » au-delà des mots, de la verbalisation. En effet c'est aussi un argument de Hanslick et des esthéticiens allemands du XX^e siècle, tels que Hans Heinrich Eggebrecht⁴. Nous prenons parti ici pour une vue moins statique dans le sens où il nous semble possible que la verbalisation, ou plutôt la conceptualisation, qui serait incapable d'atteindre une logique du beau, soit extensible et puisse, après un effort adéquat, englober des arguments essentiels d'une telle logique. Ce n'est que notre expérience avec le dynamisme stupéfiant du langage des mathématiques modernes qui nous laisse croire que nulle limite n'est absolument infranchissable. Après tout, si « au début était le verbe », il pourrait bien subsister pour toujours, pourvu qu'il soit cultivé et nourri par notre imagination créatrice — une force dont Pierre Boulez parle avec la plus haute estime [11].

Un objectif fondamental de ce livre est de montrer que la réconciliation et synthèse du beau et du vrai pour la (pensée de la) musique est possible et féconde pourvu que l'on soit prêt à s'immerger dans un certain nombre d'extensions conceptuelles et d'approfondissements théoriques.

² « Der Inhalt der Musik sind tönend bewegte Formen. »

³ « Das Komponieren ist ein Arbeiten des Geistes in geistfähigem Material. »

⁴ « Die Musik ist ohne Begriffe [15]. » (« La musique est sans concepts. »)

Chapitre 3

Le programme de ce livre

*Au sage un signe suffit ;
au sot, à peine le bâton.*

Proverbe juif

Le programme de ce cours à l'Ecole normale supérieure, que j'ai eu l'honneur d'enseigner en 2005, a été déterminé selon des critères bien précis. Il s'agissait de thématiser l'enjeu de la pensée mathématique pour un enrichissement des connaissances en musique — pour démontrer non pas la puissance autonome de la méthode mathématique, mais le service qu'elle peut rendre à une compréhension approfondie du phénomène mystérieux qu'est la musique.

Cette décision implique un choix de sujets centrés autour de l'intérêt proprement dit de la musicologie. Ce qui ne veut pas dire que le développement de méthodes mathématiques dont l'application à la musicologie dépasse l'intérêt classique des musicologues soit inexistant. Mais il s'agissait de discuter l'interaction musique-mathématique au sein de la thématique classique de la musicologie.

Ce choix est d'autant plus important que la preuve de la puissance de la pensée mathématique pour la compréhension de phénomènes fondamentaux de la musique peut nous offrir une leçon davantage justifiée qu'un discours concentré autour de thèmes jusqu'à présent plus exotiques.

Par conséquent, nous avons sélectionné quatre thèmes centraux : la composition, le contrepoint, l'interprétation et la gestuelle en musique, pour présenter l'enjeu « mathémusical », dont le contenu est résumé comme suit.

La musicologie expérimentale dans la composition. On établit d'abord le contexte méthodologique d'une musicologie expérimentale en partant de l'idée du Big Bang cosmologique et biologique. La question de l'harmonie préétablie vis-à-vis d'une révolution permanente est soulevée. On considère le possible rôle de nouveaux outils pour la compréhension musicale. Nous terminons l'introduction méthodologique par une reprise de l'idée bouliénienne d'une analyse créatrice et de la transduction associée, une idée qui sera mise en œuvre dans l'analyse suivante.

Le problème de la modulation et du travail motivique dans le premier mouvement de la « Hammerklavier » de Ludwig van Beethoven, problème soulevé par Erwin Ratz et

Jürgen Uhde dans leur hypothèse d'une polarité *monde* (*si* bémol majeur)/*antimonde* (*si* mineur), est envisagé. Le modèle mathématique de la modulation tonale que nous présentons explique chaque modulation, « normale » ou « pathologique », du premier mouvement de cette sonate et enrichit ainsi les connaissances musicologiques dont disposaient Ratz et Uhde. On en déduit une modélisation de la variété constituée par les motifs de cette sonate.

Ce modèle, par sa généralité, introduit une variété de contextes tonaux et modulants (autres gammes, autres cultures, autres concepts de degré et de fonction harmonique) dans laquelle la modulation au sens usuel occupe alors une place particulière. Ce modèle est testé par une « (re)synthèse » expérimentale conduisant à une nouvelle sonate : l'op.3 (« L'essence du bleu ») de l'auteur. La discussion d'une telle méthode expérimentale en musicologie conduit à nous interroger sur l'intérêt spécifique des analyses pour la composition musicale.

Le principe anthropique dans le contrepoint. Tandis que le premier chapitre thématise la variation d'un modèle de la modulation tonale au sein de la compréhension classique de tonalité, nous allons maintenant également varier les paramètres fondamentaux de la théorie, i.e. dans notre cas du contrepoint fuxien, la variation du concept des intervalles consonnants et dissonnants. Nous immergerons donc la théorie classique dans une variété de contrepoints « exotiques ». La caractéristique de notre méthode est le procédé dialectique par lequel on transgresse les limites de la théorie historique, méthode que nous appelons « dévissage de l'identité ».

L'enjeu de ce chapitre est de déduire les règles du contrepoint classique (telles que fixées dans le *Gradus ad Parnassum* de Johann Joseph Fux) de la structure des consonances et dissonances. Ceci constitue bien un problème puisque, contrairement aux théories acoustiques, la quarte est une dissonance dans le contrepoint « note contre note ». Il s'agit donc de dégager une structure des consonances et des dissonances contrapuntiques qui résout ce problème tout en rendant compte de l'interdiction des quintes consécutives.

On présente pour cela un modèle géométrique de l'espace des intervalles, dont les symétries sont des isométries dans la métrique des tierces. Dans cet espace, les intervalles consonnants sont séparés des intervalles dissonnants par des caractéristiques géométriques singulières faisant intervenir la symétrie d'autocomplémentarité.

La solution du problème suivant la méthode du dévissage de l'identité est analogue à celle qui, en physique théorique, relie des forces (de tension, par exemple) à des symétries locales.

Cette solution nous fournira une liste complète des successions possibles, identique à la liste du contrepoint classique. En particulier, les quintes parallèles y seront strictement interdites.

Ce modèle immerge alors la dichotomie des consonances et dissonances dans un total de six dichotomies aux propriétés également symétriques. Dans cette variété, on reconnaîtra l'expression d'un principe anthropique, dont l'énoncé depuis Leibniz serait que nous vivons bien dans le meilleur des mondes possibles.

La théorie infinitésimale de l'interprétation. C'est Paul Valéry qui dans ses fameux cahiers a noté que « la musique mathématiquement discontinue peut donner les sensations les plus continues ». Cette vérité a été reprise et approfondie par les réflexions dans la

correspondance entre Theodor Wiesengrund Adorno et Walter Benjamin. Le phénomène sous-jacent à ces idées est que le niveau symbolique, pour être compréhensible et communicable dans l'activité artistique, nécessite une transformation dans le continu, et, à la limite, dans la gestuelle de l'expression humaine. La théorie adornienne et notre approche constituent non pas une gestualisation des symboles, mais une transformation préalable, une première approximation du gestuel par le paradigme de la déformation des symboles rigides de la partition classique.

Mais ce faisant, on doit tout d'abord résoudre le problème de la puissance expressive résidant dans la structure analytique d'un texte musical. En d'autres mots, notre problème est le suivant : comment l'analyse d'une composition peut-elle être reliée à son interprétation en sorte de créer ce qu'Adorno appelait une « interprétation analytique » ?

Pour ce faire, on expose une théorie infinitésimale de l'interprétation (voir la correspondance Adorno-Benjamin). L'interprétation est ainsi décrite comme transformation de l'espace des symboles de la partition dans l'espace des événements physiques de sa réalisation (via son interprétation). La Jacobienne inverse de cette transformation décrit alors sa structure infinitésimale.

En s'appuyant sur ces concepts de géométrie différentielle, on aboutit aux champs vectoriels interprétatifs, dont le tempo musical représente un cas classique de dimension un.

Notre solution consiste en la mise en place d'opérateurs interprétatifs qui déforment les champs interprétatifs en fonction d'analyses données de la partition concernée.

Dans ce cadre, l'intervention d'une analyse se fait en utilisant une forme particulière du problème. Elle consiste en une fonction numérique dite « poids analytique ».

On présente l'implémentation de cette théorie dans le logiciel RUBATO, en particulier ses modules d'analyse rythmique, motivique et harmonique, ainsi que son module d'interprétation. Nous appliquons tout ceci au Contrapunctus III de *l'Art de la Fugue* de Johann Sebastian Bach.

L'intelligence de la gestuelle dans la corporéité. On sait que la partition s'est créée par abstraction de neumes qui constituaient des traces du caractère gestuel à l'origine de la musique. Nous envisageons alors le problème qui en découle : si les notes sont bien des gestes « surgelés », est-il possible de « réchauffer » les gestes qu'indexe une partition ?

Ce thème n'est pas uniquement d'intérêt musical, mais reprend un problème bien plus ample du domaine de l'intelligence artificielle. En effet, après l'échec des approches symboliques initiant la compréhension de l'intelligence humaine, et après la période « mixte » du connexionisme, on s'est concentré sur un point de vue « polaire » mettant en relief le rôle de la corporéité dans la genèse de notre intelligence.

Cette radicalité doit obéir à une nécessité traditionnelle : décrire la genèse des compétences classiques de l'intelligence humaine, dont les calculs logiques (formels ou non) restent des ingrédients indispensables. Or, parler de corporéité veut toujours dire parler de gestes. C'est donc une condition *sine qua non* d'une recherche des racines de l'intelligence humaine que de vouloir connaître les mécanismes par lesquels l'intelligence pourrait émerger de la compétence gestuelle. C'est sous cet aspect que nous nous intéressons aux gestes en musique.

Notre analyse des gestes poursuit le chemin suivant :

- On insère d’abord la gestuelle dans le processus de l’interprétation musicale. Le geste y constitue le sommet intermédiaire d’un triangle qui part de la partition et arrive à la réalisation sonore.
- On discute alors la gestuelle paradigmatique de quatre grands pianistes : Glenn Gould, Vladimir Horowitz, Arturo Benedetti Michelangeli et Cecil Taylor.
- Pour mettre en évidence la nature structurale d’un geste, on présente quelques principes gestuels du théâtre classique japonais *nô*. On y reconnaît en particulier que le geste ne porte pas automatiquement une sémantique : la gestuelle n’est pas une partie de la sémiotique.
- La gestuelle chez Bertold Brecht et Maurice Merleau-Ponty montre de manière brillante que l’idée classique de la langue comme vêtement de la pensée doit être remplacée par l’idée plus pertinente de la langue comme corps de la pensée.
- Nous esquissons ensuite la philosophie actuelle française de la pensée diagrammatique initiée par Jean Cavaillès et Gilles Deleuze, et mise au point par Charles Alunni [6].

Le chapitre conclut avec une vue d’ensemble des strates de la facticité, du processus et du geste, une stratification ontologique qui complète le cube topographique de la musique par une quatrième dimension.

Nous discutons finalement les perspectives de l’intelligence artificielle située ainsi que l’implication de l’ontologie du geste pour la compréhension de l’existence temporelle.

Dans le chapitre suivant, on donne l’exemple d’une reconstruction graphique animée par ordinateur de la gestuelle de la main droite d’un pianiste à partir d’une composition de Carl Czerny. On se penchera ici sur les conditions délicates de nature géométrique et mécanique pour symboliser les mouvements de la main humaine.

Nous terminons cette théorie gestuelle avec une première présentation d’une théorie exacte de la gestuelle en musique. Ce chapitre dépasse le cadre du cours donné à l’Ecole normale supérieure, mais il nous semble d’une grande utilité pour indiquer la direction d’une future recherche en théorie des gestes. On y apprend en particulier une interprétation des idées de Cavaillès en termes d’hypergestes mathématiques suggérée par Charles Alunni.

Nous achevons cet ouvrage avec une courte perspective sur les directions du futur de la relation musique-mathématiques. Nous n’y discuterons pas, cependant, les technicités, mais plutôt les trois barycentres du développement de cette relation : formules et gestes, sciences et arts, créativité et discipline.

Deuxième partie

Composition — la musicologie
expérimentale

Chapitre 4

Les Big Bang en physique, biologie et culture

L'Esprit de Dieu planait sur les eaux.
Genèse 1,2

Le développement de notre culture — et en particulier de la musique — se situe dans le champ de tension entre faits historiques et perspectives futures de la fantaisie créative, car les lois culturelles semblent être beaucoup moins stables que celles de la physique. Pour discuter l'évolution de la culture de la musique nous partirons du paradigme du Big Bang de la physique et de la biologie puisqu'il thématise de façon exemplaire la naissance des lois dans une couche de la réalité, ainsi que le procès de stabilisation dans la toute première phase du refroidissement. Plus spécifiquement, c'est la théorie mathématique de la musique qui s'insère naturellement dans ce contexte, car les modèles qu'elle met à disposition ne se limitent pas à expliquer *ex post* les faits historiques, mais facilitent en même temps la formation prospective d'une musique du futur.

4.1 Le Big Bang de la physique

Après qu'en 1927, l'astronome George Lemaître eut articulé l'hypothèse que l'univers serait issu d'un point singulier, cette théorie — dite du Big Bang — fut confirmée en 1965 par les astrophysiciens Arno Penzias et Robert Wilson suite à la découverte du rayonnement cosmologique. D'après cette théorie, notre univers naquit il y a environ 14 milliards d'années sous la forme d'une explosion gigantesque, le Big Bang, dont l'espace est d'extension infinie. Ce n'est qu'après le *temps de Planck* de 10^{-43} sec que les lois de la physique commencèrent à se créer. Les quatre forces fondamentales (électromagnétisme, force faible, force forte, gravitation) se « condensèrent » après 10^{-12} sec. Un milliard d'années après surgirent les galaxies, et ensuite les éléments chimiques lourds tel que le fer. Notre terre naquit il y a seulement 4,6 milliards d'années, suivie par les protistes 800 millions d'années plus tard.

Malgré le succès dû à sa puissance explicatrice et prédictive des phénomènes de la nature inanimée, la physique ne concerne qu'un segment limité de la réalité. Elle est en particulier

esclave de l'esprit mathématique, où ses lois sont incorporées. L'ontologie de la physique ne pourrait se libérer de celle des mathématiques, c'est-à-dire d'une ontologie de nature parfaitement spirituelle. Ce fait prend une portée dramatique en particulier au moment planckien de la naissance des lois de la physique : c'est un processus qui ne peut exister qu'au sein de la réalité des mathématiques, non humaines, mais bien « divines », si l'on y tient. Le lieu de naissance des lois de la physique touche à une réalité non physique. Ce type de recours inévitable à la base mathématique est d'ailleurs une des obstructions les plus dures à la réduction de l'activité intelligente de l'esprit humain aux purs processus neuronaux de la substance cérébrale dont les neuro-scientifiques voudraient nous persuader. En particulier, ce plaidoyer est une mise en relief des autres strates de la réalité : de la biologie et de la culture, de la logique du vivant et surtout de la dynamique mentale qui nous élèvent au-dessus de la matière animée ou non. Le succès de la physique s'avère être le succès de son immersion fondamentale au sein de la réalité spirituelle des mathématiques. Ainsi le mathématicien Roger Penrose, dans [41, ch. 34], met en relief le rôle fondamental des mathématiques : « I believe that there are deep matters of importance, here, concerning the very mathematical basis of physical reality¹. » Dans ce chapitre, Penrose clarifie aussi l'ontologie des mathématiques en physique : « A standard position is that of computational functionalism, according to which it is merely computational activity (...) that gives rise to conscious mentality. I have argued strongly against this view (...) My arguments demand that this missing theory must be a non-computational theory (...) outside the scope of Turing-machine simulation². »

C'est surtout l'aspect créatif du moment planckien qui est fascinant pour la compréhension de la création du compositeur. En fait, si les lois de la physique se créent dans ce très court moment, quelles seraient les forces régulatrices de leur formation ? Pourquoi ces lois et non pas d'autres ? La solitude de cette création, tout en touchant à une extension infiniment plus universelle, est apparentée à celle du compositeur avec sa question cruciale : d'où peut-on déduire le germe de la création musicale, de quel noyau infinitésimal, et avec quelle justification qui ne saurait se retirer au sein confortable de l'imitation artisanale ou de la psychologie de la liberté artistique ?

4.2 Le Big Bang de la biologie

La relativité de la réalité physique se manifeste en particulier dans le phénomène du Big Bang biologique qui décrit un fait parallèle à l'évolution fondamentale en biologie. D'après les théories actuelles, une explosion biologique aurait eu lieu pendant le Cambrien il y a 543 millions d'années. Dans un « moment » d'une durée relativement courte de 5 à 10 millions d'années, possiblement à la suite de l'effet des gènes Hox, eut lieu l'explosion d'une variété monstrueuse d'embranchements pluricellulaires. L'homme (*homo rudolfensis*) n'apparut que 2,5 millions d'années auparavant environ. Le Big Bang biologique créa des lois de l'évolution biologique dont la logique est loin d'être comprise. Elles semblent se situer loin au-delà des lois

¹Je crois qu'il y a des sujets d'une profonde importance, ici, concernant la pure base mathématique de la réalité physique.

²Une position classique est celle du fonctionnalisme computationnel, qui défend l'idée selon laquelle c'est surtout l'activité computationnelle (...) qui donne lieu à la conscience mentale. J'ai fortement combattu cette idée (...) Mes arguments requièrent que cette théorie manquante doit être une théorie non computationnelle (...) hors du champ de la simulation de la machine de Turing.

de la physique, qui elle ne sait rien de la vie, de sa dynamique selective, des jeux chaotiques et catastrophiques dont la téléologie de la survie échappe à la causalité, même brisée par les lois de la mécanique quantique, et dont l'organisation circulaire requiert des mathématiques fort différentes de celles de la physique, par exemple les fractales, les réseaux neuronaux, la théorie du chaos, des catastrophes, des automates cellulaires, ou alors des ensembles non bien fondés.

Mais encore, comme en physique, la réalité biologique ne pourrait fonctionner comme base réductrice pour la réalité spirituelle, car toute description précise de ses phénomènes recourt aux mathématiques et aucune mathématique ne pourrait être expliquée en termes purement biologiques. C'est ici un point bien délicat qui semble échapper à quelques représentants des sciences cognitives : l'analyse cognitive reste totalement impuissante si l'on en exclut la contribution des mathématiques dont elle fait usage. C'est justement l'analyse mathématique qui nous fait comprendre le fonctionnement des réseaux neuronaux, des fractales, ou du chaos.

Pour la création musicale, le Big Bang biologique offre une perspective moins fondamentale que la physique, mais d'autant plus instructive dans la mesure où elle nous apprend à nous questionner sur le possible rôle des mécanismes intervenant dans la création, mécanismes (tels que les assemblages cellulaires) qui renforcent ou parfois même remplacent l'acte de création. La variété du vivant est tellement ample qu'il serait difficile de vouloir nier cet acte en refusant les automatismes dont cette richesse est issue. On devra donc se questionner sur le rôle des outils d'automation qui seraient admis ou disponibles, et sur leur relation avec ce que la création pure réclame.

Tandis que le Big Bang physique incite à se poser la question des sources solitaires de la toute première créativité, le Big Bang biologique de son côté nous jette dans les courants séduisants, mais douteux, de la combinatoire ludique du fameux jeu de dés de Wolfgang Amadeus Mozart.

4.3 Le Big Bang de la culture

Au-delà des Big Bangs physiques et biologiques il est légitime de concevoir un troisième Big Bang : celui de la culture, dont la musique constitue une partie importante. En fait, ce n'est que 50 000 ans plus tôt environ que les premières traces d'une culture furent repérées avec la flûte fabriquée en os de mammoth trouvée dans le Jura souabe datant de 30 000 ans et la vénéus dansante de Galgenberg datant de 32 000 ans. On parle en effet de la révolution (culturelle) paléolithique supérieure, un événement de type Big Bang, et si l'on trace le développement de la culture humaine jusqu'à présent, l'association avec une explosion de la strate culturelle est tout à fait correcte. Dans un intervalle de 50 000 ans seulement, l'humanité est passée des premiers dessins dans les caves de Lascaux à la science et à la technologie globale de l'âge digital électronique et, *last but not least*, aux œuvres de Johann Sebastian Bach, Ludwig van Beethoven, Alexandre Scriabine, Arnold Schoenberg, Béla Bartók, John Coltrane et Cecil Taylor. En particulier, le mariage de la logique mathématique avec la technologie des ordinateurs vient d'implanter de manière spectaculaire la strate spirituelle dans la couche physique de la réalité. C'est ce *feed-back* ontologique de la puissance mentale avec son incorporation physique qui produit la résonance culturelle inouïe, dont nous sommes les témoins.

Or, si les lois de la physique sont établies, et si celles de la biologie semblent suffisamment stables, les lois de la culture, et plus spécifiquement celles de la musique, sont encore

loin de leur zone de condensation. Evidemment, les lois de culture, fussent-elles de nature sociale, scientifique ou artistique, se présentent comme un magma en plein mouvement, dont la musique ne représente qu'une partie mineure. Il n'apparaît même pas clairement si ce temps de Planck en culture pourra un jour aboutir à sa terminaison ou si l'univers de l'esprit est en éternelle évolution sans que des lois ne puissent se cristalliser. Si des lois de l'esprit semblent bien imaginables du côté des sciences, il n'est pas évident que cela puisse aussi se présenter au sein de l'art de la musique. Un des objectifs principaux de ce livre est d'esquisser les perspectives, mécanismes et outils qui seraient aptes à *éclaircir le mystère de la création lors du temps planckien en musique*.

Chapitre 5

L'univers de la musique entre fait et fiction

*Die Musik hat in ihrer Fähigkeit,
die abstrakten Prinzipien des Universums darzustellen,
die Wissenschaften übertroffen¹.*
Helga de la Motte-Haber

Dans le domaine de la musique, on observe une tension entre fait et fiction qui est probablement due à la tradition pythagoricienne référant les révolutions musicales aux lois éternelles des harmonies divines. Cette tension est d'autant plus importante que les stratèges du développement musical se questionnent constamment sur les forces qui approfondissent notre compréhension de la substance musicale. Cette substance, est-elle liée aux harmonies divines ou sommes-nous laissés seuls durant la construction de ce qui compte vraiment dans l'expression musicale ? Est-il possible de poursuivre la substance musicale sans recours aux lois éternelles ou devons-nous les inventer et les bâtir à partir de notre propre imagination ?

5.1 L'harmonie pythagoricienne préétablie

L'approche pythagoricienne suggère de fonder la musique sur les lois éternelles établies par la forme métaphysique de la *tétractys* qui est représentée en triangle, avec un point au sommet, suivi de deux points, puis de trois, et à la base de quatre, dont la somme donne le nombre divin dix.

L'école de Pythagore suivait la compréhension de la *tétractys* dans la pratique du monocorde, instrument archaïque à une corde servant à entendre les fractions transcendentes mathématiques de la *tétractys* dans leur incorporation en des intervalles acoustiques : la fraction $1/2$ représente l'octave, la fraction $2/3$ représente la quinte, et la fraction $3/4$ représente la quarte. L'expérience visait à l'incorporation d'une vérité divine pour en saisir la portée dans la compréhension des premiers principes de l'univers. Ce fut une toute première forme

¹Dans sa capacité à représenter les principes abstraits de l'Univers, la musique a dépassé les sciences.

du paradigme expérimental du « *learning by doing* » : apprendre en jouant. La musique des pythagoriciens fut l'invention du paradigme expérimental dont Galilée réinventa la méthode pour la physique. Toutefois avec la différence essentielle que pour Galilée, les mathématiques sont le langage dans lequel le livre de la nature se lit, tandis que pour les pythagoriciens, les mathématiques sont la substance même de l'univers, son fondement métaphysique.

Le message essentiel de l'approche de Pythagore est que la musique qu'il envisage n'est qu'expression de lois éternelles, et que la créativité humaine (qui bien sûr pour Pythagore n'est pas encore un topos artistique) doit forcément s'évanouir face au divin. C'est la musique de Johann Sebastian Bach qui prend la place par excellence pour exprimer cette mentalité : « Ich sprach mir's aus : als wenn die ewige Harmonie sich mit sich selbst unterhielte, wie sich's etwa in Gottes Busen, kurz vor der Weltschöpfung, möchte zugetragen haben, so bewegte sich's auch in meinem Innern, und es war mir, als wenn ich weder Ohren, am wenigsten Augen und weiter keine übrigen Sinne besäße noch brauchte². » Du point de vue des théories du Big Bang, cette allusion au temps divin avant l'acte de création du monde prend une couleur tout à fait singulière, une couleur dans laquelle est également dépeinte la vision leibnizienne d'une harmonie préétablie.

5.2 Schoenberg et le temps de Planck

Malgré la force suggestive d'une harmonie éternelle que Pythagore évoque et que Goethe dépeint à la suite de l'écoute de la musique de Bach, nous vivons un sentiment d'extrême solitude, car les lois que Pythagore nous transmet, ces deux ou trois intervalles consonants, ne suffisent même pas pour la composition d'une petite chanson. Et c'est l'histoire du contrepoint même qui nous apprend que ce fondement de la musique de Bach n'est pas le résultat d'une révélation divine, mais d'une longue période d'expériences humaines passant par un certain nombre de culs-de-sac et de faillites jusqu'à ce que l'état terminal, formalisé dans les règles de Johann Joseph Fux, contemporain de Bach, fût atteint.

La réalité est que les lois divines et éternelles de la musique, si elles existent, sont trop génériques pour toucher aux besoins des compositeurs. Contredisant l'aphorisme beethovenien que la musique est une révélation plus haute que toute philosophie, nous sommes, pour le dire en des mots plus existentiels, laissés seuls avec notre musique. C'est à nous de prendre l'initiative, de nous mettre en route à la recherche du potentiel créatif du temps planckien de la musique.

Celui qui a le plus radicalement osé l'entreprise d'une révolution contre les lois « provisoirement éternelles » est Arnold Schoenberg qui, dans ses principes de la technique de composition dite dodécaphonique, a redéfini les relations des hauteurs indépendamment des catégories traditionnelles de consonance et dissonance. En écoutant la toute première pièce de cette facture, la « Valse » op. 23 n° 5 pour piano de 1923, on croit entendre une musique d'une autre planète ; l'harmonie préétablie est détruite, et ce qui reste est moins le choc de l'étrange que la compréhension que la facticité musicale est immergée dans une mer de mondes alternatifs, dont Schoenberg ne nous en esquisse qu'une première variante.

² « Je l'énonçai à moi-même : comme si l'éternelle harmonie s'entretenait avec elle-même, comme cela pouvait avoir eu lieu dans le poitrine de Dieu, juste avant la création du monde, de telle manière que mon intérieur fut ému, et j'avais l'impression que je n'avais besoin ni d'oreilles, ni d'yeux ni d'autres sens. », tels sont les mots de Johann Wolfgang von Goethe sur la musique de Bach dans une lettre à Carl Friedrich Zelter.

Le message essentiel de cette approche est que la créativité musicale n'est pas limitée aux variations au sein d'une même théorie, mais que la théorie elle-même peut être assujettie à sa reconstruction fondamentale. À présent, une telle ouverture de perspectives est tout-à-fait perceptible dans la variété des musiques qui sont réalisées dans la variabilité des espaces-temps culturels : du théâtre *nô* au free jazz, des tonalités indonésiennes aux microtonalités (soit de Alois Haba, soit des caves électroniques de l'IRCAM), des musiciens artificiels (tels les pianistes robots de l'université de Waseda et les violonistes robotiques de l'université de Ryukoku), aux musiques artificielles des populations fictives inventées par Eduardo Reck Miranda. L'explosion schoenbergienne est devenue le phénomène musical omniprésent et l'harmonie pythagoricienne se voit confrontée à un bestiaire impressionnant de musiques « extraterrestres ». C'est là une explosion expérimentale dont l'esprit est parfaitement reconnu par le philosophe allemand Peter Sloterdijk dans sa monographie [51], où il nous positionne en expérimentateurs « jusqu'à la concasse ».

5.3 Un principe anthropique ?

Loin de savoir comment aborder la question philosophique fondamentale de Martin Heidegger : « Warum ist überhaupt Seiendes und nicht vielmehr Nichts³ ? », nous nous sentons obligés d'aborder — dans le domaine de la musique — la question plus facile et opérationnelle : « Pourquoi l'étant est-il tel qu'il est et non complètement divers ? » C'est en fait le type de question que les cosmologues tel que Stephen Hawking se posent sans cesse lorsqu'ils se vouent aux spéculations sur les univers alternatifs qui pourraient exister à part le nôtre. Et ils s'y vouent en dépit des conseils de l'Église de s'abstenir de questions concernant les choses arrivant avant ou en dehors de notre univers [25].

Mais pourquoi est-il tellement intéressant de connaître les fictions de l'univers ? La réponse est aussi facile que classique : nous ne pouvons comprendre quoi que ce soit que par la transgression de ses limites, il s'agit en fait de la doctrine hégélienne d'après laquelle l'affirmation résulte de la double négation. En cosmologie, cette doctrine prend une forme fascinante sous la forme du principe anthropique, où les cosmologues se questionnent sur notre position au sein de l'univers. Rappelons que d'après la Bible, la terre et son humanité sont le centre de l'univers. Après la révolution copernicienne, la position cosmologique de l'homme fut relativisée, et après la révolution darwinienne, même la position biologique de la race humaine fut mise en question.

La cosmologie moderne s'est donc reposée la question de la position de l'homme dans l'univers. Elle arrive à une réaffirmation de notre position centrale, cette fois non en termes de coordonnées cosmographiques, mais de paramètres systémiques fondamentaux : il s'avère qu'une altération microscopique des constantes cosmiques, telles que la charge électrique élémentaire, la vitesse de la lumière, ou la constante de gravitation, par exemple, entraînerait la totale impossibilité de la chimie du carbone et, *a fortiori*, de la biologie et de l'humanité qui en découle.

Ce principe résulte donc d'une variation des fondements du système de l'univers pour mieux comprendre sa facticité, et en particulier notre existence. Mais cette variation n'est que l'aventure d'une fiction universelle, la transgression du réel pour y retourner, chargée d'une qualification vis-à-vis de la disqualification de la négation, i.e. l'impossibilité de notre existence

³Pourquoi y a-t-il étant et non pas plutôt rien ?

au-delà des positions paramétriques données. Cette conséquence est même plus dramatique que la confirmation voltairienne du meilleur des mondes : on vit dans l'unique monde où une vie à base carbonique est pensable. Il est toutefois intéressant de voir que l'on doute encore de l'unicité de la vie carbonique : c'est précisément le programme SETI (*Search for ExtraTerrestrial Intelligence*) qui cherche à contenter le souci de formes biologiques susceptibles de mettre en question notre position basée sur la religion chrétienne.

Si le temps planckien n'est pas encore accompli en musique, et si nulle révélation divine ne semble s'imposer, il devient d'autant plus important de se poser la question de l'immersion de la facticité historique dans l'infinité des variations fictives, dont on aura à choisir celle qui permettra de bâtir le meilleur des mondes de la musique. Puisque nous nous sommes donnés le programme d'éclaircir le mystère de la création lors du temps planckien en musique, la première méthode pour ce faire sera donc de *construire aussi explicitement que possible la variété des fictions environnant les faits* en sorte de réaliser un choix optimal. Ce processus devra aussi nous apprendre si les choix de l'histoire de la musique, tels que les lois du contrepoint ou les tonalités classiques, par exemple, s'avèrent être le meilleur choix des mondes possibles au milieu de l'univers de la musique. Nous pouvons d'ores et déjà affirmer qu'il existe des raisons de penser que tel est le cas pour le contrepoint classique.

Chapitre 6

La révolution des points de Grothendieck

C'est le ton qui fait la musique.
Proverbe français

6.1 La limite des outils de la musicologie traditionnelle

La promesse de vouloir ouvrir les perspectives des mondes fictifs de la musique n'est pas seulement porteuse d'espoir mais oblige également à fournir des outils qui soient suffisamment puissants pour traverser les chemins que l'on a en tête.

Pour comprendre le problème qui se cache derrière ce plan, il faut savoir que le langage de la musicologie traditionnelle est d'une nature bien étrange. D'un côté, il défend la poésie infinie de la fantaisie musicale et de l'autre côté, il est loin d'être suffisamment précis ou puissant pour saisir ou même résoudre les problèmes qu'une telle prétention englobe. Mais un langage scientifique est un outil de l'esprit et ne peut se contenter de renvoyer à ses objets ; il doit aussi les manier et en faciliter l'évolution.

Ces défauts sont d'une double nature. D'un côté, une certaine musicologie ne s'est jamais libérée de ses perspectives historiques, de la pure facticité, soit par désintérêt, soit, peut-être, par manque de logique argumentatrice. Or ceci entraîne que le bâtiment historique ne pouvait se construire devant un arrière-plan systématique. Mis à part les exigences épistémologiques d'un esprit profond du rang d'un Carl Dahlhaus, on s'est très rarement posé la question de savoir par quelles raisons systématiques telle ou telle histoire pouvait avoir lieu au-delà de la simple contingence d'un récit suivant le fil du temps.

D'un autre côté, les outils formels permettant de saisir et manier les instances théoriques de la musique et les modèles qu'ils engendrent (dans des espaces virtuels de processus musicaux) ne furent jamais développés. Dans les sciences humaines, de tels espaces — qui sont par définition (!) de nature géométrique — sont a priori exclus, car la géométrie, partie traditionnelle des mathématiques, n'entre pas dans leur domaine. Mais cette décision n'est pas vraiment justifiée, surtout en raison du fait, déjà reconnu par Emmanuel Kant [29], que tout concept représente

une *localité*, i.e., un point dans un espace logique : « Man kann einen jeden Begriff, einen jeden Titel, darunter viele Erkenntnisse gehören, einen logischen Ort nennen¹. »

On pourrait à juste titre argumenter que le concept de *point* dans la géométrie traditionnelle ne peut englober les exigences d'un concept complexe. Comprendre un concept comme étant un point requiert un formalisme qui dépasse largement le simple concept d'un point de la géométrie classique. Ceci est absolument vrai, mais l'argument échoue face aux développements des mathématiques contemporaines, comme nous allons le voir ci-dessous.

Or, en musicologie ou en théorie de la musique, le caractère géométrique des concepts est particulièrement plausible : un ton est un point dans un espace de paramètres musicaux, et une partition est composée de notes, représentant des symboles pour les tons. Mais dans une compréhension de sons comme elle est pratiquée en informatique musicale, un tel objet est aussi un point dans un espace vectoriel de fonctions, fussent-elles les ingrédients de la représentation de Fourier, de la synthèse FM, des ondelettes ou de la modélisation physique. Mais déjà la compréhension classique de ce qu'est un ton inclut non seulement les notes, mais les intervalles, les accords, ou les motifs mélodiques. Les musiciens et les philosophes de la musique pensent à des objets plus amples quand ils disent « ton » !

C'est ici un argument très important pour attraper la pensée musicale authentique. Il semble qu'un ton en musique — plutôt qu'un point au sens géométrique strict — soit un objet élémentaire d'un vocabulaire particulier. Ainsi, un intervalle serait un « ton » dans la pensée intervallique, tandis qu'un accord jouerait le rôle du « ton » dans la pensée harmonique. Il en résulte que le concept de ton désigne un objet élémentaire envisagé selon une perspective déterminée du discours. En d'autres mots, on rencontre ici une pensée qui se crée des éléments en fonction d'un point de vue variable et non par décret immuable.

En résumant, le discours musico-logique montre une intuition sophistiquée concernant la compréhension d'objets de la musique, et même une approche fort flexible de ce qu'un point pourrait représenter, mais il lui manque les outils nécessaires pour conceptualiser cette intuition au niveau d'un langage scientifique.

6.2 Un point est une flèche

Pour les mathématiques du vingtième siècle, le concept de point tel qu'Euclide nous le propose (« punctus est cuius pars nulla est² »), était devenu obsolète car l'analyse algébrique de la géométrie avait réduit un point à la liste de ses coordonnées. Plus généralement, tous les objets mathématiques furent réduits aux ensembles dont ils sont composés suivant la fondation ensembliste des mathématiques proposée par Georg Cantor. Il n'existait plus de points au sens euclidien : tout objet mathématique, excepté l'ensemble vide, était dès lors un objet ayant des parties. Or, l'impression qu'une telle perspective serait artificielle et étrangère aux intérêts du « working mathematician », le mathématicien professionnel, s'installa déjà lors du développement des mathématiques structuralistes dans l'algèbre moderne d'Emmy Noether, Emil Artin, Bartel Leendert van der Waerden et les Bourbakistes. Par conséquent, en 1945, les algébristes Samuel Eilenberg et Saunders Mac Lane inventèrent la théorie des catégories, où les aspects ensemblistes furent radicalement positionnés dans l'arrière-plan de la dynamique

¹On peut appeler tout concept, tout titre, sous lequel sont subsumées maintes connaissances, un lieu logique.

²Un point est ce qui n'a pas de parties.

conceptuelle. Depuis l'invention des catégories, c'étaient les *homomorphismes* (i.e. les fonctions respectant les structures auxquelles on s'intéressait), qui jouaient le premier rôle sur la scène des mathématiques modernes. Déjà dans le fameux traité *Algebra* de van der Waerden (modèle pour l'entreprise de Nicolas Bourbaki), on perçoit le désir de l'auteur de se passer des ensembles constitutifs et de mettre en relief les isomorphismes de structures.

La théorie des catégories peu à peu commençait à définir une nouvelle base des mathématiques. C'est ici que nous devons insister sur un argument très délicat vis-à-vis des sciences humaines. La théorie des catégories est d'une extrême abstraction. Si la théorie des ensembles est un peu fatigante, accumulant un ensemble après l'autre, ou l'un dans l'autre, construisant de cette façon une hiérarchie d'ensembles-paquets composés d'autres ensembles-paquets et ainsi de suite, cela reste tout de même un enboîtement d'objets assez intuitifs : tout le monde pourrait s'imaginer la construction d'ensembles-paquets. Par contre, une catégorie ne nous offre plus cette intuition constructiviste. Qu'est-ce qu'une catégorie ?

Une catégorie $\mathcal{C}$ est une collection d'*objets* $X, Y, \dots$ tels que pour tout couple X, Y de tels objets, on ait une collection $\mathcal{C}(X, Y)$ d'autres objets $f, g, \dots$, appelés *morphismes* de X dans Y . Un morphisme f de X dans Y est aussi noté par une flèche $f : X \rightarrow Y$. Les seuls axiomes de ces données sont les suivants :

- Les objets X, Y de $f : X \rightarrow Y$ sont uniquement déterminés par f et s'appellent *domaine* ($X = \text{dom}(f)$) et *codomaine* ($Y = \text{codom}(f)$) de f .
- Pour tout couple de morphismes $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$, il existe un *morphisme composé* $h : X \rightarrow Z$, noté $h = g \circ f$, que l'on représente par le diagramme (6.1)

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 & \searrow g \circ f & \downarrow g \\
 & & Z
 \end{array} \tag{6.1}$$

Cette composition de morphismes est associative.

- Pour tout objet X , il existe un morphisme $\text{Id}_X : X \rightarrow X$ appelé *identité* de X de sorte que pour tout $f : X \rightarrow Y$ et tout $g : Z \rightarrow X$ on ait $\text{Id}_X \circ g = g$ et $f \circ \text{Id}_X = f$.

L'exemple plus élémentaire est la catégorie **Ens** des ensembles : les objets sont les ensembles, les morphismes sont les fonctions ensemblistes, et l'identité est la fonction identité d'un ensemble. Un exemple typique est la catégorie **Grp** des groupes : les objets sont les groupes, les morphismes sont les homomorphismes de groupes, la composition est la composition d'homomorphismes de groupes, et l'identité est l'homomorphisme identique d'un groupe. Un autre exemple est la catégorie **Top** des espaces topologiques : les objets sont les espaces topologiques, les morphismes sont les fonctions continues, la composition est la composition de fonctions, et l'identité est la fonction identique. Un autre exemple est la catégorie **GrOr** des graphes orientés et de leurs homomorphismes, ou encore la catégorie **Schémas** des schémas en géométrie algébrique ; les exemples sont innombrables et de natures complètement différentes.

L'idée centrale de cette conceptualisation est que nulle information sur l'anatomie des objets d'une catégorie n'est donnée : les objets sont complètement encapsulés, un phénomène d'ailleurs bien connu pour les langues de programmation orientées objet. La seule méthode d'accéder à un objet sont les morphismes dont il est domaine ou codomaine !

Cette approche est totalement abstraite. Toute intuition géométrique ou même ensembliste disparaît. Avant de discuter l'idée géniale des mathématiciens Alexandre Grothendieck et Nobuo Yoneda de reconstruire la géométrie pour les objets d'une catégorie, nous devons comprendre la force de l'abstraction. L'abstraction et la précision, caractéristiques de la méthode mathématique, possèdent une force de conceptualisation moins exploitée dans les sciences humaines. L'abstraction et la précision semblent se contredire, et l'évolution d'une théorie capable d'énoncés concrets à partir de racines abstraites semble impossible. Or c'est précisément ce dont la théorie des catégories est capable. L'abstraction, quand elle est accouplée avec le précis, est d'une puissance unique de théorisation : le miracle se produit non dans l'abstrait, mais dans le concret.



FIG. 6.1 – Alexandre Grothendieck.

Comment peut-on alors reconstruire la géométrie à partir d'objets aussi abstraits que ceux d'une catégorie ? La clé en est une nouvelle définition du concept de point. L'idée est simple : si, dans la catégorie **Ens** des ensembles, un élément quelconque $x \in X$ dans un ensemble X est compris comme étant un « point » dans un « espace », alors ce « point » peut être identifié à une fonction

$$\bar{x} : 1 \rightarrow X$$

définie sur l'ensemble $1 = \{\emptyset\}$. C'est en fait la fonction qui envoie le seul élément $\emptyset$ de 1 dans x , i.e. $\bar{x}(\emptyset) = x$. Ceci traduit le concept ensembliste du point dans le concept catégoriel de morphisme de domaine 1 . L'idée géniale de Grothendieck fut de nous libérer de ce domaine spécial 1 et de concevoir tout morphisme $p : A \rightarrow X$ dans une catégorie donnée $\mathcal{C}$ comme étant un point, dit *A-valué*, de X . Nous appellerons A *l'adresse* du point p .

On aura donc, pour un objet donné X de $\mathcal{C}$, la collection $\mathcal{C}(A, X)$ des points de X d'adresse A . Pour mettre en évidence le rôle d'adresse de A , nous écrivons $A@X$ au lieu de $\mathcal{C}(A, X)$. Ceci nous recrée une intuition comme si X était un espace consistant de points. La seule différence en est que maintenant, il faut spécifier l'adresse d'un point ! Cette construction implique une véritable révolution du concept de la géométrie. À présent, il importe de reconnaître qu'un point grothendieckien est une flèche $f : A \rightarrow X$, et que cette flèche possède non seulement une pointe, l'objet X , mais aussi un empennage, le point de vue « subjectif » défini par l'adresse A . En fait, *l'introduction des points-flèches crée le sujet en mathématiques et le dissocie de l'objet*.

Le seul argument qu'il reste à clarifier est le suivant : dans la situation classique, un espace était complètement déterminé par la connaissance de ses points. Que reste-t-il de ce fait fondamental ? Ici un résultat simple, mais essentiel pour toute la théorie des catégories, nous donne la réponse : le lemme de Yoneda. Nous ne le formulons pas ici dans sa forme technique, mais seulement dans son essence philosophique : passer d'un objet X d'une catégorie $\mathcal{C}$ à ses points veut dire considérer la collection de tous les points $A@X$ pour toutes les adresses A au lieu de X . Nous notons cette collection de points par $@X$ et l'appelons *l'espace*³ *de X* . Le lemme de Yoneda nous apprend que ce passage de X à son espace $@X$ conserve toute les informations sur X . En d'autres termes :

Lemme 1 (Yoneda) *L'objet X (détermine et) est déterminé par l'espace de ses points $@X$.*

Pour la musique, c'est précisément le passage à l'espace $@X$ qui nous fournira un langage précis pour expliciter l'intuition du concept du ton tel que la théorie traditionnelle de la musique l'envisage. Dans ce cadre, le point de vue « intervallique », « motivique », « harmonique », etc., seront paraphrasés par le choix d'une adresse correspondante. On obtient ainsi un principe (philosophie de Yoneda) qui découle directement du lemme précédent :

Principe 1 (Philosophie de Yoneda) *« Comprendre » complètement un objet X (de la musique) signifie comprendre son espace de points $@X$, i.e., la totalité des perspectives engendrées par toutes les adresses disponibles.*

6.3 La logique géométrique des topoi

Nous ne nous arrêtons pas ici aux structures mathématiques engendrées par les espaces $@X$ d'objets X , mais il est important d'avertir le lecteur du fait que les espaces $@X$ non seulement recupèrent la géométrie perdue au début de la théorie des catégories, mais aussi qu'ils entraînent en même temps un type de structure logique qui découle de la géométrie grothendieckienne des points. Les espaces de points forment une des structures mathématiques les plus puissantes, un *topos*, en fait une catégorie dans laquelle les aspects géométriques et logiques se retrouvent dans un mariage unique et où les valeurs de vérité et celle des formes de la géométrie ne représentent que les deux faces de la même pièce. Nous verrons au cours de ce livre que ce que son titre promet — le thème de la vérité du beau dans la musique — sera à juste titre discuté dans le cadre de la logique géométrique du topos des espaces de points.

³L'espace de X est ce que les mathématiciens appellent le *foncteur contravariant de X* .

Après avoir exposé des principes de conceptualisation mathématique, nous allons nous plonger dans le domaine spécifique de la musique. Nous sommes persuadés que le grand plan visant à une esquisse de l'immersion de la facticité dans la variété des fictions des mondes de la musique ne pourrait fonctionner en dehors de cette géométrie toposique des espaces des points et que ce fonctionnement est profondément lié à la nature même de la pensée musicale, dont les « points » ont toujours été des flèches qui dialoguent entre le subjectif et l'objectif.

Chapitre 7

L'idée boulézienne de l'analyse transductive

*Die Welt ist alles, womit wir bis zum Zerschlagen experimentieren*¹.
Peter Sloterdijk

Pour confronter les faits avec les fictions en musique, il ne suffit pas de se vouer aux analyses des compositions historiques et d'en tirer l'admiration respectueuse, car un accès à la fiction présuppose le pouvoir d'entrer dans une phase d'exploration active au-delà des œuvres existants.

La compréhension des faits ne peut révéler les lois dépassant leur simple facticité que si l'on se permet de jouer avec ces faits, de s'en emparer, de les tourner, déformer, déplacer, et même de les briser selon les variations qui surgissent lorsqu'on les *comprend* dans ses mains. Cette approche est expérimentale dans le sens de Karl Jaspers [27] : « Das Wesen der experimentellen Denktechnik ist im weitesten Sinne Fragestellung an Anschauung und Erfahrung². »

Cette vision de la méthode expérimentale diverge du modèle kantien interrogeant l'expérience et propose un dialogue bidirectionnel, une navigation sur une mer du savoir.

C'est dans cet esprit que nous avons entrepris une analyse du mouvement *Allegro* de la sonate « Hammerklavier » op. 106 de Ludwig van Beethoven. L'analyse fut faite non seulement pour confirmer une théorie de la modulation tonale, mais aussi pour apprendre à composer une nouvelle sonate moyennant la variation des paramètres systémiques de la théorie. Ce fut aussi une tentative de vérifier notre propre compréhension, car une analyse qui ne fonctionne qu'*ex post* ne peut trouver de validité. Cette démarche coïncide avec la méthodologie de la physique, car ses lois se vérifient par deux activités : d'abord la prédiction d'événements ayant lieu dans le futur (au sein des expériences ou d'observations physiques), et ensuite l'application technique des lois par l'ingénieur, activité qui n'est au fond que l'extension des expériences physiques au niveau pratique de la technologie.

¹Le monde est tout, avec lequel nous expérimentons jusqu'à la rupture.

²L'essence de la technique expérimentale est dans le sens le plus large le questionnement de la conception et de l'expérience.

7.1 Analyse stérile, analyse créatrice et l'œuvre ouverte

Notre approche, datant de 1981, concorde avec les idées que Pierre Boulez prononça dans son ouvrage *Jalons*. La discussion de ces idées s'appuie également sur l'essai d'Anne Boissière [10].



FIG. 7.1 – Pierre Boulez.

Le concept d'une analyse créatrice s'oppose à ce que Boulez appelle analyse stérile académique. Le stérile s'oppose au fécond : il ne produit rien, n'enchaîne aucun acte musical, i.e. l'analyse stérile reste sans conséquence musicale. Au fond, cette définition négative s'approche du point de vue du physicien qui ne peut se contenter d'expliquer les phénomènes naturels, mais doit par ailleurs entrer en interaction avec ceux-ci sous peine de s'isoler dans des réflexions vides de sens. *L'analyse stérile académique ne signifie rien*, elle est un exercice sans aucune portée prospective.

A contrario, l'analyse créatrice, partant d'une analyse même un peu inexacte, trouvant une vérité particulière et transitoire, entraîne une détonation soudaine, créatrice et subjective. Ceci emmène Boulez au « geste » déterminant du compositeur qui est articulé par *le caractère problématique de l'œuvre analysée*.

Ce geste (une métaphore plutôt qu'un vrai geste corporel, comme celui dont on va parler dans la dernière partie de ce livre) crée une sorte de variabilité ou de potentialité au-dessus de la structure existante, une instance que l'on pourrait appeler « modèle » qui vient forger l'objet donné. Il faut se rendre compte que pour Boulez « modèle » renvoie au technique. Dans la deuxième partie de l'œuvre « Penser la musique aujourd'hui » [11], il écrit : « Si la pensée esthétique surgit indépendamment de la technique, elle fait faillite, le langage dégénère soit dans une hypocrisie, ou alors dans une gesticulation banale. »

Selon Anne Boissière, l'œuvre possède dans la philosophie de Boulez une potentialité, une virtualité qui rendent possibles d'autres interventions. Celles-ci peuvent donc s'inscrire dans la chaîne de l'invention, et ce faisant recréer l'œuvre en tant qu'*œuvre ouverte*. Nous avons donc intérêt à réfléchir sur une mise en œuvre technique des idées bouléziennes qui sera le sujet de la suite de cette partie.

7.2 L'idée topologique de la transduction

Dans le sillage d'Anne Boissière, les réflexions du philosophe Gilbert Simondon [50] éclairent l'analyse créative boulézienne sous un angle nouveau : il s'agit d'une transduction, i.e. d'une démarche dans un domaine du savoir qui n'est ni inductive, ni déductive, mais une découverte des dimensions selon lesquelles une problématique peut être définie. Cette transduction n'est donc ni arbitraire, ni déterministe : elle suit un mouvement qui agit sur la position du départ, en suivant un chemin qui n'est ni calculé, ni aléatoire. La variation semble suivre un paradigme de proximité, comparable au tâtonnement d'un aveugle. On reconnaît en fait dans cette démarche un paradigme topologique.

Conformément à ces propositions, nous allons donner une interprétation topologique du concept de transduction pour en déduire notre propre stratégie dans la construction de notre sonate op. 3 « L'essence du bleu », qui suit l'analyse de l'op. 106 de Beethoven. La configuration est visualisée dans la figure 7.2.

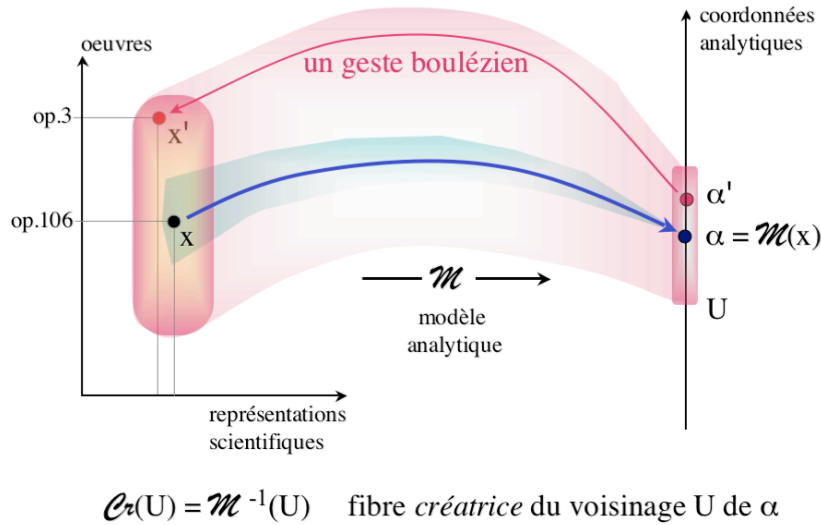


FIG. 7.2 – La fibre créatrice du voisinage U de l'analyse α de l'œuvre x consiste en des œuvres dont l'analyse $\mathcal{M}$ trouve sa source en U . Le geste boulézien est l'acte de création d'une œuvre x' dans la fibre créatrice, située au-dessus de l'analyse α' dans U .

On part d'une représentation d'une œuvre par une paramétrisation scientifique. À gauche de la figure 7.2, cette œuvre est montrée comme point dont les deux coordonnées sont : représentation scientifique (abscisse) et identification de l'œuvre (ordonnée). Nous partons d'une œuvre spécifique, i.e. l'op. 106 de Beethoven, et de sa représentation dans le style de la théorie mathématique de la musique que nous allons décrire dans le chapitre 8. À un tel point x correspond en fonction d'un modèle analytique déterminé $\mathcal{M}$ une analyse $\alpha = \mathcal{M}(x)$ de x dans un espace de coordonnées analytiques. Le modèle $\mathcal{M}$ peut, par exemple, comprendre la structure des modulations, un thème paradigmatique pour la variété des motifs mélodiques, une analyse contrapuntique, etc. L'analyse α consisterait alors, par exemple, dans une liste de modulations, de motifs (typiquement ordonnés hiérarchiquement par inclusion), de rythmes, de schémas de processus, de groupes de symétries, etc.

La transduction est réalisée par le choix d'un voisinage U de α . Ceci veut dire que l'on se permet de varier les coordonnées analytiques par une quantité bien définie. Par exemple, on se permet de varier un groupe de symétries, un schéma de modulations, un système de motifs, etc. par une quantité qui dépend de la nature de ces structures analytiques. À la base de cette variation de paramètres analytiques, on considère les compositions qui sont situées au-dessus des coordonnées dans U . Cette collection est appelée la *fibre créatrice* $Cr(U) = \mathcal{M}^{-1}(U)$ du voisinage U de α .

La sélection d'un point x' dans la fibre créative $Cr(U)$ est ce que Boulez appelle le geste du compositeur. L'acte signifie que le compositeur va créer une composition x' dont l'analyse présente $\mathcal{M}$ produit une analyse α' voisine de α dans U . Cette description mathématique s'avèrera difficile à réaliser de manière détaillée. La complexité d'une telle entreprise apparaîtra dans un exemple concret dans le prochain chapitre. Néanmoins, cette démarche récente est à poursuivre : la recherche, surtout dans le domaine de l'informatique musicale, devra trouver les méthodes quantifiées et topologiquement adéquates pour une telle méthodologie.

Dans ce qui suit, nous allons aborder les détails d'une fonction analytique $\mathcal{M}$ et par suite choisir un voisinage U de l'analyse α que nous appliquons au mouvement *Allegro* de l'op. 106 de Beethoven. Notre analyse portera sur une théorie de la modulation tonale ainsi que sur la structure motivique de cette sonate.

7.3 Le plan de notre transduction

Dans les trois prochains chapitres, nous allons parcourir ces étapes :

- D'abord, nous établirons le modèle de la modulation tonale sous-jacent à l'analyse $\mathcal{M}$ que nous appliquerons. Ce n'est pas uniquement une discussion préliminaire, mais aussi une excellente illustration des points de Grothendieck pour formaliser le processus modulante au-delà de la simple énumération de degrés pivots. Et cette théorie fournira un premier exemple illustrant notre volonté d'« immerger » la facticité dans la variété des fictions.
- Ensuite nous appliquerons la théorie à une analyse harmonique du mouvement *Allegro* de l'op. 106 de Beethoven.
- En troisième lieu, nous varierons les coordonnées analytiques obtenues et opérerons le geste boulézien pour la création d'un mouvement *Allegro* d'une nouvelle sonate, notre sonate op. 3.

7.4 Le profit de la transduction ?

Nous nous sentons obligés d'insister sur le caractère expérimental de la sonate op. 3. Sa construction a pour but de tester l'effet de la variation des coordonnées analytiques et non pas de développer une créativité artistique personnelle. Or, évidemment, le compositeur Boulez ne s'intéresse guère à la relation scientifique de la pièce originale x avec son reflet créatif x' . Nous n'aurons pas non plus l'occasion de le faire dans notre cas concret. Mais nous devrions nous interroger sur le profit scientifique d'une telle reconstruction x' issue du chemin $x \mapsto \alpha = \mathcal{M}(x) \mapsto \alpha' \mapsto x'$.

Nous aurions sans doute des informations importantes sur la qualité de la méthode $\mathcal{M}$: si elle engendre une image assez fidèle du contenu essentiel de x , alors une petite variation de α ne devrait pas englober des pré-images x' trop distantes de x . Nous ne pouvons pas attendre de notre construction de $\mathcal{M}$ que α soit très fidèle, car les composantes de $\mathcal{M}$ sont beaucoup trop grossières pour que tous les détails d'une composition soient repérés analytiquement. Le plus probable des profits que nous pourrions en tirer sera une certaine connaissance des nuances qui peuvent dramatiquement changer la qualité d'une composition *même à l'intérieur de la fibre créatrice d'un petit voisinage de l'analyse*.

Chapitre 8

Le modèle quantique de la modulation tonale

*Musica est scientia bene modulandi*¹.
Augustinus

8.1 Quantification des points de Grothendieck

Dans ce chapitre, nous exposons un modèle de la modulation tonale, i.e. du passage d'une tonalité S à une autre T . Déjà dans la définition du terme « musique » par Saint Augustin (dans « De Musica, liber primus ») en tant que « scientia bene modulandi », nous sommes renvoyés au mouvement qu'un tel processus décrit, car « modulari » — se soumettre à une règle ou mesure — vise à un ordre de mouvements qu'il s'agit d'établir ou de suivre. En particulier, le passage de S à T doit exprimer un mouvement ordonné.

La première question serait donc : quel type de mouvement choisir pour passer de S à T ? Une fois sélectionné, le mouvement devrait fournir des accords pour réaliser la modulation au niveau des notes, et non seulement en tant que mouvement abstrait. Notre plan est le suivant : nous allons d'abord modéliser une modulation au moyen de mouvements qui sont des flèches $m : S \rightarrow T$ passant de l'objet S à l'objet T . Une modulation m est donc, dans le langage des catégories, un point grothendieckien S -adressé de T , i.e. une perspective de la tonalité cible T , prise du point de vue S . Ceci est en parfaite congruence avec la description d'Arnold Schoenberg [49], pour qui une modulation est une promenade $m : S \rightarrow T$. Mais soulignons que m est un vrai ton dans notre approche catégorielle, excepté que ce ton appartient au point de vue donné par l'adresse S .

La seconde question touche à la « matérialisation » du mouvement m en termes d'accords. En fait, le ton m existe à un niveau qui n'entraîne pas automatiquement des tons ou notes dans le sens usuel. Nous aurons donc à transformer le point m en une collection de points qu'on peut insérer dans l'ensemble des notes d'une partition. C'est ce que nous appelons *quantification*

¹La musique est la science de la bonne modulation.

du point m . Nous verrons que nous pourrions en effet trouver une telle quantification pour la plupart des tonalités que l'on rencontre dans le contexte de la musique classique européenne.

Pour terminer cette introduction, nous soulignons que, bien que notre modèle de la modulation s'oriente vers le schéma proposé par Schoenberg [49], il ne s'agit pas d'un métamodèle. L'ambition est de fournir un modèle du processus musical de la modulation mais qui n'entend pas remplacer la théorie de la modulation. Idem en physique : le modèle de transformation de coordonnées locales de l'espace-temps einsteinien n'est pas une métathéorie de l'approche newtonienne. Il lui est parallèle et la généralise mais il n'y a pas de dépendance entre ces deux aspects hormis la relation historique. Nous insistons sur ce point car l'utilisation des mathématiques pour comprendre la musique est — pour certains musicologues — une décision a priori de monter de la « vraie théorie » à une métathéorie. Il ne s'agit donc surtout pas de comprendre Schoenberg, mais plutôt, comme lui aussi, la musique. Et c'est ici que l'on se rend compte de l'état hors-la-loi du temps planckien : comprendre n'est pas uniquement éclaircir une loi donnée, mais aussi la créer pour comprendre et bâtir de bonnes compositions.

8.1.1 Le modèle de Schoenberg

La modulation tonale telle qu'elle est modélisée par Schoenberg est un processus tripartite dans le syntagme temporel d'une composition (voir figure 8.2).

Dans ce contexte d'harmonie tonale, on utilise les degrés d'une tonalité X . Ce sont les sept accords triadiques (de trois notes chacun) qui sont notés par des symboles romains $I_X, II_X, III_X, IV_X, V_X, VI_X, VII_X$, indexés par le nom X de la tonalité. La figure 8.1 montre les degrés de la tonalité Do . Les degrés sont chargés de signification harmonique et portent des noms correspondants, dont les plus importants sont tonique pour I , sous-dominante pour IV et dominante pour V .

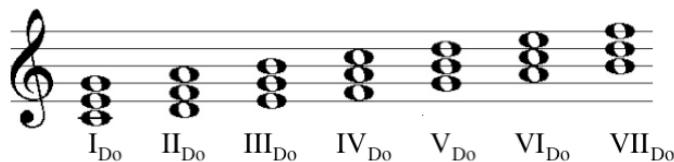


FIG. 8.1 – Les sept degrés triadiques de la tonalité Do .

Nous nous situons dans une tonalité de départ, en l'occurrence ici Do majeur. Dans cette tonalité, nous partons de degrés neutres, tels que I_{Do} ou VI_{Do} . Ces degrés sont neutres car ils pourraient être aussi les degrés d'une autre tonalité, par exemple $I_{Do} = IV_{Sol}$, et $VI_{Do} = II_{Sol}$. La phase de transition est constituée de degrés dit « pivots » de la modulation, signalant ce mouvement décidé vers la nouvelle tonalité (en l'occurrence Fa majeur). Schoenberg nous propose les degrés $II_{Fa}, IV_{Fa}, VII_{Fa}$. Après l'arrivée dans Fa , la nouvelle tonalité se signale par une cadence, i.e. un ensemble de degrés qui, eux, se trouvent seulement dans la tonalité cible, i.e. Fa pour notre exemple. On peut, par exemple jouer les degrés II_{Fa}, V_{Fa} (et aussi I_{Fa} pour indiquer la nouvelle tonique).

Ce modèle n'est pas assez précis : il présuppose un certain nombre de données et structures qu'il faut expliciter avant de pouvoir en faire un modèle scientifiquement valable. Voici les

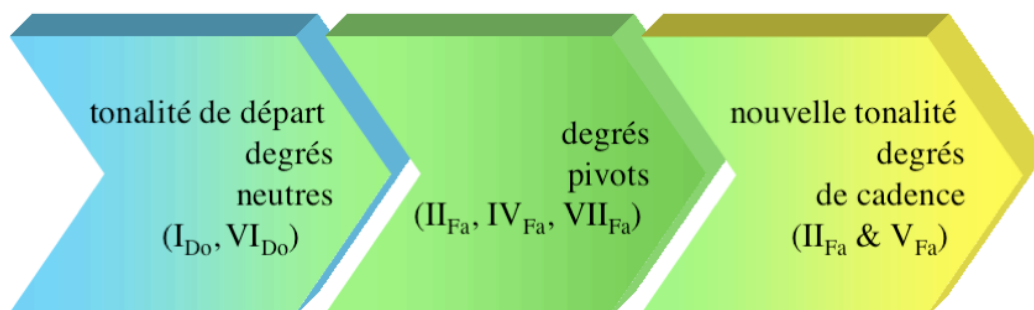


FIG. 8.2 – Schéma de modulation chez Schoenberg.

questions auxquelles il faut répondre :

1. Quel est l'ensemble des tonalités qui sont à notre disposition ?
2. Qu'est-ce qu'un degré ?
3. Qu'est-ce qu'une cadence ?
4. Quel est le mécanisme de modulation ?
5. Comment ces structures déterminent-elles les degrés pivots ?

Ce catalogue constitue déjà un moment critique dans le dialogue des mathématiques avec la musicologie. Dans les sciences humaines, les extensions des concepts ne sont en général jamais spécifiées de manière complètement explicite. Il n'y est même pas souhaité de donner des définitions précises, comme en témoigne ce passage de Rudolf Reti [44] : « In general, the author does not believe in the possibility or even desirability of enforcing strict musical definitions. Musical phenomena come to existence in the constant fluence and motion of compositional creation². » Cette remarque est intéressante renvoie à notre discussion concernant le temps de Planck (voir chapitre 4) : on dirait que l'attribution « constant fluence and motion of compositional creation » s'y réfère. Mais si les phénomènes peuvent bien être le magma de la création, les concepts, eux doivent suffir aux exigences scientifiques. Le flux des phénomènes ne doit pas être confondu avec le flux des concepts. Carl Dahlhaus [16] commet la même erreur en disant de l'harmonie de Hugo Riemann : « Eine Theorie aber, die gerade dort versagt, wo das Phänomen, das sie erklären soll, ins Vage und Unbestimmte gerät, darf als adäquat gelten³. »

La confusion du phénomène avec la théorie est remarquable. C'est pourquoi nous préférons ouvrir un cadre conceptuel pour les modulations qui n'est pas universel, mais extensible. En mathématiques, ce chemin méthodologique a été poursuivi avec grand succès : créer des architectures bien précises et fiables, démontrer ce qui est vrai au sein de telles architectures et étendre ces architectures si besoin est mais sans modifier leur structure initiale. Par exemple,

²En général l'auteur ne croit pas en la possibilité ou même la nécessité de fixer des définitions musicales strictes. Les phénomènes musicaux commencent à exister dans le flux et le mouvement constant de la création compositionnelle.

³Une théorie qui échoue là où le phénomène qu'elle doit expliquer devient vague et indéfini, peut être jugée comme étant adéquate.

définir et élaborer l'architecture des nombres réels et les étendre s'il est besoin de travailler avec des nombres complexes (en l'occurrence : la racine carrée de -1).

Dans cet esprit, nous allons réaliser un modèle de la modulation pour un cadre conceptuel bien restreint (donc, en particulier, pour des tonalités bien précises) et y élaborer les connaissances nécessaires pour offrir cette architecture à des extensions ultérieures. Le côté magique de cette méthodologie réside dans la pensée du générique en englobant tous les cas particuliers de sorte que l'extension soit déjà innée dans le cadre réalisé.

8.1.2 La reconstruction mathématique du modèle

Voilà une réponse aux six questions précédentes :

Quel est l'ensemble des tonalités ? Nous considérons les hauteurs chromatiques à l'octave près, i.e. les douze valeurs $0 \sim do, 1 \sim do\sharp, 2 \sim ré, \dots, 11 \sim sol$. Cet ensemble est représenté par les classes de résidus de module 12, i.e. les éléments de $\mathbb{Z}_{12}$, l'ensemble des nombres entiers au multiple de 12 près.

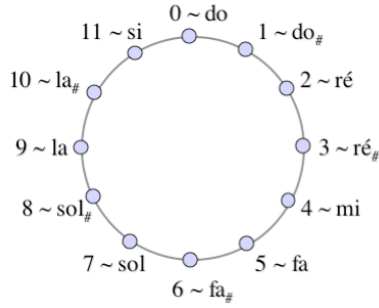


FIG. 8.3 – La représentation des hauteurs modulo octave sur $\mathbb{Z}_{12}$.

Nous sélectionnons les gammes diatoniques, i.e. la gamme $Do = \{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\} = \{do, ré, mi, fa, sol, la, si\}$ et ses transposées, i.e., $Ré = Do + 2 = \{2, 4, 6, 7, 9, 11, 1\}$, $Mi = Do + 4, \dots, Si = Do + 11$.

Pour définir une tonalité, on recouvre une telle gamme par les sept degrés triadiques. Pour Do , ce sont les sept accords de trois tons :

$$\begin{aligned} I_{Do} &= \{0, 4, 7\}, II_{Do} = \{2, 5, 9\}, III_{Do} = \{4, 7, 11\}, IV_{Do} = \{5, 9, 0\}, \\ V_{Do} &= \{7, 11, 2\}, VI_{Do} = \{9, 0, 4\}, VII_{Do} = \{11, 2, 5\}. \end{aligned}$$

Pour $Ré$ ce sont les sept triades transposées $I_{Ré} = I_{Do} + 2, \dots, VII_{Ré} = VII_{Do} + 2$, etc., et pour Si , on a $I_{Si} = I_{Do} + 11, \dots, VII_{Si} = VII_{Do} + 11$. Nous définissons la tonalité $X^{(3)}$ comme étant le recouvrement de la gamme diatonique X par les sept degrés $I_X, \dots, VII_X$. On obtient ainsi les tonalités $Do^{(3)}, Ré^{(3)}, \dots, Si^{(3)}$, l'ensemble de ces tonalités est noté par $Dia^{(3)}$. En théorie mathématique de la musique, ces tonalités sont aussi appelées *interprétations triadiques* (de la gamme diatonique).

Nous représentons une telle tonalité par la configuration des intersections des degrés, ce que les mathématiciens appellent *le nerf du recouvrement*. On remplace chaque degré par un point dans l'espace ordinaire à trois dimensions, puis on relie tout couple de points par une droite s'ils ont une intersection non vide. On relie enfin chaque triplet de points ayant une intersection non vide, ce qui forme une surface triangulaire.

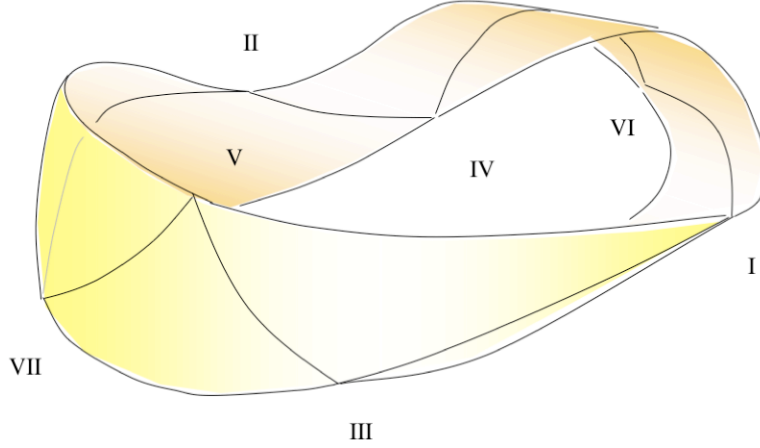


FIG. 8.4 – Le ruban harmonique d'une tonalité.

Il en résulte un ruban de Möbius (voir figure 8.4) dont le chemin le long du bord correspond au chemin par quintes. Il est remarquable que Schoenberg, dans [49, p.42], ait déjà utilisé une partie de cette construction, i.e. les intersections deux à deux des degrés pour décrire les relations harmoniques, et qu'il utilise le mot « *harmonisches Band* » pour une telle relation. Nous pouvons donc appeler ce ruban le *ruban harmonique* de la tonalité.

Ce type de construction consiste donc dans à choisir un certain nombre de sous-ensembles (les degrés triadiques en l'occurrence) d'un espace musical ($\mathbb{Z}_{12}$, des classes d'hauteurs en l'occurrence), puis à configurer les sous-ensembles suivant leurs intersections, i.e. suivant des opérations de la logique booléenne. On peut donc dire que *le ruban harmonique est une représentation géométrique d'un fait logique* ! C'est ce type de considération qui, une fois développé dans le cadre de la théorie des topos, mène au mariage de la logique avec la géométrie, une synthèse fondamentale dans notre théorie toposique de la musique. Nous venons d'exposer une petite partie de la logique géométrique des topos qui est à la base de la théorie mathématique fonctorielle exposée dans [34].

Qu'est-ce qu'un degré ? Ce concept est déjà défini, et nous soulignons que seuls ces degrés seront acceptés comme degrés dans cette conceptualisation. Par exemple, le degré $IV_{Do}^7 = \{fa, la, do, mi\}$ est seulement interprétable comme réunion $IV_{Do}^7 = IV_{Do} \cup VI_{Do}$ de deux degrés et non pas comme degré autonome.

Qu'est-ce qu'une cadence ? Une cadence est, par définition, un ensemble minimal k de degrés d'une tonalité $X^{(3)}$ de sorte que les triades de cet ensemble n'appartiennent à aucune autre tonalité $Y^{(3)}$, i.e. $k \subset X^{(3)}, k \subset Y^{(3)}$ si et seulement si $X = Y$. Voici les

cadences possibles : $k_1 = \{II, V\}, k_2 = \{II, III\}, k_3 = \{III, IV\}, k_4 = \{IV, V\}, k_5 = \{VII\}$. On y reconnaît la cadence classique k_4 . Notons toutefois que nos tonalités ne spécifient pas les toniques⁴.

Une telle identification de tonalités pourrait apparaître arbitraire, mais l'identification d'objets dans une perspective particulière est, en science, la chose la plus naturelle du monde. Par exemple, l'identification des hauteurs modulo l'octave est, en harmonie, une identification usuelle. Le traitement consistant à identifier en fonction de la perspective prise est donc normal, et non pas l'exception. Il va de soi que nous devons payer un prix pour l'identification car nous aurons moins d'objets à notre disposition. Cependant cela permettra l'obtention d'un plus grand nombre de résultats mathématiques.

Quel est le mécanisme de modulation ? Nous avons déjà annoncé qu'une modulation serait un point grothendieckien. En voici la définition précise : on se donne la tonalité $S^{(3)}$ de départ et la tonalité $T^{(3)}$ cible, que nous supposons différente de la première. Tout d'abord, on fixe une des cinq cadences k . C'est un outil pour identifier les tonalités par un minimum de degrés au cours de la modulation en question. Or, la flèche $m : S^{(3)} \rightarrow T^{(3)}$ est par définition une application bijective (correspondance biunivoque) sur les classes d'hauteurs $\mathbb{Z}_{12}$ de la forme $m(x) = ax + b$, i.e. $a = 1, 5, 7, 11$ qui doit être inversible. On demande de m qu'elle envoie la gamme S en la gamme T et que, de plus, tout degré de $S^{(3)}$ soit transformé en degré de $T^{(3)}$. Il existe exactement deux applications de ce type. En effet, si l'on a $T^{(3)} = S^{(3)} + t$, alors ou $m = e^t$, soit une translation par t avec $e^t(x) = x + t$, ou alors $m = e^t \circ A_S$, où A_S est l'unique inversion qui laisse S invariant. Pour $S = Do$, on a $A_{Do}(x) = 4 - x$. Une modulation de $S^{(3)}$ dans $T^{(3)}$ est donc un couple (k, m) que nous venons de décrire. Il y a toujours $5 \times 2 = 10$ modulations de $S^{(3)}$ dans $T^{(3)}$ (voir figure 8.5). Le point m est appelé *modulateur* et représente un exemple de point au sens de Grothendieck.

Comment ces structures déterminent-elles les degrés pivots ? Le point délicat est que le modulateur $m : S^{(3)} \rightarrow T^{(3)}$, est situé dans une réalité (adresse $S^{(3)}$!) qui ne fournit pas automatiquement de tons ordinaires⁵.

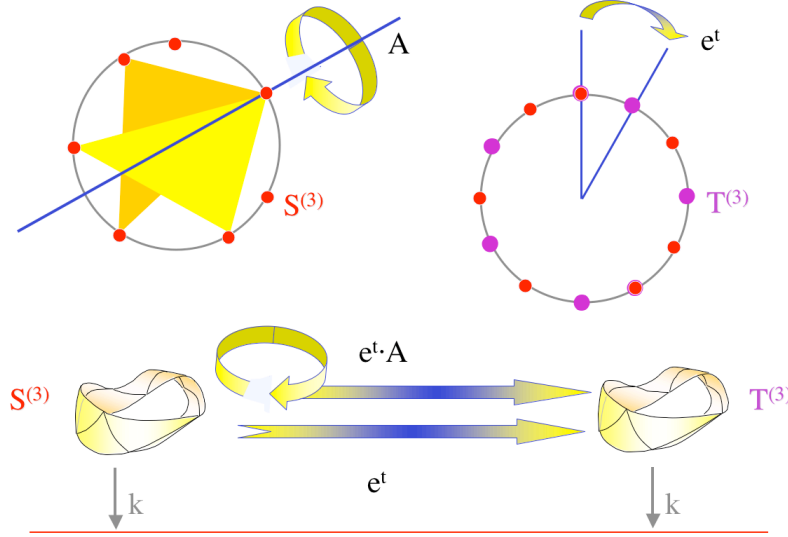
L'idée que nous poursuivons est empruntée à la physique des particules élémentaires. Chacune des quatre forces physiques fondamentales est transmise par un quantum correspondant : la force électromagnétique par un photon, la force faible par un boson, la force forte par un gluon, et la gravitation par un graviton. À cette matérialisation de forces correspond la représentation du modulateur m par des tons ordinaires. Ceci veut dire que l'on cherche un ensemble $M = M(k, m) \subset \mathbb{Z}_{12}$ de tons, appelé *quantum de la modulation* (k, m) , ayant les propriétés suivantes :

- Le modulateur m est une symétrie de M , i.e. $m(M) = M$,
- les degrés dans $k(T^{(3)})$ sont contenus dans M ,
- l'ensemble $M \cap T$ est rigide, i.e. il n'a pas de symétries non triviales,
- M est minimal avec les deux premières conditions.

Ces propriétés peuvent se résumer de la manière suivante : M matérialise le modulateur m , il est suffisamment grand pour contenir la cadence k de la tonalité cible et il est

⁴En d'autres termes, nous identifierons la tonalité *Do* majeur à tout mode ayant la même gamme, par exemple, *La* éolien, ou *Mi* phrygien.

⁵En effet, ce sont les points de $\mathbb{Z}_{12}$ d'adresse zéro, voir [34].

FIG. 8.5 – Les modulations de la tonalité $S^{(3)}$ dans la tonalité $T^{(3)}$.

minimal pour ces propriétés. La minimalité est requise pour éliminer des tons superflus dans M . La condition de rigidité nous garantit que m est uniquement repérable par M . Voici le théorème qui garantit l'existence et les propriétés clés des quanta de modulation :

Théorème 1 *Pour deux tonalités différentes $S^{(3)}, T^{(3)}$, il existe un quantum $M = M(k, m)$ des modulations (k, m) vérifiant les propriétés suivantes :*

- *M est l'union des degrés de $S^{(3)}, T^{(3)}$ qui sont contenus dans M et qui ainsi définissent l'interprétation triadique $M^{(3)}$ de M ;*
- *les degrés communs de $T^{(3)}$ et de $M^{(3)}$ sont appelés les degrés (pivots) de la modulation (k, m) ;*
- *le modulateur m est uniquement déterminé par les degrés de la modulation.*

Ajoutons que ces degrés pivots coïncident avec les degrés pivots indiqués par Schoenberg dans [49] pour toutes les modulations directes (voir [34, p.1199] pour une liste complète). Mais ajoutons à nouveau que ce modèle ne prétend pas modéliser la théorie donnée. C'est un modèle *sui generis* de ce qui se passe lors de la transition d'une tonalité à une autre. La figure 8.6 montre le nerf du quantum de modulation.

Pour terminer cette discussion, il est utile de voir la relation entre les pivots et le quantum de modulation en utilisant une image empruntée à la physique moderne : les pivots sont la trace du quantum dans la tonalité cible. Si l'on se rappelle que le quantum est une matérialisation du modulateur, point grothendieckien qui peut aussi être vu comme symétrie entre les deux tonalités en question, alors les pivots apparaissent comme étant la trace de cette symétrie dans la tonalité cible. En physique ce phénomène s'appelle « symétrie brisée ». Il est alors une question intéressante de savoir si, dans des compositions concrètes, non seulement les pivots,

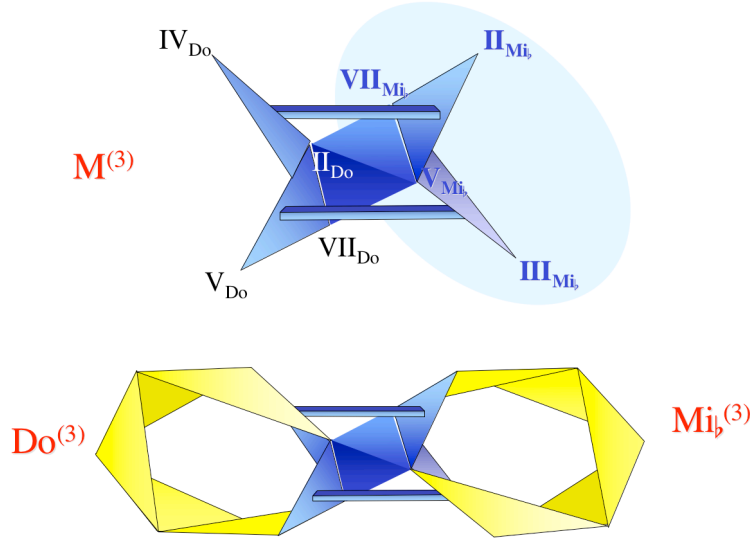


FIG. 8.6 – Le quantum de modulation de la tonalité $Do^{(3)}$ dans la tonalité $Mi^{(3)}$ dans sa représentation topologique via le nerf. Le nerf est de dimension cinq (six sommets en position générale), ce qui est symbolisé par les barres horizontales reliant six degrés chacune. En haut à droite sont représentés les pivots II, III, V, VII .

mais aussi les symétries sous-jacentes, possiblement matérialisées par les quanta de modulation, sont repérables. Pour rester dans l'analogie avec la physique, *il s'agit de « réchauffer » la matière musicale au point où la symétrie brisée devient visible*. Cette expérience sera réalisée dans la suite de l'ouvrage à l'aide de la sonate op. 106 de Beethoven dont la structure compositionnelle fournit un cadre idéal.

8.2 Optimisation de la modulation pour la gamme diatonique

Le présent modèle est, dans toute sa modeste architecture conceptuelle, un excellent exemple pour la méthodologie mathématique qui rend possible des généralisations quasi automatiques. Si l'on considère le théorème 1 et les concepts qui s'y appliquent, on peut les généraliser à différentes gammes sans aucun changement, quitte à refaire les constructions *mutatis mutandis*. Ceci vise directement à notre projet global de l'immersion de la facticité dans le fictif : l'extension du procès de modulation à des situations actuellement non incluses dans la pensée harmonique européenne.

La valeur de ce procédé est double : d'abord on peut envisager des modulations pour des gammes « exotiques » sans aucun changement conceptuel, ce qui enrichit les techniques d'harmonie pour la composition. D'autre part, l'immersion peut nous aider à comprendre la

position particulière de la pratique existante par rapport à la potentialité. Y a-t-il des indices pour que le choix fait soit soumis à un principe anthropique, c'est-à-dire que l'histoire ait sélectionné des solutions optimales parmi la variété des options a priori faisables ? Dans cette direction, on a le théorème 2 suivant.

On considère les gammes à sept tons S et leurs interprétations triadiques $S^{(3)}$ dont les degrés sont les accords à trois tons définis suivant le modèle de la gamme diatonique : si $S = \{x_1, x_2, \dots, x_7\}$ est une telle gamme, où les tons sont ordonnés dans l'ordre croissant dans le cercle $\mathbb{Z}_{12}$, alors le degré I_S est $I_S = \{x_1, x_3, x_5\}$, le degré II_S est $II_S = \{x_2, x_4, x_6\}$, etc. On écrit « q-modulation » pour « modulation quantisée ». On dira que $S^{(3)}$ est rigide si cette tonalité généralisée admet seulement la symétrie triviale (l'identité). On peut alors démontrer le résultat suivant⁶ :

Théorème 2 (Daniel Muzzulini) *On distingue deux situations pour la gamme de départ $S^{(3)}$ et la gamme cible $T^{(3)} = S^{(3)} + t$:*

- (i) *Si $S^{(3)}$ est rigide, alors :*
 - *Pour une telle gamme, il existe toujours au moins une q-modulation.*
 - *Le maximum de 226 q-modulations est atteint par la gamme mineure harmonique $S_{54.1}$ ⁷, le minimum de 53 q-modulations est atteint pour la gamme $S_{41.1}$.*
- (ii) *Si $S^{(3)}$ n'est pas rigide, alors :*
 - *Pour les gammes S_{52} et S_{55} , il y a des q-modulations excepté pour $t = 1, 11$; pour S_{38} et S_{62} , il y a des q-modulations excepté pour $t = 5, 7$. Tous les six autres types ont au moins une q-modulation.*
 - *Le maximum de 114 q-modulations a lieu pour la gamme mineure mélodique $S_{47.1}$. Parmi les gammes ayant des q-modulations pour tout t , la gamme majeure $S_{38.1}$ a un minimum de 26 q-modulations.*

On voit que les gammes classiques (majeure, mineure harmonique et mineure mélodique) prennent des positions distinctes au sein de la théorie de modulation qu'on vient de développer. Ceci est un fait remarquable car la conceptualisation ne singularise nullement la gamme diatonique ; c'est donc uniquement en termes des propriétés structurales générales dégagées par cette approche que ces positions distinguées se cristallisent. *On peut donc conclure qu'un principe anthropique apparaît comme conséquence de la dynamique engendrée par l'architecture générique proposée.* Ceci met évidence un choix historique de la musique européenne dans le cadre de lois tout à fait ahistoriques. Est-ce ici une des solutions à laquelle Carl Dahlhaus était parvenu dans sa critique du procédé purement historiographique en musicologie (voir la section 6.1) ?

Remarque 1 La généralisation précédente semble être centrée autour de la modulation harmonique, i.e. les structures sont toutes reliées aux hauteurs. Mais la forme mathématique des concepts ne force pas ce cadre paramétrique : on peut utiliser ces constructions sans aucune difficulté pour composer des modulations dans l'axe du temps, i.e. des modulations rythmiques ! Ceci est un autre avantage de l'approche mathématique : la signification paramétrique des résultats peut varier et donne toute une gamme de variantes de techniques compositionnelles.

⁶[34, Theorem 30, p. 572], voir aussi les listes correspondantes des pivots, [34, Appendix N].

⁷Le numéro se réfère à la classification des accords et gammes dans [34, Appendix L].

Nous renvoyons à [34, chapitre 28.3] pour l'exemple d'une modulation rythmique dans le premier mouvement de la composition « Synthesis » [33].

Remarque 2 On pourrait aussi avoir l'impression que ce modèle est limité à des concepts et exemples traditionnels ou même rétrospectifs de tonalité. Mais il suffit de considérer l'architecture mathématique du modèle et on s'aperçoit que le modèle offre un cadre très ouvert qui pourrait inclure des modulations entre structures telles que des motifs, des configurations complexes d'accords, ou même des timbres, si l'on change les espaces sous-jacents. C'est donc un modèle qui s'approche de la définition augustinienne de la musique comme « art de la bonne modulation ».

Chapitre 9

Les mondes de Ratz et Uhde dans la sonate « Hammerklavier »

*Die Grenzen sind noch nicht gezogen,
die sich dem Talent und dem Fleiss entgegenstellen,
indem sie erklären : bis hierher und nicht weiter¹.*

Ludwig van Beethoven

9.1 Monde, antimonde, catastrophes et l'accord de septième diminuée

Dans son traité des sonates de Beethoven [28], Joachim Kaiser débute son analyse de la sonate « Hammerklavier » op. 106 avec ces mots lapidaires : « Grösste Sonate der Musikgeschichte ». Cette sonate que Beethoven composa entre 1817 et 1818 témoigne sans doute non seulement de la lutte personnelle du compositeur, régulièrement au bord du suicide², mais surtout d'une extension de toutes les limites musicales : la taille de la sonate, les difficultés mnémotechniques et pianistiques, ainsi que la structure harmonique, motivique et rythmique font sauter le canon architectural de la forme sonate (« Sonatenhauptsatzform ») telle qu'elle fut établie par Adolf Bernhard Marx [30] vers 1850.

Pour commencer, le parcours modulant entre les différentes tonalités est plein de déviations du canon marxien. Le schéma canonique (nous suivons l'exposé d'Erwin Ratz [42]) est contredit à plusieurs occasions. De plus, les modulations ne sont pas toujours standard mais dégagent une structure que Jürgen Uhde dans [55] appelle « modulation catastrophe ».

¹Les limites qui s'opposent au talent et à l'application, en affirmant « jusqu'ici et pas plus loin », ne sont pas encore dessinées.

²En août 1817, dans une lettre à Zmeskall : « ... — was mich angeht, so bin ich oft in Verzweiflung u. möchte mein Leben endigen... Gott erbarme sich meiner, ich betrachte mich so gut wie verloren... » (« ... — quant à moi, je suis souvent désespéré et voudrais terminer ma vie... que Dieu ait pitié de moi, je me considère pratiquement perdu... »).

La figure 9.1 montre deux modulations du premier mouvement, dont la première de *Do* majeur vers *Mi_b* majeur (mesure 124 à 131) est assez standard (bien que les mesures 124-126 soient un peu mystérieuses, nous y reviendrons). Les pivots standard *VII – V – VII* de *Mi_b* majeur apparaissent aux mesures 128-129 et s’achèvent aux mesures 130-131 dans la cadence (lui introduisant la nouvelle signature de *Mi_b* majeur).



FIG. 9.1 – Modulation standard du premier mouvement de l’op. 106, mesures 124-131, de *Sol* majeur vers *Mi_b* majeur.

A contrario, la modulation de *Mi_b* majeur vers *Si* mineur (mesure 193 à 201) est de type « catastrophe » (voir figure 9.2). La signature disparaît, les structures mélodiques également. Il ne reste que la répétition obstinée de l’accord de septième diminuée de la mesure 193 à la mesure 196, terminant sur la tonique *ré* de la tonalité cible.

Les postulats de Ratz [42] et Uhde [55] pour comprendre l’architecture modulante singulière de la sonate sont fascinants : Ratz conjecture que cette sonate est bâtie autour de la tonalité fondamentale *Si_b* majeur qui définit le « monde » de la sonate, un monde auquel s’oppose un « antimonde » autour de la tonalité *Si* mineur (appelée « noire » par Beethoven). Uhde de son côté ajoute que le changement des mondes décrits par Ratz fait appel aux modulations catastrophes, et que dans celles-ci, l’accord de septième diminuée joue un rôle important. Ces approches et postulats souffrent d’un certain nombre de défauts :

1. Le postulat de Ratz manque de précision : il ne spécifie pas quelles tonalités appartiennent au monde et lesquelles appartiennent à l’antimonde.
2. Quel est le total de tonalités possibles ?
3. Quelle est la relation entre la dichotomie monde-antimonde et l’accord de septième diminuée ?
4. Y a-t-il des relations entre l’harmonie et l’élaboration motivique et thématique chez Beethoven ?
5. Existe-t-il un plan global de transitions tonales ?

Nous allons essayer de répondre aux questions précédentes, en incluant les postulats de Ratz et Uhde, comme suit :

FIG. 9.2 – Modulation catastrophe du premier mouvement de l’op. 106, mesures 193-201, de *Mi*, majeur vers *Si* mineur.

1. Vérifier le modèle pour toutes les modulations.
2. Expliquer les catastrophes.
3. Comprendre le rôle de l’accord de septième diminuée.
4. Décrire explicitement le monde et l’antimonde.
5. Expliquer les effets de bord tels les mesures mystérieuses 124-126.
6. Si possible comprendre les relations entre les motifs et l’accord de septième diminuée.

Soulignons que cette analyse n’est ni poétique, ni historique : nos méthodes et résultats ne sont pas dans l’obligation de coïncider avec l’état de la théorie musicale de l’époque de Beethoven. L’analyse doit être plutôt appelée *neutre* au sens de la sémiologie de la musique de Jean Molino, Nicolas Ruwet et Jean-Jacques Nattiez [34]. Evidemment, cette approche peut sembler osée car la localisation poétique et historique d’une analyse est un critère traditionnel. Néanmoins, une telle tradition ne peut être suivie pour un certain nombre d’arguments.

Tout d’abord, la position consciente du compositeur lors de la construction de l’œuvre représente la moindre des parties constitutives de la création. Mais l’intuition, la pratique professionnelle et les règles tacites de composition ne sont pas accessibles aux analystes. *A fortiori*, l’état de la théorie musicale contemporaine ne peut que jouer un rôle secondaire vis-à-vis de ces forces inaccessibles. Il est aussi évident que le caractère singulier d’une œuvre telle que l’op. 106 ne peut se déduire des connaissances canonisées de l’époque.

À part ces problèmes d'accessibilité des arguments poïétiques, une analyse neutre ne s'oriente pas vers la génèse, mais vers le résultat, i.e. l'œuvre telle qu'elle subsiste au niveau de la partition objective. L'analyse touche à l'objet, non à son créateur. La mise en relief de la musique et non du compositeur est en parfaite congruence avec le programme d'une analyse productive qui vise à la créativité dans la transduction et non    la reconstruction du chemin s'achevant dans une œuvre. Pour reprendre notre comparaison avec les physiciens, seul le résultat leur est accessible et il leur est impossible de recourir à la divine po  t  que dans leur analyse. L'unique possibilité d'accéder à l'Univers, «   uvre cosmique », réside les outils mathématiques et les principes de la physique.

9.2 La modélisation de la topographie modulante

Le modèle de modulation que nous appliquons à notre analyse résulte de notre modèle général de la modulation tonale, mais avec des restrictions imposées aux modulateurs possibles. On verra comment ces restrictions naîtront du postulat fondamental suivant :

Postulat 1 *La structure de modulation de l'op.106 est gouvernée par les symétries de l'accord de septième diminuée*

$$Do_{\sharp}^{-7} = \{do_{\sharp}, mi, sol, si_{\flat}\} = \{1, 4, 7, 10\}$$

dans le rôle des modulateurs admis.

Plus précisément, ces symétries sont les flèches $e^b.a : \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$ avec, par définition, $e^b.a(x) = ax + b$, où $a = \pm 1$ et b quelconque, qui laissent $Do_{\sharp}^{-7}$ invariant, i.e., $e^b.a(Do_{\sharp}^{-7}) = Do_{\sharp}^{-7}$. Leur ensemble est le groupe des automorphismes de l'accord et sera noté $Aut(Do_{\sharp}^{-7})$. Il contient ces huit éléments :

$$Aut(Do_{\sharp}^{-7}) = \{Id = e^0, e^3, e^6, e^9, e^2.11, e^5.11, e^8.11, e^{11}.11\}$$

dont les quatre premiers sont les quatre transposition par multiples de la tierce mineure et les autres sont des inversions par rapport à des axes de symétrie fixés par les notes suivantes : $do_{\sharp}, ré/r  _{\sharp}, mi, fa/fa_{\sharp}$, dans cet ordre (voir figure 9.3).

Cette restriction signifie que nous n'avons à notre disposition que les symétries de $Aut(Do_{\sharp}^{-7})$ pour modulateurs. Toutes les modulations devront donc en principe respecter cette restriction. Quelle est la relation de ce groupe avec le couple monde/antimonde de Ratz ? Pour cela, on observe d'abord qu'une flèche quelconque $g = e^b.a : \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$ permute les 12 tonalités $X^{(3)}$ quand elle est appliquée aux tons de la gamme X sous-jacente, action qu'on note par $g.X^{(3)}$. Par exemple, pour la symétrie $g = e^9$ de $Aut(Do_{\sharp}^{-7})$, on a $g.Si_{\flat}^{(3)} = Sol^{(3)}$.

Or, cette action du groupe $Aut(Do_{\sharp}^{-7})$ sur $Dia^{(3)}$ définit deux orbites, i.e. deux sous-collections de tonalités : l'une est la collection des huit tonalités

$$\mathcal{M} = \{Si_{\flat}^{(3)}, R  _{\flat}^{(3)}, Mi^{(3)}, Sol^{(3)}, Do^{(3)}, Mi_{\flat}^{(3)}, Sol_{\flat}^{(3)}, La^{(3)}\},$$

qui peuvent être obtenues par l'action d'une symétrie de $Aut(Do_{\sharp}^{-7})$ à partir de la tonalité fondamentale du monde $Si_{\flat}^{(3)}$, et l'autre est celle des quatre tonalités

$$\mathcal{A} = \{R  ^{(3)}, Fa^{(3)}, La_{\flat}^{(3)}, Si^{(3)}\},$$

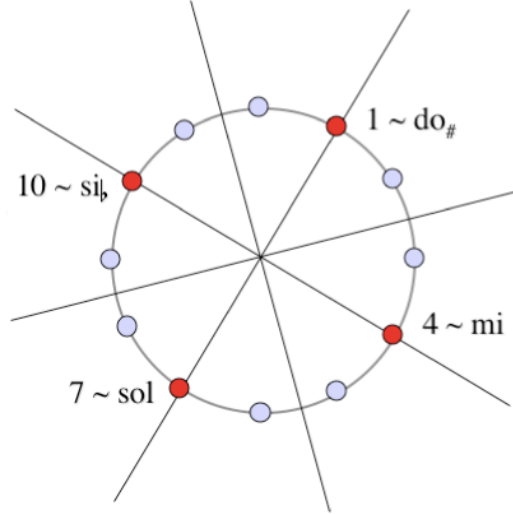


FIG. 9.3 – Les quatre symétries d'inversion de la septième diminuée.

qui peuvent être obtenues à partir de la tonalité « noire » de l'antimonde Si mineur (aussi noté $si^{(3)}$) que nous identifions à la tonalité $Re^{(3)}$ (majeur) de notre collection $Dia^{(3)}$ de tonalités. Aucune des tonalités de la seconde orbite $\mathcal{A}$ ne peut être obtenue par une symétrie à partir d'une tonalité de la première orbite $\mathcal{M}$, et vice versa. Donc l'ensemble $Dia^{(3)}$ est partitionné en deux orbites disjointes. On peut démontrer que ce groupe $Aut(Do_{\sharp}^{-7})$ est maximal parmi tous les groupes de symétries pour la propriété de n'admettre aucune action envoyant la tonalité fondamentale dans la tonalité $Re^{(3)}$. Ceci signifie que l'accord $Do_{\sharp}^{-7}$ est relié au couple de ces deux tonalités par la propriété de les « séparer » et d'être maximale avec cette propriété.

Ceci étant, nous définissons le monde de Ratz comme étant la collection $\mathcal{M}$ tandis que l'antimonde de Ratz est la collection complémentaire $\mathcal{A}$. Notre postulat se précise au sens où les modulations (toujours dans le mouvement *Allegro*) suivent cette répartition en monde et antimonde : les modulations parmi des tonalités de $\mathcal{M}$ ou de $\mathcal{A}$ sont décrites par notre modèle tandis que les modulations où l'on passe du monde dans l'antimonde et vice versa doivent montrer une structure radicalement différente (en fait, ce seront les modulations dites catastrophes d'Uhde). Le parcours des tonalités du mouvement est visualisé dans la figure 9.4, en partant de la tonalité fondamentale, i.e. la tonalité centrale du monde de Ratz. Les modulations parcourent des tonalités du monde et le quittent pour la modulation catastrophe $Mi_b^{(3)} \rightarrow Re^{(3)} \sim si^{(3)}$, et plus tard, après la modulation $Re^{(3)} \rightarrow Si^{(3)}$ dans l'antimonde, retourne dans le monde via $Si^{(3)} \rightarrow Si_b^{(3)}$. Nous allons discuter ces mouvements dans la suite.

9.2.1 Modulations standard

Le postulat est donc que les modulations au sein du monde ou de l'antimonde suivent notre modèle basé sur les modulateurs. Nous en discutons deux exemples qui sont particulièrement

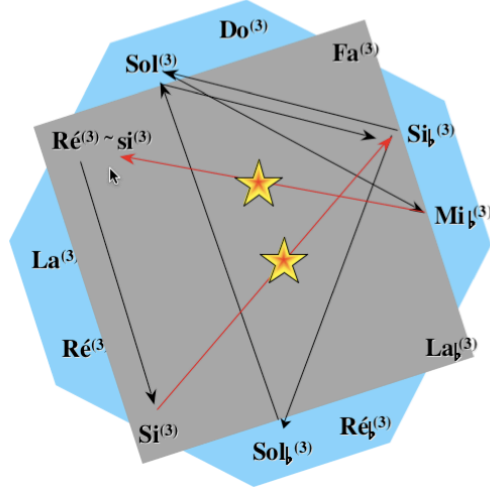


FIG. 9.4 – Le schéma des modulations dans le mouvement *Allegro* de l'op. 106. Les étoiles indiquent les changements monde-antimonde.

intéressants pour la raison suivante : l'analyse de ces modulations ne suit pas seulement la prédiction des pivots, mais met également en évidence le modulateur.

Première modulation : $Si_b^{(3)} \rightarrow Sol^{(3)}$ mesures 37-46, soit une déviation du canon de Marx qui impose la modulation à la dominante. La dominante $Fa^{(3)}$ se trouve en réalité dans l'antimonde, donc il n'y a pas de modulateur dans la dominante. Or, la modulation dans $Sol^{(3)}$ admet le modulateur e^9 . On peut montrer que le seul pivot pour ce modulateur est le degré VII_{Sol} . En observant la situation de cette modulation dans la figure 9.5, on voit que le degré pivot apparaît deux fois comme séquence de deux transpositions successives d'une tierce mineure des notes les plus hautes du pivot. La transposition d'une tierce mineure est donc matérialisée comme on avait souhaité le voir dans notre discussion de l'analogie avec les symétries brisées en physique.

Le trait intéressant de cette modulation est la partie finale aux mesures 45-46. Trois suites de trois tierces chacune apparaissent qui ne se comprennent que par rapport au groupe qui gouverne notre système. La première et la dernière suite sont $VII_{Si_b}, VII_{La}, VII_{Si_b}$, la suite du milieu est $V_{Sol}, VII_{Si}, V_{Sol}$. Les deux suites consistent en deux degrés symétriques sous une inversion (trait bleu dans la figure) du groupe $Aut(Do_{\sharp}^{-7})$, et le degré VII_{Si} au milieu est la seule triade dans l'accord clef $Do_{\sharp}^{-7}$, les autres triades étant toutes dans son complémentaire.

Cette configuration est arrangée autour des structures clefs et ne contient que le degré V_{Sol} de la tonalité cible de la modulation. On peut conclure que toute cette configuration met en évidence les structures clés qui sont responsables des systèmes de modulations plutôt que la tonalité cible (qui demanderait la cadence que l'on a déjà vue dans les mesures précédentes). Terminons par la remarque que la modulation pédale, qui s'offre pour cette transition, n'a pas lieu (bien que le pédale *ré* apparaisse, mais sans les degrés nécessaires $IV_{Si}, II_{Si}, I_{Si}, Vi_{Si}$ pour ce type de modulation).

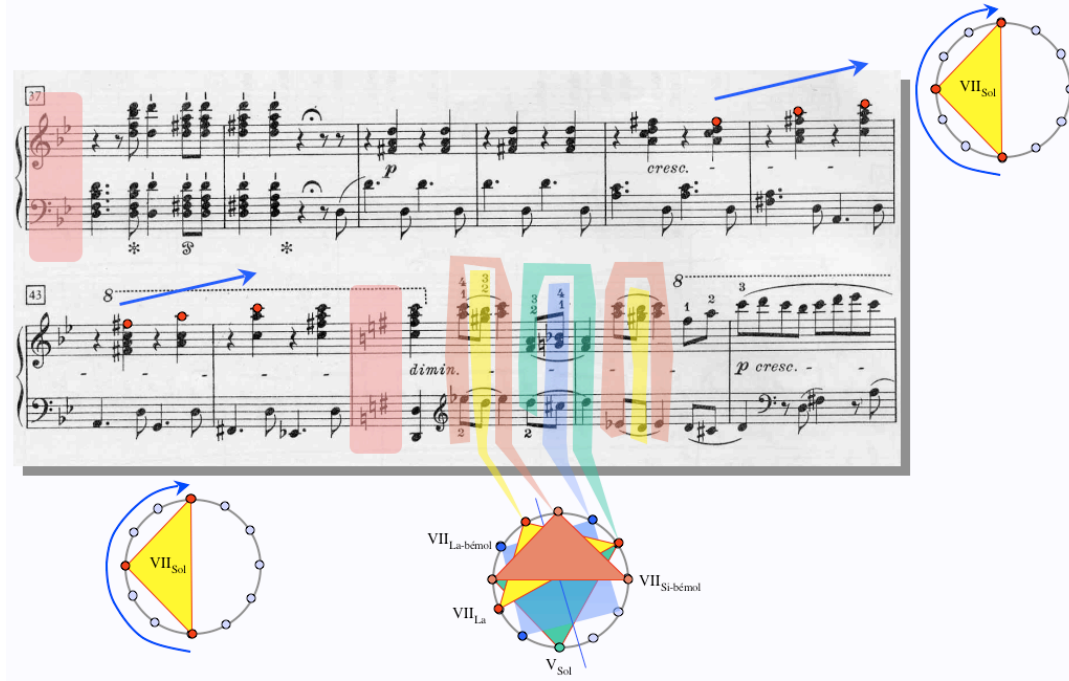


FIG. 9.5 – La modulation $Si_b^{(3)} \rightarrow Sol^{(3)}$ basée sur le modulateur e^9 , le pivot étant VII_{Sol} .

Seconde modulation : $Sol^{(3)} \rightarrow Mi_b^{(3)}$ mesures 124-131 (voir figure 9.1). Comme nous le savons déjà, cette modulation suit le chemin standard avec les pivots VII_{Mi_b} , V_{Mi_b} , VII_{Mi_b} (en accord avec notre modèle) et la cadence dans les mesures 128-129, terminant dans la nouvelle tonalité dans la mesure 131. Pour cette modulation, le groupe $Aut(Do_{\sharp}^{-7})$ met à disposition l'inversion $U_{sol} = U_{re_b} = e^2.11$ (dans $\mathbb{Z}_{12}$!) comme il est requis par notre modèle, donc on n'a pas ici de restriction de modulateurs. Le point intéressant est que, dans les mesures 124-127, ce point grothendieckien est mis en évidence. Donc comme pour la modulation discutée plus haut, non seulement les pivots sont visibles, mais les modulateurs le sont également. Il s'agit ici de matérialiser le modulateur $e^2.11$. Or, si l'on transpose toutes les notes des mesures 124-127 dans une octave (ce qui revient à considérer la situation dans $\mathbb{Z}_{12}$), alors on reconnaît dans l'image de la figure 9.6 que les deux figures mélodiques (mesures 124-125 et 126-127) centrées autour de l'axe d'inversion sont inverses l'une de l'autre. De plus, le matériel tonal de ces quatre mesures est la gamme de Do mineur mélodique, dont la symétrie est justement le modulateur U_{sol} . Donc le modulateur se matérialise en configuration symétriques de tons (ordinaires). Ceci est précisément la situation d'une expérience musicale annoncée à la fin de la section 8.1.2.

9.2.2 Quanta et catastrophes

On vient de voir dans deux exemples que les modulateurs sont mis en évidence (i.e. se matérialisent en quanta) pour les modulations au sein du monde de Ratz. Toutes les modulations

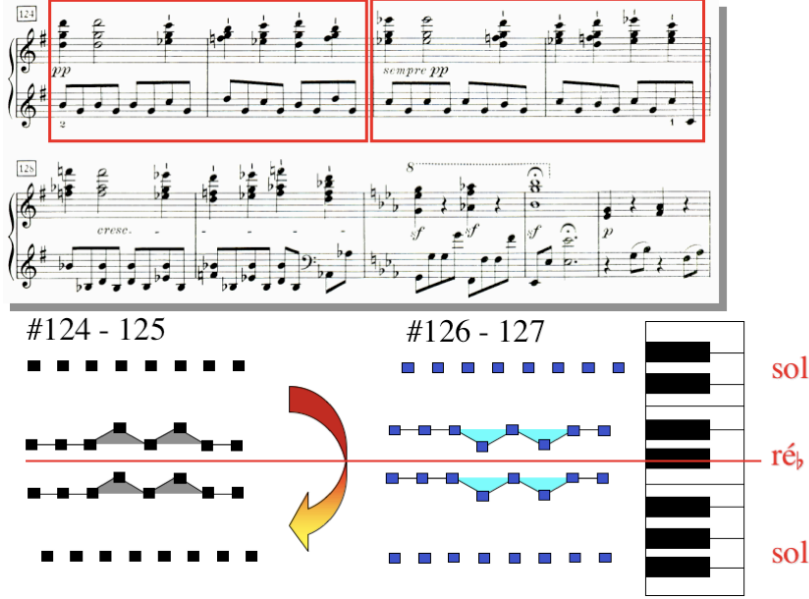
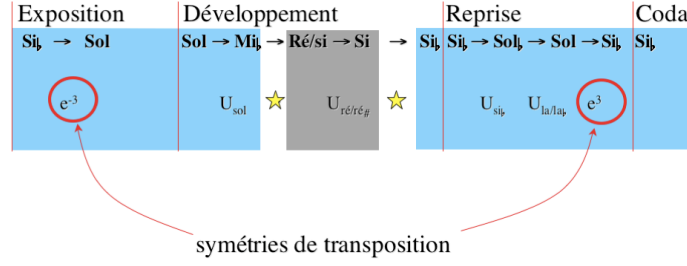


FIG. 9.6 – La modulation $Sol^{(3)} \rightarrow Mi^{(3)}$ basée sur le modulateur $U_{sol} = U_{re_b} = e^{2.11}$ se matérialise aux mesures 124-127 dans l'inversion du motif des mesures 124-125 aux mesures 126-127. La figure reprend l'analyse figurant dans [31].

de ce mouvement qui ne quittent pas une orbite donnée suivent ce schéma : pivots et visibilité de quanta (cf. [34] pour détails). Pour les deux modulations où l'on change d'orbite, on s'attend à des phénomènes bien différents. Nous reconsidérons la modulation catastrophe montrée dans la figure 9.2.

Nous avons vu que pour cette modulation, la signature est effacée et qu'on ne rencontre que des accords de septième diminuée. D'abord, pendant deux mesures 193-194, apparaît $Do_{\sharp}^{-7} + 1$, et après, de la fin de la mesure 194 à l'avant-dernière note de la mesure 196, l'accord fondamental $Do_{\sharp}^{-7}$. Donc non seulement les modulateurs ordinaires se matérialisent, mais aussi le groupe de symétries fondamental moyennant son accord associé $Do_{\sharp}^{-7}$. Cette architecture révèle une hiérarchie de symétries et de leur quantification : les modulateurs donnent lieu aux quanta et leurs pivots, tandis que l'ensemble des modulateurs forme un groupe associé à un accord $Do_{\sharp}^{-7}$ qui le matérialise. Cette dualité entre points grothendieckiens abstraits et tons musicaux est le point de départ d'une théorie topologique de l'harmonie qui, en particulier, englobe le cœur de la théorie de Hugo Riemann (voir [34, chapitre 24] pour les détails). Intuitivement, le niveau du groupe $Aut(Do_{\sharp}^{-7})$ de modulateurs représente un niveau de composition qui se compose de points de Grothendieck, tons abstraits (appelés *self-addressed* dans [34]), qui gouvernent le paysage modulant jusqu'aux notes qu'ils dégagent. Donc les modulations catastrophes matérialisent l'instance centrale de ce royaume tonal.

Pour résumer l'analyse modulante, la figure 9.7 montre le schéma de toutes les modulations ainsi que des modulateurs (s'il y en a!).

FIG. 9.7 – Le schéma des modulations et modulateurs pour le mouvement *Allegro* de l'op.106.

Nous savons que ce langage imagé se situe bien au-delà de l'analyse scientifique neutre. Mais si nous voulons suivre le chemin de l'analyse créatrice suggéré par Boulez, il est vital de former des images suggestives pour alimenter l'imagination, idée défendue par Boulez dans [11, I] : « Unsere Imagination schärft die Intelligenz, und unsere Intelligenz ist der Rückhalt der Imagination - ohne diese Wechselwirkung wird alle Forschung und Untersuchung zur Schimäre. Oft schon wurde gesagt : die Musik ist sowohl Wissenschaft wie Kunst. Wer könnte diese beiden Wesenheiten im selben Tiegel verschmelzen, wenn nicht die Imagination, diese "Königin der Fähigkeiten"³ ! »

9.3 Les germes du travail motivique

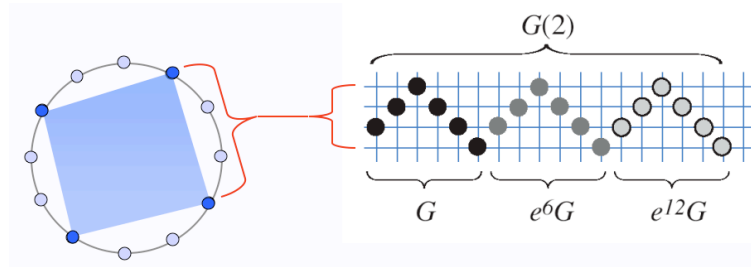


FIG. 9.8 – Le zigzag motivique induit par la transposition limitée d'une tierce mineure.

Pour terminer l'analyse, revenons sur la question du travail motivique. Comment pourrait-on relier cette perspective à la structure de l'accord $Do_{\sharp}^{-7}$ de notre postulat fondamental? Démarrons au niveau des structures fondamentales données et déduisons-en les motifs concrets de la manière suivante.

³Que notre imagination aiguisé notre intelligence, et que notre intelligence assure notre imagination : sans cette réciprocité d'action, l'investigation a toute chance d'être chimérique. C'est pourquoi, avant d'aborder la forme, nous avons tenté d'opérer une synthèse de la technique actuelle, pour pouvoir agir en toute conscience, et liberté : loin de nous alourdir, ce bagage va nous servir de viatique et nous *provoquer* à la spéculation. On a maintes fois répété : la musique est une science autant qu'un art ; qui saura fondre ces deux entités au même creuset, sinon l'Imagination, cette « reine des facultés » !

Étant donnée la gamme chromatique, comment pourrions-nous créer une mélodie générique à partir de celle-ci ? Le plus simple serait de traverser la gamme en montant ou en descendant une octave de la gamme, ou alors de monter et de descendre en zigzag. Or, dans notre situation de l'accord $Do_{\sharp}^{-7}$, la gamme chromatique s'achève déjà après une tierce mineure : c'est là le phénomène de la transposition génératrice e^3 du groupe $Aut(Do_{\sharp}^{-7})$.

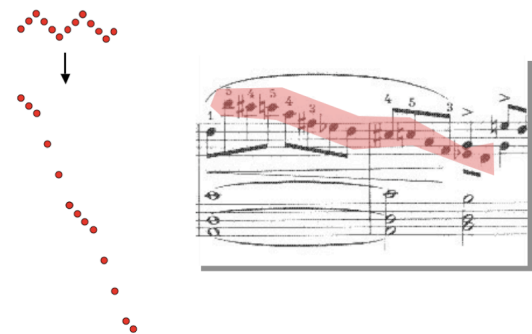


FIG. 9.9 – La partie gauche montre une transformation affine du zigzag motivique réalisée aux mesures 75-76. Sa réalisation est montrée à droite.

Nous allons donc essayer de prendre le zigzag mélodique d'une tierce mineure comme germe générique (voir figure 9.8). Le zigzag $G(n)$ est défini comme réunion des translatés temporels (!) $e^{k.6}(G) = G + k.6, k = 0, 1, \dots, n$ du germe G .

Notre postulat est que ce zigzag $G(n)$ est travaillé par deux processus pour fournir la structure motivique de la sonate : en premier lieu, on applique des transformations affines⁴ f du plan des hauteurs et des temps à $G(n)$, et en deuxième lieu, on considère des recouvrements de thèmes, mélodies ou motifs par des parties suffisamment grandes de ces transformés $f(G(n))$. Le travail motivique consisterait donc en l'application de la combinaison de ces deux opérations au germe $G(n)$. Nous don-

nons juste un exemple figure 9.9 et renvoyons à [34] et à [31] pour d'autres exemples. La présence de ces dérivées du germe dans l'op. 106 n'est pas due au hasard ; celles-ci sont omniprésentes dans la structure motivique et cela très souvent d'une manière univoque et surprenante.

⁴Une transformation affine consiste en une transformation linéaire, représentée par une matrice carrée de dimension 2 dans le plan, suivie d'une translation.

Chapitre 10

Reconstruction créatrice : la sonate « L'essence du bleu »

A l'œuvre on reconnaît l'artisan.
Proverbe français

Ayant parcouru la première moitié du programme d'une analyse créatrice, c'est-à-dire la partie où l'on reconnaît les structures inhérentes à une facticité, en l'occurrence le mouvement *Allegro* de l'op. 106 de Beethoven, nous allons dans la suite accomplir ce programme par la construction d'un mouvement *Allegro* d'une nouvelle sonate (op.3 de l'auteur de ce livre).

Cette sonate fut composée en 1981 et publiée en 2002 [35], incluant le CD d'un enregistrement de la pièce avec l'interprétation de Patrizio Mazzola¹ (voir figure 10.1). Le titre original de la sonate est $Aut_G(MessiaenIII) \setminus DIA^{(3)}$ et renvoie à l'action du groupe de symétries sous-jacent à cette sonate, analogue à l'action décrite ci-dessus pour l'op. 106 (voir ci-dessous pour l'explication de cette action). L'actuel titre plus poétique « L'essence du bleu » fut ajouté pour la publication en 2002. Il se réfère à la couleur bleue de la tonalité fondamentale $S\dot{i}_b$ majeur de l'op. 106 et à la transduction de « l'essence de notre analyse » conduisant de la sonate de Beethoven à la nôtre.

La pièce est écrite sous forme sonate et comprend 99 mesures dans le mètre 12/8. La tonalité de base de cette œuvre est celle de *Do* majeur.

Avant de nous plonger dans ce travail de (re)construction, il est important de se rendre compte de ce passage du fictif au factuel. Notre projet global — réfléchir la facticité dans sa double négation — prend, dans le cadre de la transduction, la forme d'un geste boulézien qui, partant d'un fait, produit de manière créative un nouveau fait. Mais alors, le fictif, la négation, est-il transmuté en facticité ? La transduction détruit-elle la potentialité établie par l'analyse créatrice ? Prenons le cas présent : la construction de la sonate op. 3 détruit-elle la négation, l'aura du fictif de l'op. 106 ? Nous ajoutons clairement un nouveau fait aux données. Donc la potentialité est légèrement diminuée mais non détruite, car ce geste n'est qu'une des multiples variantes de la négation. Elle n'est qu'un reflet du réel dans le fictif, une négation

¹Ce n'est pas un pseudonyme de l'auteur, mais le nom d'un pianiste de musique classique suisse. Il s'agit d'une belle coïncidence avec celui de l'auteur qui, lui, est un pianiste de free jazz.

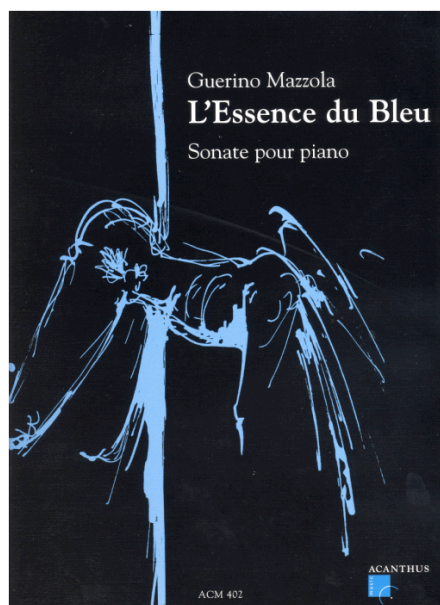


FIG. 10.1 – La sonate « L'essence du bleu » publiée en 2002 par Acanthus, contenant un CD avec l'interprétation de la sonate par Patrizio Mazzola.

particulière, qui, pour souligner l'affirmation hégélienne, devra être complétée par toute la gamme des variations. En d'autres mots, partant de la philosophie de Yoneda, *la compréhension analytique totale d'une œuvre ne se fait que par l'intégralité des perspectives prises par la variété des gestes bouléziens qu'elle englobe.*

Quant aux applications de cette construction basée sur l'analyse, il serait fort intéressant d'implémenter ces méthodes et leurs généralisations dans des environnements de composition et d'analyse assistées par ordinateur pour faire avancer l'informatique musicale dans la direction transductive : comprendre pour composer pour comprendre pour...

10.1 Transduction par variation des paramètres analytiques

Notre analyse du mouvement *Allegro* de l'op. 106 au chapitre 9 présente au final une conception qui élève les tons musicaux dans les cieux des points grothendieckiens, ouvrant des perspectives sur un monde aussi beau qu'abstrait.

Il en résulte à la fois de grands avantages et inconvénients : des avantages, car dans l'abstraction, les structures se simplifient et la variation, dans un voisinage de transduction, s'avère fort facile. Cependant les problèmes surviennent dès que l'on s'apprête à implanter, voire matérialiser les points abstraits dans la réalité « souterraine » (en référence à notre métaphore du paradis de Grothendieck) des notes d'une partition !

Nous allons d'abord construire l'architecture modulante, et ensuite le germe motivique et le thème principal de la sonate qui en découle. Ces deux constructions de base seront appliquées pour former la sonate jusque dans ses moindres détails.

10.1.1 L'architecture modulante

Dans la définition des structures dominantes pour l'analyse de l'op. 106, nous avons proposé le postulat 1 de la section 9.2 qui est centrée autour de l'accord de septième diminuée $Do_{\sharp}^{-7}$ et de son groupe d'automorphismes $Aut(Do_{\sharp}^{-7})$. Notre variation de ces données se réfère à la construction de l'accord : il est l'orbite d'un ton sous l'action de la transposition par un diviseur de 12. Le diviseur définissant $Do_{\sharp}^{-7}$ est 3. Pour notre variation, nous avons choisi le diviseur 4, qui est, pour 12, le diviseur « complémentaire » de 3 puisque $12 = 3 \times 4$. A partir de ce choix, notre postulat pour la variation dans l'espace analytique² est le suivant.

Postulat 2 *La structure de modulation de l'op. 3 est gouvernée par les symétries de l'accord de quinte augmentée*

$$Do_{\sharp}^{+} = \{do_{\sharp}, fa, la\} = \{1, 5, 9\}$$

dans le rôle des modulateurs admis.

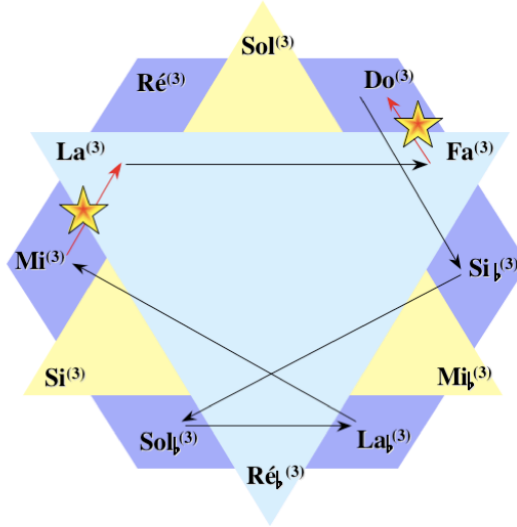


FIG. 10.2 – Les trois orbites du groupe des symétries de $Do_{\sharp}^{+}$, ainsi que le parcours modulant proposé pour la sonate op. 3. Le monde est représenté par la grande orbite et s'oppose à deux antimondes. Notre parcours traverse deux fois la frontière du monde.

En intégrant nos connaissances sur l'analyse de l'op. 106, nous allons considérer les orbites dans $Dia^{(3)}$ du groupe

²Cet espace est l'ensemble des diviseurs de 12. Nous ne nous attardons pas ici sur le mouvement transductif du diviseur 3 au diviseur 4, problème concernant davantage les géomètres algébristes.

$$\text{Aut}(Do_{\sharp}^+) = \{Id = e^0, e^4, e^8, e^2.11, e^1.0.11, e^6.11\}.$$

Il y a trois orbites, deux à trois tonalités chacune et une à six tonalités, elles sont montrées dans la figure 10.2. Nous avons alors à choisir une trajectoire modulante. En principe, la trajectoire que nous avons observée pour l'op. 106 n'a pas beaucoup de contraintes. D'abord, nous démarrons de la tonalité fondamentale de notre sonate, $Do^{(3)}$, et nous traversons un cycle retournant finalement à cette tonalité initiale. Ensuite, nous observons que la trajectoire pour l'op. 106 est presque symétrique, comprenant deux changements d'orbite. Nous allons donc construire une trajectoire de modulations « assez symétrique », ayant deux changements d'orbite (donc deux catastrophes). Par conséquent, nous n'entrons pas dans le second antimonde pour la sonate op. 3 (nous pourrions cependant le faire dans un mouvement ultérieur). Ainsi nous demeurons dans l'antimonde pour une seule modulation dans chacune des sonates. Finalement, la longueur de la trajectoire pour l'op. 106 est égale à huit tandis que la longueur de notre trajectoire est de sept. Les deux longueurs sont donc bien comparables. Nous reconnaissons ici un aspect de la variété des gestes bouléziens : la variété des trajectoires de modulation, une structure facilement contrôlable par un logiciel. La figure 10.3 montre le schéma des modulations et des modulateurs (quand ils sont présents) pour cette trajectoire :



FIG. 10.3 – Le schéma des modulations et des modulateurs proposé pour la sonate op. 3. On y reconnaît les deux catastrophes (étoiles) pour les changements de monde.

10.1.2 La construction du germe motivique et du thème principal

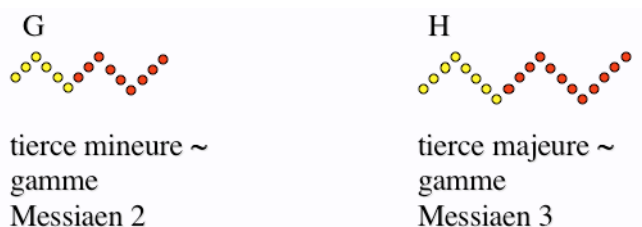


FIG. 10.4 – À gauche : le zigzag $G(n)$ pour la tierce mineure de l'op. 106 ; à droite : sa variante, le zigzag $H(n)$ pour la tierce majeure de l'op. 3.

Le germe motivique pour l'op. 106 est le zigzag chromatique $G(n)$ montré dans la figure 9.8. Il est facile de varier cette idée pour le passage du diviseur 3 au diviseur 4 (figure 10.4) : on

prend simplement le zigzag chromatique $H(n)$, réunion de n translations temporelles du germe motivique H au lieu du germe homologue G . La limitation des nombres de transpositions d'une structure musicale est une idée chère à Messiaen, c'est pourquoi nous l'avons soulignée dans la figure 10.4.

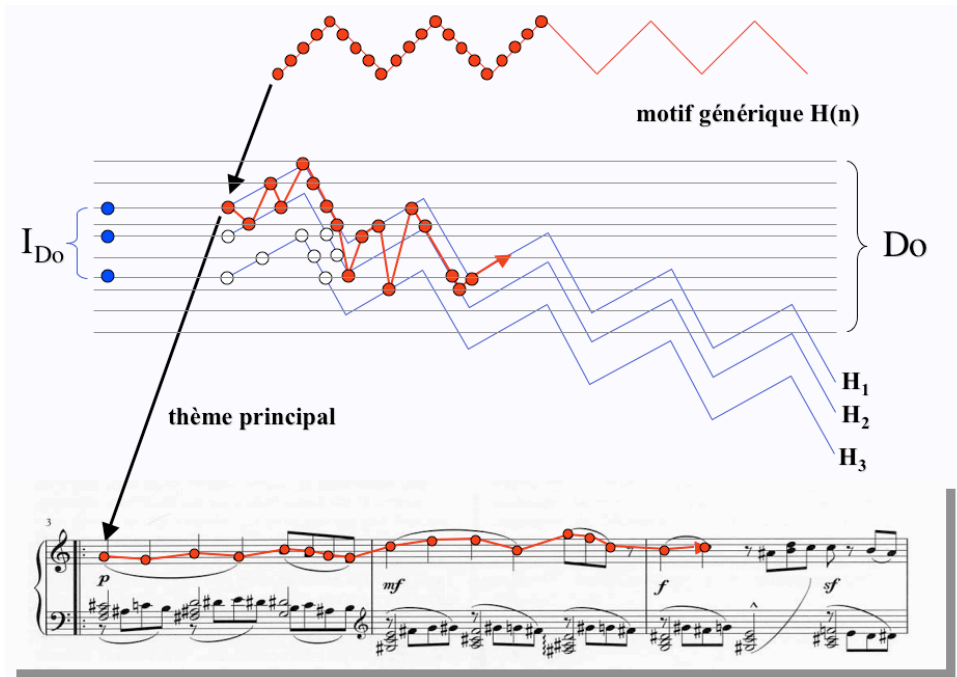


FIG. 10.5 – La construction du thème principal de la sonate op. 3 mesures 3-5.

Le zigzag $H(n)$ est utilisé pour construire le thème principal de l'op. 3 par les mêmes deux principes étudiés dans l'op. 106 : les transformations affines et la sélection de parties. La figure 10.5 visualise le procédé suivant :

- Prendre dans le motif générique $H(n)$ la partie cohérente H des points rouges.
- Appliquer à H une transformation affine linéaire de rotation et dilatation, et en faire trois copies H_1, H_2, H_3 , en l'attachant aux trois tons initiaux du degré I_{Do} .
- Faire l'intersection des trois copies H_1, H_2, H_3 avec la gamme Do , symbolisés par les points rouges et blancs au milieu de la figure.
- Ne prendre que les points maximaux de cette intersection qui sont représentés par les points rouges. Le thème principal est ainsi complètement réalisé.

10.2 La structure motivique et la modulation dans le noyau du développement

Le développement de la sonate op. 3 commence à la mesure 33 dans la tonalité de $Sol_b(3)$. Dans les mesures 33-38 une structure motivique complexe dont nous décrivons la construction dans la section 10.2.1 est exposée. Cette structure est utilisée pour la modulation $Sol_b(3) \rightarrow La_b(3)$ dans le noyau du développement aux mesures 39-44. Cette modulation est décrite dans la section 10.2.2.

10.2.1 La structure motivique

La construction suivante applique les deux types de travail motivique d'une manière un peu plus complexe. C'est encore ici un cas particulier de transduction : le déplacement de structures rencontrées au cours de l'analyse dans un « voisinage conceptuel ». Cette fois, on utilise le principe du ruban harmonique de Möbius qui est le nerf d'un recouvrement par les degrés triadiques³. On applique la construction non pas aux harmonies mais à des parties motiviques du motif générique $H(n)$. Cela semble anodin, mais il faut se rendre compte que c'est précisément ici la puissance de l'abstraction mathématique qui est mise en évidence. L'idée schoenbergienne de considérer le ruban harmonique comme paradigme de cohérence compositionnelle peut être utilisée dans une multitude de contextes spécifiques pourvu que l'on en comprenne les constructions abstraites mathématiques sous-jacentes !

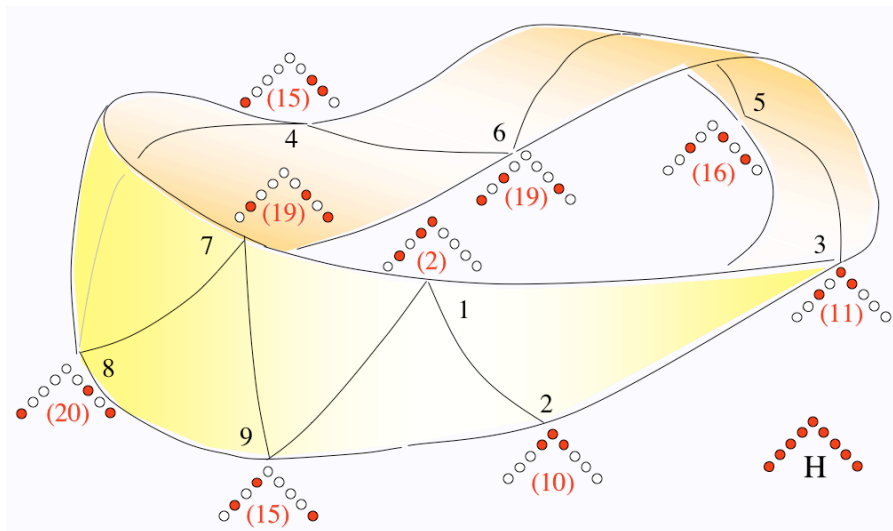


FIG. 10.6 – La structure générique pour la construction motivique du développement. C'est un recouvrement de la partie H du zigzag générique par neuf sous-motifs donnant lieu à un ruban de Möbius.

³Voir section 8.1.2.

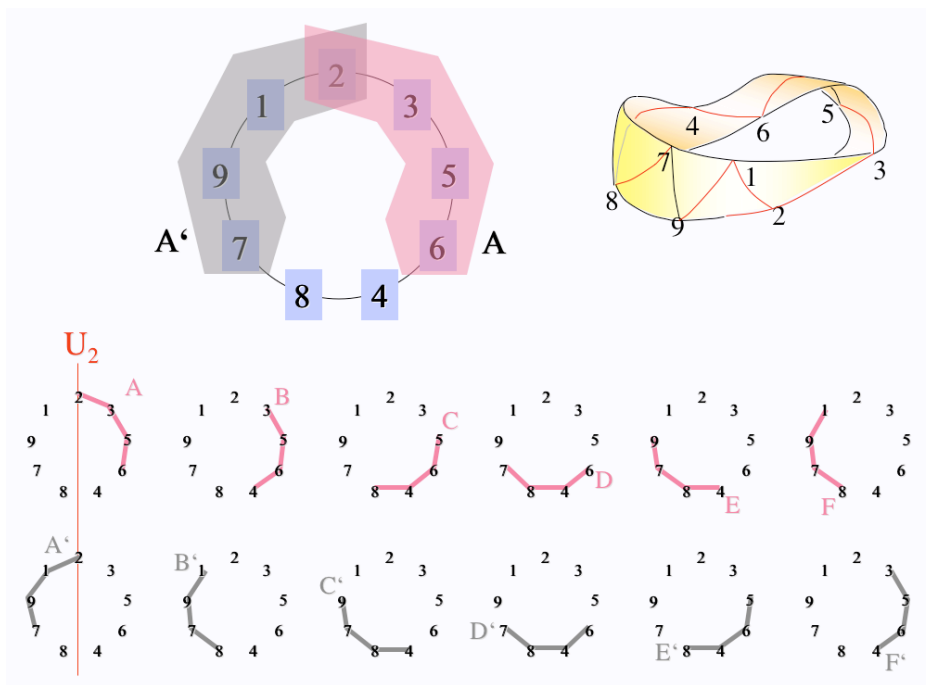


FIG. 10.7 – La construction de la syntaxe issue de la configuration topologique sur le ruban motivique, suivant le chemin cyclique montré en haut à droite .

La construction est visualisée dans la figure 10.6. Elle est la solution du problème suivant : trouver un recouvrement de la partie H du zigzag générique $H(n)$ par neuf sous-motifs à trois tons chacun de sorte que le nerf de ce recouvrement soit un ruban de Möbius. Cette solution met donc en relation de cohérence syntaxique complexe neuf petits motifs (de même que les degrés triadiques sont reliés par le ruban harmonique pour la syntaxe harmonique).

À partir de ce ruban motivique, nous allons construire la syntaxe concrète. Pour cela, on utilise le parcours des motifs n° 1 à n° 9 du ruban dans leur cohérence topologique, i.e. suivant le chemin cyclique tracé sur le ruban dans la figure 10.7 et montré en cycle en haut à gauche de cette figure. De ce cycle, on sélectionne deux chemins partiels de longueur trois : le chemin A , partant du motif n° 2, et, partant dans l'autre direction du même motif n° 2, le chemin symétrique A' . On applique alors une rotation d'une unité à A dans le sens des aiguilles d'une montre et on en déduit la suite A, B, C, D, E, F de six chemins décalés, suite qui s'arrête juste avant de produire le chemin symétrique A' . En appliquant une rotation correspondante à A' dans le sens inverse, on obtient la suite symétrique de chemins A', B', C', D', E', F' .

La suite A, B, C, D, E, F définit une matrice de quatre lignes et six colonnes, chaque position montrant le numéro du motif correspondant. On produit ensuite quatre copies transformées du zigzag générique (comme pour la construction du thème principal plus haut), débutant aux quatre hauteurs de la triade de quinte augmentée, la basse étant répétée. Au sommet j du zigzag i (numéroté à partir d'en haut), on positionne une copie du sous-motif à la position

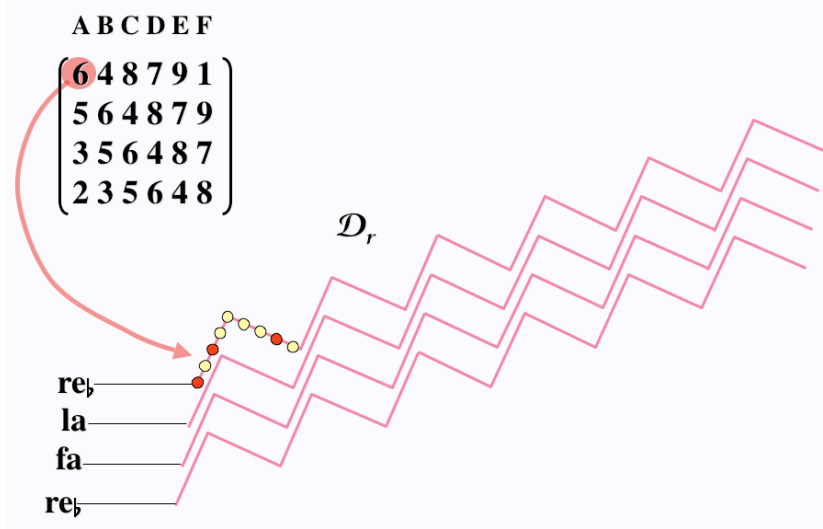


FIG. 10.8 – La matrice des sous-motifs et leur disposition dans le réseau des zigzags transformés.

(i, j) de la matrice. La réunion de tous les 24 sous-motifs définit l'ensemble $\mathcal{D}_r$. On répète la même construction pour la suite symétrique A', B', C', D', E', F' de chemins de sous-motifs pour obtenir l'ensemble $\mathcal{D}_l$. Finalement, on réunit $\mathcal{D}_r$ avec une translation de $\mathcal{D}_l$ et on obtient les mesures 33-38 du développement montrées dans la figure 10.9.

Le déploiement du ruban motivique poursuit donc deux directions : d'abord, les quatre sous-motifs reliés dans le chemin A sont distribués parmi les strates définies par l'accord fondamental ; ensuite la même distribution parmi ces strates est répétée pour les chemins tournés B, C, D, E, F . Comme construction d'un écho symétrique, la seconde version de la construction est réalisée à partir de la suite symétrique A', B', C', D', E', F' . Le déploiement décrit donc par de multiples variations la cohérence topologique des sous-motifs dans le ruban motivique.

Si l'on compare cette construction avec les techniques sérielles, nous aurions à remplacer les sous-motifs par les transformations de la série. Cependant dans notre contexte, nous avons une construction beaucoup plus sophistiquée des transformations : il ne faut pas seulement choisir le groupe des transformations dodécaphoniques, mais aussi l'ordre de leur cohérence topologique et le déploiement suivant la logique des chemins sur le ruban. Cette méthode donne à la composition une cohérence beaucoup plus forte que le simple étalage des séries transformées obtenues par l'approche dodécaphonique dépourvue de procédés compositionnels supplémentaires.

10.2.2 La modulation dans le noyau

Nous terminons avec la présentation de la modulation $Sol_b(3) \rightarrow La_b(3)$ aux mesures 39-44 (voir figure 10.10). Pour cette modulation, le groupe des symétries $Aut(Do_{\sharp}^+)$ de l'accord de quinte augmentée contient comme modulateur l'inversion $U_{la} = e^6.11$. Pour la mettre en évidence, nous ajoutons à la réunion $\mathcal{D}_r \cup \mathcal{D}_l$ l'inversion $U_{la}(\mathcal{D}_l)$ de l'ensemble $\mathcal{D}_l$. On complète

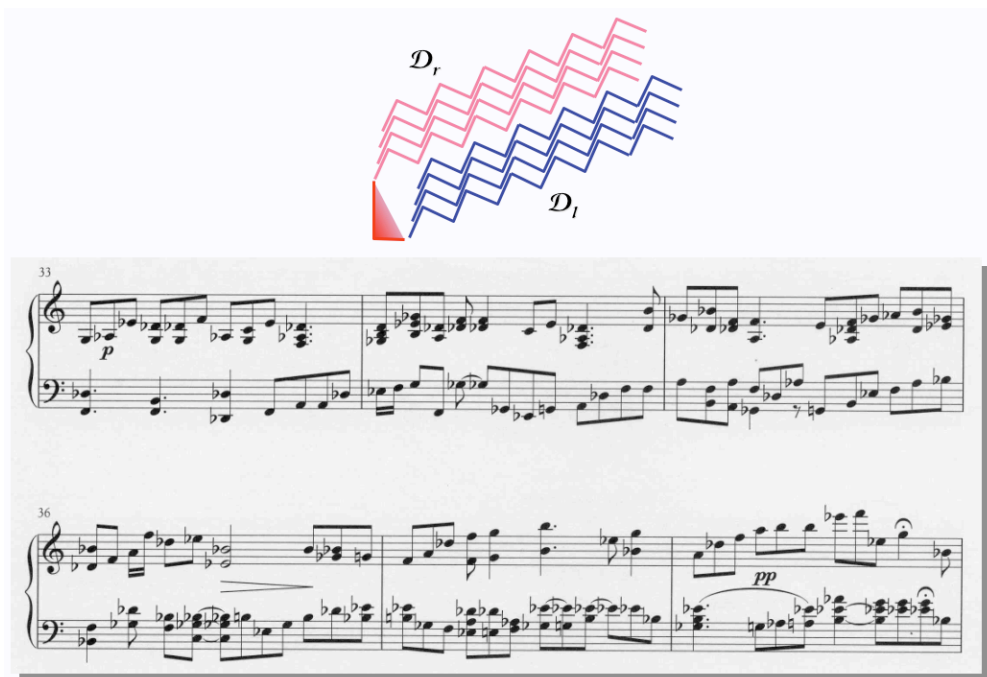


FIG. 10.9 – Les mesures 33-38 du développement et la configuration géométrique qui l’engendre.

la modulation par l’insertion aux mesures 42-44 des pivots II_{La_b} , IV_{La_b} , V_{La_b} , VII_{La_b} de la tonalité cible. À la fin de la mesure 44, et avant la cadence en La_b aux mesures 45-50, on reconnaît la double descente suivant l’accord générateur $Do_{\sharp}^+$.

10.3 Commentaires conclusifs

Malgré sa formulation mathématique, le caractère du geste boulézien dans la composition décrite est extrêmement présent. Peut-être moins dans le choix des paramètres abstraits de l’accord de quinte augmentée et de son groupe de symétries que dans la matérialisation des point grothendieckiens au niveau des notes de la partition. Même si l’on applique des techniques mathématiques (telles les transformations, les opérations booléennes, les constructions de la topologie combinatoire), le choix parmi une infinité de réalisations est décisif. On pourrait attribuer cette situation au caractère encore trop abstrait de l’analyse utilisée mais cet argument nous semble douteux.

Imaginons, en effet, que l’analyse avec une sophistication croissante arrive à restreindre de plus en plus les paramètres libres à disposition. Nous aurions donc au final un espace analytique tellement riche (en groupes, symétries, topologies, graphes, etc.) que la sonate op. 106 serait la seule ou du moins une des rares solutions des données analytiques qui la décrivent. Ceci signifie que l’on aurait complètement compris la sonate : elle aurait été identifiée par les riches

39

sempre pp

41

p cresc.

II (I) V VII

43

ff tr

IV

(résonance)

Do#+

FIG. 10.10 – La modulation $Sol_b(3) \rightarrow La_b(3)$ dans les mesures 39-44. Elle met en évidence le modulateur U_{Ia} .

paramètres analytiques. En d'autres termes, l'intégralité des gestes bouléziens serait équivalente à un seul geste partant d'un espace analytique « parfait » et visant une fibre créatrice ponctuelle.

L'aboutissement serait donc la compréhension parfaite de l'œuvre, mais cela signifierait également la fin de la créativité par rapport à cette sonate. Le geste singulier serait une absurdité pour la composition, tout le caractère général disparaîtrait dans la solution particulière, dans la spécialisation totale. Et notre compréhension serait absorbée au niveau des structures analytiques. Nous serions arrivés au point de la célèbre anecdote, où un mathématicien à qui l'on avait demandé si un concert lui avait plu, répondit : « Si, si, pas mal, mais je ne vois pas ce qui a été démontré ! »

Troisième partie

Contrepoint — le principe
anthropique

Chapitre 11

La variation du modèle

*Alles Vergängliche
Ist nur ein Gleichnis¹.*

Johann Wolfgang von Goethe, Faust II

11.1 Historicité et système

La musique fait entrevoir à plusieurs niveaux de sa réalité l'interaction vitale entre la temporalité et la logique. Tout d'abord, au niveau de l'œuvre individuelle, on observe l'application de la logique compositionnelle dans le déploiement des événements sonores. Nous avons également rencontré ce type d'interaction au cours de l'analyse créatrice et de la reconstruction compositionnelle qui en découle. Par exemple, notre modèle de modulation tonale est basé, au niveau logique, sur la matérialisation du point modulateur, une structure mentale abstraite qui, une fois quantifiée, s'insère dans le cadre temporel des phases de neutralisation et de cadence. Et dans l'autre direction, la construction d'une partition crée une abstraction du temporel au niveau symbolique des formes.

Au niveau plus global du développement des œuvres au cours de la production individuelle d'un compositeur et pour celui des grands courants historiques de la musique, on observe un déploiement de la logique progressive de la pensée musicale aux œuvres, qui, elles, sont immergées dans la résonance mentale de l'écoute. Or, ce type d'interaction est moins certain que le premier : tandis que la logique de pensée compositionnelle s'inscrit clairement dans la temporalité d'une partition, la nature précise ou même l'existence d'une logique directrice du développement historique n'est jamais claire.

Il faut, pour comprendre le problème, discerner tout d'abord l'historicité dans le processus de découverte des lois. Par exemple, la connaissance de l'anatomie des objets sonores, telle qu'elle est fournie par la décomposition de Fourier, est soumise à l'histoire, mais la loi n'est pas, elle, une fonction d'historicité. En physique, la découverte de la transformation de Lorentz n'est pas un changement de la loi de transformation de Galilée, mais le développement de notre connaissance. Ce n'est pas de ce simple type d'historicité dont il est question ici, mais du

¹Tout ce qui est passager n'est que parabole.

changement des lois elles-mêmes (à l'intérieur du temps planckien) et de la dynamique compositionnelle due à des lois globales, telles qu'elles sont responsables, en physique, du refroidissement de l'univers après la stabilisation des lois lors du temps planckien.

Dans ce chapitre, nous allons précisément discuter l'exemple d'une loi globale responsable de l'aboutissement fuxien des règles du contrepoint comme elles furent établies depuis leur première apparition au neuvième siècle.

La question sous-jacente à une telle approche est sans doute celle de sa nécessité. L'histoire de la musique est-elle nécessairement en interaction avec des principes hors-temps ? Et que peut-on apprendre d'une telle relation, si elle a vraiment eu lieu ? La musicologie s'est surtout établie comme science historiographique au sens strict du terme et ne peut donc pas nous fournir une réponse à cette question. Nous avons tendance à nous contenter de décrire la succession historique des événements sans vouloir les connecter au-delà de cet ordre historique banal. Le musicologue Carl Dahlhaus s'est clairement prononcé contre cette réduction radicale : « Erst die systematische Konstruktion öffnet den Blick dafür, welche Tatsachen einer Geschichte angehören, die zu erzählen lohnend erscheint². »

Or, pourquoi devrait-on insister sur une logique hors-temps de l'histoire de la musique ? Tout d'abord, l'ordre historique exclusif réduit la cohérence au paramètre temporel et en cela détruit la logique inhérente au profit de la temporalité pure. Ceci anéantit toute possibilité de comparer des faits au-delà de leur date. Mais l'historiographie doit être l'historiographie d'une identité qui se perpétue le long du temps. En d'autres termes, parler de musique suppose un système qui crée son identité dans sa déploiement historique et, bien sûr, culturelle. Le fil du temps offre le support syntagmatique de l'étalement d'un système hors-temps, soit pour l'œuvre individuelle, soit pour le développement global de la musique. La nécessité de ce système résulte donc de la nécessité d'une identité de la musique elle-même.

Le problème qui en résulte est celui de la construction de cette identité systémique. C'est bien une construction et non une découverte puisque, comme nous l'avons vu, nous nous trouvons dans l'époque planckienne du processus mental. L'histoire des idées sera celle que nous bâtissons et non celle que nous trouvons toute faite. La substance, dont ce système sera composé, est celle des mathématiques. C'est là notre postulat fondamental, un postulat nourri par le parallèle effectué avec la physique et par le fait que les mathématiques sont le seul domaine de l'activité mentale qui réunit précision, c'est-à-dire l'écriture « à la lettre », pour reprendre la belle formule de François Nicolas [5], et abstraction, la condensation du gestuel dans la formule.

Notre procédé d'identification part de l'analyse créatrice des faits qui sont alors repensés dans les formules mathématiques puis, tâtonnant le long de l'épiderme de la transduction, immergés dans les variations fictionnelles ou futures.

11.2 De l'analyse créatrice à la création de modèles

Dans le chapitre précédent, nous avons parcouru l'analyse créatrice de l'op. 106 de Beethoven, et nous en avons déduit la sonate op. 3 par transduction dans l'espace des paramètres analytiques. Du point de vue de la création des lois de la musique à l'époque planckienne, ceci

²Seule la construction systématique ouvre la vue aux faits d'une histoire, qu'il semble valoir la peine d'être récitée.

n'est pas vraiment un développement dramatique puisque le modèle analytique n'est pas varié. Il est, au contraire, confirmé et réappliqué comme variation interne du modèle.

Pourquoi l'analyse créatrice ne pourrait-elle pas suffire aux besoins compositionnels ? Boulez aurait-il été satisfait de l'analyse créatrice pour faire avancer la musique ? Or la question n'est pas de savoir si Boulez aurait ou n'aurait pas voulu se contenter de ce procédé. La question est de savoir si la dynamique compositionnelle à l'intérieur d'un modèle analytique donné peut répondre aux besoins de la création des lois de la musique.

La pratique de la variation boulezienne à l'intérieur du modèle nous donne sans doute le confort d'une machinerie qui fonctionne. Mais elle ne répond pas à la question qui est *pourquoi* elle fonctionne. Si le compositeur était un simple producteur industriel, nul problème ne se poserait : on aurait une usine de musique toute faite.

Pour aborder la question de la raison du fonctionnement d'un système, il faut le mettre en question, i.e. en explorer les limites. Pour comprendre, il faut parcourir le processus dialectique de la double négation : pourquoi l'univers est tel qu'il est, et non pas un des autres possibles dans le multivers (l'univers multiple) — actuel ou potentiel. Au moment, où nous l'aurons caractérisé, il sera possible d'en juger la nature particulière.

Pour la composition musicale, cette transgression est particulièrement importante puisque la raison du beau n'a — malgré les efforts et affirmations des plus grands compositeurs — pas encore été dévoilée : on sait que certaines constructions produisent du beau, mais on ignore pourquoi. La logique de cette vérité reste à explorer. Ce n'est pas le délire de la destruction par principe ou par envie qui ne cesse de pousser les créateurs de musique dans leurs révolutions incessantes. C'est plutôt l'axe de la *revolutio musicarum* qu'ils s'efforcent de tourner pour en saisir l'orientation de base.

C'est bien cet axe qui crée l'identité de la musique, cet invariant qui stabilise le déploiement de la musique au cours de l'Histoire. Sans ce recours à la vérité du beau, ce dernier serait dégradé en ornementation éphémère dont la culture aurait la valeur d'un passe-temps. Le passage de la transduction boulezienne à la variation du modèle joue donc le rôle d'une recherche fondamentale en vue d'orienter l'axe de la révolution musicale. Evidemment, l'hypothèse sous-jacente est qu'une telle orientation axiale existe, dès à présent ou après de plus profonds développements.

11.3 Penser aujourd'hui la musique du futur

Pour penser aujourd'hui la musique du futur, il faut savoir comment faire tourner l'axe de révolution. Il faut réfléchir aux moyens et techniques aptes à concevoir et projeter dans l'imagination les architectures futures du sonore.

En poursuivant notre métaphore de l'axe révolutionnaire, sa rotation vers le futur doit se faire en identifiant la position présente de la pensée musicale comme angle spécifique de rotation et ensuite en mettant en marche une dynamique de repositionnement, de changement d'angle. Cette stratégie n'est en fait rien d'autre que celle de la reconnaissance de l'état des choses comme cas particulier d'un fait général. Le choix historique représenterait alors une perspective particulière du fait général, un point de vue sous un angle que nous devrions changer pour reconnaître une nouvelle perspective. La création en jeu serait donc la construction de ce fait général et non le choix d'un nouvel angle, ce dernier ne constituerait qu'un pas arbitraire dans l'exploration du générique.

La construction d'un fait général que nous allons présenter dans la suite se réfère au domaine du contrepoint classique fuxien. C'est cette théorie compositionnelle que nous allons immerger dans un cadre conceptuel général de potentiel « révolutionnaire ». Pour comprendre ce projet, il est instructif de reconsidérer l'approche classique vis-à-vis de la révolution contre le noyau de la tradition contrapuntique : la dichotomie des qualités intervalliques en consonance et dissonance. C'est l'invention de la technique dodécaphonique par Arnold Schoenberg, dont la première trace s'est condensée dans la *Valse n°5* op. 23 pour piano. D'après Theodor Wiesengrund Adorno, l'émancipation schoenbergienne des dissonances représente la réponse progressiste à la tradition tonale. Et Schoenberg en fut fier au point d'être persuadé que cette invention assurerait la primauté de la musique allemande pour un siècle³.

La construction dodécaphonique installe une série et ses transformations composées de transposition, renversement et récurrence sans qualifier ou disqualifier les aspects intervalliques qui s'en déduisent. Ces aspects sont suspendus à de critères orthogonaux à l'harmonie tonale. Cette stratégie est donc une annihilation de la pensée tonale basée sur la dichotomie consonances contre dissonances. On ne pourra donc pas parler ici d'un fait général dont l'harmonie tonale serait une perspective particulière, et dont le dodécaphonisme serait le résultat d'une « révolution rotative ». Elle est plutôt une rupture radicale, une négation du concept même des qualités harmoniques.

Notre plan diffère donc qualitativement de l'invention schoenbergienne, nous procédons dans la tradition dialectique de la suspension d'une thèse par sa double négation et non dans la tradition de la rupture totale. Pour ce faire, notre stratégie consiste dans un premier mouvement en la modélisation du contrepoint fuxien dans une conceptualisation mathématique de sorte que les règles classiques s'en déduisent. Dans un second temps, on positionne le contexte classique dans un cadre mathématique qui découle canoniquement du cadre fuxien, i.e. on reconnaît que les axiomes et théorèmes qui définissent le modèle mathématique de la théorie fuxienne se généralisent sans difficulté et créent donc des modèles alternatifs, des mondes contrapuntiques « exotiques » qui proposent des perspectives variées du modèle générique englobant le modèle spécifique du cadre fuxien.

La négation consiste donc en l'invention d'un fait général, de cet axe qui reste fixe au cours de l'Histoire et dont les angles spécifiques visent aux instances temporelles de l'histoire de la musique. La négation et la double négation sont reliées par la dualité de l'atemporalité mathématique vis-à-vis de la temporalité historique. La formule mathématique donne naissance aux faits de la musique par le déploiement d'un geste qui pointe sur le fil du temps.

³Comme Schoenberg l'écrivit à Mathias Hauer en 1921 : « Ich habe eine Entdeckung gemacht, durch welche die Vorherrschaft der deutschen Musik für die nächsten 100 Jahre gesichert ist. » (« J'ai fait une découverte qui garantit l'hégémonie de la musique allemande pour les 100 prochaines années. »)

Chapitre 12

Les intervalles contrapuntiques sont des tangentes géométriques

*Le garçon va à la fille
comme le fil à l'aiguille.*
Proverbe français

12.1 Le tore des tierces

Pour notre modélisation du contrepoint, nous allons travailler dans l'ensemble des entiers modulo 12 (voir section 9.2 pour la représentation de cet ensemble) : dans la théorie du contrepoint classique de Fux nous sommes autorisés à ne considérer que les intervalles inférieurs à l'octave. Bien que cette hypothèse ait des aspects non triviaux que nous avons discutés ailleurs [34], nous allons nous appuyer sur celle-ci afin de construire un modèle strictement modulaire du contrepoint.

Dans la section 8.1.2, nous avons utilisé les classes de hauteurs chromatiques représentées par le groupe cyclique $\mathbb{Z}_{12}$ d'ordre 12. Pour notre modèle du contrepoint, cette représentation ne nous suffira plus. La raison est que jusqu'ici, dans la théorie de la modulation, les seules symétries de $\mathbb{Z}_{12}$ dont nous avons besoin, étaient les translations $m(x) = x + b$ et les inversions $m(x) = -x + b$. Dans le contrepoint, les quintes (7 demi-tons) et quartes (5 demi-tons) jouent un rôle central. Nous aurons en particulier besoin des symétries de $\mathbb{Z}_{12}$ de la forme $m(x) = 7x + b$ ou $m(x) = 5x + b$, donc ayant des multiplicateurs reliés aux quintes et quartes. Malheureusement, et en contraste avec les translations et les inversions, la représentation de $\mathbb{Z}_{12}$ comme cadran d'horloge montre une géométrie qui est bouleversée par une multiplication par 5 ou 7. Si les hauteurs x_1, x_2 sont écartées $x_1 - x_2$ l'une de l'autre, leurs images $m(x_1) = 7x_1 + b, m(x_2) = 7x_2 + b$ diffèrent par $7(x_1 - x_2)$. Par exemple, si $x_1 - x_2 = 1$ (un demi-ton), leurs images diffèrent par une quinte.

Ce défaut peut être éliminé par un procédé mathématique très classique qui s'avère être, en même temps, un procédé à portée musicale ! Du point de vue mathématique, $\mathbb{Z}_{12}$ est un groupe qui est isomorphe au produit cartésien $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ d'ordre $\mathbb{Z}_3$ et $\mathbb{Z}_4$ des entiers modulo 3 et 4. Ce

résultat résulte d'un théorème plus général de classification des groupes abéliens (commutatifs) finis (théorème de Sylow). L'isomorphisme que nous utilisons dans notre contexte conserve l'addition et envoie $z \in \mathbb{Z}_{12}$ sur le couple $(z \bmod 3, -z \bmod 4) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$. L'isomorphisme inverse (qui lui aussi conserve l'addition) envoie le couple $(u, v) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ sur le nombre $4u+3 \in \mathbb{Z}_{12}$. Cet isomorphisme de groupes est remarquable pour la théorie de la musique puisque le nombre de la tierce majeure 4 est envoyé sur le couple $(1, 0)$ tandis que le nombre de la tierce mineure 3 est envoyé sur le couple $(0, 1)$. Ceci signifie que le couple (u, v) représente un intervalle composé de u tierces majeures et de v tierces mineures. Une représentation géométrique du produit cartésien $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$, appelée « tore des tierces », est donnée par le tore discret représenté en figure 12.1. Les quatre méridiens verticaux représentent les pas de tierces majeures, et les trois méridiens horizontaux représentent les pas de tierces mineures. La spirale représente le parcours par demi-tons. Nous remplaçons très souvent les nombres de $\mathbb{Z}_{12}$ par leur couple correspondant sur le tore.

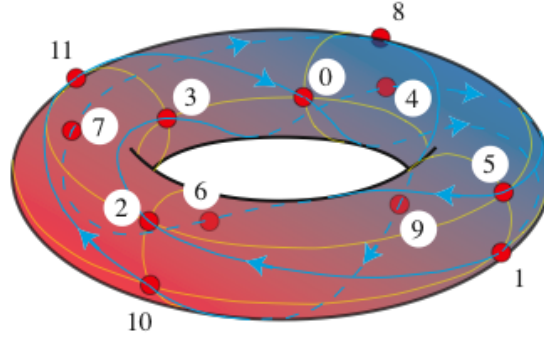


FIG. 12.1 – Le tore des tierces. Les méridiens verticaux représentent les pas de tierces majeures. Les méridiens horizontaux représentent les pas de tierces mineures. La spirale représente le parcours par demi-tons.

Or, sur le tore des tierces, on a une métrique canonique, la distance $d(x, y)$ entre deux éléments $x, y \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ étant définie comme le nombre minimal de tierces majeures ou mineures nécessaires pour arriver à y en partant de x ; c'est le nombre minimal de pas « élémentaires » sur les méridiens du tore pour joindre y en partant de x . Par exemple, on a $d(4, 5) = 2$ ou $d(3, 0) = 1$. Avec cette métrique, on peut montrer que toute symétrie $m(x) = ax + b$ pour $a = 1, 5, 7, 11$, et non seulement pour les translations et inversions, conserve la distance :

$$d(m(x), m(y)) = d(x, y).$$

Par exemple, la symétrie $m(x) = 5x$ s'interprète comme réflexion au plan équatorial, qui évidemment conserve les distances. Ceci veut dire que la géométrie du tore des tierces permet d'interpréter les symétries comme étant des isométries, fait qui n'apparaît pas sur la géométrie de la représentation circulaire $\mathbb{Z}_{12}$.

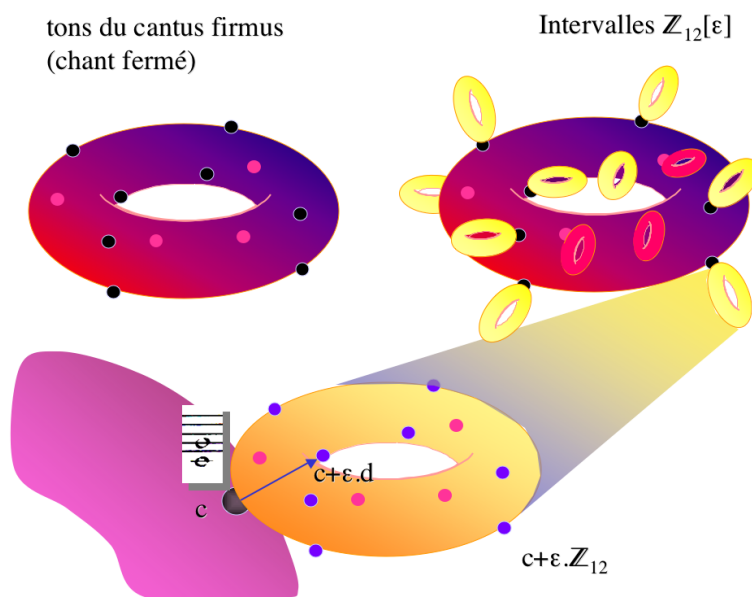


FIG. 12.2 – L'espace des tangentes ou intervalles contrapuntiques.

12.2 L'espace des tangentes

Le contrepoint est bâti sur le concept d'intervalle qui s'étend du *cantus firmus* CF (chant fermé ou premier) au *discantus* D (déchant). Ce concept définit des rôles distincts de CF vis-à-vis de D (éléments de $\mathbb{Z}_{12}$). On devra donc fournir une définition mathématique d'un intervalle contrapuntique qui rend compte de cette asymétrie. Nous le faisons en écrivant un intervalle comme une expression algébrique, d'abord purement formelle, $CF + \epsilon \cdot (D - CF)$, la différence $D - CF$ mesurant la quantité intervallique entre discantus et cantus firmus. Cet approche peut être interprétée comme une construction géométrique d'une tangente. La quantité intervallique $D - CF$ est interprétée comme la tangente de longueur $D - CF$ liée au point CF . Cette description peut paraître ici un peu artificielle, mais nous pouvons la justifier par deux arguments : d'abord, le déchant est une sorte de « variation » du cantus firmus, une « vibration infinitésimale », dont la tension par rapport au cantus firmus caractérise la qualité du contrepoint. Le second argument est strictement mathématique : en géométrie algébrique, les tangentes sont décrites par des nombres duaux, et ces nombres sont exactement décrits par des symboles de type $c + \epsilon \cdot d$. Une structure additive et multiplicative s'ajoute à ces objets et nous allons donc l'exploiter dans notre modélisation. Nous posons pour cela :

- $(x_1 + \epsilon \cdot d_1) + (x_2 + \epsilon \cdot d_2) = (x_1 + x_2) + \epsilon \cdot (d_1 + d_2)$
- $(x_1 + \epsilon \cdot d_1) \cdot (x_2 + \epsilon \cdot d_2) = x_1 x_2 + \epsilon \cdot (x_1 d_2 + x_2 d_1)$
- et, en particulier, $\epsilon \cdot \epsilon = 0$

Avec ces opérations, nous obtenons un espace (en fait un anneau commutatif) que l'on note $\mathbb{Z}_{12}[\epsilon]$, qui s'appelle *anneau des nombres duaux*. Il contient $12 \times 12 = 144$ éléments $c + \epsilon \cdot d$,

où $c, d \in \mathbb{Z}_{12}$. C'est cet espace que nous appelons *espaces des tangentes*; ses éléments sont dorénavant appelés *tangentes* ou *intervalles contrapuntiques* (figure 12.2).

Il faut reconnaître ici la portée de la pensée mathématique dans la conceptualisation d'entités musicales. Nous n'avons pas seulement créé une représentation précise de l'information intervallique, mais aussi un environnement algébrique emprunté à la géométrie algébrique. Cet acte est en même temps créatif et périlleux : nous ne savons pas quelles en seront les conséquences pour la théorisation ultérieure. Ces structures paraissent potentiellement riches mais nous ne pouvons affirmer pour l'instant si leur utilisation dans un cadre musical ouvrira d'autres perspectives.

12.3 Orientation contrapuntique

Dans notre définition d'un intervalle contrapuntique $c + \epsilon.d$, nous avons supprimé le déchant en faveur du nombre intervallique d , coefficient de ϵ . Ceci est en effet un avantage pour la théorie musicale puisqu'il existe deux orientations des intervalles : le contrepoint montant (Ω_+), où la voix du déchant est au-dessus du chant fermé, et le contrepoint descendant (Ω_-), où la voix du déchant est au-dessous du chant fermé. On peut définir ces deux orientations comme applications mathématiques $\Omega_{\pm} : \mathbb{Z}_{12}[\epsilon] \rightarrow \mathbb{Z}_{12} : c + \epsilon.d \mapsto c \pm d$, qui associe à l'intervalle $c + \epsilon.d$ le déchant $\Omega_{\pm}(c + \epsilon.d) = c \pm d$. Une orientation étant fixée, on peut l'oublier provisoirement pour décrire les règles de la succession d'intervalles $c_1 + \epsilon.d_1, c_2 + \epsilon.d_2$ du contrepoint. Cependant si nous devons utiliser une succession accompagnée d'un changement d'orientation, par exemple de Ω_+ à Ω_- , alors il faut trouver un moyen de fixer une orientation constante. L'idée consiste à observer que l'on a la formule $\Omega_-(c + \epsilon.d) = \Omega_+((-1 + \epsilon.2) \cdot (c + \epsilon.d))$, c'est-à-dire $\Omega_- = \Omega_+ \circ (-1 + \epsilon.2)$, et l'on pourra donc considérer le passage $c_1 + \epsilon.d_1, (-1 + \epsilon.2) \cdot (c_2 + \epsilon.d_2)$ avec l'orientation constante Ω_+ au lieu du passage $c_1 + \epsilon.d_1, c_2 + \epsilon.d_2$ qui contenait lui un changement d'orientation. *Dans notre modèle, nous allons donc fixer l'orientation en utilisant les formules ci-dessus.*

Chapitre 13

L'autocomplémentarité contrapuntique

Mon Dieu, donnez-moi de la simplicité !
Tolstoï

13.1 L'autocomplémentarité AC du contrepoint classique

Fixons donc une fois pour toutes l'orientation Ω_+ . Le contrepoint classique de Fux est centré autour de la situation principale¹ du style « note contre note » : on part d'une mélodie $CF = c_1, c_2, \dots, c_n$ du cantus firmus et on doit associer à chaque note c_i de la mélodie CF un nombre intervallique d_i de telle sorte que les intervalles $I_i = c_i + \epsilon.d_i$ suffisent à un certain nombre de conditions que nous allons discuter dans la suite. Les déchants associés $DE_i = \Omega_+(I_i) = c_i + d_i$ forment la mélodie du déchant $DE = DE_1, DE_2, \dots, DE_n$. Cette mélodie est jouée simultanément avec CF ; on aura donc une suite de couples de notes simultanées $\{CF_i, DE_i\}$.

La première règle pour déduire DE de CF est que les nombres intervalliques d_i sont tous des consonances contrapuntiques, i.e. $d_i \in K = \{0, 3, 4, 7, 8, 9\} \subset \mathbb{Z}_{12}$, portant les noms respectifs de prime, tierce mineure, tierce majeure, quinte, sixte mineure et sixte majeure. Cet ensemble de six nombres est complété par l'ensemble des dissonances $D = \mathbb{Z}_{12} - K = \{1, 2, 5, 6, 10, 11\}$, nommées seconde mineure, seconde majeure, quarte, triton, septième mineure et septième majeure. Observons donc que la quarte n'est pas consonante dans cette théorie principale, un fait qui soulève un doute quant aux explications acoustiques de la dichotomie des consonances et des dissonances. Le contrepoint n'est pas une théorie acoustique ou psychologique, mais avant tout une théorie de composition. Le musicologue Carl Dahlhaus reconnaît dans [17] que la dissonance de la quarte doit avoir une justification en termes de *logique de composition* qui n'a pas encore été comprise.

¹ « Kernlehre » dans la terminologie de Klaus-Jürgen Sachs [47].

Si l'on ne peut pas se référer à la base acoustique pour justifier la qualification de consonance contrapuntique, il faut chercher d'autres explications. Or, pour ce faire, on a deux possibilités :

1. On cherche à trouver des attributs booléens (i.e. ayant une valeur logique « vrai » ou « faux ») de notes tels que leur valeur sépare les consonances des dissonances. C'est « en quelque sorte » ce que l'acoustique voudrait faire, par exemple moyennant les formules de Leonard Euler (la fonction *gradus suavitatis*) ou les formules des battements entre sons partiels de Hermann von Helmholtz. « En quelque sorte », car ces formules ne définissent pas réellement des dichotomies mais des degrés de consonance. Il faut alors introduire des valeurs de séparation artificielles pour créer des dichotomies.
2. On ne cherche pas des attributs de nombres individuels, mais de leur ensemble. C'est là une possibilité qui n'est équivalente à la première qu'en utilisant la fonction caractéristique d'un sous-ensemble. Concrètement, nous pourrions chercher des sous-ensembles de $\mathbb{Z}_{12}$ qui seraient fermés pour la multiplication (voir plus loin) et n'auraient que 6 éléments, par exemple les nombres pairs.

Le couple qui nous fournit l'ensemble K des consonances parmi les sous-ensembles X de $\mathbb{Z}_{12}$ est défini par les propriétés suivantes :

1. Nous demandons qu'il existe une et une seule symétrie $m(x) = a.x + b$ qui induit une bijection $m : X \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_{12} - X$; on l'appellera *symétrie d'autocomplémentarité de X* parce qu'elle relie un sous-ensemble X de $\mathbb{Z}_{12}$ à son complémentaire $\mathbb{Z}_{12} - X$. On appelle une telle dichotomie $(X \mid \mathbb{Z}_{12} - X)$ de $\mathbb{Z}_{12}$ une *dichotomie forte*.
2. Nous demandons que $7.X$ soit fermé pour la multiplication (si $x, y \in 7.X$, alors $xy \in 7.X$) et que $7.X$ contienne l'élément neutre 1 de la multiplication. Pour les mathématiciens, cette condition signifie que $7.X$ est un monoïde multiplicatif. On peut aussi dire que X est un monoïde multiplicatif de quintes (multiples de 7).

Le théorème surprenant est que seul l'ensemble K a ces deux attributs, et que l'on trouve $m(x) = AC(x) = 5x + 2$. Voici les valeurs :

$$AC(0) = 2, AC(3) = 5, AC(4) = 10, AC(7) = 1, AC(8) = 6, AC(9) = 11.$$

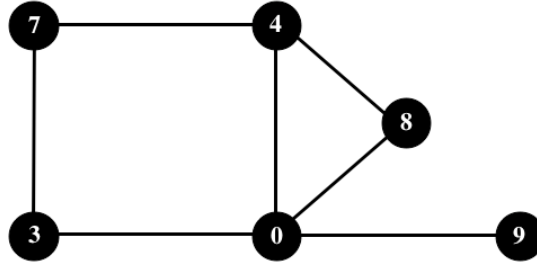


FIG. 13.1 – Le graphe des consonances ; les traits relient les couples de distance 1.

On vérifie immédiatement que $AC \circ AC = Id$, l'identité sur $\mathbb{Z}_{12}$, i.e. AC est ce que les mathématiciens appellent une *involution* sur $\mathbb{Z}_{12}$ qui échange K et D . L'unicité de AC découle d'un argument géométrique remarquable : si l'on relie les nombres consonants deux à deux par des arcs chaque fois que leur distance est un, on obtient le graphe sur K montré dans la figure 13.1. Cette configuration graphique doit être conservée pour toute symétrie d'après notre discussion du tore des tierces. Donc, si l'on avait deux symétries $AC, AC' : K \xrightarrow{\sim} D$, elles devraient conserver les relations graphiques dans l'image D des deux symétries. Mais on voit sans peine que la position de chaque consonance sur le graphe est unique : 0 est le seul point avec quatre voisins, etc. Donc ces six positions graphiques uniques doivent être conservées dans l'image D de K . Ceci implique que les images des six consonances coïncident pour AC et pour AC' , et de même pour les images des dissonances, i.e. $AC = AC'$. On reviendra sur cette représentation graphique dans le chapitre 15.

Ce qui est surprenant ici est le fait que les deux propriétés caractéristiques pour K définissent K comme un ensemble et non par l'intermédiaire d'un attribut défini sur les nombres individuels. Le seul élément qui soit explicitement inclus est la quinte (jouant le rôle de l'élément neutre dans l'ensemble transformé $7.K$). Nous ignorons si cette condition est liée à l'interdiction de quintes parallèles dans les règles de Fux que nous allons déduire de notre modèle.

Avec la symétrie AC , nous n'avons pas encore traité les vrais intervalles. On y définit d'abord les intervalles consonants $c + \epsilon.d$ par la condition évidente $d \in K$. Ceci veut dire que l'on aura 72 intervalles consonants, et on notera leur ensemble par $\tilde{K} = \{c + \epsilon.d \mid c \in \mathbb{Z}_{12}, d \in K\}$. Le complémentaire définit les 72 intervalles dissonants, i.e., $\tilde{D} = \mathbb{Z}_{12}[\epsilon] - \tilde{K}$. Pour discuter la question d'une autocomplémentarité sur $\mathbb{Z}_{12}[\epsilon]$, il faut d'abord savoir ce qu'est une symétrie sur l'anneau des intervalles $\mathbb{Z}_{12}[\epsilon]$. Or, ceci est immédiat par analogie avec les symétries $m(x) = ax + b$ sur $\mathbb{Z}_{12}$. On définit donc une symétrie d'intervalles par une formule $M(X) = AX + B$, où $A, B, X \in \mathbb{Z}_{12}[\epsilon]$ et où $A = u + \epsilon.v$ est inversible, i.e. il existe un A^{-1} tel que $A \cdot A^{-1} = 1$. Cette condition est vérifiée si et seulement si $u = 1, 5, 7, 11$ est inversible dans $\mathbb{Z}_{12}$; on a donc un total de 6912 symétries du tore des intervalles. On notera la symétrie M avec $M(X) = AX + B$ par $e^B A$, et l'ensemble de ces symétries par $\overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{12}[\epsilon])$. La composition de deux symétries $e^B A, e^R S$ donne la formule $e^B A \circ e^R S = e^{B+AR} AS$, et l'inverse de $e^B A$ est $(e^B A)^{-1} = e^{-A^{-1}B} A^{-1}$.

Ceci étant, la symétrie d'autocomplémentarité sur $\mathbb{Z}_{12}[\epsilon]$ se présente comme suit : pour tout cantus firmus c donné, il existe une et une seule symétrie $\widetilde{AC}_c = e^{8c+\epsilon.25} \in \mathbb{Z}_{12}[\epsilon]$ qui induit une bijection $\widetilde{AC}_c : \tilde{K} \xrightarrow{\sim} \tilde{D}$ et qui laisse fixe l'ensemble $\mathbb{Z}_{12}[\epsilon]_c$ des intervalles ayant cantus firmus c (c'est l'espace tangent en c). On a toujours $\widetilde{AC}_c \circ \widetilde{AC}_c = Id$.

Ces constructions montrent de manière exemplaire la dynamique des mathématiques qui engendre la conceptualisation des intervalles. Il s'agit là d'un débat passionnant de longue durée qui nous incite à nous poser la question de la signification de tels outils pour la musique : est-il légitime de faire intervenir des structures mathématiques dans la théorie de la musique sans en connaître la signification ou la portée ? Nous voudrions plutôt nous restreindre aux objets ayant uniquement une « carte de séjour des musiciens », et éviter de faire jouer des objets « étrangers ». Je mets en évidence ce type de réflexe instinctif qui est totalement absent chez les physiciens. Pour ces derniers, les concepts et les théorèmes mathématiques sont non seulement le langage de la nature — depuis Galilée, le « livre » de la Nature s'écrit avec le « langage » des mathématiques. Si l'on suit les réflexions de Roger Penrose [41], les mathématiques sont même

une base ontologique — qui diffère peu de l'approche pythagoricienne au final, bien qu'étant infiniment plus complexe.

Ce réflexe « xénophobe » est d'autant plus irritant que les compositeurs, eux, ne montrent pas ces réserves, qu'il s'agisse de Xenakis, Boulez, Stockhausen, Ligeti, ou même Mozart ou Beethoven. J'insiste sur ce point car le débat sur la justification des mathématiques dans la musique doit pénétrer plus profondément au cœur des deux cultures pour créer un enrichissement mutuel. Nous pouvons citer ici de nouveau Novalis : « Aller Genuss ist musikalisch, mithin mathematisch². »

13.2 La présence de l'AC dans l'électroencéphalogramme de profondeur humain

Comme la symétrie d'autocomplémentarité contrapuntique *AC* jouera un rôle crucial dans le modèle que nous présenterons au chapitre 14, nous avons intérêt à connaître sa possibilité d'être représentée dans la réalité cognitive du réseau neuronal humain. Mais soyons clairs sur ce point : il ne s'agit pas de justifier le modèle en tant que construction théorique. Ni la pensée musicale, ni la pensée mathématique n'ont besoin de justification neurophysiologique. Il est toutefois dans l'intérêt des sciences cognitives de savoir si un processus mental traçant la fonction *AC* peut être repéré dans le cerveau, car en ce cas, on aura un certain nombre d'implications sur les effets physiologiques et cognitives d'un tel agent. Des recherches en neurologie suivantes, nous pourrions en effet tirer des conséquences fascinantes qui touchent au rôle fondamental de la musique.

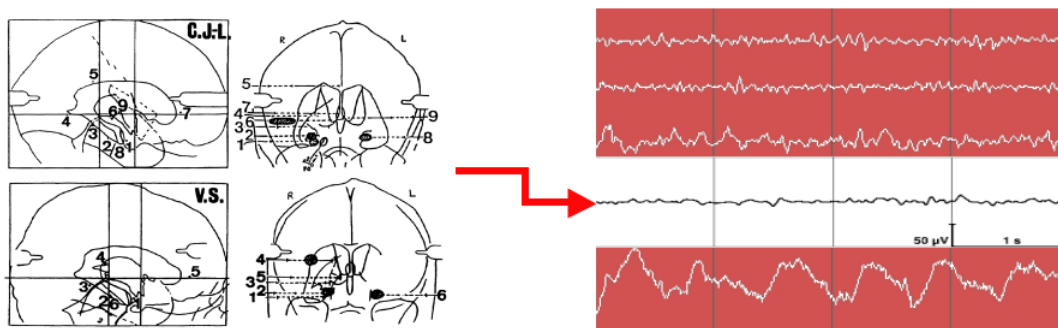


FIG. 13.2 – Les électrodes de profondeur dans le cerveau humain (radiographie à gauche) mesurent le EEG de taille d'une cinquantaine de μV .

Nous eûmes le privilège de pouvoir réaliser, dans un projet du Fonds National Suisse, des expériences mesurant l'EEG (électroencéphalogramme) de la profondeur du cerveau humain par rapport à des stimulations acoustiques portant sur les consonances et dissonances. Le contexte de cette investigation est constitué d'évaluations préliminaires du neurologue Heinz-Gregor Wieser de l'université de Zürich pour connaître le focus d'épilepsies résistantes à la chimiothérapie.

²Toute délectation est musicale, donc mathématique.

Pour ce faire, il implante des électrodes bipolaires dans la profondeur du cerveau humain, et en particulier dans les régions hippocampales du cerveau émotionnel et dans les régions dites Heschl du cortex auditif. Le résultat de ces mesures est utilisé (avec un succès remarquable) pour éliminer le focus par traitement chirurgical.

Dans le cadre de cette recherche, des séquences d'événements musicaux sont présentées aux patients avec des casques (voir figure 13.2).

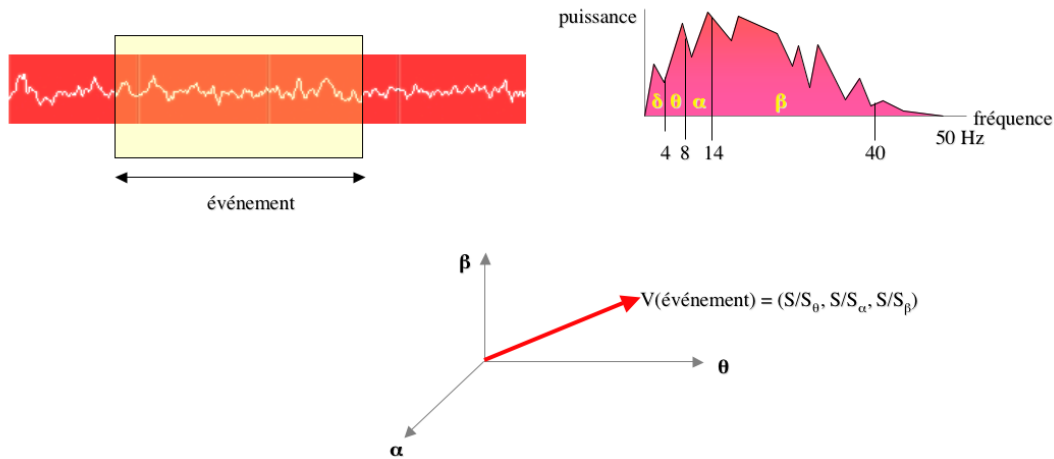


FIG. 13.3 – Le vecteur de vigilance associé à une oscillation de l'EEG induite par un événement musical.

Les oscillations de l'EEG sont traitées par analyse de Fourier et évaluées par rapport aux événements correspondants. Ces oscillations se situent entre les fréquences 0 Hz et 40 Hz, dont les bandes δ : 0 – 4 Hz, θ : 4 – 8 Hz, α : 8 – 14 Hz, β : 14 – 40 Hz définissent des régions significatives pour la cognition humaine. On considère alors le vecteur $V(E)$ dit de vigilance pour l'événement E (voir figure 13.3). Les composantes du vecteur sont les quotients $S/S_\theta, S/S_\alpha, S/S_\beta$ de la puissance (énergie) totale S , divisée par les puissances des bandes θ, α et β . Ils représentent les vigilances cognitives dans ces régions spectrales de l'EEG.

Parmi les multiples tests que nous avons réalisés au cours de ces expériences, une étude nous intéresse particulièrement : celle qui se réfère à la symétrie d'autocomplémentarité AC . La stratégie du test fut de confronter chaque consonance avec toutes les dissonances et d'observer les vecteurs de vigilance associés. La « partition » correspondante est montrée sur la figure 13.4.

Le but fut de mesurer combien de fois le vecteur de vigilance de la dissonance en jeu définie par la valeur $AC(c)$ de la consonance de départ c obtint une valeur (des composantes) minimale, i.e. de soulagement maximal, parmi les six dissonances confrontées avec c . Cette quantité fut considérée comme index du système neuronal pour la (re)connaissance de la symétrie AC . La figure 13.5 montre les valeurs moyennes pour toutes les consonances, relatives aux positions dans le cortex (hippocampe gauche LCA, droit RCA, ainsi que Heschl droit RH pour la personne C.J.-L. à gauche, et les positions homologues 4, 14, 10 pour la personne V.S. à droite), ainsi que pour les régions spectrales, référées aux valeurs données par la probabilité a priori indiquée de



FIG. 13.4 – La confrontation de chaque consonance avec toutes les dissonances, ces intervalles étant joués pendant 0,68 sec chacun.

100%. Les deux personnes étaient des Européens de sexe masculin, dont l'âge était compris entre 30 et 40 ans et dont la culture musicale était orientée vers la musique populaire occidentale.

Ces résultats montrent que les bandes α et β , la région du Heschl droit, ainsi que la région hippocampale gauche témoignent d'une sensibilité remarquable³. On peut néanmoins tirer des conséquences intéressantes du fait qu'une structure fondamentale pour la modélisation précise du contrepoint fuxien (la symétrie AC) est perçue au niveau de localités telles que le Heschl droit et l'hippocampe gauche. En effet, on sait que la formation hippocampale joue un rôle important dans les processus de mémorisation. Plus précisément, en se basant sur des expériences neurologiques avec des rats, le neurologue américain Jonathan Winson avance l'hypothèse que l'hippocampe est une sorte de portail pour le transfert de données inconscientes et émotionnelles de la mémoire dans la conscience, et vice versa [58].

Par conséquent, la musique, si elle est repérée dans ses structures fondamentales d'harmonie (les intervalles consonants et dissonants en l'occurrence), pourrait jouer le rôle de clé ouvrant ce portail et laissant passer des instances cachées de la mémoire dans notre conscience. C'est là une métaphore renvoyant à l'image de la musique vue comme Orphée transgressant les interdits mythologiques pour retrouver Eurydice, pour reprendre un topos classique.

Ces résultats sont remarquables car ils permettent d'interpréter la musique non comme génératrice d'émotions (une approche qui ne fut d'ailleurs jamais élaborée au-delà des métaphores suggestives), mais comme clé au service d'un mécanisme qui provoque les émotions déjà générées et stockées dans la mémoire. De plus, on peut comprendre que la musique doit porter un code

³Ces expériences ne font malheureusement pas l'objet d'évaluations statistiques précises.

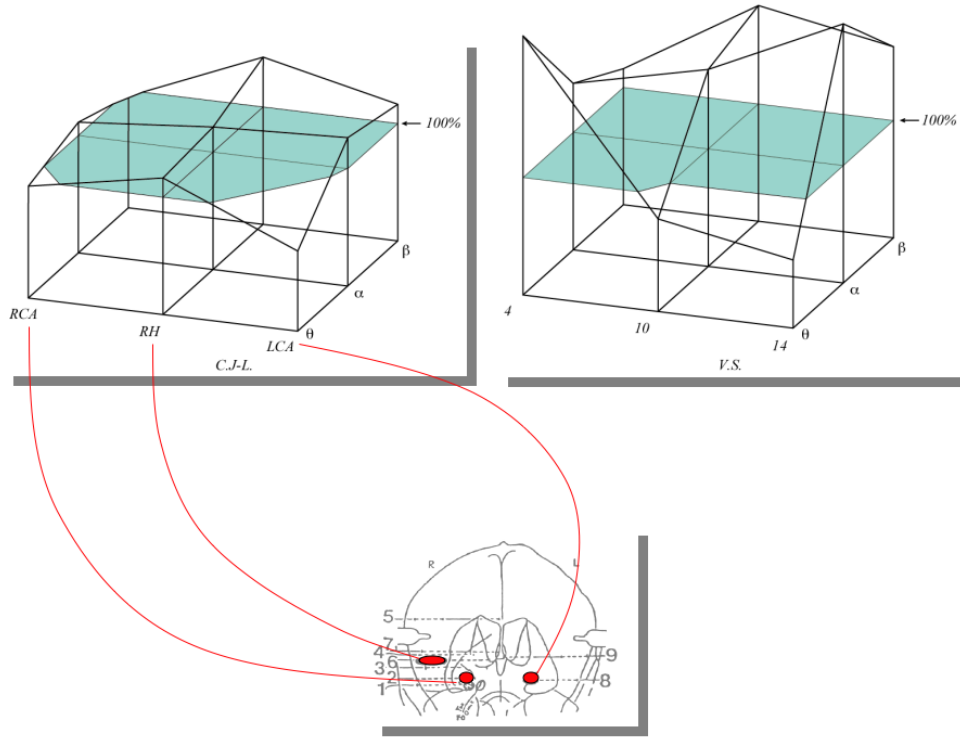


FIG. 13.5 – Les degrés de soulagement du vecteur de vigilance dans les localités RCA (hippocampe droit), LCA (hippocampe gauche), RH (Heschl droit) pour le patient C. J.-L., et les positions homologues 4,14,10 pour le patient V.S.. Ils montrent une sensibilité remarquable au-dessus de la probabilité *a priori* de 100%

spécifique, adapté à l'individu, pour être effectif dans l'ouverture du portail du subconscient freudien (pour reprendre une image proposée par Winson).

Pour conclure, rappelons que la nature mathématique de la fonction AC est extrêmement simple comparée aux constructions requises pour modéliser l'analyse de Fourier sur laquelle la théorie des consonances et dissonances de von Helmholtz est basée. De plus, comme nous le montrerons dans la suite, l'algèbre modulaire sur $\mathbb{Z}_{12}$ permettra aussi — en opposition à l'approche de Helmholtz — de déduire les lois fondamentales du contrepoint fuxien.

Chapitre 14

Le dévissage de l'identité

*Identität der Identität und des Unterschieds*¹.
Georg Wilhelm Friedrich Hegel, Logik

14.1 La contradiction intérieure du concept de tension contrapuntique

D'après Klaus-Jürgen Sachs [47], l'étymologie « point contre point » du mot « contre-point » ne doit pas être limitée à la seule relation verticale du point du chant fermé avec son contre-point du déchant, mais doit également être conçue horizontalement en tant que relation entre un intervalle et son successeur temporel. Dans cette conception, la tension entre les intervalles successifs, surtout dans l'alternance entre intervalles parfaits (la quinte, l'unisson) et les intervalles imparfaits (tierces, sixtes) semble sous-entendre une interprétation des intervalles imparfaits en tant que dissonances (de ce fait, les imparfaits étaient aussi appelés dissonants [47]). Ces idées suggèrent que la tension contrapuntique est en quelque sorte contradictoire : il faut absolument progresser de consonance en consonance, mais, en même temps, on accepte des changements permettant de passer du côté consonant au côté dissonant (et vice versa).

Il existe donc, à l'intérieur des consonances, un reflet de la dichotomie extérieure. L'idée de la tension est ambiguë, et il s'agit de lui donner un vêtement conceptuel qui pourrait résoudre ce conflit. Le défi d'un tel projet consiste en la mise en place d'un raisonnement purement mathématique englobant le concept de tension. Nous ne voulons pas faire intervenir des arguments psychologiques qui pourraient aider à la compréhension de ce qu'est la tension par des moyens qui touchent à une réalité étrangère à l'explication mathématique. Nous justifions ce choix par le fait que les arguments psychologiques sont arbitraires et individuels : par exemple, pourquoi les quintes parallèles (interdites) devraient être plus « inintéressantes » que les tierces majeures parallèles (non interdites) ? Les argumentations structurales relatives au tempérament juste ne sont pas utiles non plus, car la fraction $4/3$ de la quarte dissonante (!) est presque aussi simple que la fraction $3/2$ de la quinte. Le *gradus suavitatis* d'Euler, mesure classique pour la

¹L'identité de l'identité et de la différence.

complexité d'une fraction, emploie des valeurs de telle sorte que la tierce majeure (5/4) et la quinte soient positionnées avec la quarte au milieu, séparant donc deux consonances par une dissonance. ...

Il ne reste que l'issue de la caractérisation de K par autocomplémentarité (AC) et fermeture multiplicative (monoïde de quintes) décrite dans la section 13.1. On ne possède pas d'autres définitions au-delà de l'énumération brute résultant du « mûrissement » dans les méandres de l'Histoire. Avec cela, il faudra donc construire une structure qui rende compte de ce que l'on entend par tension, et qui, ce faisant, résout ladite contradiction latente.

14.2 Affaiblir la contradiction par des symétries contrapuntiques

La contradiction que nous allons affaiblir est la suivante : il faut passer, pour le contrepoint fuxien élémentaire (note contre note), d'une consonance $I = c + \epsilon.k$ à une consonance $I^* = c^* + \epsilon.k^*$, mais en faisant cela, on voudrait en même temps passer de I à une *dissonance* I^* . Or, cette contradiction dépend de la caractérisation d'un intervalle comme étant consonant ou dissonant. Pour nous, le cantus firmus c étant choisi, être consonant signifie :

1. « être élément d'une moitié $\tilde{K}$ d'une dichotomie forte $(\tilde{K} \mid \tilde{D})$ de symétrie $\widetilde{AC}_c$ »
2. faire en sorte que l'ensemble K des nombres intervalliques des consonances $\tilde{K}_c$ en c « soit un monoïde de quintes »

Affaiblir la contradiction consiste à affaiblir ces conditions caractéristiques. Ainsi nous ne dirons plus que nous cherchons des consonances avec les deux conditions (1) et (2). Nous décidons de maintenir la première condition : la dichotomie $(\tilde{K}' \mid \tilde{D}')$ soit isomorphe à $(\tilde{K} \mid \tilde{D})$, i.e. il existe une symétrie $g \in \overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{12}[\epsilon])$ avec $\tilde{K}' = g(\tilde{K})$ et $\tilde{D}' = g(\tilde{D})$, et telle que $\widetilde{AC}_c$ soit aussi une autocomplémentarité de $(\tilde{K}' \mid \tilde{D}')$. Cependant la seconde est délaissée : il s'agit là de l'affaiblissement.

Avec une telle symétrie g , le concept de tension sera modélisé par la condition que l'on ait $I \in \tilde{K}'$ et $I^* \in \tilde{D}'$. Cela signifie que nous partons d'une consonance « modifiée » dans la moitié transformée $\tilde{K}'$ et nous cherchons la consonance cible dans la moitié $\tilde{D}'$ des dissonances « modifiées ». Nous restons donc dans la moitié des vraies consonances, mais sous la perspective « modifiée » des intervalles transformés par g , nous changeons de côté. De plus, la variante tordue $(\tilde{K}' \mid \tilde{D}')$ est telle que l'autocomplémentarité donnée $\tilde{K}_c$ est encore valable pour $(\tilde{K}' \mid \tilde{D}')$; donc de ce point de vue (symétrie), il n'y a pas de différence. C'est cet affaiblissement que nous pratiquons : on garde des propriétés caractéristiques et on trouve des objets légèrement différents partageant ces propriétés.

Le dernier point de cette approche est que parmi les symétries g que nous venons de sélectionner pour une consonance I donnée, et ayant les propriétés décrites ci-dessus, nous choisissons celles qui ont un ensemble $\tilde{K} \cap g(\tilde{D})$ maximal. On permettra donc aux intervalles $I^* \in \tilde{K} \cap g(\tilde{D})$ d'être des successeurs de I admis dans le contrepoint.

Résumons : étant donné un intervalle I de cantus firmus c , les successeurs de I sont tous les intervalles I^* de sorte qu'il existe une symétrie g , dite *contrapuntique* (pour l'intervalle I donné), ayant ces propriétés :

1. $I \in g(\tilde{K})$

2. $\widetilde{AC}_c$ est une autocomplémentarité de la dichotomie $(g(\tilde{K}) \mid g(\tilde{D}))$
3. l'ensemble $\tilde{K} \cap g(\tilde{D})$ est de cardinalité maximale avec les deux propriétés précédentes
4. $I^* \in \tilde{K} \cap g(\tilde{D})$

Ce sont ces symétries contrapuntiques jouant le rôle de la force de tension que nous voulions simuler. Elles déforment la dichotomie de sorte que les intervalles successifs tombent dans des parties déformées des consonances et dissonances. Il faut donc exercer la « force de déformation g » sur la dichotomie $(\tilde{K} \mid \tilde{D})$, pour forcer la séparation requise des deux intervalles successifs. On peut montrer que les symétries contrapuntiques sont des structures similaires aux symétries en physique, dites « locales », qui sont responsables, là, de l'apparition de forces. L'image de « force de déformation » n'est donc pas simplement une pure métaphore, mais trouve une justification mathématique. Nous ne précisons pas ici ces idées mathématiques et renvoyons le lecteur intéressé à [34].

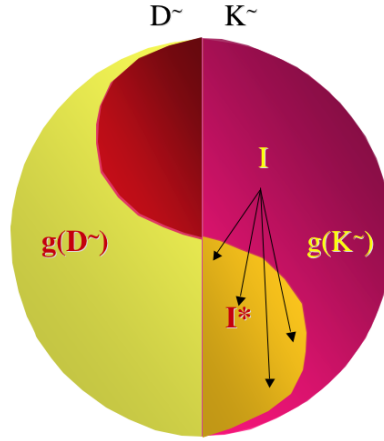


FIG. 14.1 – La déformation de la dichotomie des consonances $\tilde{K}$ et des dissonances $\tilde{D}$ par une symétrie contrapuntique g . On peut alors passer de l'intervalle donné I à tout intervalle I^* consonant qui est dans la déformation $g(\tilde{D})$ des dissonances.

14.3 Le dévissage de l'identité

Avant de procéder à l'explication de notre modèle, nous voulons décrire la stratégie de cette pensée. Tout d'abord il faut, en vue du problème découlant d'une contradiction des conditions imposées à la dynamique des intervalles successifs, reconnaître que le concept naïf de la dichotomie $(\tilde{K} \mid \tilde{D})$ a besoin d'une analyse conceptuelle sans laquelle nous resterons bloqués. C'est ici une situation bien connue en mathématiques : dans le domaine $\mathbb{R}$ des nombres réels, il est impossible d'obtenir la racine d'un nombre négatif, car tout carré x^2 est non négatif. En d'autres mots, cela signifie que les équations quadratiques $ax^2 + bx + c = 0$ n'auront pas de solutions en général dans les nombres réels. Ce n'est pas une contradiction, mais un blocage de

la théorie : nous ne pouvons pas procéder par les opérations dont nous avons besoin dans la théorie des équations.

Pour ce type de problème apparemment insoluble, les mathématiciens ont inventé une méthodologie ingénieuse que j'appellerai *déviissage de l'identité*. Pour apporter des précisions sur ce déviissage, nous soulignons qu'il ne s'agit pas ici d'un affaiblissement de la logique classique, tel qu'on pourrait l'imaginer en direction des logiques intuitionnistes par exemple. Le point d'attaque est plutôt situé dans le travail au sein de l'architecture des concepts.

Le schéma est le suivant : pour identifier un concept, il faut créer un certain nombre de propriétés qui, dans leur conjonction, délimitent le concept de tous les autres de l'architecture conceptuelle donnée. Cela peut se faire de plusieurs manières, plus ou moins raffinées, et c'est là un premier point délicat du procédé. Ceci étant, nous allons alors omettre une ou plusieurs de ces propriétés pour ouvrir ainsi un espace conceptuel plus vaste. Pour le problème des racines de nombres négatifs, on omettrait, par exemple, la propriété que les réels peuvent être ordonnés linéairement et cela d'une manière qui soit compatible avec les opérations arithmétiques.

Cette ouverture n'est pas encore une création d'un nouveau concept, mais seulement une négation du concept donné. La prochaine étape est créative dans le sens où nous allons essayer de construire des objets ayant les caractéristiques réduites. Cette tâche n'est cependant pas sans arrière-pensée. Nous ne voulons pas simplement créer de toutes pièces des objets conceptuels vivant dans le « bestiaire » des caractéristiques réduites, mais plutôt rechercher des candidats qui permettraient de retracer l'objet de départ de manière canonique, naturelle et universelle. Les approches sont variables et de nature tout à fait artistique à ce propos.

L'art consiste très souvent en la construction d'une immersion d'un concept donné dans un concept plus général, et cela de sorte que l'immersion soit aussi pour la structure donnée une immersion dans une structure plus générale. C'est ce qui arrive pour l'extension des nombres réels par les nombres complexes, qui, comme on sait, admettent des solutions des équations $ax^2 + bx + c = 0$. Mais comment construire ces nombres complexes ayant juste la propriété requise ? Ceci se fait dans l'algèbre moderne par le procédé suivant : on crée d'abord un domaine, dont les objets sont exactement les objets des équations polynômiales que l'on voudrait résoudre : on immerge les réels dans le domaine des polynômes $f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ à coefficients réels. Les nombres réels sont interprétés comme polynômes constants ($a_i = 0$ pour $i > 0$). On peut additionner et multiplier des polynômes comme s'ils étaient des nombres généralisés. Ceci se fait en introduisant un nombre formel, l'indéterminée X . L'anneau $\mathbb{R}[X]$ des polynômes ne résout pas le problème de trouver une racine x de -1 . Mais on peut alors renforcer cette propriété en divisant $\mathbb{R}[X]$ par (l'idéal engendré par) la relation $X^2 + 1 = 0$. L'anneau résiduel $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ possède la propriété requise : la classe résiduelle x de l'indéterminée x est en fait une solution de $X^2 + 1 = 0$. C'est ainsi que l'on construit les nombres complexes, i.e. $\mathbb{C} = \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$. On détourne donc le problème pour forcer sa solution, une vraie gymnastique de la pensée !

Pour retourner à notre situation du contrepoint, le déviissage de l'identité consiste en un déplacement du concept de dichotomie $(\tilde{K} \mid \tilde{D})$ d'intervalles à la propriété caractéristique de l'autocomplémentarité $\widetilde{AC}_c$. Nous admettons que la dichotomie se définisse par cette symétrie, un objet qui, rappelons la philosophie de Grothendieck, n'est qu'un point de Grothendieck. Et on considère alors les dichotomies transformées $(g(\tilde{K}) \mid g(\tilde{D}))$ ayant la même symétrie $\widetilde{AC}_c$. On ne change donc pas la dichotomie *vue* par le point grothendieckien $\widetilde{AC}_c$. C'est ainsi qu'on

peut résoudre la contradiction : on conserve la propriété caractéristique, point de Grothendieck $\overline{AC}_c$, et on en cherche un représentant $(g(\tilde{K}) \mid g(\tilde{D}))$, qui sépare les intervalles successifs en question. Pourquoi a-t-on la chance de pouvoir séparer deux intervalles consonants par ce point de Grothendieck ? La raison en est que l'on peut en effet démontrer que pour tout couple de consonances, il existe toujours une symétrie g de sorte que le premier soit dans $g(\tilde{K})$ tandis que le second se trouve dans $g(\tilde{D})$. Notre recherche des transformations contrapuntiques g s'effectue au sein d'une variété de symétries g où l'on peut espérer trouver une solution, et ceci se fait donc sous l'hypothèse de fixer le point de Grothendieck sous-jacent à la dichotomie de départ.

14.4 Le théorème contrapuntique

Après ces réflexions méthodologiques, nous nous sommes intéressés à connaître le résultat de notre procédé, c'est-à-dire établir les transitions possibles $I \rightarrow I^*$ d'intervalles consonants engendrées par les constructions de symétries contrapuntiques.

D'abord, nous pouvons considérer tous les transitions $I \rightarrow I^*$ sans aucune restriction des gammes dans lesquelles ces intervalles pourraient être localisés. Nous avons alors le théorème suivant :

Théorème 3 (Théorème contrapuntique) *Pour tout intervalle consonant I , il existe une famille d'au moins 36 intervalles consonants successeurs I^* de I . Il y a toujours au moins un successeur I^* si l'on prescrit le cantus firmus c^* de I^* . Les parallèles de quintes (et uniquement de quintes) $c + \epsilon.7 \rightarrow c^* + \epsilon.7$ sont toujours interdites.*

Nous dirons aussi qu'il n'y a pas d'*impasse* : on peut, en principe, toujours poursuivre un contrepoint, même si son cantus firmus est donné à priori. Il est remarquable que la fameuse règle de l'interdiction de quintes parallèles résulte de nos axiomes et n'est pas présupposée. Nous ignorons à présent si la quinte est reliée à la deuxième caractéristique de K en tant que monoïde de quintes, i.e. si la quinte joue désormais un rôle d'élément neutre.

En contrepoint classique, on considère normalement des situations moins génériques en se restreignant à des notes contenues dans des gammes déterminées, et plus précisément des gammes diatoniques intervenant dans la théorie des modes. Cela veut dire que l'on se donne la gamme diatonique majeure et que l'on y fixe une tonique. Le mode majeur, par exemple, est le mode ionien, avec la tonique *do*, le mode dorien prend la tonique *ré*, le mode éolien a pour tonique *si*, etc. Nous avons alors un théorème analogue pour le mode majeur :

Théorème 4 (Théorème contrapuntique pour la gamme majeure) *Si toutes les notes du cantus firmus et du discantus des intervalles en question doivent être contenues dans le mode majeur, alors le théorème 3 reste vrai.*

Sans entrer dans les détails, pour lesquels nous renvoyons aux listes dans [34], nous mentionnons le fait que les règles des successeurs d'intervalles sont extrêmement voisines des règles de Fux dans son *Gradus ad Parnassum*. Mais la qualité décisive de notre modèle n'est pas, malgré la coïncidence remarquable, une simulation des règles de Fux ; il est au contraire crucial d'avoir été capable d'incorporer le principe bien vague et chargé de connotation psychologique de la tension et des dissonances « cachées » dans une conceptualisation complètement mathématique.

Pourquoi cela ? Au-delà de la philosophie de l'approche mathématique que l'on vient de discuter, le présent modèle a l'avantage de ne pas se limiter à la dichotomie contrapuntique classique ($K \mid D$). La conceptualisation peut, sans aucun changement, être utilisée pour l'investigation d'autres dichotomies fortes. Elles sont aussi attachées à un unique point de Grothendieck, l'autocomplémentarité distinguée, et nous nous intéresserons alors au contrepoint pour ces autres dichotomies fortes. L'universalité des outils mathématiques entraîne donc automatiquement une extension du modèle, i.e. une variation du modèle pour explorer les mondes exotiques d'une pensée contrapuntique universelle.

Chapitre 15

Extension du modèle aux dichotomies fortes

*À chaque coffre sa clé,
on les ouvrira tous.*
Proverbe chinois

15.1 Les dichotomies fortes

Grâce au théorème contrapuntique, il est tout à fait pertinent de se demander désormais quel serait l'environnement conceptuel de cette dichotomie, et en quoi consisterait une réalisation des concepts d'un contrepoint généralisé.

Nous avons déjà défini les dichotomies *fortes* $(X | Y)$ avec $Y = X - \mathbb{Z}_{12}$, ayant une seule symétrie d'autocomplémentarité $f : X \rightarrow Y$. Nous allons donc étudier ces dichotomies de plus près. Pour commencer, il est clair que pour une dichotomie forte $(X | Y)$, toutes ses transformées $g(X | Y) = (g(X) | g(Y))$, $g \in \overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{12})$, sont aussi fortes. Nous avons donc des orbites de dichotomies fortes, c'est-à-dire des ensembles $\overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{12})(X | Y)$ de transformées de dichotomies. Une telle orbite est celle de $(K | D)$; un résultat de la classification en théorie mathématique de la musique¹ permet d'en recenser cinq autres. Dans cette théorie ces classes de dichotomies se voient attribuer des nombres : ce sont les classes de numéro 64, 68, 71, 75, 78, 82, la dernière étant celle des consonances et dissonances. Une première image de ces six configurations dans $\mathbb{Z}_{12}$ est représentée par les graphes des nombres d'une moitié d'une dichotomie, où les arêtes du graphe symbolisent les couples de nombres ayant une distance 1 sur le tore des tierces. La figure 15.1 montre les graphes pour les six dichotomies. Deux dichotomies, classe 64 $(I | J)$, dite majeure, et classe 82 (consonantes et dissonantes) seront d'un intérêt particulier que nous allons éclaircir dans la suite.

Jusqu'à présent, notre connaissance de ces classes reste très limitée. Dans la suite, nous allons les distinguer selon leur position géométrique dans le tore des tierces. Mais nous pouvons

¹Voir [34].

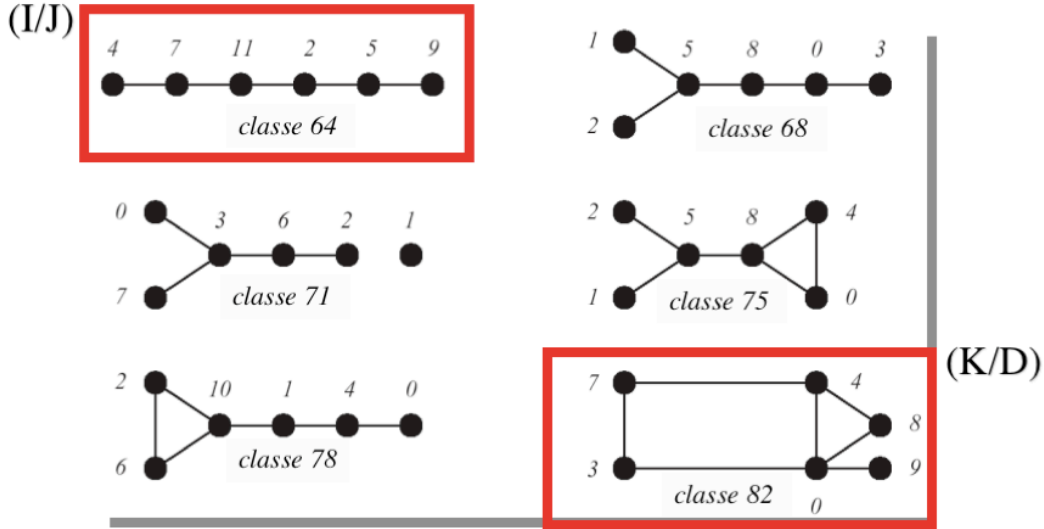


FIG. 15.1 – Les six dichotomies fortes, représentées par les graphes des couples de points de distance un.

d'ores et déjà donner une description au niveau musical de la dichotomie majeure 64 ($I | J$). En fait il s'agit de la dichotomie dont une moitié est constituée des nombres des intervalles de *do* aux six autres tons de la gamme majeure, i.e. $do - ré = 2, do - mi = 4, do - fa = 5, do - sol = 7, do - la = 9, do - si = 11$, ce qui donne $I = \{2, 4, 5, 7, 9, 11\}$ et $J = \{0, 1, 3, 6, 8, 10\}$, d'où le nom. Cette dichotomie reste mystérieuse puisqu'elle crée une première relation entre gammes et dichotomies contrapuntiques, une relation que nous allons examiner dans la suite.

15.2 La géométrie des dichotomies

Pour comprendre la géométrie des dichotomies, il faut se rappeler qu'avec une dichotomie ($X | Y$), toutes ses transformées $g(X | Y) = (g(X) | g(Y))$ ont, dans la géométrie du tore des tierces, la même distribution géométrique, car les symétries conservent la métrique du tore. On peut donc parler de la position géométrique d'une classe forte. Les graphes de la figure 15.1 en montrent une première application : ces graphes sont des caractéristiques des classes des dichotomies fortes. Il est intéressant d'observer que le graphe de la classe 82 des consonances et dissonances est le seul sans symétries graphiques non triviales. Les consonances sont donc caractérisées par leur position relative aux autres consonances.

De plus, la somme des distances relatives des nombres à l'intérieur d'une dichotomie ($X | Y$) définit ce que l'on appelle le *diamètre* de la dichotomie, i.e. $\delta(X | Y) = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in X} d(x, y)$, tandis que la somme des distances des nombres de leurs images sous la symétrie d'auto-complémentarité s'appelle *envergure* et est définie par $\sigma(X | Y) = \sum_{x \in X} d(x, AC(x))$, où AC est l'autocomplémentarité de la dichotomie forte ($X | Y$). La figure 15.2 montre ces quantités géométriques associées aux six dichotomies fortes.

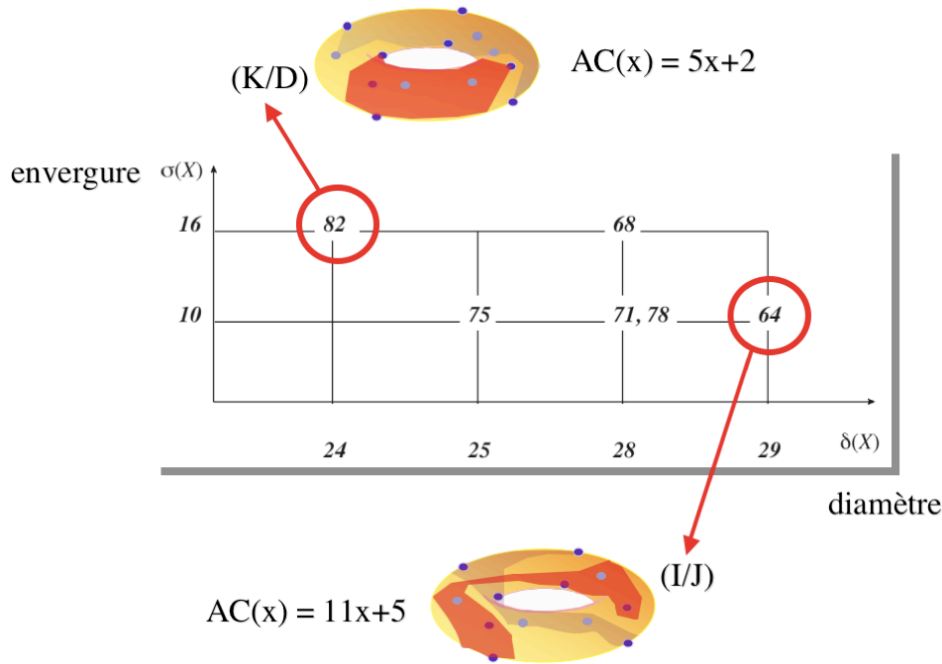


FIG. 15.2 – La géométrie des six dichotomies fortes, les deux coordonnées étant le diamètre et l'envergure d'une dichotomie.

La configuration qui en résulte est tout à fait remarquable. Nous avons deux dichotomies polaires : la 82 (consonances et dissonances) et 64 (dichotomie majeure). En effet, la dichotomie $(K | D)$ possède un diamètre minimal et une envergure maximale. Pour interpréter cela graphiquement, considérons les six points formant une moitié de dichotomie (les six autres étant identiques grâce à l'autocomplémentarité). Alors le diamètre minimal implique que la distance entre ces points est minimale tandis que l'envergure maximale entraîne que la distance entre ces points et leurs images sous AC est maximale. Le raisonnement inverse s'applique à la dichotomie $(I | J)$. Ces constatations sont montrées sur la figure 15.1.

Cette distribution attribue donc à la dichotomie $(K | D)$ un rôle spécifique du point de vue géométrique. Nous pouvons affirmer que l'évolution de l'histoire de la recherche contrapuntique européenne a convergé vers une solution qui est mathématiquement caractérisée par concentration et séparation maximales. C'est là un résultat remarquable puisqu'il donne au fil historique un arrière-plan systématique : la géométrie du tore des tierces et son application à la géométrie des dichotomies fortes.

En revenant aux réflexions autour d'une logique hors-temps en musique de la section 11.1, il apparaît que la structure géométrique du tore des tierces force un développement historique vers une structure contrapuntique optimale d'une façon tout à fait parallèle aux lois de la physique qui forcent le développement historique de la chimie du carbone et par cela, implicitement, la biologie et finalement, dans un laps de temps très court, l'apparition soudaine de l'humanité.

Le principe anthropique des lois de la musique, même si elles ne sont pas fixées pour l'éternité, nous aurait donc conduit au contrepoint fuxien.

Pour vérifier cette hypothèse, nous devons alors explorer les cinq mondes contrapuntiques mis en place par les cinq classes de dichotomies fortes. La position géométrique discutée n'est qu'une première constatation qui doit être enrichie par la connaissance du contrepoint que l'on pourrait pratiquer dans les autres mondes de ce multivers contrapuntique.

15.3 Le théorème contrapuntique généralisé

On a vu avec le théorème 3 qu'il y a toujours au moins 36 solutions pour un successeur admis d'un intervalle donné. Ceci reste valable pour toute dichotomie forte : étant donnée une dichotomie forte $(X | Y)$ avec autocomplémentarité AC , on notera encore par $(\tilde{X} | \tilde{Y})$ la dichotomie des intervalles $I = c + \epsilon.k \in \tilde{X}$ si et seulement si $k \in X$, et $\tilde{Y} = \mathbb{Z}_{12}[\epsilon] - \tilde{X}$. De plus, étant fixé un cantus firmus c , on peut montrer qu'il existe une symétrie unique $\widetilde{AC}_c : \tilde{X} \xrightarrow{\sim} \tilde{Y}$ qui laisse invariant l'espace tangent en c .

On peut alors transférer le concept d'une symétrie contrapuntique à $(X | Y)$ en remplaçant partout « intervalle consonant/dissonant » par « élément de $\tilde{X}/\tilde{X}$ », et en prenant la symétrie d'autocomplémentarité $\widetilde{AC}_c$ introduite ci-dessus. Avec ces concepts, nous montrons le résultat suivant :

Théorème 5 (Théorème contrapuntique généralisé) *Etant donnée une dichotomie forte $(X | Y)$, alors pour tout intervalle $I \in \tilde{X}$, il existe au moins 36 intervalles successeurs $I^* \in \tilde{X}$ de I (induits par une symétrie contrapuntique de $(\tilde{X} | \tilde{Y})$). Ceci reste valable même si l'on prescrit le cantus firmus d'un successeur I^* . Les intervalles parallèles interdits sont les suivants :*

- Pour la dichotomie majeure $(I | J)$, classe 64, on a les intervalles parallèles interdits pour les nombres intervalliques 2, 5 et 11.
- Pour la dichotomie $(\{0, 1, 2, 3, 5, 8\} | \{4, 6, 7, 9, 10, 11\})$ de classe 68, on a les intervalles parallèles interdits pour les nombres intervalliques 0, 2 et 8.
- Pour la dichotomie $(\{0, 1, 2, 3, 6, 7\} | \{4, 5, 8, 9, 10, 11\})$ de classe 71, on n'a pas d'intervalles parallèles interdits.
- Pour la dichotomie $(\{0, 1, 2, 4, 5, 8\} | \{3, 6, 7, 9, 10, 11\})$ de classe 75, on n'a pas d'intervalles parallèles interdits.
- Pour la dichotomie $(\{0, 1, 2, 4, 6, 10\} | \{3, 5, 7, 8, 9, 11\})$ de classe 78, on n'a pas d'intervalles parallèles interdits.
- Pour la dichotomie fuxienne $(K | D)$, classe 82, on a les intervalles parallèles interdits pour le nombre intervallique 7 de la quinte.

Ajoutons qu'une distribution des dichotomies similaire à celle de la figure 15.2 apparaît si l'on considère les symétries contrapuntiques en jeu (sur l'ordonnée) et le nombre d'interdictions (sur l'abscisse). On a encore les dichotomies polaires 64 et 82 : nombre maximal de symétries contrapuntiques et nombre minimal d'interdictions pour la classe 82 et le contraire pour la classe 64. Ce théorème propose une enquête des situations plus concrètes où une gamme est choisie pour les tons en question d'un contrepoint relatif à une dichotomie forte choisie.

Chapitre 16

Les mondes exotiques d'un contrepoint du futur

*Wo gehen wir denn hin ? — Immer nach hause*¹.
Novalis, Heinrich von Ofterdingen

16.1 La dualité des dichotomies et des gammes

Nous venons de voir avec le théorème 4 (gamme majeure) que la gamme majeure ne produit pas de culs-de-sac pour la dichotomie fuxienne. Cependant, si l'on change de dichotomie forte, en prenant la dichotomie majeure, la gamme majeure force des culs-de-sac ! Pour la gamme majeure, cela n'arrive que pour cette dichotomie forte. On voudrait donc connaître le comportement des gammes à sept tons par rapport aux six dichotomies fortes. La figure 16.1 montre la situation globale. On a d'abord une configuration très riche de possibilités pour la dichotomie fuxienne et la gamme majeure. Pour la position polaire, on voit que la dichotomie majeure et une gamme $K^* = \{0, 3, 4, 7, 8, 9, 11\}$ montrent une richesse comparable. Ceci est intéressant d'un côté puisque maintenant la dichotomie est déduite de la gamme majeure tandis que la gamme K^* est déduite des consonances K en ajoutant une note 11 « sensible ». Les rôles sont quasiment échangés ! En second lieu, on se rend compte que la gamme exotique K^* s'identifie à un ton près à la gamme *mayamalavagaula* (n°15 = $\{0, 3, 4, 7, 8, 9, 1\}$) du code *melakarta* des *ragas* indiens. On ignore si cette relation avec la tradition de la musique *raga* n'est qu'accidentelle ou s'il y a, derrière ces coïncidences, des structures profondes communes. La figure 16.2 montre deux contrepoints, l'un dans la tradition fuxienne, bâti sur le mode phrygien et l'autre par rapport à la dichotomie majeure et bâti sur la gamme K^* . Les cantus firmi sont indiqués par une ligne (rouge).

On observe ici un phénomène semblable au phénomène concernant les modulations tonales dans les gammes évoquées au cours du chapitre 8.2. L'opération (modulation, contrepoint) s'avère optimale pour la gamme majeure, ou inversement, la gamme majeure est optimale

¹Où allons-nous donc ? — Toujours chez soi.

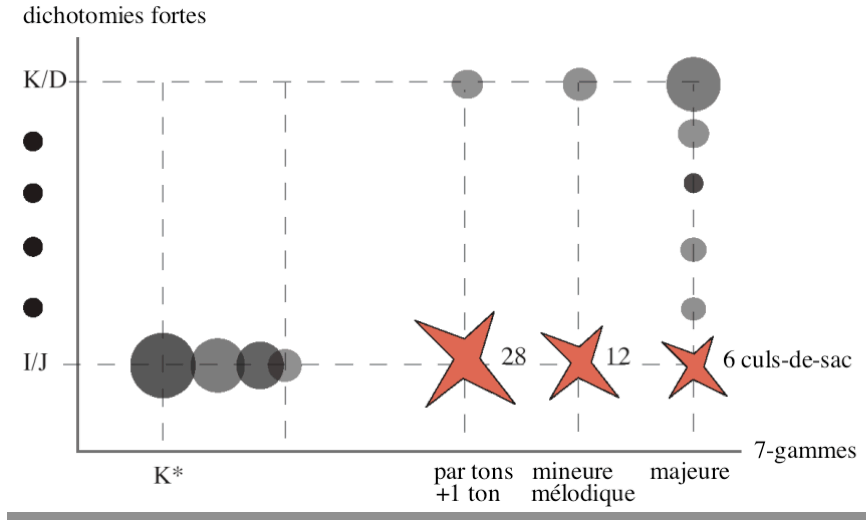


FIG. 16.1 – Les dichotomies par rapport aux gammes à sept tons. Les disques montrent les combinaisons sans culs-de-sac, la taille des disques correspondant aux nombres de possibilités. Les étoiles montrent les cas avec des culs-de-sac. À droite, on voit les trois gammes diatoniques, i.e. n'ayant que des demi tons et des tons. À gauche, on voit des gammes à caractère exotique, telle que la gamme K^* proche de la gamme *mayamalavagaula* du code *melakarta* des *ragas* indiens.

pour l'opération envisagée. Savoir quelle structure est à l'origine de telles « dualités » reste un problème en suspens, tout comme comprendre pourquoi on rencontre cette symétrie de construction de dichotomies et de gammes dans le contrepoint. Précisément, dans cette symétrie, nous pouvons nous poser la question du lien entre le nombre de six intervalles (provenant des sept tons) par rapport à la tonique et le mme nombre de six tons pour les dichotomies contrapuntiques.

16.2 Déformation du contrepoint classique ?

Jusqu'ici, les six mondes contrapuntiques furent traités sans mettre en relation les compositions concrètes dans ces mondes par des opérations de transfert. Il s'agit là d'un problème ouvert. Comment passer d'une composition $C_{(X|Y)} = (I_1, I_2, \dots, I_n)$ (suite d'intervalles I X -consonants (i.e. $I \in \tilde{X}$) reliés en accord avec les règles de la dichotomie $(X | Y)$ qui est forte selon le chapitre précédent) à une composition $C_{(X'|Y')}$ conforme aux règles pour $(X' | Y')$?

Un problème subsiste : on peut voir les règles dans un monde $(X | Y)$ comme étant un graphe (dit *contrapuntique*) orienté $\Gamma(X | Y)$, dont les sommets sont les intervalles X -consonants et dont les flèches sont les possibles transitions $I \rightarrow I^*$ pour les règles de la dichotomie $(X | Y)$. Une composition contrapuntique $C_{(X|Y)}$ (note contre note, comme toujours dans notre contexte élémentaire) est alors un chemin $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_n$ dans $\Gamma(X | Y)$.

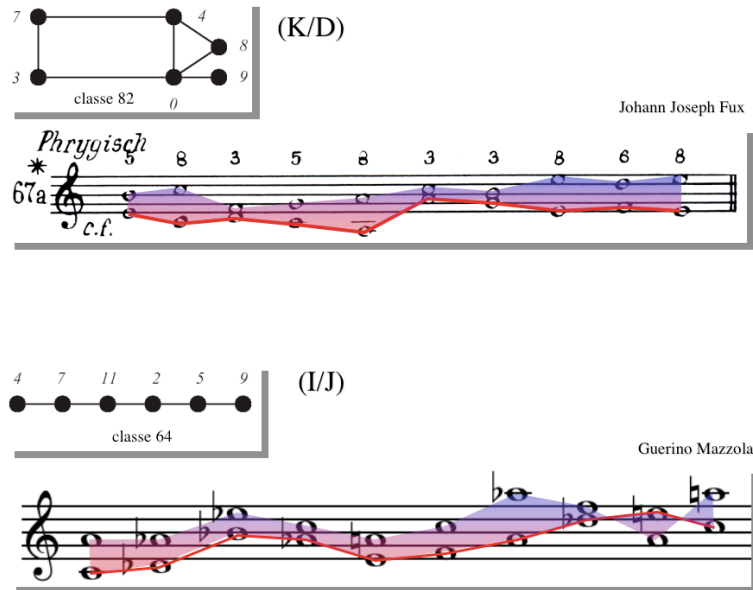


FIG. 16.2 – Deux contrepoints, un dans la tradition fuxienne, bâti sur le mode phrygien, l’autre par rapport à la dichotomie majeure et bâti sur la gamme K^* . Les cantus firmi sont indiqués par une ligne (rouge).

Nous pouvons alors considérer deux graphes contrapuntiques $\Gamma(X | Y)$, $\Gamma(X' | Y')$ et poser le problème s’il existe des morphismes de graphes $f : \Gamma(X | Y) \rightarrow \Gamma(X' | Y')$. Si un tel f existe, on peut automatiquement transformer un chemin $C_{(X|Y)}$ dans $\Gamma(X | Y)$ en un chemin image $C_{(X'|Y')} = f \circ C_{(X|Y)}$ dans $\Gamma(X' | Y')$. Ceci constitue une direction de recherche actuelle qui va sûrement nous fournir de belles perspectives pour comprendre le rôle particulier du contrepoint fuxien. D’après ce qui commence à être reconnu, il semble que le graphe $\Gamma(K | D)$ soit une espèce d’attracteur : il est possible de transformer un chemin non fuxien en un chemin fuxien, tandis qu’il est difficile sinon impossible de faire d’un chemin fuxien un chemin dans un autre monde contrapuntique.

Ce problème présente un intérêt particulier pour la composition, car nous pourrions, une fois les outils réalisés, créer de nouvelles compositions non fuxiennes par « déformation » de compositions classiques fuxiennes provenant de grands compositeurs.

16.3 Pour une théorie créative de la musique

On sait que la théorie de la musique est une théorie fortement rétrospective : elle cherche très souvent à expliquer ce que les compositeurs ont créé en essayant de comprendre *ex post* les phénomènes de la musique. Dans l’ancienne Chine, les médecins étaient sélectionnés suivant ce même schéma : l’empereur malade faisait venir les médecins et les payait généreusement s’ils étaient capables d’expliquer le défaut de santé, mais il n’était pas question de guérir l’empereur.

Nous attendons cependant davantage d'une théorie moderne, modélisée à l'aide des sciences naturelles. Une théorie moderne est avant tout vérifiée ou contredite suivant des expériences menées après le relevé des lois.

Les modèles que nous venons d'exposer pour le contrepoint font partie d'une théorisation dans l'esprit des sciences modernes. C'est là une théorisation utile aux sciences de l'ingénieur. Nous pouvons appliquer les lois de la théorie pour construire des objets techniques et utiles, mais nous ne fournissons pas uniquement des méthodes pour réaliser des compositions, à l'instar de la technique dodécaphonique qui reste sans base théorique significative. On part au contraire de points de vue théoriques qui immergent une théorie classique, le contrepoint fuxien en l'occurrence, dans un multivers de six variantes d'univers contrapuntiques, tous bâtis suivant le même schéma théorique, et nous proposons là des règles contrapuntiques qui sont des conséquences qui découlent strictement du mécanisme des symétries contrapuntiques.

Une telle approche peut être qualifiée de créative car elle rend possible la construction d'objets tout à fait nouveaux suivant des règles sans caractère imitatif. C'est là une situation bien similaire au principe boulézien de l'analyse créatrice. La différence est qu'ici, nous n'analysons pas une composition, mais toute une théorie pour en déduire des modèles divers. C'est une création qui résulte de la compréhension approfondie d'un fait et de sa transfiguration intellectuelle.

Nous devons évidemment nous demander si un tel principe se heurte à la liberté et la fantaisie de l'artiste compositeur. Soyons précis : il ne s'agit pas, ici, de forcer tout le monde à suivre ce chemin théorique dans la composition musicale. Nous voudrions plutôt savoir si ce principe est un « annihilateur de fantaisie » a priori. Or, pour réaliser un tel projet, il faut d'abord voir que la transfiguration de compositions fuxiennes en compositions « exotiques » est une tâche technique bien difficile. Il sera raisonnable de la réaliser à l'aide d'un logiciel et dans cette perspective, l'expérimentation ainsi que l'investigation des possibilités qui s'ouvrent sera sans doute extrêmement prometteuse. Et dès que nous aurons un outil graphique à notre disposition pour manipuler les graphes contrapuntiques décrits ci-dessus, le travail sera extrêmement créatif et, sans doute, moins fastidieux.

Quatrième partie

Interprétation — la théorie
infinitésimale

Chapitre 17

Le caractère infinitésimal de l'interprétation

*Das Medium künstlerischer Phantasie
ist nicht ein Weniger an Genauigkeit,
sondern das noch Genauere¹.
Theodor Wiesengrund Adorno*

17.1 La substance dans l'interprétation

L'interprétation d'une œuvre musicale en situation de concert n'a jamais été une reproduction fidèle d'un texte complet comme pourrait l'être une leçon de mathématiques suivant un plan rigoureux et élaboré. Le texte de la partition, s'il y en a une, est une accumulation de signes de caractère parfaitement déictique. La signification n'est pas achevée dans les signes de symboles écrits ; ce n'est que lors de l'interprétation audible qu'elle a tendance à se compléter. C'est bien dans cette optique que Paul Valéry affirme que « C'est l'exécution du poème qui est le poème. » et que Theodor W. Adorno, dans ses « fragments » [1], insiste : « Die Idee der Interpretation gehört zur Musik selber und ist ihr nicht akzidentiell². »

La partition en tant que telle présente donc un défaut multiple de grande importance. L'interprétation se traduit par une projection *dramatique* $\wp$ de la réalité symbolique de la partition dans la réalité physique du concert (voir aussi figure 17.1). Cette dernière comprend non seulement la réalisation sonore, mais aussi les gestes et leurs interactions avec les instruments. Cet enrichissement est plein de signification et transcende largement la reproduction. La projection reflète la compréhension du texte donné, son interprétation intellectuelle des harmonies, du rythme, du travail motivique, des cohérences syntaxiques, et contient l'expression de ces connaissances par l'intermédiaire des paramètres et des processus physiques.

Dans ce chapitre, nous faisons abstraction du côté gestuel et instrumental de l'interprétation et nous nous concentrons sur la réalité sonore. Les gestes seront traités quant à eux dans la

¹Le moyen de la fantaisie artistique n'est pas un moins de précision, mais le plus précis.

²L'idée de l'interprétation appartient à la musique elle-même et ne lui est pas accidentelle.

cinquième partie de l'ouvrage. Malgré cette réduction sensible, l'interprétation conserve son caractère complexe, qui tend vers l'infini dans deux directions :

1. En premier lieu, l'interprétation formelle³ préalable à la projection $\wp$ dans la réalité physique est infinie, même pour une composition finie. La démonstration fait appel à la théorie mathématique de la musique⁴ : intuitivement, ceci résulte de la possibilité de regrouper des groupes de notes, et de regrouper des groupes de groupes de notes, et ainsi de suite, jusqu'à l'infini.
2. La seconde direction entraîne de lourdes conséquences, surtout en ce qui concerne la pratique de l'interprétation. Nous faisons allusion à la variabilité des projections des symboles « rigides » dans l'espace des paramètres continus de la physique. Une durée indiquée par la partition possède une infinité de possibilités au niveau de sa réalisation effective lors de l'interprétation. À cela s'ajoute une variété continue de hauteurs et d'intensités qui s'étend pour relier les événements discrets du jeu instrumental. C'est encore Valéry (dans ses cahiers) qui reconnaît que « la musique, mathématiquement discontinue, peut donner les sensations les plus continues » [57]. Cette continuité n'est pas purement psychologique, mais se manifeste très concrètement dans les glissandi, les crescendi, et, évidemment les gestes continus qui s'expriment dans l'interprétation musicale, la danse ou encore la direction d'orchestre.

Loin de se contenter de doubler la partition, l'interprétation est un enrichissement structural et expressif considérable qui, par sa nature continue et multidimensionnelle, ouvre une sémantique catégoriquement différente de la sémantique provenant de la logique de l'analyse musicale.

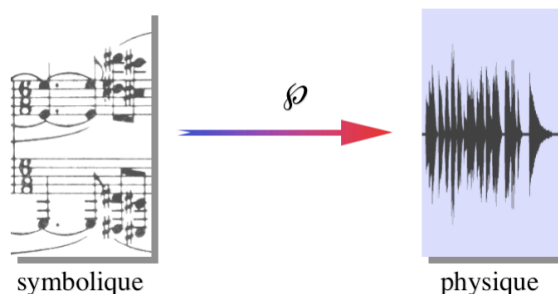


FIG. 17.1 – L'interprétation est un changement de réalité.

Dans ce qui suit, nous allons discuter deux aspects de l'interprétation : la *théorie structurale*, qui décrit l'interprétation en tant que structure mathématique ; puis la *théorie expressive*, qui répond aux questions suivantes : pourquoi, par quel moyen et dans quel but telle structure interprétative est-elle réalisée ? Concernant cette dernière, nous pouvons repérer trois approches :

³Dans ce premier sens, la terme « interprétation » désigne un recouvrement d'une partition musicale (composition globale) avec des « cartes » locales.

⁴Voir [34, ch. 13.4.1].

- La première donne la motivation dans les gestes, un fil qui est par exemple poursuivi par Johan Sundberg/Roland Virillo ou Neil MacAgnus Todd.
- La deuxième se réfère aux émotions, une théorie élaborée, par exemple, par Jörg Langner ou Alf Gabrielson (qui va même jusqu'à réclamer un isomorphisme entre émotions et musique...).
- La troisième explore les motivation dans l'analyse musicale et est poursuivie par Gerhard Widmer, Anders Friberg ou Theodor W. Adorno, par exemple.

Il est clair que raisonner en terme de gestes ou d'émotions est extrêmement complexe. Par exemple, nous ne savons pas encore classer les émotions, et encore moins comprendre pourquoi musique et émotion devraient être « isomorphes », i.e. avoir essentiellement la même structure. De plus, la théorie des gestes manque encore de précision pour créer une relation intrinsèque avec la sémantique musicale. C'est pourquoi nous nous sommes d'abord concentrés sur le fil analytique, pour répondre au programme adornien d'une interprétation analytique.

17.2 La structure infinitésimale de l'interprétation

Comme nous l'avons déjà évoqué ci-dessus, l'interprétation musicale est un phénomène qui relève de la dimension continue de la musique et cela non pas d'une manière marginale, mais substantielle. Il est indispensable d'insister sur ce point car il change la perspective que l'on avait utilisée pour les théories analytiques de la modulation ou du contrepoint et ouvre des perspectives qui nécessitent des théories mathématiques autres que l'algèbre ou la géométrie abstraite ; il faudra s'intéresser au calcul topologique, et plus précisément au calcul infinitésimal.

L'interprétation pose d'ores et déjà problème au niveau de la création de nuances, d'accents et de finesses non symboliques, qui échappent à l'algèbre abstraite. Mais ce n'est pas seulement dans la réalité physique que ce changement devient critique : en effet, on le rencontre déjà au sein des symboles. Prenons un exemple classique qui est celui du temps. Tout le monde s'accorde sur le fait que le temps physique (que nous mesurons en secondes) est continu, i.e. que le temps entre la seconde 1.0 et la seconde 2.0 est l'intervalle $[1.0, 2.0]$ de tous les nombres réels $1.0 \leq x \leq 2.0$. Cependant, pour de nombreux musiciens et musicologues, le temps s'écoulant dans la troisième mesure en 4/4, commençant au temps 8/4 après le début de la première mesure (au temps 0/4), n'est pas rempli par tous les nombres réels $8/4 \leq x < 12/8$, mais ne contient que les nombres de notes jouées ou de pauses présentes dans cette mesure ! En somme, seuls leur importent les événements musicaux (sonores ou non). Ceci semble un peu étrange, mais l'argumentation dit que pour qu'il y ait temps, il faut qu'il y ait notes...

La preuve de cette attitude est que, s'il s'agit de définir le tempo musical entre deux notes successives de notre mesure, celui-ci n'est pas défini. Nulle note, nulle vitesse. On peut reconnaître cette approche dans les graphèmes de l'école allemande contemporaine de la science de l'interprétation. La figure 17.2 montre un exemple de la représentation du tempo musical par Hermann Gottschewski [22]. Or, cette pensée a une tradition très ancienne et peut être retracée jusqu'à la scholastique médiévale : au temps de Nicolas d'Oresme, on ne savait en fait pas encore penser la vitesse instantanée, i.e. la vitesse devait être localement constante, comme pour les escaliers de Gottschewski.

Le tempo musical ne peut donc être pensé entre deux événements musicaux successifs selon ces musicologues. Au vu des phénomènes déjà mentionnés, tels que le glissando, le crescendo ou

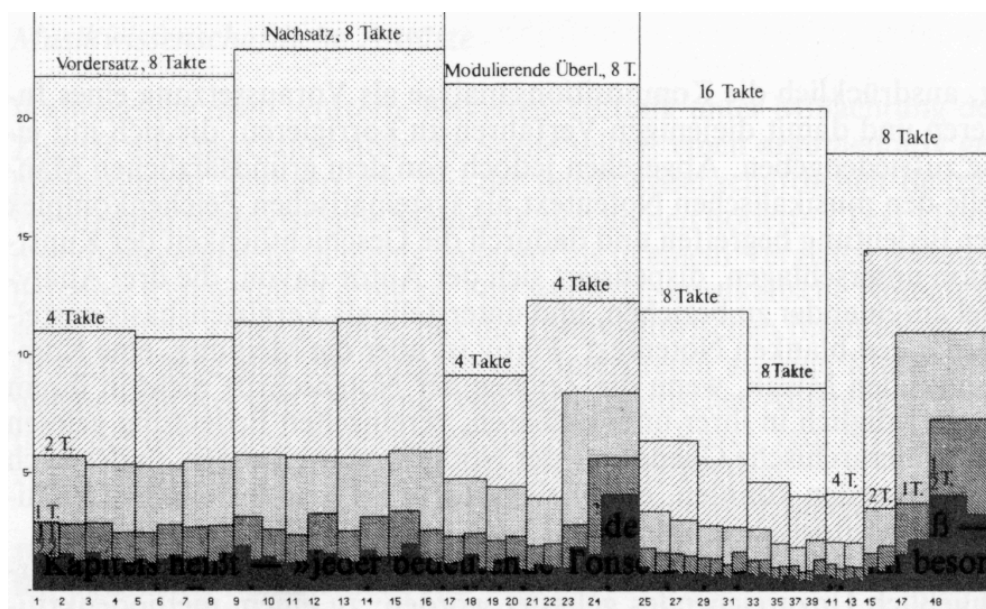


FIG. 17.2 – Les escaliers du tempo dans les représentations graphiques de l'agogique par Hermann Gottschwesi [22].

les gestes musicaux, nous devons exiger que le temps musical tout comme la pensée du tempo instantané (représentant une vitesse à un moment donné d'un mouvement accéléré) soit aussi étendu à l'ensemble total des nombres réels, ce que nous allons voir par la suite.

On pourrait argumenter en affirmant que ces finesses concernant les valeurs de certains paramètres musicaux n'ont que très peu de lien avec les idées intrinsèques de l'interprétation. Mais il n'en est rien : l'introduction de finesses de nature « infinitésimale » fut effectivement faite de manière explicite dans la correspondance d'Adorno avec Walter Benjamin. Dans [2], Adorno se réfère à cette correspondance : « Walter Benjamin hat "das Vermögen der Phantasie" als "die Gabe, im unendlich Kleinen zu interpolieren" definiert. Das beleuchtet blitzhaft die wahre Interpretation. (...) Im dicht gewobenen Zusammenhang des Notentextes sind die minimalen Hohlräume zu entdecken, in denen sinnverleihende Interpretation ihre Zuflucht findet. (...) Das Medium künstlerischer Phantasie ist nicht ein Weniger an Genauigkeit, sondern das noch Genauere⁵. » Ce texte ouvre une perspective d'une précision infinie, diamétralement opposée au romantisme de l'interprétation ingénieuse. Et Adorno pousse son raisonnement jusqu'au bout : « Was nicht, zumindest an Modellen, zur einzelnen Note und zur einzelnen Pause hinabsteigt, ist als Interpretationsanweisung unverbindlich⁶. » La précision qu'il veut n'est point métaphorique,

⁵Walter Benjamin a défini la faculté de la fantaisie comme étant le don d'interpoler dans l'infiniment petit. Ceci illumine comme un éclair la vraie interprétation. Dans le contexte tissé de manière dense de la partition, on découvre les cavités minimales, dans lesquelles l'interprétation qui produit du sens se réfugie. (...) Le médium de la fantaisie artistique n'est pas un minimum de précision, mais le plus précis.

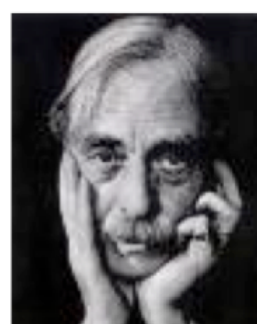
⁶« Ce qui ne descend pas — du moins au niveau du modèle — à la note et à la pause individuelle, n'est pas admissible comme indication interprétative. »



Theodor W. Adorno



Walter Benjamin



Paul Valéry

FIG. 17.3 – Theodor Wiesengrund Adorno (à gauche), Walter Benjamin (au milieu), Paul Valéry (à droite).

mais mathématique au sens propre du mot. Le langage de la précision et de l'interpolation infinie, c'est bien sûr le calcul infinitésimal. Les mathématiques sauront donc répondre à Adorno et Benjamin en leur offrant un langage et des théorèmes puissants pour aborder leurs idées de précision.

Avant de nous plonger dans cette aventure de réconciliation des idées musicales avec les outils mathématiques, il est essentiel de s'arrêter sur le sujet de la précision. On sait que la précision mathématique ne fait pas l'unanimité dans les sciences humaines et que l'on oppose à ce type de précision une autre parfois appelée « précision métaphorique » qui semble échapper aux mathématiques et, comme la citation précédente le montre, à l'approche adornienne.

Si tel est le cas, nous devrions rencontrer des situations où la précision mathématique est mise en défaut tandis que la précision métaphorique reste intacte (en d'autres termes la métaphore reste précise). Mais cela nous semble improbable car il s'agirait de définir des classes d'équivalence de configurations mathématiques qui représentent leur appartenance à une même métaphore, telle que l'agogique romantique dans la « Rêverie » que nous verrons par la suite.

17.3 Quatre types de globalisation

Pour préciser le sujet, il faut d'abord repérer les constituants d'une interprétation. Elle se compose de quatre types de globalisation, i.e. de composition de pièces élémentaires.

Variété orchestrale : l'interprétation par un orchestre est composée des interprétations accomplies des instruments en question. Nous allons dans la suite nous concentrer sur l'interprétation par un seul instrument et laissons donc à part la collaboration instrumentale complexe au sein d'un orchestre.

Compositions globales : le second type d'interprétation concerne le recouvrement d'une partition par des cartes, des parties de petite taille (une mesure, un motif, une modulation, ou une cadence, par exemple) où des stratégies locales d'interprétation sont définies. L'atlas

de ces cartes ne coïncide pas, en général, avec l'atlas de la composition globale⁷ que l'on utilise pour l'analyse de la pièce. C'est un atlas qui regarde le type de projection $\wp$ dans la réalité physique et moins les faits logiques des symboles.

Hiérarchie des paramètres : dans l'interprétation, les paramètres jouent des rôles asymétriques. Par exemple, la durée est une fonction du temps d'attaque (onset) des notes (penser à ON et OFF en MIDI!). Seule l'articulation y ajoute des valeurs variées. C'est à cause de cet effet que nous appelons la durée un paramètre *parallèle* à l'attaque. La même dépendance se présente dans le cas du paramètre du glissando (différence de hauteurs) dont la projection interprétative est fonction des valeurs de la projection de la hauteur. Et de même avec le crescendo qui est parallèle à l'intensité.

Déploiement stématique : au-delà des structures interprétatives en un moment donné de l'action artistique, la préparation et le développement d'une interprétation définissent une variété généalogique d'interprétations préliminaires qui évoluent vers une version « provisoirement finale ». En théorie mathématique de la musique, l'arbre généalogique de cette évolution est appelé *stemma*.

Dans cet ouvrage, nous nous limiterons à discuter dans l'ordre : les globalisations (1) par hiérarchie des paramètres, (2) par déploiement stématique et (3) (au sein du déploiement stématique) par recouvrement par cartes, ce qui veut dire que nous ne considérerons que l'interprétation par un seul instrument. Avec ces restrictions, les idées clés pourront être exposées plus clairement.

⁷En théorie mathématique de la musique, une composition globale est un recouvrement d'une composition par des cartes locales qui sont recollées comme les cartes des variétés différentiables ou algébriques.

Chapitre 18

Le langage des champs interprétatifs

Das ist ein zu weites Feld¹.
Effie Briest

18.1 Les champs interprétatifs

Les idées d'Adorno et Benjamin concernant la précision et l'interpolation infinies dans l'interprétation sont aussi claires que difficiles à réaliser. Comment introduire l'élément infinitésimal dans la projection $\wp$?

Pour débiter notre projet, il faut d'abord décanter les paramètres qui entrent en jeu. Nous allons nous concentrer sur des interprétations effectuées par des instruments faisant intervenir un espace engendré par une sélection parmi les paramètres classiques, l'attaque (onset E), la hauteur (pitch H), l'intensité (loudness L), la durée (duration D), le glissando (glissando G) et le crescendo (crescendo C) ; les noms anglais sont ajoutés pour faciliter la référence aux textes anglo-saxons. Les symboles $E, H, \dots$ seront aussi utilisés dans la suite. Par exemple, le piano est situé dans l'espace des paramètres E, H, L, D , tandis que le violon fait usage de tous les paramètres. Pour définir la projection $\wp$, il faut aussi distinguer les paramètres symboliques de la partition des paramètres physiques correspondants.

Nous notons les paramètres symboliques par les lettres majuscules E, H, L, D, G, C et les paramètres physiques correspondants par e, h, l, d, g, c . Nous utiliserons pour tous les paramètres des valeurs réelles. Cela signifie que l'espace symbolique du piano engendré par les paramètres E, H, L, D est isomorphe à $\mathbb{R}^4$, que l'on notera par $\mathbb{R}^{EHL D}$; l'espace physique correspondant sera donc $\mathbb{R}^{ehl d}$. Voici les unités utilisées et leurs notations qui leur correspondent : E est en multiples de la noire (1/4), e est en secondes (sec) ; H en multiples de demi-tons, h en cents (Ct, centième du logarithme de fraction de fréquences $\sqrt[12]{2}$) ; L est une description numérique (par exemple en unités « velocity » de MIDI) adaptée à la notation textuelle *ff*, *pp*, *mf*, *ppp*,

¹C'est un champ étendu.

etc., l est en multiples de dB (décibel). Les paramètres parallèles correspondants D, d, G, g et C, c sont en unités correspondantes.

Avec ces conventions, la projection interprétative pour l'espace $\mathbb{R}^{P_1, P_2, \dots, P_n}$ pour une suite donnée $P_1, P_2, \dots, P_n$ de paramètres symboliques est une application

$$\wp : \mathbb{R}^{P_1, P_2, \dots, P_n} \rightarrow \mathbb{R}^{p_1, p_2, \dots, p_n}$$

que nous allons spécifier dans la suite. Cette application envoie le ton $X \in \mathbb{R}^{P_1, P_2, \dots, P_n}$ dans l'événement physique $x = \wp(X) \in \mathbb{R}^{p_1, p_2, \dots, p_n}$. Pour le piano, la partition est donc un ensemble fini de notes $Partition \subset \mathbb{R}^{EHL D}$ dont l'interprétation est l'image $\wp(Partition) \subset \mathbb{R}^{ehl d}$. Nous pouvons supposer que cette application est bijective, en fait elle est injective sur les notes (du moins, si la partition est jouée sans erreurs), et une extension à une bijection est alors toujours possible.

De plus, nous allons supposer que $\wp$ est une transformation sans rupture ni changement brusque. En termes mathématiques, il s'agit d'un difféomorphisme, i.e. un isomorphisme différentiable (à dérivée continue). Cette hypothèse est possible, mais il faut quand même la justifier du point de vue musical. Or, l'interprétation est parfaitement connue par rapport au temps. En effet, la projection temporelle $\wp : E \mapsto e$ est décrite par le métronome ! Plus précisément, le tempo musical, matérialisé par le métronome maeltzélien, est typiquement mesuré en noires par minute, i.e. c'est un quotient de noires (temps symbolique) par minutes (temps physique). Comme l'indique l'usage occasionnel du terme « tempo », c'est en effet une vitesse : on définit à quelle vitesse le temps symbolique est parcouru par rapport au temps physique. Toujours en termes mathématiques, le tempo $T(E)$ est l'inverse $(de/dE)^{-1}$ de la dérivée de/dE au moment E donné.

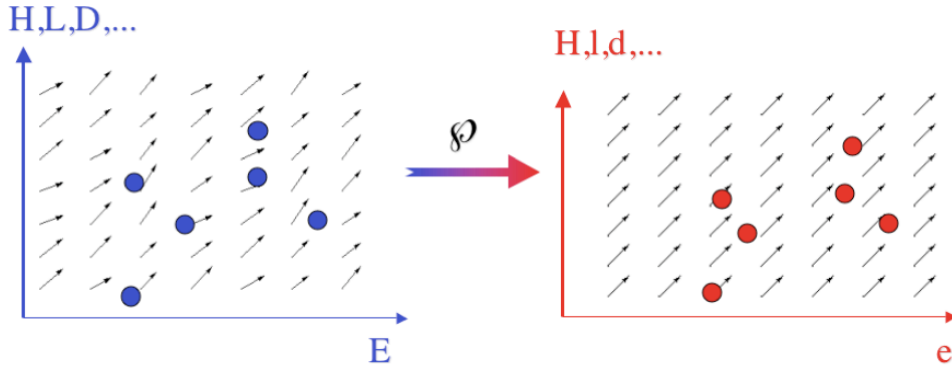


FIG. 18.1 – À gauche le champ vectoriel interprétatif $Z_\wp$ de la projection $\wp$, une généralisation naturelle du champ en dimension 1 du tempo musical. À droite le champ diagonal constant Δ , dont le champ interprétatif est l'image inverse définie par la Jacobienne inverse de $\wp$.

C'est ici que nous quittons l'ancienne approche des vitesses discrètes de type « escalier » et considérons des applications différentiables qui sont vraiment « infiniment » précises et répondent aux phénomènes temporels infinitésimaux des gestes ou phénomènes musicaux tels que le glissando ou encore le crescendo. Cette démarche est une propre extension de la

démarche discrète, rien n'est perdu, et on y gagne un langage infiniment plus souple. Intuitivement, on enrichit les données discrètes par des informations infiniment interpolées, comme Adorno et Benjamin l'avaient imaginé. Mathématiquement nous l'exprimons de la façon suivante : on considère un difféomorphisme $\varphi : \mathbb{R}^{P_1, P_2, \dots, P_n} \rightarrow \mathbb{R}^{p_1, p_2, \dots, p_n}$. On prend alors la Jacobienne $J(\varphi)(X)$ des dérivées partielles de φ au point $X \in \mathbb{R}^{P_1, P_2, \dots, P_n}$ puis on calcule l'inverse $J(\varphi)(X)^{-1}$. En appliquant cette méthode au cas particulier du temps en dimension 1, on obtient le tempo : $T(E) = (de/dE)^{-1}$. Il y a cependant une finesse à observer : si nous voulons avoir un vecteur de vitesse, la Jacobienne ne représente pas encore une solution car il s'agit d'une matrice et non pas d'un vecteur en dimension n . Pour résoudre le problème, nous allons évaluer la Jacobienne en un vecteur bien choisi. Il est naturel de prendre le vecteur diagonal $\Delta = (1, 1, \dots, 1)$ de dimension n . En effet, en dimension 1, ce choix nous fournit la valeur du tempo dans notre exemple du temps. Le vecteur diagonal est donc la généralisation naturelle de ce choix effectué en dimension 1. On obtient alors en chaque point X le vecteur Z_φ ,

$$Z_\varphi(X) = J(\varphi)(X)^{-1}(\Delta).$$

Cela signifie que notre formule définit un champ vectoriel, dit *interpré-tatif* sur l'espace symbolique $\mathbb{R}^{P_1, P_2, \dots, P_n}$. Un tel champ généralise le champ du tempo en dimension 1 (voir figure 18.1).

Voyons maintenant comment construire une interprétation φ à partir du champ interprétatif Z_φ . Le procédé est standard en mathématiques, mais il entraîne des conséquences profondes dans l'application musicale. En fait, si l'on connaît l'image $x_0 = \varphi(X_0)$, et si la courbe intégrale de Z_φ passe par X pour le paramètre $t = 0$ et par X_0 pour $t = \tau$, alors on a $\varphi(X) = x_0 - \tau\Delta$. Nous allons discuter la philosophie des conditions initiales de type $x_0 = \varphi(X_0)$ dans la section 18.3.

Pour terminer la section, mentionnons le module *Espresso* du logiciel *Distributed Rubato*, développé par Stefan Müller (en collaboration avec Stefan Göller and Gérard Milmeister), pour calculer et visualiser des champs interprétatifs (voir figure 18.2). *Espresso* reçoit une partition (au format MIDI dans la machine « espresso » à gauche, l'entrée de gauche) et une interprétation (au format MIDI, l'entrée de droite) et en déduit le champ interprétatif correspondant (en bas à droite). Dans cette représentation, la direction et longueur des vecteurs du champ sont encodées par des couleurs et intensités.

18.2 Deux exemples illustratifs de champs interprétatifs

Pour illustrer les possibles structures de champs interprétatifs, nous voulons examiner deux cas élémentaires qui montrent de manière exemplaire les phénomènes qui peuvent apparaître dans cette théorie.

Le premier exemple (voir figure 18.3) présente les deux paramètres attaque (E) et hauteur (H) : intuitivement, il s'agit d'une situation où l'on a une application $\varphi : \mathbb{R}^{EH} \rightarrow \mathbb{R}^{eh}$ qui est un produit cartésien $\varphi = \varphi_E \times \varphi_H$ de deux applications $\varphi_E : \mathbb{R}^E \rightarrow \mathbb{R}^e$, $\varphi_H : \mathbb{R}^H \rightarrow \mathbb{R}^h$, une dans chaque axe paramétrique.

Ce champ décrit l'évolution du temps (horizontal, avec la courbe du tempo) ainsi que l'intonation (courbe verticale). Il exprime le fait que le tempo ne dépend pas de la hauteur, ce qui n'est pas automatique dans le cas des effets de rubato liés, aussi appelés « de Chopin ». Du côté des hauteurs, l'intonation reste aussi constante pendant le temps mais des cas contraires

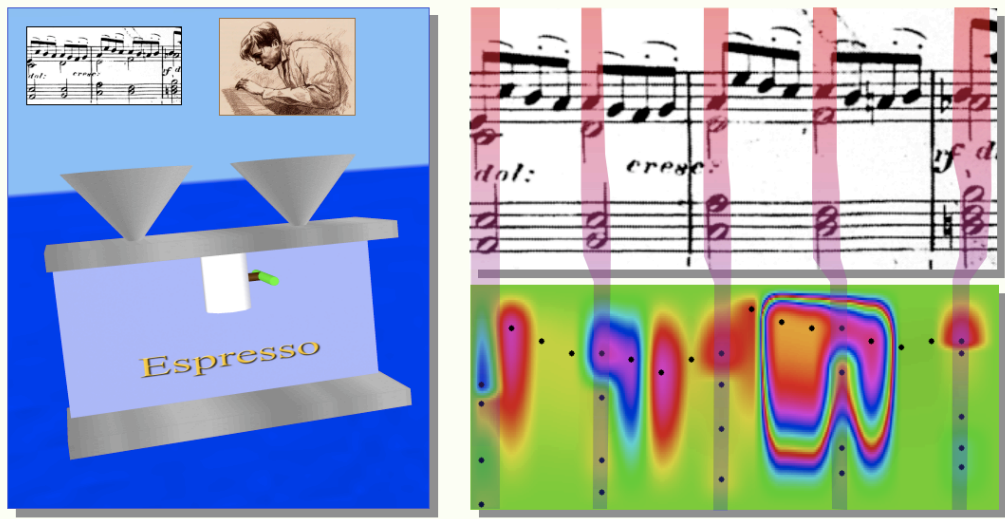


FIG. 18.2 – Le module *Espresso* du logiciel *Distributed Rubato* reçoit une partition (machine « espresso » à gauche, entrée de gauche) et une interprétation (les deux au format MIDI) et il en déduit le champ interprétatif correspondant (à droite, en bas). Dans cette représentation, la direction et longueur des vecteurs du champ sont encodées par des couleurs et intensités.

peuvent se présenter comme par exemple chez les chanteurs qui modifient volontairement leur intonation ou encore dans certains instruments dont l'usure a entraîné des dysfonctionnements. On a donc ici un prototype de champ dans le plan EH qui reflète la situation de départ pour en déduire plus tard, dans le développement stématique, des champs plus sophistiqués qui ne seront plus, comme on peut s'imaginer, décomposables en facteurs de dimension 1.

Le second exemple est tout à fait remarquable car il démontre que les champs interprétatifs ne peuvent être décomposés en facteurs de dimension 1 dès le départ. La figure 18.4 montre les deux paramètres temporels, attaque E et le paramètre « parallèle », la durée D . Pour calculer le champ dans ce cas, on considère l'application $\wp_{ED}(E, D) = (e(E), d(E, D) = e(E + D) - e(E))$ qui se déduit du fait que pour la fonction $e(E) = \wp_E(E)$ sur l'axe de l'attaque, la durée s'en déduit (d'ailleurs comme pour MIDI, où la durée est la différence OFF-ON) par la différence de l'attaque de la fin $e(E + D)$ de la note interprétée et de son début $e(E)$. Avec ces données, on calcule la Jacobienne inversée et on en déduit la formule $Z(E, D) = \partial T(E, D) = (T(E), 2T(E + D) - T(E))$ pour un champ appelé parallèle, qui contient le champ du tempo $T(E)$. Ce champ est noté ∂T . C'est ici un champ qui ne se décompose pas en produit cartésien puisque le second facteur est aussi une fonction de E , non seulement de D . Ce type de champ parallèle se rencontre de manière aussi élémentaire pour les deux autres paramètres, et on a donc pour les champs en dimension un $S(H)$, intonation, et $I(L)$, intensité, des champs parallèles ∂S et ∂I .

Il faut se rendre compte que ce type de champ parallèle apparaît seulement s'il n'y a pas d'articulation. S'il y a, par exemple, du staccato, on changera le champ parallèle en un champ toujours indécomposable, mais non plus parallèle (donné par la formule de $Z(E, D)$).

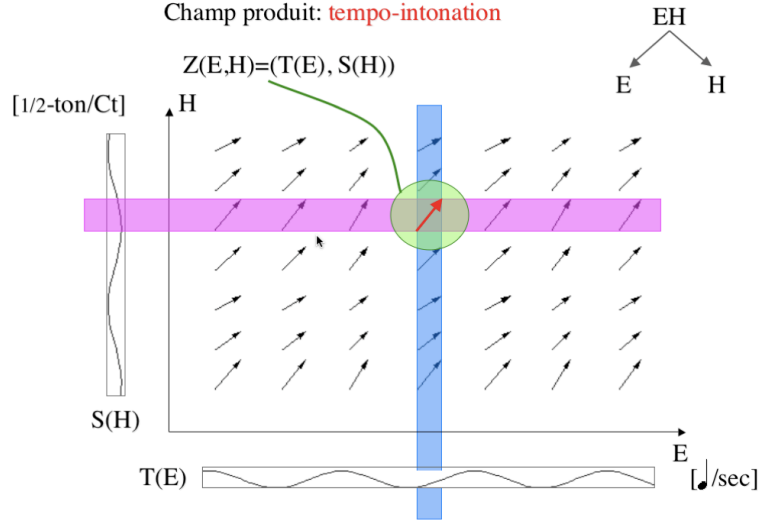


FIG. 18.3 – Le champ interprétatif du produit cartésien de deux applications indépendantes pour attaque E et hauteur H . Ceci décrit le temps (horizontal, avec la courbe du tempo) ainsi que l'intonation (courbe verticale).

Nous reviendrons à la méthodologie de la construction de champs interprétatifs au cours du chapitre 22.

18.3 La « magie » des conditions initiales

D'un point de vue mathématique, le calcul de valeurs $\wp(X)$ en partant de $Z_\wp$ et de valeurs initiales $\wp(X_0)$ est sans intérêt particulier ; il en est autrement du point de vue de l'interprétation musicale.

Commençons par le cas élémentaire d'une interprétation de l'attaque $\wp_E : \mathbb{R}^E \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^e$. L'intégration du champ T du tempo donne l'attaque physique par la formule

$$\wp_E(E_1) = \wp_E(E_0) + \int_{E_0}^{E_1} \frac{1}{T}$$

Cette formule est une somme de deux termes : le premier ($\wp_E(E_0)$) représente le temps physique initial. L'intégrale $\int_{E_0}^{E_1} \frac{1}{T}$ exprime quant à elle la contribution du tempo dicté par le métronome ou réalisé par les indications du bâton du chef d'orchestre. Ces deux termes jouent un rôle différent car le premier est indépendant du tempo imposé par la partition et les interprètes tandis que l'intégrale ne dépend substantiellement pas de l'ancrage temporel initial.

Sans l'information provenant du premier terme, la musique reste fictive et demeure dans le potentiel de la partition. La détermination de $\wp_E(E_0)$ est donc, au-delà de la fonction triviale mathématique, existentielle puisque cet instant détermine l'existence de la musique. Les chefs

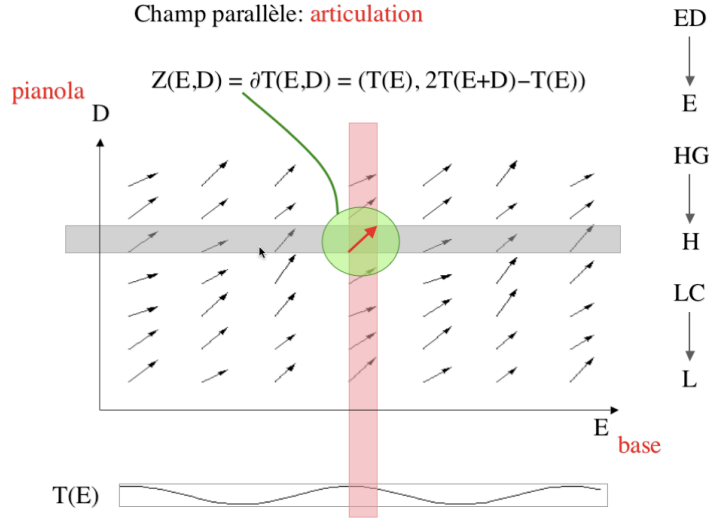


FIG. 18.4 – Les deux paramètres temporels (attaque E et durée D) montrent un champ non décomposable, appelé « parallèle ». On voit que les composantes de la durée des vecteurs sont une fonction de la durée ainsi que de l'attaque.

d'orchestre abaissant leur baguette pour fixer ce point de repère sont conscients de ce fait : Sergiu Celibidache insistait sur l'unicité de chaque interprétation jusqu'au point de ne pas permettre l'enregistrement de ses concerts, craignant de détruire ce moment de déicticité absolue. Cette attitude n'est d'ailleurs pas sans ironie, car après la mort du grand sorcier, on retrouva un grand nombre d'enregistrements secrets de sa part. Néanmoins, chaque écoute d'un tel document sur un CD crée une nouvelle occurrence existentielle, débutant cette fois au bon vouloir de l'auditeur.



FIG. 18.5 – Sergiu Celibidache.

Si la situation de la seule attaque semble simple, elle pose, dans les cas où les conditions initiales sont plus complexes, des problèmes considérables, même au niveau mathématique. Par exemple, si l'on fixe deux images $\varphi_E(E_0), \varphi_E(E_1)$ pour deux attaques $E_0 < E_1$, le tempo doit être adapté pour que l'on obtienne l'intégrale $\varphi_E(E_1) - \varphi_E(E_0) = \int_{E_0}^{E_1} \frac{1}{T}$. C'est là un problème important pour la programmation de la théorie de l'interprétation. Les logiciels *Presto* et *Rubato* furent conçus en vue de remédier à ce problème.

Le lecteur pourra mener une réflexion intéressante pour la compréhension de la valeur initiale dans la dimension de la hauteur pour un champ d'intonation. Le rôle du diapason l'aidera à comprendre le phénomène de l'ancrage dans les hauteurs.

Pour les champs interprétatifs de dimensions plus élevées, les ensembles de points initiaux de la partition sont très complexes, et sont décrits en détail dans [34]. Ce ne sont plus, en général, des ensembles finis, mais des polyèdres, réunion de traits, surfaces triangulaires, tétraèdres, etc.

Le calcul des vecteurs $\wp(X)$ est alors non trivial dans le sens où si l'on se donne un ton X de la composition, on doit d'abord calculer la courbe intégrale maximale $\int_X Z_\wp$ passant par X pour le paramètre $t = 0$. Après cela, il faut trouver un point initial X_0 sur $\int_X Z_\wp$, de sorte que la valeur $\wp(X_0)$ puisse être utilisée comme décrit ci-dessus pour trouver $\wp(X)$. La programmation de ces calculs est difficile, car le calcul numérique des solutions d'équations différentielles associées, basé sur les méthodes de Runge-Kutta, ne donne pas de solutions exactes et requiert des procédés coûteux.

Chapitre 19

Hiérarchies de cellules interprétatives

*On trouve toujours l'homogène
à un certain degré de division.*
Paul Valéry

19.1 La catégorie des cellules interprétatives

Dans le chapitre précédent, nous avons vu les structures élémentaires de la projection interprétative φ . Nous allons maintenant décrire ces structures de manière plus systématique. Rappelons, pour cela, les exemples de la section 18.2 montrant que les espaces et leurs champs interprétatifs sont reliés de manière sophistiquée. Par exemple, dans le premier exemple du produit cartésien $\varphi_{EH} = \varphi_E \times \varphi_H$, on a deux projections $p_E : \mathbb{R}^{EH} \rightarrow \mathbb{R}^E$, $p_H : \mathbb{R}^{EH} \rightarrow \mathbb{R}^H$ compatibles avec les champs respectifs $Z_{\varphi_{EH}}$, Z_{φ_E} et Z_{φ_H} . Cela signifie que si $X \in \mathbb{R}^{EH}$, on a $p_E(Z_{\varphi_{EH}}(X)) = Z_{\varphi_E}(p_E(X))$ et $p_H(Z_{\varphi_{EH}}(X)) = Z_{\varphi_H}(p_H(X))$. Pour ce qui concerne le second exemple, on n'a qu'une seule projection p_E avec $p_E(Z_{\varphi_{ED}}(X)) = Z_{\varphi_E}(p_E(X))$ puisque le champ Z_{φ_D} n'existe pas. Nous avons indiqué ces projections compatibles avec les champs interprétatifs par les diagrammes à droite dans les figures 18.3 et 18.4. On déduit de ces exemples que l'on a des relations parmi les champs sur un système de sous-espaces qui sont reliés par les projections canoniques.

Voilà l'approche systématique derrière ces relations : nous allons définir la catégorie *Cell* des *cellules interprétatives* dont les morphismes sont précisément ces projections. Les objets de *Cell* sont les cellules interprétatives C possédant cinq composantes (voir 19.1 pour leur représentation graphique). La première, K , représente l'ensemble des notes dont nous voulons

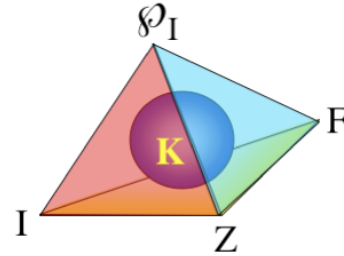


FIG. 19.1 – La représentation graphique d'une cellule interprétative.

interpréter un certain nombre de paramètres ; la deuxième, F , symbolise un hypercube dans l'espace de ces paramètres limitant les valeurs des notes concernées ; la troisième, Z , est le champ qui définit l'interprétation ; la quatrième, I , indique les points initiaux de la réalisation de la pièce ; la dernière, $\wp_I$, définit sur les points initiaux leurs valeurs dans la réalisation physique.

Ces cellules interprétatives se formalisent en quintuplets $C = (K, F, Z, \wp_I, I)$, où :

1. $K \subset \mathbb{R}^{Para}$ est *le noyau symbolique*, c'est-à-dire l'ensemble des notes (ou de certaines projections sur des paramètres choisis de telles notes) que l'on veut interpréter, $Para = P_1, P_2, \dots, P_n$ étant sous-ensemble de l'ensemble total E, H, L, D, G, C des paramètres symboliques.
2. $F = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots [a_n, b_n]$, *le cadre*, est un cube fermé dans $\mathbb{R}^{Para}$ contenant K .
3. Z est un champ vectoriel (lipschitzien), dit *interprétatif* sur un voisinage de F .
4. $I \subset F$ est un polyèdre (réunion de simplexes), *le polyèdre initial*.
5. $\wp_I : I \rightarrow \mathbb{R}^{para}$ est *l'interprétation initiale*, $para$ étant l'ensemble des paramètres physiques associés à $Para$.

On demande alors que la courbe intégrale (maximale) $\int_X Z$ de Z et d'origine $X \in K$ rencontre I et que, si elle rencontre $a \in I$ pour le paramètre $t = \alpha$ et $b \in I$ pour le paramètre $t = \beta$, alors on a $\wp_I(b) - \wp_I(a) = (\alpha - \beta)\Delta$. La dernière condition garantit que le calcul d'une interprétation $\wp_C(X) = \wp_I(X_0) - t\Delta$ d'un point $X \in K$, défini de telle sorte que la courbe intégrale $\int_X Z$ rencontre I en X_0 au paramètre t , soit bien définie. On appelle $\wp_C : K \rightarrow \mathbb{R}^{para}$ *l'interprétation associée à la cellule C* . Nous soulignons que cette définition ne s'appuie pas sur la condition du difféomorphisme, mais directement sur celle du champ Z .

Nous nous référons maintenant à la figure 19.2 pour les considérations suivantes. La construction de cellules interprétatives s'effectue de telle sorte que l'on ait une fonction p entre une cellule comportant un certain nombre de paramètres et une cellule possédant une partie de ces mêmes paramètres, ainsi qu'une fonction correspondante entre les événements physiques interprétés (encore notée p). Ces fonctions jouent le rôle de morphisme dans la catégorie $Cell$ et sont compatibles avec les projections $\wp_1$ et $\wp_2$ définies par les deux cellules. En termes mathématiques, la compatibilité de ces fonctions p montrent que les projections interprétatives définissent un foncteur sur la catégorie $Cell$.

Mathématiquement parlant, les morphismes de la catégorie $Cell$ sont définis de la sorte : si $C_1 = (K_1, F_1, Z_1, \wp_{I_1}, I_1)$ et $C_2 = (K_2, F_2, Z_2, \wp_{I_2}, I_2)$ sont deux cellules interprétatives telles que $Para_2 \subset Para_1$, alors la projection $p : \mathbb{R}^{Para_1} \rightarrow \mathbb{R}^{Para_2}$ est un morphisme $p : C_1 \rightarrow C_2$ si

1. $p(F_1) \subset F_2$;
2. $p(K_1) \subset K_2$;
3. $Tp \circ Z_1 = Z_2 \circ p$, où Tp est la tangente de p . Cette propriété concerne la compatibilité des champs.

Par ailleurs, la définition de cette projection s'accompagne de conditions techniques concernant la compatibilité des interprétations et ensembles initiaux (voir [34] pour les détails).

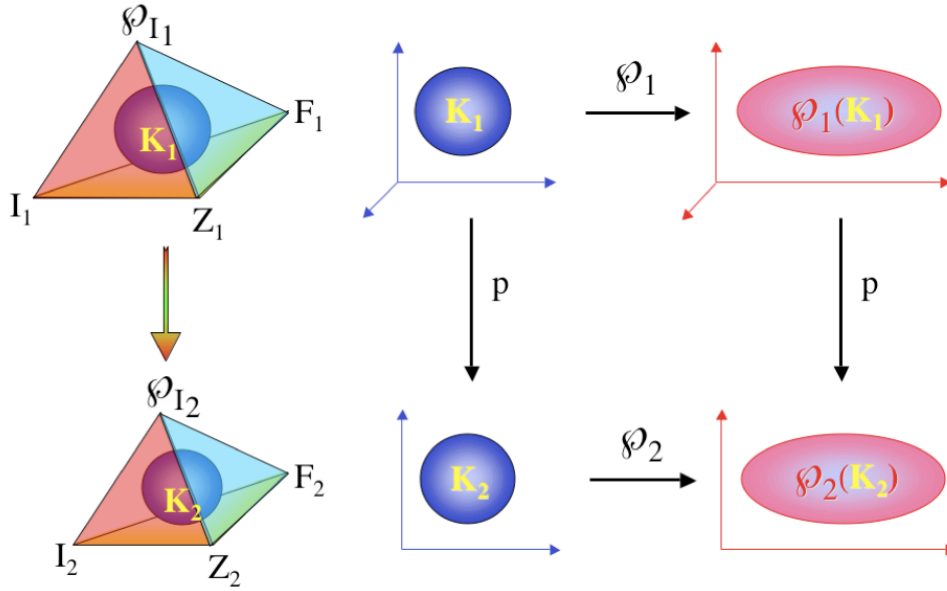


FIG. 19.2 – Un morphisme de cellules (gauche) induit automatiquement un morphisme des interprétations associées (droite).

19.2 Hiérarchies cellulaires

La catégorie *Cell* et le foncteur des interprétations associées fournissent un formalisme puissant pour la description de la configuration globale (hiérarchique) des champs interprétatifs. Cet outil sera indispensable pour la construction d'interprétations successivement raffinées à partir d'interprétations standard. Nous pouvons donc donner la définition formelle pour ces hiérarchies cellulaires : une *hiérarchie cellulaire* est un diagramme dans la catégorie *Cell*. Ceci nous permet de concevoir un « graphe de cellules interprétatives » qui décrit l'interdépendance des champs et des espaces. Sauf mention contraire, une telle hiérarchie aura toujours une cellule source, et dès que nous parlerons de la cellule d'une hiérarchie, nous ferons alors référence à la cellule source.

Nous considérons la hiérarchie du piano, qui constitue notre modèle standard. Ici, nous partons de trois champs fondamentaux, le tempo T sur E , l'intonation S sur H et l'intensité I sur L . Le champ parallèle ∂T est celui que nous avons décrit dans la section 18.2. La hiérarchie cellulaire du piano est montrée dans la figure 19.3.

En partant d'une telle hiérarchie modèle, nous allons donc chercher à déformer les champs de cellules déterminées de la hiérarchie pour bâtir des configurations artistiquement valables à partir de cette configuration s'apparentant au déchiffrement d'une pièce musicale.

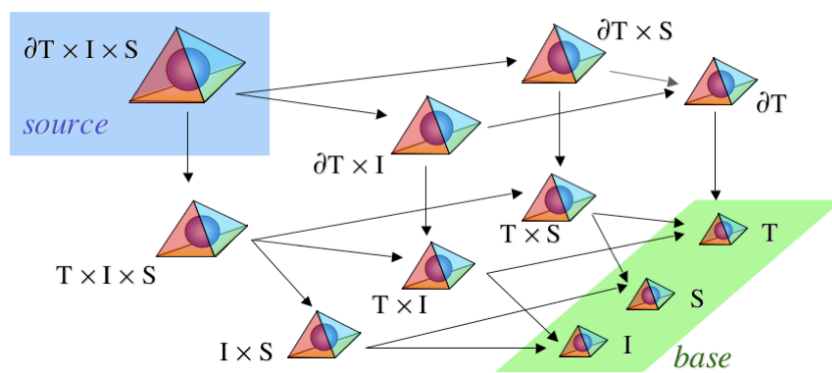


FIG. 19.3 – La hiérarchie du piano, basée sur le fondement des trois cellules pour les paramètres E, H et L , et dominée par la source dans l'espace des paramètres E, H, L et D .

Chapitre 20

La généalogie des hiérarchies interprétatives

*O matre pulchra filia pulchrior*¹.
Horace

20.1 La généalogie de l'articulation du tempo

La catégorie *Cell* des cellules interprétatives est parfaitement adaptée aux rôles spécifiques des paramètres, mais demeure statique quant à l'évolution de l'interprétation de la première version (« *prima vista* ») à la version envisagée. Pour comprendre ce problème, il est utile de le considérer sur le plan de l'évolution de l'agogique.

L'élaboration du tempo a une histoire bien étrange. Nous sommes d'accord sur le fait que l'agogique est extrêmement différenciée et montre de très fines variations locales [56]. Néanmoins, la théorie est loin d'être étayée de manière solide : si l'on consulte un traité récent sur l'interprétation tel que [18, vol. 11], la théorie explicite reste très faible. On y rencontre la discussion des travaux de Carl Czerny (!), montrant avec un petit exercice (voir figure 20.1) l'insuffisance de l'approche naïve de Czerny qui utilise des courbes de tempo trop inexpressives.

Czerny considère quatre courbes, dont trois que nous reconstruisîmes, avec un résultat décevant. Aucune de ces courbes ne démontre un effet satisfaisant ; ce n'est sûrement pas ce que font les pianistes pour donner à leur interprétation un air artistique. Le problème est qu'une seule courbe de tempo est insuffisante. Plus précisément, la pensée en courbes de tempo est ramifiée ; il n'est pas faux de commencer avec une courbe, mais celle-ci doit être soumise à des raffinements locaux. Et ces ramifications ne doivent pas toucher toutes les notes, mais seulement un sous-ensemble qui dépend localement d'autres notes. Par exemple, dans l'exercice de Czerny, nous tirons profit de deux processus : d'abord, nous découpons la partition en portions (cartes interprétatives) d'une mesure chacune. Ensuite, l'agogique de la main droite est soumise à celle de la main gauche. Mais ceci doit se faire à la manière de Chopin : on commence les deux mains ensemble pour la première attaque de la mesure. La main droite pourra alors varier son tempo local de sorte à se retrouver vers la fin de la mesure en synchronicité avec la main

¹Ô belle mère, fille encore plus belle.

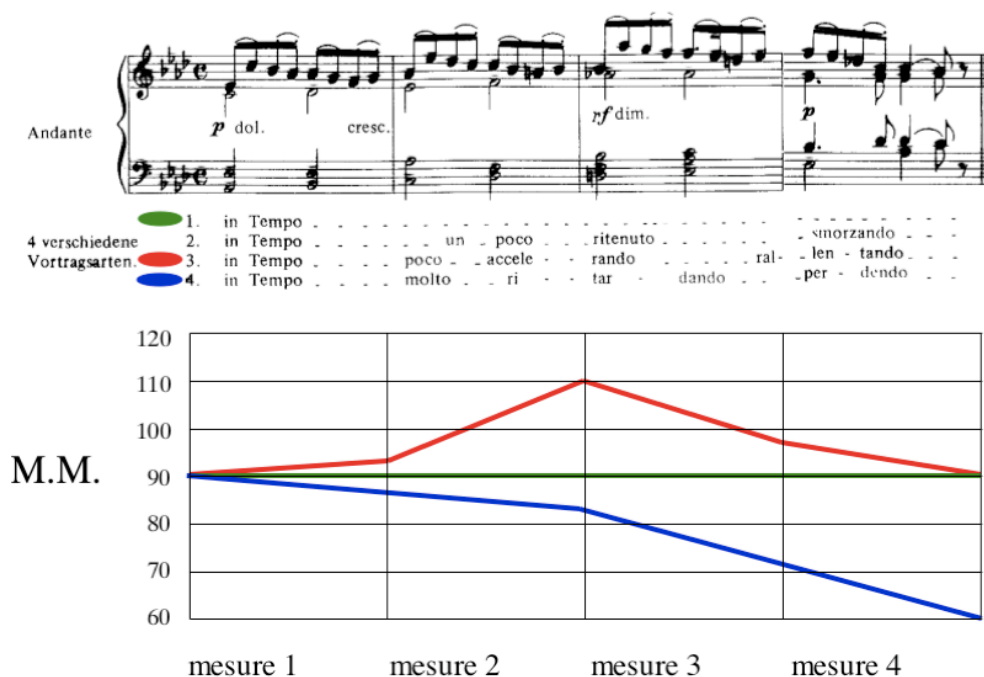


FIG. 20.1 – Trois courbes de tempo modélisées d’après les indications de Carl Czerny. Le résultat est décevant, aucune courbe n’étant capable de rendre compte de l’organisation agogique de la pièce.

gauche. Ces conditions furent réalisées avec succès par le logiciel *Presto* [32] en utilisant des algorithmes correspondants du module appelé *AgoLogic*. Un exemple plus complexe, concernant l’*Impromptu* op. 29 de Frédéric Chopin (figure 20.2), fut traité avec succès par cette méthode.



FIG. 20.2 – Une partie complexe de l’*Impromptu* op. 29 de Frédéric Chopin fut interprétée avec subtilité par la généalogie du tempo d’*AgoLogic*.

Quelle est l’idée principale derrière cet outil interprétatif? La ramification du tempo est avant tout une séparation logique d’un état global du tempo en une suite d’états locaux déduits du premier. Le tempo global est conservé pour la main gauche, mais la main droite subit une variation *relative* à la main gauche. Le tempo de la main gauche n’est pas joué par la main droite et joue le rôle de référence. Ce pointeur logique décrit donc une généalogie du tempo. Et en effet, si, dans le module *AgoLogic*, on varie le tempo global « maternel », alors les variations locales « filles » sont encore valables, mais relativement à la nouvelle « mère ». Le schéma de cette construction stémmtique est indiqué dans la figure 20.3. Le tempo de la « mamma » contient des variations locales

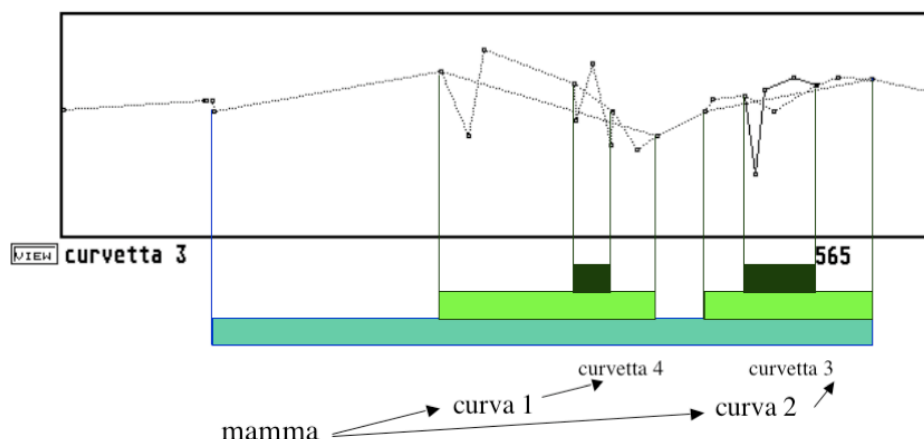


FIG. 20.3 – Le logiciel *Presto* contient le module AgoLogic qui permet la construction de systèmes ramifiés de courbes de tempo. Le tempo de la « mamma » contient des variations locales « curva 1 » et « curva 2 », qui sont encore fragmentées en sous-courbes « curvetta 4 » et « curvetta 3 ». L'attaque physique à la fin des variations locales (les filles) se synchronisent avec les courbes originaires (les mères).

« curva 1 » et « curva 2 », qui sont encore fragmentées en sous-courbes « curvetta 4 » et « curvetta 3 ». L'attaque physique à la fin des variations locales (les filles) se synchronisent avec les courbes originaires (les mères).

20.2 Le stemma : structure formelle de la généalogie interprétative

L'étude précédente basée sur le logiciel *Presto* était, dans les années 80, la seule réalisation de l'idée d'une généalogie de l'interprétation. Ce contexte restreint au seul tempo n'était pas suffisant pour une interprétation de tous les paramètres; même la durée qui alimente l'articulation musicale n'était pas maniable. L'intonation et la dynamique des notes individuelles n'étaient plus contrôlables.

Au temps de *Presto*, nous ne disposions pas encore de la structure d'une hiérarchie cellulaire. C'est ce concept qui a facilité la définition et la programmation du stemma interprétatif. Nous donnons maintenant la définition du stemma : *un stemma est essentiellement un graphe orienté dont les sommets sont des hiérarchies cellulaires*. Ces hiérarchies représentent les états de la généalogie d'une interprétation. Une flèche du graphe représente un *opérateur interprétatif* qui engendre, à partir de la hiérarchie à la queue de la flèche, la hiérarchie de sa pointe. Dans le langage de cette généalogie, les hiérarchies des sommets jouent le rôle de femmes, mères, filles, petites-filles, etc. qui engendrent leurs filles à l'aide des opérateurs qui, eux, jouent le rôle des hommes. Mais faisons attention : les enfants de cette lignée matrilineaire sont toujours des femmes.

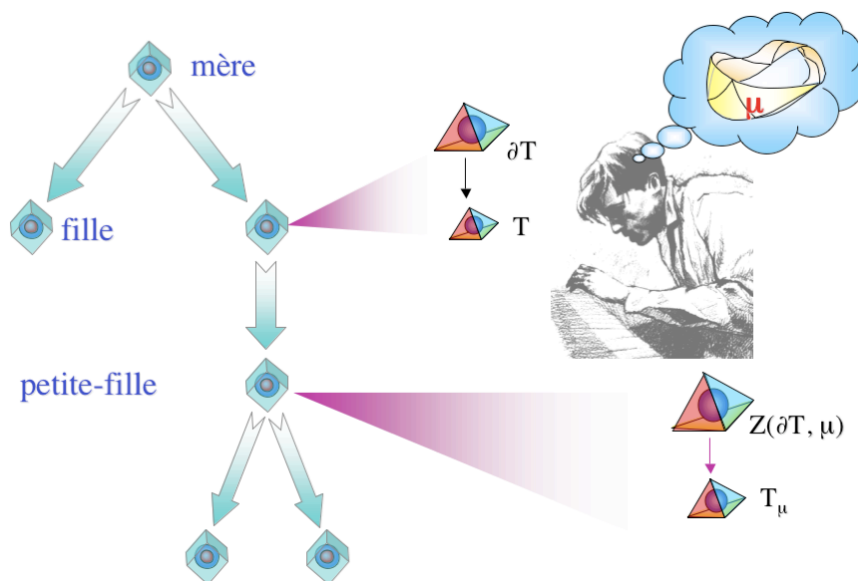


FIG. 20.4 – Dans un stemma, les hiérarchies des sommets (visualisées par des cubes contenant les noyaux symboliques ainsi que leurs images interprétées) jouent le rôle de femmes qui engendrent leurs filles à l’aide des opérateurs tenant le rôle des hommes. Les opérateurs formalisent la pensée analytique qui détermine l’affinement successif de l’interprétation.

Les feuilles de ces stemmata que l’on suppose acycliques (arbres non orientés) sont alors les parties de la composition qui vont être interprétées. Un stemma est supposé avoir une source unique, la composition originale que l’on va interpréter en suivant tout un parcours de ramifications généalogiques.

20.3 Premières remarques sur les opérateurs interprétatifs

Une première classification des opérateurs est faite selon la partie d’une cellule interprétative qui est affectée. On a ici trois orientations stratégiques :

1. Si l’opérateur change le noyau symbolique K , on parle d’un *opérateur symbolique*. Un tel opérateur peut par exemple créer des notes qui n’étaient pas explicitement données, telles les notes d’un trille qui ne sont décrites que par la note d’ancrage et le symbole de trille. Pour l’interprétation du trille, il faut bien sûr agir sur toute ses notes. Donc leur création par un opérateur, appelé *PrimaVistaOperator* dans *Rubato*, est obligatoire. Un autre opérateur symbolique est l’opérateur *SplitOperator* que nous discuterons plus bas dans la section 20.3.1.
2. Si l’opérateur agit sur l’image interprétée $\varphi(K)$ du noyau K , on parle d’un *opérateur physique*. Par exemple, si l’intensité de tous les sons est augmentée de 10 dB, ce qui se produit toujours avec les haut-parleurs, on opère de manière physique.

3. Si finalement l'opérateur agit sur le champ interprétatif de la cellule maternelle, l'application $\wp$ va changer, et donc aussi l'image $\wp(K)$. Un tel opérateur est appelé *opérateur de champ*. Par exemple, si le tempo de la cellule maternelle est ralenti de 10%, un tel opérateur agit sur le champ du tempo et fait également ralentir le résultat. Les opérateurs de champ sont les plus intéressants, mais leur classification est aussi la plus difficile.

20.3.1 Le « SplitOperator » : globalisation par cartes disjointes

Nous allons donner un résumé des opérateurs interprétatifs au cours du chapitre 22, mais il est déjà ici important de regarder un type d'opérateur particulièrement simple : l'opérateur qui sépare des parties et permet de passer à des recouvrements disjoints, i.e. des partitions ensemblistes² d'une composition donnée en parties de plus petite taille. Dans le logiciel *Rubato*, la *Rubette* (les modules de *Rubato* s'appellent *Rubettes*) pour l'interprétation s'appelle *SplitOperator*. Elle permet de définir un cube quelconque dans le cadre d'une cellule et de scinder la cellule en deux sous-cellules, une pour le noyau des tons à l'intérieur du cube, et l'autre pour le reste de notes. Cet opérateur engendre donc deux filles, et, par répétition de son action, une partition de filles, dont la réunion disjointe des parties est la mère de départ. Par exemple, on peut séparer des mesures ou alors la main gauche de la main droite, et ainsi définir des atlas de cartes disjointes, sur lesquelles on va faire agir des opérateurs spécialisés. Ce procédé engendre une troisième sorte de globalisation, celle par cartes. Elle permet de se concentrer sur des parties relativement petites, parfois que des trilles, ou accords, et d'y former des interprétations locales sophistiquées.

Ce n'est toutefois pas la situation générale des compositions globales : les cartes sont disjointes et uniquement définies par des cubes. Tandis que la dernière restriction n'a aucune conséquence gênante, le passage aux atlas ayant des cartes imbriquées pose des problèmes difficiles. Il faut alors appliquer des opérateurs d'interprétation avec les conditions aux limites (pour les intersections des cartes), i.e. il faut que les interprétations des notes communes à plusieurs cartes coïncident, etc.

20.3.2 La théorie expressive analytique

La théorie structurale ayant été esquissée, nous allons dans la suite discuter la théorie expressive, c'est-à-dire la question de savoir pourquoi et comment une hiérarchie donnée est créée. Comme nous nous limitons à l'expression analytique, il faut se poser la question de base qui consiste à savoir comment une analyse peut entrer dans l'interprétation.

Partons du point de vue naïf. Si l'instrumentiste doit interpréter une composition en utilisant des faits analytiques, il doit à un certain moment appliquer ces informations plus ou moins abstraites pour effectuer des mouvements différenciés de ses membres, des doigts, des bras, de la bouche, de la langue, etc. Dans le langage le plus explicite pour décrire des actions instrumentales, le MIDI, l'intensité est en fait appelée « velocity » car elle fait allusion à la vitesse du doigt qui frappe la touche du piano pour produire un son. Vue d'une perspective plus générale, toute analyse doit donc se transformer tôt ou tard en une quantité numérique capable de diriger lesdits mouvements physiques.

²Au sens mathématique du terme.

À cause de cette *conditio sine qua non* de quantification numérique concrète — sur laquelle, nous le rappelons, Adorno insistait également — nous sommes obligés de construire des analyses qui en dernière instance s’expriment par des valeurs numériques. Tous les modules de Rubato pour des tâches analytiques, telles que l’harmonie, le rythme ou les motifs mélodiques, sont donc construits de manière à ce que les résultats analytiques soient disponibles en forme numérique. Plus précisément, nous avons insisté pour que les résultats soient donnés en forme de poids. Un tel poids est une fonction $w : K \rightarrow \mathbb{R}$ sur le noyau symbolique à valeurs réelles non négatives (voir figure 20.5).

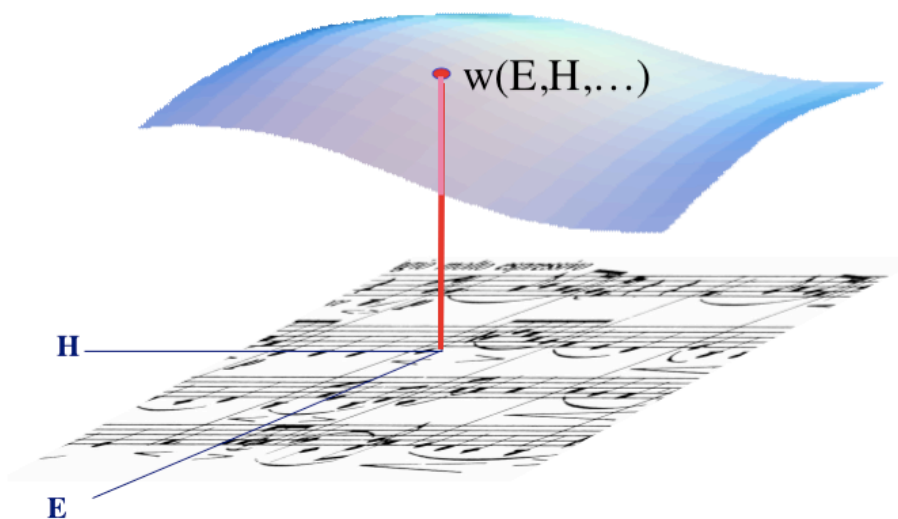


FIG. 20.5 – Les fonctions de poids w sont des pivots numériques entre l’analyse abstraite et la construction physique d’une interprétation.

Dans le prochain chapitre, nous allons discuter un module analytique de ce type, la *MetroRubette* de Rubato pour l’analyse rythmique, ainsi que son application à une analyse de la *Rêverie* de Robert Schumann.

La question de l’expressivité analytique sera reliée à l’application des poids analytiques aux opérateurs interprétatifs : un opérateur interprétatif devra donc spécifier comment des poids donnés influencent son action sur la cellule interprétative qu’il va « inséminer ».

Chapitre 21

Analyse rythmique de la « Rêverie » et les champs interprétatifs associés

*Was ihn aber mit voller Macht anzog,
war eine hohe lichtblaue Blume,
die zunächst an der Quelle stand
und ihn mit ihren breiten, glänzenden Blättern berührte¹.*
Novalis

21.1 L'analyse rythmique pour l'interprétation : théorie et implémentation

Ce chapitre est consacré à une analyse particulière, celle de la structure rythmique, ainsi qu'à la programmation de la théorie dans le module *MetroRubette* de *Rubato*. Cette analyse sera ensuite appliquée à la « Rêverie » de Robert Schumann. Nous discuterons dans le chapitre suivant les effets de cette analyse (en forme de poids analytiques) sur les opérateurs interprétatifs.

L'analyse rythmique est particulièrement intéressante pour notre approche d'autant plus qu'elle rejoint une idée musicologique évoquée par Hugo Riemann dans son traité du rythme [45], dans lequel il met en évidence le concept des poids. Nous avons donc une bonne motivation de réaliser, et même préciser, l'approche riemannienne. Pour ce faire, nous partons de la situation suivante : nous ne retenons que les attaques de l'ensemble K (le noyau de la cellule de source) des notes données, donc un sous-ensemble E_K fini de la droite $\mathbb{R}^E$. Cet ensemble est recouvert par *l'atlas métrique*, où les cartes sont les mètres locaux maximaux M dans E_K . Par définition, un mètre local M est un ensemble non vide d'attaques $M \subset E_K$ qui sont régulièrement distribuées, i.e. il existe une attaque x , un nombre positif réel d et un nombre non négatif l de telle sorte

¹Ce qui l'attirait de toute force, était une grande fleur de couleur bleue clair, qui se trouvait à la source, et qui le touchait de ses feuilles larges et brillantes.

que $M = \{x, x + d, x + 2d, \dots, x + ld\}$. Le nombre l est appelé *la longueur de M* et sera noté par $l(M)$. On prend donc comme cartes les mètres locaux maximaux (non contenus proprement dans d'autres mètres locaux dans E_K). On note cet atlas par E_K^{Mt} . Un premier exemple est montré dans la figure 21.1. Il y a cinq mètres locaux maximaux, a, b, c, d, e, respectivement de longueurs 3, 2, 2, 2, 2.

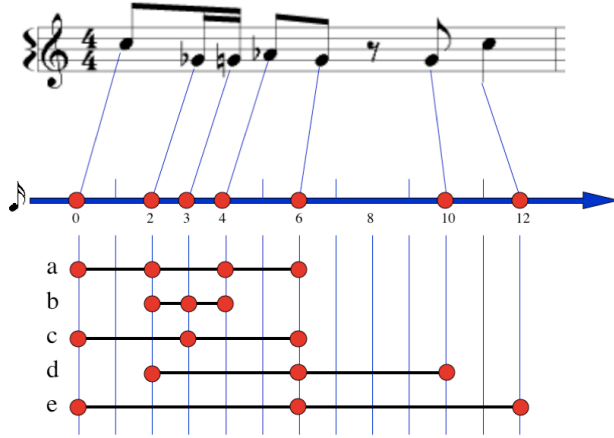


FIG. 21.1 – L’atlas des mètres locaux maximaux de l’extrait musical contient cinq cartes, a, b, c, d, e, respectivement de longueurs 3, 2, 2, 2, 2.

Cette conceptualisation est conforme aux idées de Riemann, qui ne considère que des attaques de notes données et exclut les attaques fictives. Par exemple, l’attaque d’une barre de mesure ne serait pas incluse si aucune note n’existait au début de cette mesure. Cela diffère considérablement de l’approche de Fred Lerdahl et Ray Jackendoff [26] qui imposent un régime formel et normatif à la structure métrique sans considération de la différence entre note existante et attaque fictive.

Musicalement, l’appartenance de l’attaque d’une note à un mètre local indique que cette note est insérée dans une suite de notes dont les attaques se succèdent dans un intervalle temporel donné. La note participe donc à une structure temporelle régulière, la longueur indiquant les répétitions de cette régularité. Bien que le concept de mètre local soit très élémentaire, le recouvrement E_K^{Mt} de l’atlas métrique est très complexe. Nous pouvons préciser et visualiser cette configuration par le nerf du recouvrement². Pour ce faire, nous représentons les cartes comme des points dans l’espace. Si deux cartes ont une intersection non vide, on dessine un trait (appelé simplexe de dimension 1) ; si trois cartes ont une intersection non vide, on dessine le triangle limité par ces points (appelé simplexe de dimension 2) ; si quatre cartes ont une intersection non-vide, on dessine un tétraèdre défini par ces quatre points (appelé simplexe de dimension 3), etc. pour toutes les intersections non vides de 5, 6... cartes. Nous ne pouvons le représenter par des figures, mais mathématiquement, ceci prend son sens dans des dimensions d’ordre plus élevé.

²Pour l’utilisation du nerf du recouvrement dans l’analyse harmonique, voir la section 8.1.2.

Notons qu'ici, comme nous l'avons déjà effectué pour le ruban harmonique, nous construisons des objets géométriques qui visualisent des faits logiques !

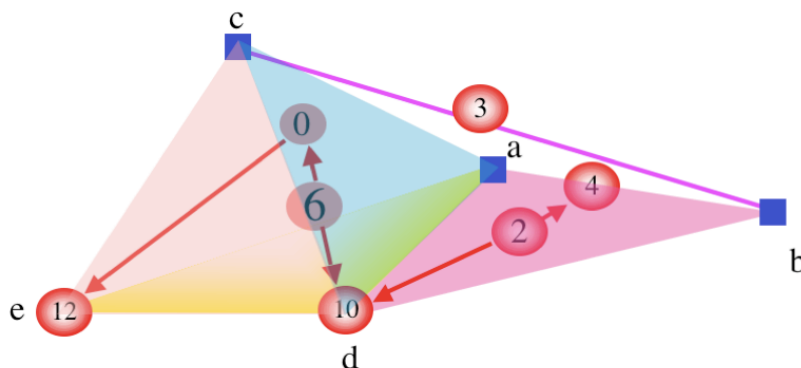


FIG. 21.2 – Le nerf de notre exemple contient un tétraèdre avec les sommets a, c, d, e, un triangle avec les arêtes a, b, d, et une droite avec les sommets b, c.

Le nerf peut être alors utilisé pour montrer où une attaque d'une note particulière se situe, i.e. dans quels mètres locaux cette attaque est contenue. Plus le nombre de mètres locaux dans lesquels est présente l'attaque d'une note est important, plus cette note a une importance métrique majeure. Cette idée est effectivement soutenue par des concepts de topologie, que nous n'allons pas préciser ici. La figure 21.2 montre le nerf pour notre exemple, ainsi que les relations de dominance parmi les notes de l'exemple. La note d'attaque 6 est au centre du tétraèdre et domine les notes 0, 10 et 12.

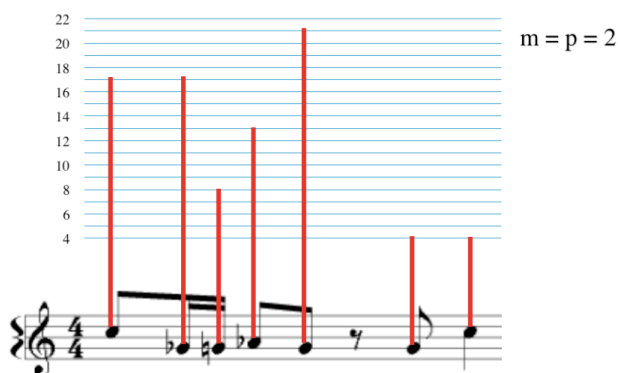


FIG. 21.3 – Le poids métrique pour le passage musical de notre exemple.

Nous pouvons donc prendre ce modèle d'analyse métrique comme exemple d'une analyse qui cependant n'est pas encore sous forme de poids analytique. La représentation topologique est encore trop abstraite, bien qu'elle soit précise. Un poids analytique se fait comme suit :

nous nous plaçons sur une note x et nous nous demandons quel pourrait être son poids. Or, ce poids doit être fonction des mètres locaux maximaux qui contiennent son attaque E_x , de leur longueur, et de la manière dont nous nous servons pour peser cette note. On peut, par exemple, choisir un exposant p réel et une borne inférieure m et définir le poids de la composition K par

$$poids_K(x) = \sum_{E_x \in z, m \leq l(z)} l(z)^p$$

où l'on effectue une somme sur tous les mètres locaux maximaux. La figure 21.3 montre le poids pour $p = m = 2$. C'est ce que nous avons programmé dans le module *MetroRubette* (p et m étant des variables). La fonction de poids peut fournir une définition du rythme. Un poids est en effet une pulsation le long du temps, qui peut être décomposé en micropulsations des mètres locaux comme superposition pondérée. Bien que cette définition s'éloigne des descriptions habituelles qui se placent au niveau psychologique, elle est précise, non circulaire, et constitue une approche peu suivie dans les théories du rythme.

Analyse créatrice et interprétation

Nous avons discuté l'idée boulézienne de l'analyse créatrice qui se réfère à la composition : une analyse non stérile peut avoir une fonction prospective en vue de son application compositionnelle. Dans notre contexte interprétatif, il faut cependant se demander pourquoi le profit de l'analyse devrait se limiter à la création d'œuvres. Nous proposons ici d'étendre le potentiel de fertilité d'une analyse à l'interprétation. Ceci n'est rien d'autre que l'idée originale d'Adorno : concevoir une interprétation analytique. L'analyse sert à former l'expressivité du jeu instrumental.

Or la perspective boulézienne s'appuie sur un critère inhabituel pour la qualité d'une analyse : la fécondité. Chez Boulez, une analyse n'est pas jugée par sa qualité autonome d'effort intellectuel abstrait, mais elle est validée selon son potentiel de créativité compositionnelle. Si nous maintenons par analogie que la qualité d'une analyse se mesure à ses implications pour l'interprétation, la thèse boulézienne prend un aspect remarquable : joue-moi la musique et je jugerai de la qualité de ton analyse !

Cette attitude relativise complètement l'analyse et la met au service de la composition et de l'interprétation. Par conséquent, outre la qualité intrinsèque de formalisation intellectuelle que possède traditionnellement l'analyse, celle-ci gagne une signification externe qui serait en réalité un critère expérimental : à partir de l'expérience compositionnelle ou interprétative, nous jugerons la qualité musicale de l'œuvre. C'est là une direction de pensée de la musique qui cherche à recouvrir le contenu de la réflexion intellectuelle à l'intérieur de la musique même. Une vraie preuve d'une réflexion musicale doit terminer par et dans la musique même. En ce sens, notre théorie de l'interprétation est adaptée pour rendre compte de l'approche boulézienne de l'analyse créatrice. Il y a toutefois une différence remarquable : la théorie de l'interprétation et son application en informatique sont beaucoup plus évoluées que les théories compositionnelles. Il nous semble important de réaliser un tel projet : mettre en place la théorie et la programmation informatique pour la composition analytique.

21.2 Application : une analyse de la « Rêverie » de Robert Schumann

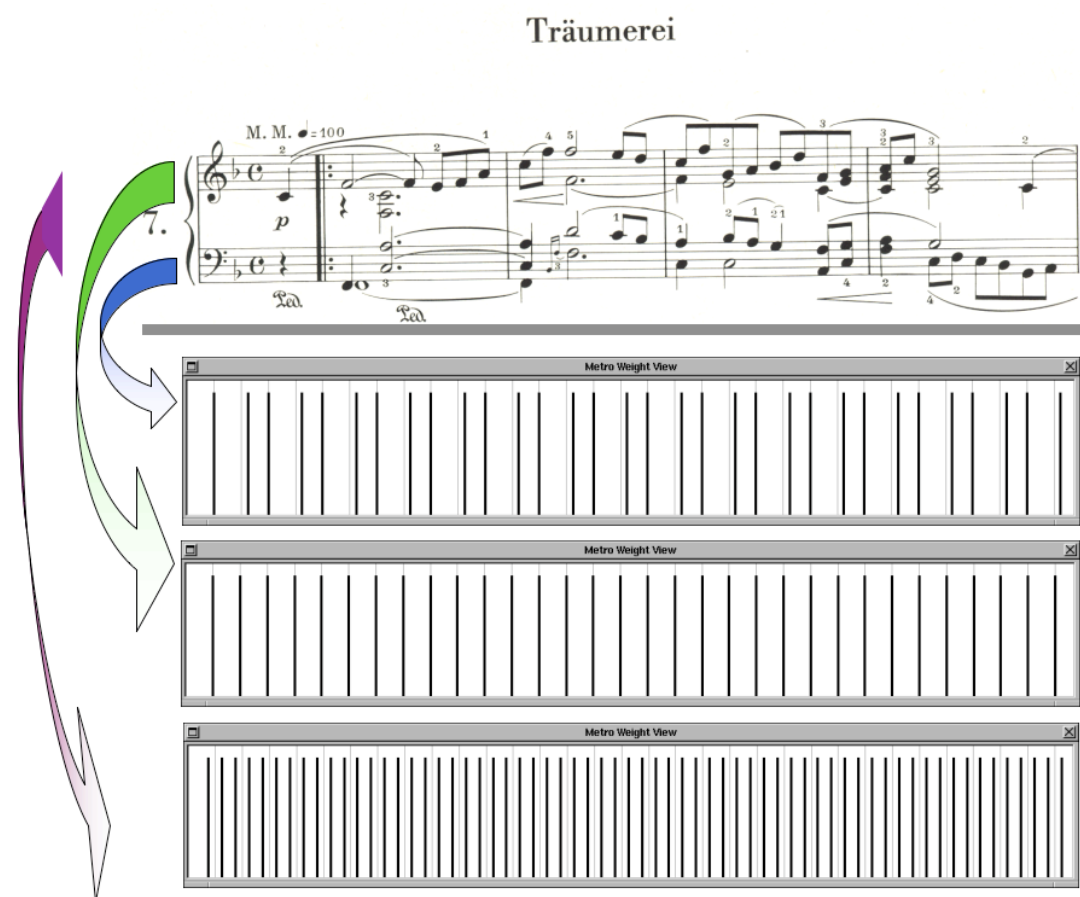


FIG. 21.4 – Les poids métriques de la « Rêverie », les limites m pour les longueurs minimales des mètres locaux étant prises aussi grandes que possible. La main gauche montre une structure de 5 + 3 noires, en contraste avec la structure régulière 4 + 4 de la main droite.

Pour illustrer l'analyse par poids métriques qui est fournie par le module *MetroRubette* de *Rubato*, nous considérons la « Rêverie » n°7 de l'op. 15 *Scènes d'enfants* de Robert Schumann. C'est là une pièce très connue pour son caractère romantique. L'agogique de cette pièce, telle qu'elle est jouée par les grands interprètes (Argerich, Horowitz, Pollini, etc.³ est un des mystères de la composition. Tout d'abord la pulsation admise pour l'interprétation n'est jamais 100 noires par minute mais une pulsation bien plus lente. En second lieu, l'agogique tracée dans la courbe

³Voir [9] pour une analyse de 28 interprétations célèbres.

de tempo de ces interprétations est très variée, les *rallentandi* locaux sont remarquables, voire maniérés, soulignant le caractère romantique de la pièce. On sait que ces variations du tempo très lent ne sont pas uniquement une manifestation du romantisme de la pièce : elles sont aussi des conséquences d'une tension entre main gauche et main droite.

Avec l'analyse métrique, nous pouvons rendre compte précisément de cette tension (figure 21.4). Pour cela, on prend la partie G de la main gauche de la composition et la partie D de la main droite. On regarde alors le poids $poids_G$ pour m maximal de sorte qu'il y ait des mètres locaux de cette longueur. On pose $p = 2$ dans cet exemple. On agit de même pour le poids $poids_D$ de la main droite ainsi que pour le poids $poids_{G \cup D}$ de la composition complète. Dans la figure 21.4, on voit de haut en bas $poids_G$, $poids_D$ et $poids_{G \cup D}$. Le fait étonnant est que

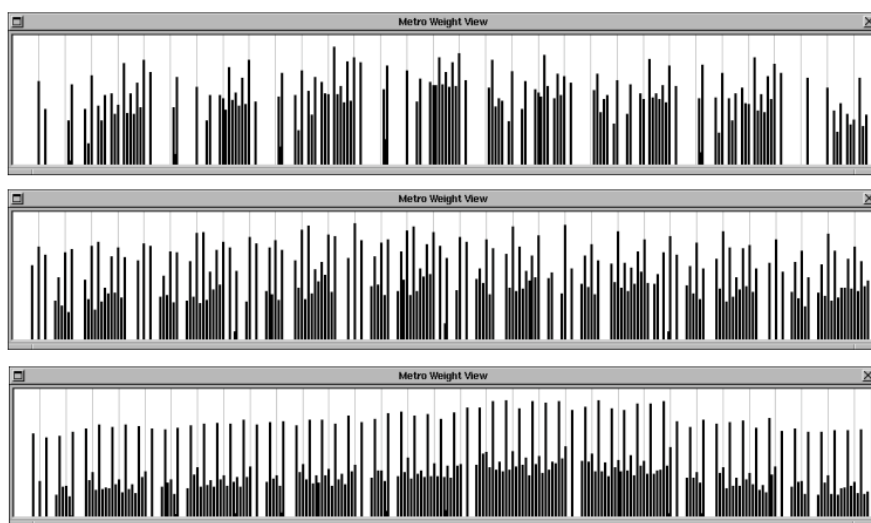


FIG. 21.5 – Les poids métriques de la « Rêverie », avec la borne inférieure $m = 2$ pour les longueurs minimales des mètres locaux.

pour la main gauche on reconnaît une structure de $5 + 3$ noires, en contraste avec la structure régulière $4 + 4$ de la main droite. Le poids total $poids_{G \cup D}$ montre une structure $2 + 2 + 2 + 2$ ancrée au milieu de la mesure (off beat). La main gauche joue donc une période de $5/4$, suivie d'une période de $3/4$, ce qui crée une contradiction locale avec la structure régulière de $4/4$ pour la main droite. Cette contradiction crée de fortes tensions rythmiques entre les deux mains. Il s'agit là sûrement d'un argument pour l'agogique variée et la lenteur des interprétations, car la tension doit être exprimée dans l'interdépendance temporelle des voix qui provoque donc le ralentissement et la variation du tempo.

Pour montrer la présence de ces structures rythmiques globales dans la pièce, on peut prendre le même exposant $p = 2$, mais cette fois descendre à la longueur minimale $m = 2$ pour les mètres locaux maximaux. Le résultat est montré sur la figure 21.5. Bien qu'un nombre de poids supplémentaires apparaisse, on reconnaît toujours les structures $5 + 3$, $4 + 4$ et $2 + 2 + 2 + 2$.

Fonctions supplémentaires pour les poids discrets

Souvent, pour les opérateurs interprétatifs, il ne suffit pas d’avoir des poids discrets $poids_K : K \rightarrow \mathbb{R}$ définis sur l’ensemble fini K de la composition musicale donnée. Il faudrait aussi disposer de valeurs du poids pour des valeurs « intermédiaires ». On voudrait typiquement construire une fonction $Poids : C \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un cube C contenant K , satisfaisant un certain nombre de conditions de continuité, etc. On connaît toute une gamme de fonctions splines qui étendent les $poids_K$ de manière spécifique, en recollant des fonctions polynomiales par exemple. Dans la suite, nous supposerons tacitement que les poids sont étendus par des fonctions splines sur des cubes $K \subset C^4$.

⁴Pour les détails techniques, voir [34].

Chapitre 22

Opérateurs interprétatifs

*If I chance to talk a little wild, forgive me ;
I had it from my father¹.
William Shakespeare, Henry VIII*

22.1 La fonction des opérateurs analytiques

En vue de la stratégie générale de l'interprétation analytique, les opérateurs interprétatifs permettent de passer d'une analyse (en forme de poids) à son action sur la hiérarchie cellulaire d'un sommet du stemma. Pour cela il faut se rappeler qu'un poids analytique est une entité purement symbolique. Sa forme numérique ne doit pas suggérer que c'est une fonction à valeurs dans un espace de paramètres physiques. Néanmoins, la forme intuitive des poids est une information précieuse pour orienter les actions des opérateurs. Nous allons donc nous en servir, mais avec prudence quant à la sémantique des poids.

Essentiellement, un opérateur analytique a deux arguments : une hiérarchie cellulaire ainsi qu'un nombre de poids interprétatifs. Le problème principal dans la construction des opérateurs est qu'ils ne devraient pas dépendre uniquement de la hiérarchie cellulaire, c'est-à-dire qu'ils devraient fonctionner de manière générique. On ne veut pas qu'un opérateur ne puisse agir que sur des hiérarchies très spéciales, mais on aimerait qu'il exprime une pensée générale. C'est là une condition assez profonde. La première raison est que la musicologie et la pratique musicale ne fournissent aucune idée pour définir des opérateurs non triviaux. La seconde raison est que les hiérarchies cellulaires sont des objets très complexes dont la « réaction » vis-à-vis d'un opérateur et son poids est difficile à décrire, car elle dépend d'un grand nombre de constituants.

Mais pour quelle raison voulons-nous avoir ces opérateurs de puissance générique ? L'idée sous-jacente est que l'expressivité doit véhiculer une pensée générale qui peut subsister pour des données spécifiques différentes. L'intérêt d'une interprétation ne peut pas résider dans des opérations que l'on ne pourrait plus reconnaître lorsque le matériau auquel elles sont appliquées varie légèrement. Nous voulons des opérations qui suivent une idée générale car nous cherchons le général dans le concret et non pas ce qui est dénué de toute universalité. Cette approche

¹S'il m'arrive de parler sans manière, pardonnez-moi ; Je tiens cela de mon père.

correspond à notre credo, déjà prononcé au cours du chapitre 1, que la « bonne » musique, si concrète qu'elle soit, est toujours un pointeur vers l'universel. Nous dirons même *qu'une idée d'un opérateur n'est pas comprise lorsqu'elle ne peut pas être réalisée pour des hiérarchies de cellules générales.*

Dans ce chapitre, nous développons une première approche de la théorie des opérateurs interprétatifs, approche qui sera nécessairement technique.

22.2 Opérateurs de temps

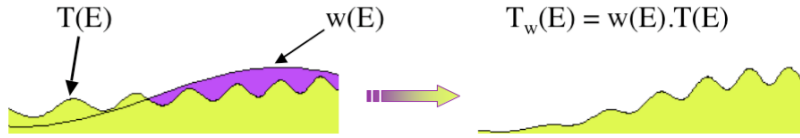


FIG. 22.1 – L'opérateur temps pour un poids w et pour la courbe T .

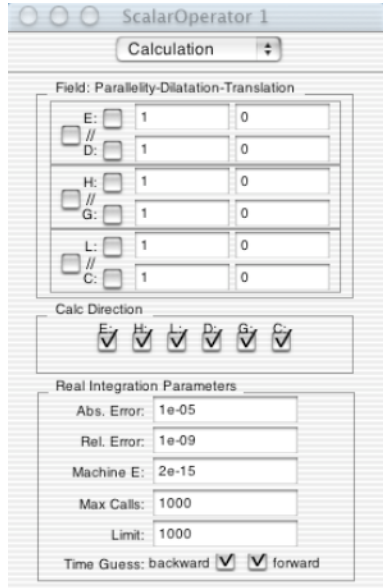


FIG. 22.2 – L'opérateur scalaire pour les couples parallèles ED , HG et LC .

Mais cela se réécrit par

Pour concrétiser les principes de la section précédente, nous voulons commencer par la discussion des opérateurs du temps. D'abord, nous supposons donnée une courbe de temps T sur l'espace $\mathbb{R}^E$ des attaques. Dans le cas exemplaire, discuté dans la section 18.2, le temps est la projection du champ d'articulation parallèle ∂T sur $\mathbb{R}^{ED}$. Essayons de construire un opérateur sur cette hiérarchie $\partial T \rightarrow T$. Pour ce faire, nous supposons donné un poids w , fonction des attaques E . On peut alors altérer la hiérarchie par le poids en posant $T_w(E) = w(E) \cdot T(E)$ (voir figure 22.1). On peut alors considérer le champ parallèle ∂T_w et donc la hiérarchie correspondante $\partial T_w \rightarrow T_w$. Mais que fait-on si la hiérarchie d'articulation sur la projection $\mathbb{R}^{ED} \rightarrow \mathbb{R}^E$ est plus générale? Cela correspond par exemple au cas $Z \rightarrow T$ sur T , avec composante $Z_E = T$ et Z_D . Comment transporter l'altération T_w de T à Z ? On réécrit la formule du champ parallèle comme suit : On avait

$$(T(E), \partial T_D(E)) = (T(E), 2T(E + D) - T(E))$$

et donc

$$(T_w(E), \partial(T_w)_D(E)) = (w(E) \cdot T(E), 2w(E + D) \cdot T(E + D) - w(E) \cdot T(E)).$$

$$(T_w(E), \partial(T_w)_D(E)) = (T_w(E), w(E + D) \cdot \partial T_D(E) + (w(E + D) - w(E)) \cdot T(E)).$$

Cette dernière formule généralise le cas du champ parallèle si l'on remplace le champ parallèle ∂T par Z , i.e. on a la formule $Z_w = Q_w \cdot Z$ pour la fonction matricielle

$$Q_w(E, D) = \begin{pmatrix} w(E) & 0 \\ w(E + D) - w(E) & w(E + D) \end{pmatrix}.$$

Mathématiquement, on a une action linéaire Q_w sur le fibré tangent de $\mathbb{R}^{ED}$, donc un objet classique en géométrie classique. Cet opérateur fut programmé pour les couples parallèles ED , HG et LC et d'autres généralisations dans le module *PerformanceRubette* de *Rubato* sous le nom *ScalarOperator* (voir figure 22.2).

22.3 Opérateurs de Lie

L'ensemble total des opérateurs de champs est probablement difficile à classifier. Jusqu'à présent, il n'est d'ailleurs pas possible de donner une liste exhaustive des opérateurs qui joueraient, dans la pratique, un rôle important pour l'interprétation. Donc la classification des opérateurs est loin d'être résolue et il s'agit un des problèmes clés de la théorie mathématique de l'interprétation.

Il est tout de même remarquable qu'un nombre important de cas puisse être décrit par une technique classique de la géométrie différentielle : la dérivée de Lie. Nous ne pouvons pas donner des démonstrations ici, mais renvoyons le lecteur à [34, ch. 39.7]. Le fait est cependant assez facile à décrire. On se donne un champ ψ sur un espace W d'une hiérarchie cellulaire. On se donne de plus un poids Λ sur un sous-espace U de W qui est aussi un membre de la hiérarchie. On se donne finalement une transformation affine $Dir : W \rightarrow W$. Alors, on définit un opérateur sur ψ par la formule

$$\psi_{\Lambda, dir} = \psi - L_{\psi_U} \Lambda \cdot Dir$$

où $L_{\psi_U} \Lambda$ désigne la dérivée de Lie de Λ le long du champ ψ_U sur U . Avec ce type d'opérateur, on peut décrire les déformations de hiérarchies comme elles sont visualisées dans la figure 22.3.

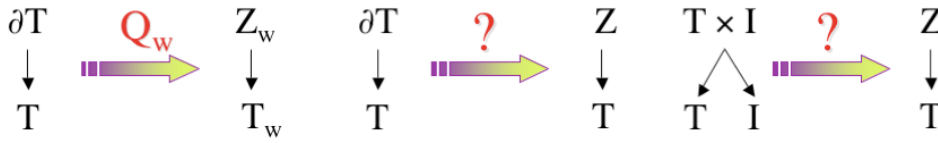


FIG. 22.3 – Trois types de déformations de hiérarchies qui peuvent être décrites par un opérateur de type Lie.

Outre la classification mathématique, la signification musicale de tels opérateurs est encore très mal comprise en dépit d'expériences menées pour l'interprétation analytique. Il faut surtout mentionner l'habilitation de recherche de Joachim Stange-Elbe [53] qui a appliqué ces outils de *Rubato* pour des interprétations très convaincantes de parties de *l'Art de la Fugue* de Johann Sebastian Bach. Le stemma d'une interprétation réalisée par Stange-Elbe est montré dans la figure 22.4.

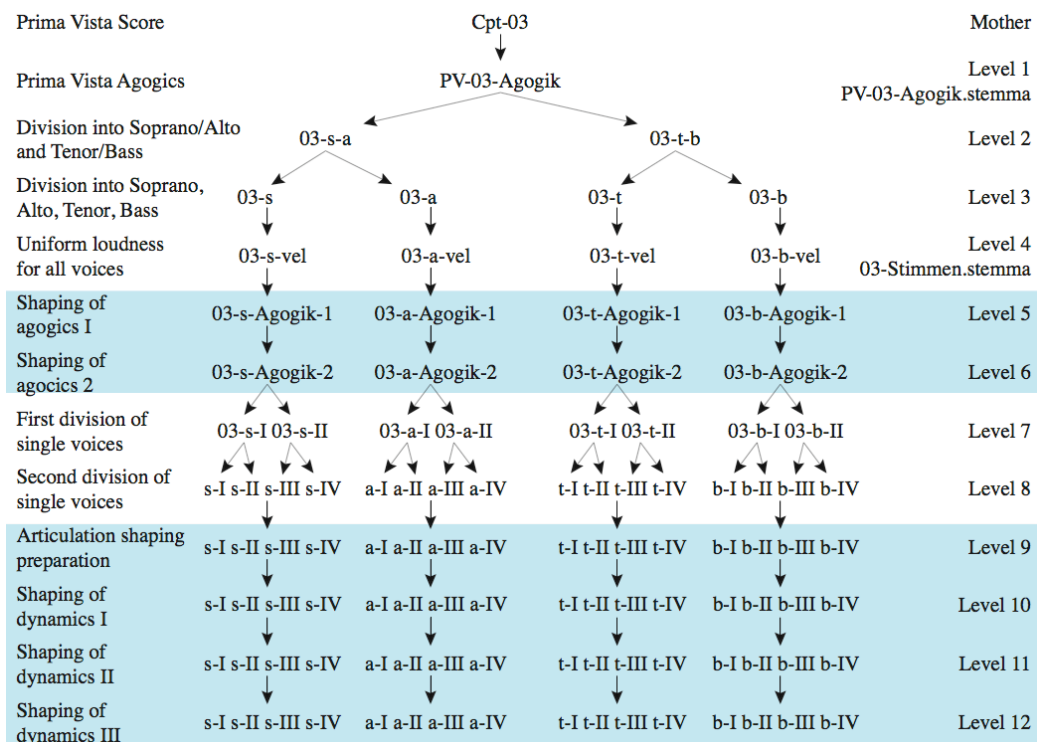


FIG. 22.4 – Le stemma d’une interprétation réalisée par Stange-Elbe. L’exemple se réfère au « Contrapunctus III » de *l’Art de la Fugue* de Johann Sebastian Bach.

Chapitre 23

La science expérimentale de l'interprétation

The most rigorous test of the efficiency of theories in modern cognitive science is the production of a working computer program whose external behaviour mimics that to be explained¹.
John Sloboda.

23.1 Nécessité et précision des logiciels

L'exigence adornienne d'une interprétation analytique est aussi ambitieuse que difficile à réaliser par un interprète humain. Les émotions, les gestes et les facteurs analytiques d'un musicien seront toujours en interaction commune lors d'une interprétation. Nous ne pouvons pas séparer ces contributions et encore moins en éliminer une au détriment des deux autres. C'est pourquoi la recherche scientifique de l'interprétation analytique ne peut se faire qu'à l'aide de l'informatique et d'une synthèse de cette vision de l'interprétation.

Cependant, au-delà de l'inséparabilité des trois composantes en jeu pendant l'interprétation, subsiste également le problème de la précision. Il s'agit là d'une précision mathématique qu'il faut développer. Nous avons appris qu'une légère variation des paramètres peut avoir des effets considérables. Par exemple, nous avons appliqué dans la « Rêverie » un poids mélodique w à l'agogique par l'intermédiaire de l'opérateur du tempo s'appuyant sur la formule $T_w = (w_{max} + w_{min} - w) \cdot T$, où w_{max}, w_{min} sont les valeurs maximum et minimum de w . On a donc obtenu des rallentandi pour les maxima de w , et on a pu par cette méthode exprimer l'importance d'un moment mélodique par l'agogique. Si ce procédé paraît correct, il échoue totalement en pratique car le ralentissement paraît trop scolaire et affecté, tout comme un plat dont le goût serait trop marqué par la présence d'une épice particulière. La comparaison avec l'art culinaire

¹Le plus rigoureux test de l'efficacité d'une théorie en sciences cognitives modernes est la production d'un programme informatique fonctionnel dont le comportement externe reproduit ce qui doit être expliqué.

est absolument opportune, car la finesse du dosage influe sur la qualité, et cette finesse est après tout une qualité d'ordre mathématique (cette finesse est de l'ordre du milligramme en cuisine).

Mais de telles subtilités ne peuvent être l'objet d'une investigation scientifique si elles doivent être réalisées par des musiciens humains. En effet, il n'est pas possible de demander à un musicien de ralentir d'un côté le tempo de 5% pendant la deuxième noire de la mesure 32, et d'augmenter simultanément l'intensité de 3,5%, et cela seulement pour une note en particulier d'un accord par exemple. Au-delà de ce problème de précision volontaire, un autre problème est que toutes ces petites commandes et leur changement au cours d'une expérience doivent être mémorisées. Et finalement, aucun musicien n'aurait la patience d'assimiler ces détails pendant toute une session scientifique.

Le bilan est qu'une science de l'interprétation doit nécessairement recourir aux logiciels aussi bien pour avoir une objectivité et une précision dans l'analyse que pour pouvoir simuler et répéter des configurations expérimentales. Je dis « expérimentales » car une telle science est nécessairement expérimentale. Nous ne connaissons pas l'interprétation analytique et il faut en repérer les caractéristiques et les difficultés tout en essayant de la créer. Nous sommes en plein temps planckien, et il faut comprendre les conséquences de ces approches. Si l'on veut faire sortir les idées adorniennes du domaine de la spéculation, nous avons besoin d'outils expérimentaux, i.e. les ordinateurs.

23.2 La leçon des premières expériences

Les résultats de la recherche exposée dans le mémoire d'habilitation à diriger des recherches (HDR) produit par Stange-Elbe [53] furent d'un grand intérêt quant au rôle de l'utilisateur du module *PerformanceRubette*. On a en effet une grande liberté dans le choix des opérateurs et des poids. L'individualité du choix humain permet de choisir parmi tous les paramètres du système qui est inscrit dans une interprétation synthétique. Dans ce sens, l'utilisateur de la *PerformanceRubette* est un instrumentiste, mais sur un plan stratégique plus élevé.

Le choix des paramètres et des opérateurs est aussi guidé par l'idéal de l'interprétation de la pièce donnée que le musicien a en tête. L'expérience de Stange-Elbe fut la suivante : en premier lieu, il essaya de produire une interprétation de *l'Art de la Fugue* de Johann Sebastian Bach qui ressemblait à l'interprétation de Glenn Gould de 1962 à l'orgue. Evidemment, la logique de cet essai fut que Gould interprétait de manière analytique, ce qui n'est pas clair du tout, surtout si l'on connaît sa gestuelle très prononcée. Et même si elle était analytique, ses données analytiques à lui pourraient différer considérablement des nôtres. Le résultat fut décevant et Stange-Elbe quitta cette piste et se lança dans une entreprise beaucoup plus prometteuse : l'interprétation qui ne cherche pas à imiter, mais à exprimer les poids analytiques sans aucune référence aux interprétations préalables.

Stange-Elbe appelle cette deuxième approche « expérimentale » car nous ne pouvons pas prévoir le résultat et nous nous appuyons donc exclusivement sur le choix des opérateurs et des effets des poids analytiques. Du point de vue adornien, c'est le seul chemin à choisir si l'on veut éviter une simple imitation. Ces travaux ont donné lieu à une interprétation très convaincante reconnue dans plusieurs conférences pour sa clarté et sa rigueur.

23.3 Théorie inverse de l'interprétation

Une théorie expérimentale de l'interprétation ne peut pas se restreindre à la construction d'interprétations comme nous l'avons fait avec le logiciel *Rubato*. Il faut aussi explorer des interprétations existantes et les valoriser au sein de la théorie de l'interprétation.

Avant de discuter les approches concrètes, il faut positionner cette tâche dans l'architecture de la théorie. Rappelons que la théorie que nous venons de présenter est basée sur un modèle bien précis de l'interprétation : on la décrit par un stemma dont les sommets sont des hiérarchies cellulaires, tandis que les flèches représentent les opérateurs interprétatifs. Si l'on veut étudier une interprétation existante, il faut donc considérer un stemma et en extraire les feuilles du graphe stématique, où l'on trouve les parties avec les interprétations finales.

Ceci implique qu'ici *le problème fondamental consiste en la reconstruction d'un stemma qui pourrait donner lieu à une interprétation donnée*. C'est pour cette raison que cette partie de la théorie s'appelle *théorie inverse de l'interprétation*.

Nous avons poursuivi deux chemins dans la théorie inverse : le chemin statistique, en collaboration avec Jan Beran [8], et le chemin algébro-géométrique, en collaboration avec Roberto Ferretti [21]. En vérité ces deux approches furent guidées par un seul paradigme, et c'est ce paradigme que nous allons exposer dans la suite.

23.3.1 Vers une théorie mathématique de la critique ?

Avant de nous plonger dans les détails techniques, nous voudrions mentionner un aspect quelque peu « hasardeux » de la théorie inverse de l'interprétation. Quelle est la signification de la reconstruction d'un stemma à partir d'une interprétation donnée ? On reconstruit par le stemma l'histoire qui a mené l'interprète à la musique interprétée. On construit un possible chemin de l'évolution de la partition initiale moyennant un certain nombre d'opérateurs et de poids. Mais ceci veut dire que l'on construit un scénario des pensées et des stratégies de l'interprète qui le conduisent à la musique qu'il nous présente. Avec une telle construction, ce théâtre devient l'objet de nos jugements : on peut alors décider de la qualité du théâtre. Le musicien a-t-il utilisé une analyse sophistiquée ou une analyse de qualité moindre ? Et a-t-il exprimé cette analyse par des méthodes effectives, ou, au contraire, par de fausses méthodes ?

Cette activité de jugement d'un théâtre stématique derrière une interprétation est précisément ce que font les critiques. Ils écoutent la musique dans un concert, connaissent (plus ou moins) la partition et, parfois, son analyse. Ils comparent alors l'interprétation avec ces données. Ils recherchent s'il y a concordance ou non de l'interprétation par rapport à ces informations d'arrière-plan.

Le problème des critiques est que leurs critères sont souvent soit cachés, soit inexistants au-delà du jugement purement personnel et instantané. Notre approche de la reconstruction du scénario des réflexions et des stratégies de l'interprète est une contribution à la compréhension de la variété des possibles solutions du problème des critiques. Cela n'est évidemment pas une invitation à un nouveau « style mathématique de critique », mais nous voudrions ouvrir la conscience au problème de la variété stématique derrière une interprétation et à la responsabilité du critique vis-à-vis du musicien dont les stratégies sont souvent plus variées que l'on ne l'imagine.

23.3.2 Un paradigme stématique de la théorie inverse

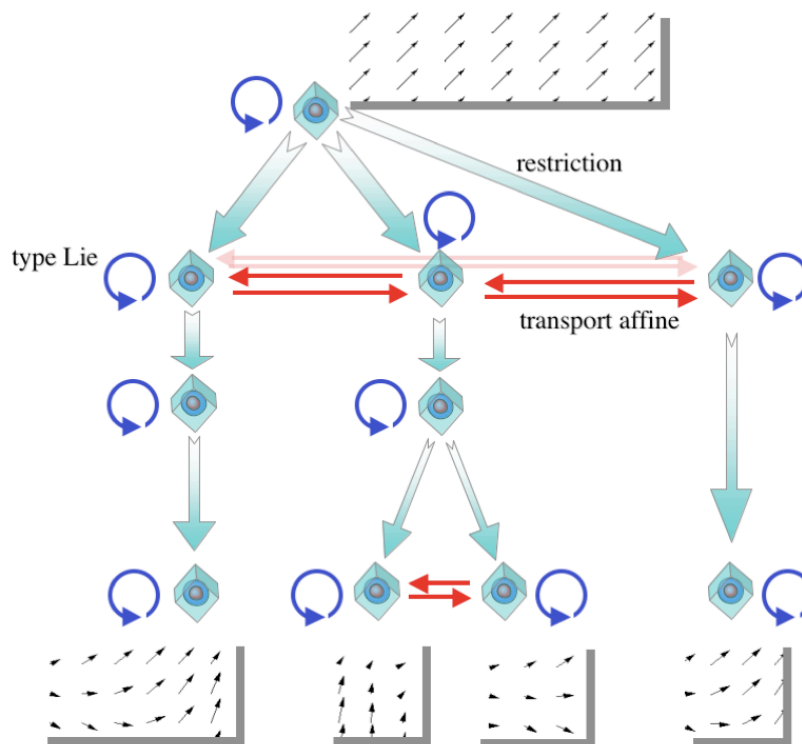


FIG. 23.1 – Le paradigme de stemmata utilisé à présent dans la théorie inverse de l'interprétation.

Notre modèle pour un stemma traduisant une interprétation donnée est le suivant (voir figure 23.1). On se limite à décrire un seul champ interprétatif par sommet stématique. On part d'un champ original (position au sommet) et on lui applique un opérateur de Lie (flèches circulaires). On applique alors diverses restrictions (*SplitOperator*), ce qui donne lieu aux sommets au second plan. Ces nouveaux sommets sont alors déformés par un opérateur de Lie, tout comme le sommet initial. Mais on ne s'arrête pas là : pour chaque sommet de ce plan, on lui ajoute les sommets restants que l'on transfère grâce à des transports affines au sommet en question (flèches horizontales rouges). Ceci définit le nouveau champ en ce sommet. On procède maintenant de la même manière aux plans inférieurs et on arrive aux sommets du plan basique qui sont les feuilles du graphe. Ce sont ces champs que nous allons utiliser pour l'interprétation finale.

Ce type d'opérateur est nouveau et requiert une explication. La sommation des champs transformés par les flèches horizontales veut dire que l'on ne se restreint pas à l'information de la mère, mais que l'on inclut aussi les faits repérés dans les sœurs. La raison est fondée sur la situation très fréquente que les restrictions préliminaires se font par rapport à des limites

temporelles, i.e. les sœurs sont des mesures ou autres unités temporelles adjacentes l'une à l'autre. L'influence d'une sœur qui précède les autres dans le temps signifie que l'interprétation du sommet en question est influencée par celle de la précédente, tandis que l'influence d'une sœur qui succède aux autres signifie que l'interprétation du sommet en question est influencée par celle de la suivante. Le premier type d'influence peut être appelé *causal*, le second sera appelé *final*. Ce schéma rend donc possible une mesure de l'influence causale/finale des parties distribuées dans le temps. L'exemple dans la figure 23.2 montre explicitement comment le champ à droite en bas est synthétisé à partir du champ tout en haut. On voit deux restrictions, suivies de deux opérateurs de type Lie, dont celui à gauche est transporté par déformation affine à droite et additionné avec l'autre champ.

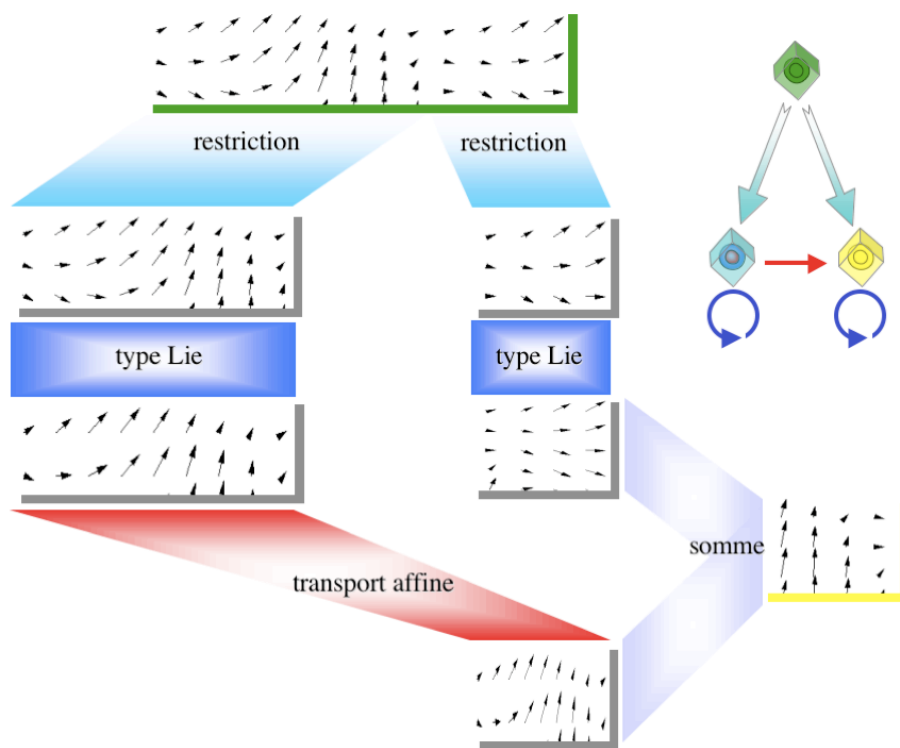


FIG. 23.2 – Le champ à droite en bas est synthétisé à partir du champ tout en haut. On voit deux restrictions, suivies de deux opérateurs de type Lie, dont celui à gauche est transporté par déformation affine à droite et additionné avec l'autre champ.

Cette architecture pose donc le problème inverse de l'interprétation : on connaît les champs de l'interprétation, c'est-à-dire les champs des feuilles du graphe stématique, ainsi que le champ du départ qui est le champ lié au déchiffre donné par la composition. Pour des compositions simples, ce champ sera un champ constant, par exemple un tempo constant. On veut alors connaître toutes les solutions pour les variables des opérateurs intermédiaires qui donnent

lieu à l'interprétation choisie. La solution de ce problème a été discutée par des méthodes statistiques et de géométrie algébrique. Sans entrer dans les détails techniques, nous esquissons ici les résultats obtenus à travers la géométrie algébrique, en collaboration avec Roberto Ferretti [21].

Le paradigme de stemmata que nous venons de décrire s'appelle « grammaire interprétative localement linéaire [34, ch.39.8] ». Pour un tel stemma, on a les variables suivantes : paramètres des opérateurs de Lie (i.e. les poids et les applications affines *Dir*) ; puis les paramètres pour les déformations affines entre les sœurs ; puis les champs Z . de l'interprétation finale sur les feuilles du graphe stemmatique. Si les champs sont le résultat de l'évolution sur un stemma défini par les autres variables, alors toutes ces variables définissent un point sur une variété algébrique. De plus, si l'on fixe, dans cette variété, les points ayant une suite Z . fixée de champs d'une interprétation, on obtient la *fibre au-dessus de Z* . (voir figure 23.3). Le résultat princi-

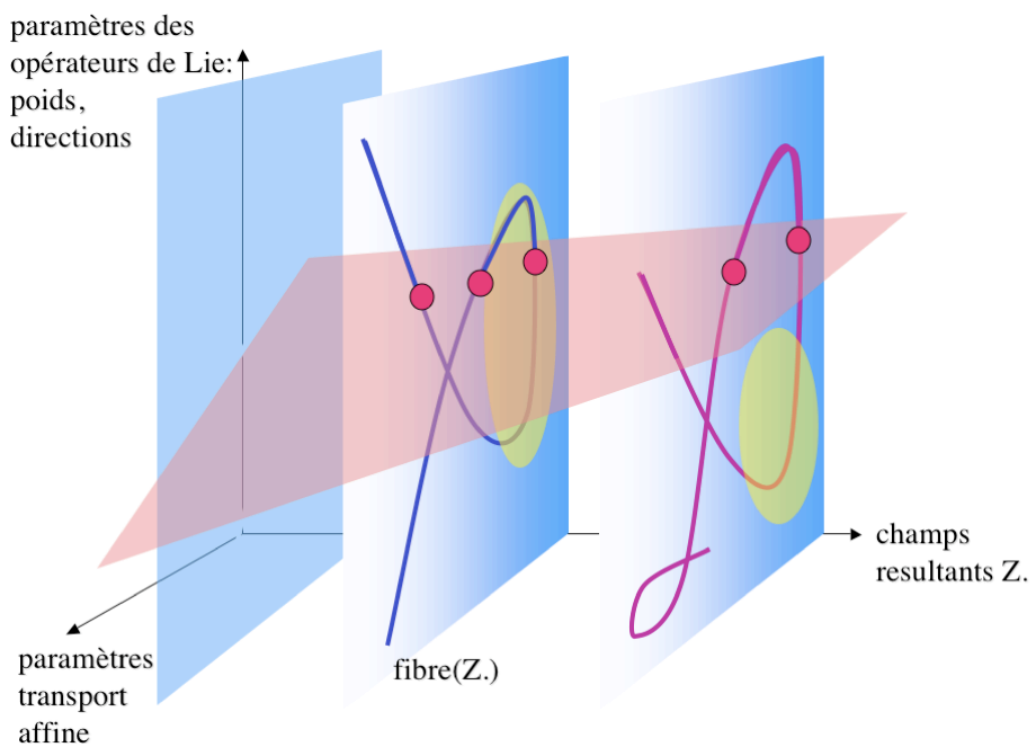


FIG. 23.3 – Les fibres au-dessus d'un système de champs Z . d'une interprétation donnée sont génériquement isomorphes. Par spécialisation à des sous-variétés choisies par des critères musicaux (surface horizontale), les fibres induites deviennent non isomorphes.

pal (théorème de Ferretti) affirme que *ces fibres sont génériquement isomorphes, i.e. elles sont isomorphes après restriction sur des ouverts non vides choisis* (les régions elliptiques dans la figure 23.3). Ce résultat est assez surprenant puisque l'on dirait que les différents champs interprétatifs Z . déterminent aussi les paramètres du scénario stemmatique. Le résultat montre

les limites de nos connaissances pour distinguer les arrière-pensées des interprétations, si nous ne faisons que les hypothèses générales sur les grammaires interprétatives localement linéaires. Toutefois, si des conditions supplémentaires musicalement raisonnables sont imposées aux variables du stemma (surface horizontale dans la figure 23.3), les sous-variétés correspondantes des fibres ne sont plus isomorphes. Nous terminons cette partie en donnant une brève description des conséquences musicologiques de ce résultat mathématique.

23.3.3 La comparaison de l'interprétation de Martha Argerich avec celle de Vladimir Horowitz

Notre exemple se réfère aux mesures choisies par Bruno Repp [43] dans son analyse des courbes du tempo de 24 célèbres interprétations de la « Rêverie ». On regarde ici un stemma de champs de tempo et on prend un graphe défini par la segmentation de la partition totale de 32 mesures (avec la répétition de la première période). On démarre avec le total de 32 mesures, la première segmentation définit la première période P_A , puis sa répétition $P_{A'}$, puis les premières huit mesures P_B de la partie B , et finalement les dernières huit mesures $P_{A''}$ de la reprise dans la partie B . Chacune de ces périodes est segmentée en huit mesures, $P_{A1}, P_{A2}, \dots, P_{A8}$, $P_{A'1}, P_{A'2}, \dots, P_{A'8}$, $P_{B1}, P_{B2}, \dots, P_{B8}$ et $P_{A''1}, P_{A''2}, \dots, P_{A''8}$.

Sans entrer dans les détails des restrictions imposées ici, on peut dire que les déformations affines entre des champs sœurs X, Y sont multipliées par des coefficients de corrélation $c_{X,Y}$ qui expriment l'influence de la sœur X sur la sœur Y . Rappelons que, puisque ces sœurs sont en relation temporelle de succession, ces coefficients ont une signification de causalité ou de finalité. Or, les matrices de ces coefficients pour tous les couples de sœurs ne sont pas arbitraires, mais prennent des valeurs restreintes par des conditions fonctionnelles (les « tapis volants » [34, ch.46.4]), i.e. on impose un contexte fonctionnel des corrélations. Avec cette restriction, on peut comparer la sous-variété de la fibre au-dessus de l'interprétation de Martha Argerich (ARG dans [8]) avec la sous-variété de l'interprétation de Vladimir Horowitz (HO1 dans [8]). La comparaison de ces fibres fournit, en termes musicaux, les résultats que l'on pourrait résumer comme suit :

1. Au niveau des périodes de la pièce, la cohérence interpériodique est plus grande chez Argerich que chez Horowitz.
2. Au niveau des mesures, on conclut que :
 - Dans la première période, Horowitz joue avec une cohérence causale et finale prononcée, tandis que la cohérence causale décroît sensiblement vers la fin de la composition.
 - La répétition A' de A montre chez Horowitz une relaxation de la cohérence.
 - Le développement B montre chez Horowitz une croissance du caractère final.
 - La récapitulation montre chez Horowitz une certaine fatigue : le caractère causal est très faible et le caractère final est aussi affaibli.
 - Pour Argerich, la première période est moins cohérente que chez Horowitz.
 - En contraste avec Horowitz, la cohérence finale croît pendant que la pièce se développe.
 - Le développement et la récapitulation sont de prononciation finale. Ils montrent une « conscience » de la fin de la pièce qui manque chez Horowitz.
 - La récapitulation d'Argerich est prospective, et non pas rétrospective.

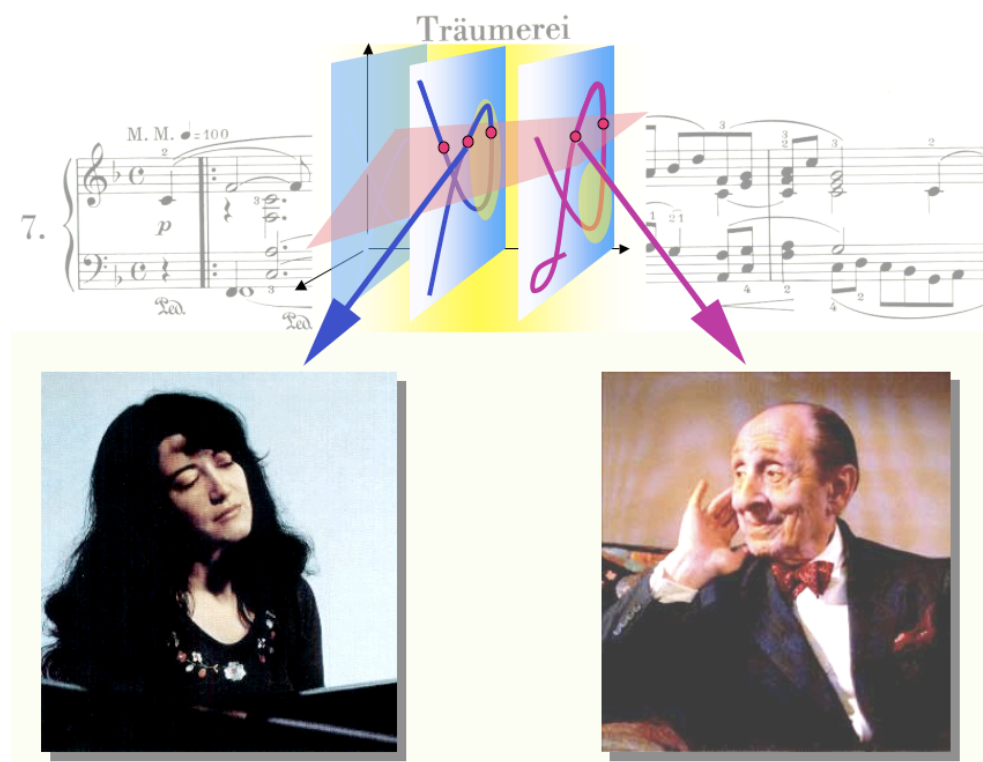


FIG. 23.4 – Pour la « Rêverie », la cohérence agogique est plus grande chez Argerich que chez Horowitz.

On peut donc conclure que les méthodes mathématiques de la théorie inverse de l'interprétation peuvent avoir des conséquences tout à fait intéressantes du point de vue musical. Par ailleurs, ces résultats nous ont été confirmés par des spécialistes de Argerich et de Horowitz. Mais il est clair que cette recherche n'est qu'une première étape dans le temps planckien du Big Bang de la musique.

Cinquième partie

Corporéité — l'intelligence de la
gestuelle

Chapitre 24

Le symbole, le diagramme et la gestuelle dans les arts

*Man kommt so seine Strecke*¹.
Johann Wolfgang von Goethe

24.1 La crise du 18 mai 2002

Ce chapitre est le récit d'un drame scientifique qui a eu lieu en été 2002, quand je préparais une intervention auprès du séminaire MaMuX (Mathématiques/Musique et relations avec d'autres disciplines) de l'IRCAM². Il était prévu que je m'explique sur les stratégies mathématiques dans mon rôle de pianiste de jazz contemporain.

Pour apprécier les conditions de cette entreprise, il faut savoir que je venais juste d'achever, à ce moment, la monographie « The Topos of Music » [34], une description globale de la théorie mathématique de la musique basée sur l'architecture universelle des dénotateurs sur un topos (une catégorie mathématique inventée par Alexandre Grothendieck et développée par Charles Ehresmann pour marier géométrie et logique), et qui inclut la théorie de la musique ainsi que celle de l'interprétation comme nous les avons discutées dans les parties précédentes. À l'époque, je pensais que ce cadre serait suffisant pour tous les problèmes théoriques posés par la musique et j'avais donc la conviction que nous pourrions nous y restreindre.

Or, lors de la préparation de mon intervention, je me rendis compte que les stratégies de ma propre improvisation jazz étaient de nature différente par rapport aux structures connues et décrites dans l'œuvre que je venais d'accomplir.

¹On suit son chemin.

²Ce séminaire, né à la suite du séminaire Entretemps « Mathématiques, Musique, Philosophie » [5], cherche à développer une hypothèse de pertinence, à la fois musicale et mathématique, du rapport mathématiques/musique à travers une exploration des liens qui se créent avec d'autres disciplines dont la philosophie, l'épistémologie, la linguistique, l'informatique, les sciences cognitives... Pour plus d'informations, voir [http ://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/](http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/).

Je pris conscience que ce ne sont pas les structures des sons qui déterminent mon improvisation, mais les mouvements de mes mains, de mes bras, et de mon corps, autrement dit ce sont les gestes qui, dans l'interaction avec l'instrument, la surface sensible des touches, définissent la musique mise en œuvre dans ce genre d'improvisation avancée. Ceci ne veut pas dire que les structures traditionnelles décrites dans [34] sont absentes, mais qu'elles sont des ingrédients secondaires, des corollaires et outils de nature auxiliaire. Pour revenir sur la métaphore culinaire, il ne suffit pas de bons ingrédients et d'une bonne recette afin d'être un bon cuisinier. La situation est ici tout à fait différente de celle que nous avons rencontrée dans la théorie de l'interprétation. Il ne s'agit pas ici de modéliser la projection des symboles dans un espace de paramètres physiques, mais il s'agit de définir directement la musique à partir des gestes du musicien. Les symboles ne créent rien, ils peuvent même être absents ou alors se présenter sous la forme d'indications auxiliaires comme dans le free jazz. La création et la modélisation se font directement et essentiellement par les gestes qui interagissent avec le jeu instrumental.

Ceci étant, je remarquai alors que l'image de l'interprétation était incomplète : j'avais refoulé le niveau gestuel par cette abstraction adornienne, oui, consciemment, mais j'avais également refoulé ainsi le rôle créateur des gestes, leur potentiel pour produire directement la musique. Nous visualisons dans la figure 24.1 le chemin complet de l'interprétation instrumentale.

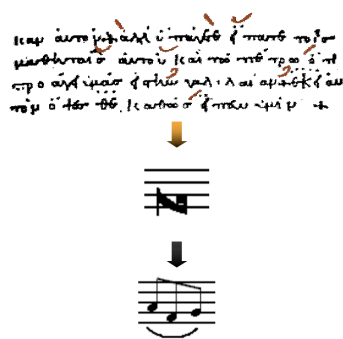


FIG. 24.2 – Les notes sont issues des neumes gestuels par abstraction successive.

La flèche allant de la partition aux gestes est appelée « dégeler » car les notes représentent une sorte de gestes « surgelés » qu'il faut réanimer afin de créer de la musique. L'origine des notes dans les neumes trace cette vue de manière exemplaire : les neumes étaient des indications gestuelles qui furent abstraites dans la forme moderne de la note au cours de l'histoire (figure 24.2). La flèche « surgeler (MIDI) » dans l'autre direction indique le chemin de cette abstraction lors de la création d'une partition à partir d'un jeu instrumental. Une telle création est réalisée de manière exemplaire avec l'enregistrement d'une pièce sur un piano MIDI. La factorisation de l'interprétation sonore $\wp$ par les gestes associés à la partition est basée sur l'interaction de ces gestes avec l'instrument. On peut dire que *l'instrument est l'interface entre la gestuelle et le sonore*.

Dans cette perspective, il est immédiat que le sonore ne doit pas nécessairement provenir d'une partition, mais peut être le résultat de l'interaction directe gestuelle-instrument. Bien que les neumes soient historiquement à l'origine des partitions, l'invention musicale gestuelle directe présente une préoccupation majeure pour les théoriciens de la musique, qu'ils soient orientés vers la musicologie traditionnelle, vers la tradition du jazz *écrit* ou alors vers la théorie mathématique de la musique. Cette dernière est particulièrement visée car ses protagonistes (dont l'auteur fait partie) se croyaient en possession de la clé de l'univers de la musique, une clé sous forme de formules, équations, i.e. d'expressions et théorèmes de l'algèbre abstraite.

Nous prenons part ici à une révolution dramatique de la pensée musicale. Elle est reliée au changement paradigmatique aussi observé dans la « nouvelle intelligence artificielle » qui, après l'échec des approches symboliques et connexionnistes, cherche à repenser et reconstruire l'intelligence à partir de son incarnation dans la corporéité biologique. Nous revenons sur cet

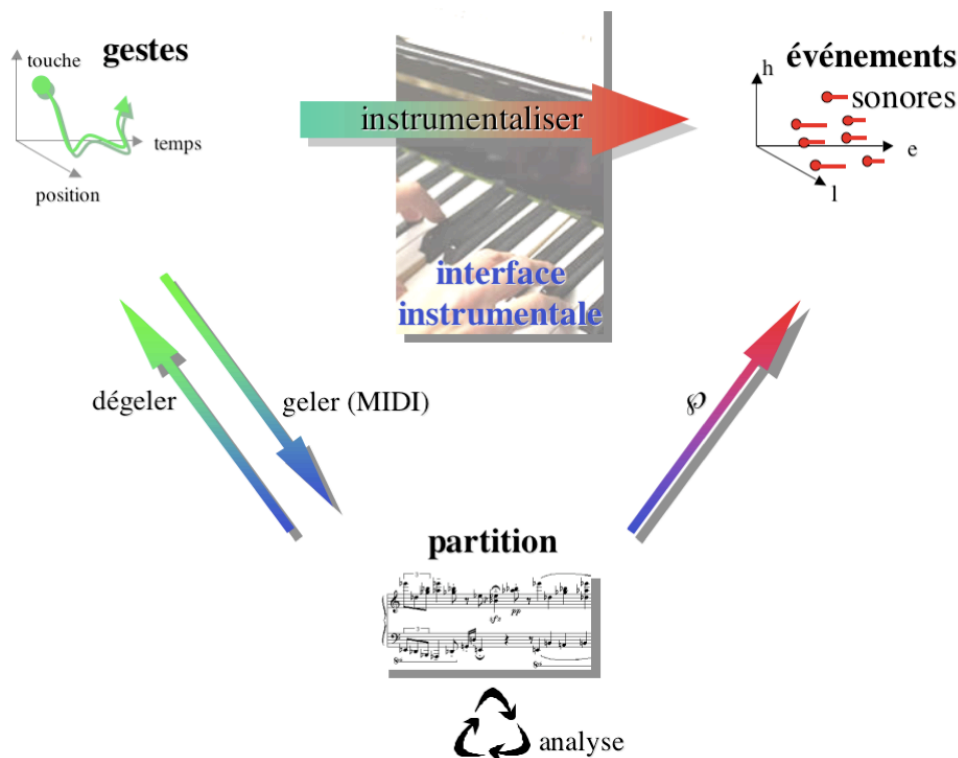


FIG. 24.1 – Le chemin de la partition à l’interprétation sonore se décomposant en 2 parties : l’action gestuelle du musicien et son interaction avec l’instrument.

aspect dans la section 24.7. L’avantage de la musique par rapport aux autres champs activités intellectuelles est que la gestuelle est un sujet classique dans la pratique musicale et que l’on connaît donc assez bien le rôle des gestes pour bâtir et communiquer l’intelligence musicale. Toutefois, il n’existe pas de théorie du geste musical malgré les travaux des pédagogues Jürgen Uhde et Renate Wielandt [56] qui initièrent une telle théorie. Cette théorie fut complétée ensuite par les idées fascinantes de Pierre Boulez, telles qu’elles sont tracées dans les entretiens avec Cécile Gilly dans « L’écriture du geste » [13].

24.2 La gestuelle des pianistes

La main est un véhicule de gestes très important pour les pianistes. Néanmoins, ils l’utilisent chacun à leur façon. La logique du geste n’est pas une donnée évidente, tout comme l’usage des mains pour créer la musique.

Glenn Gould (figure 24.3, en haut à droite) utilise ses mains d’une manière très prononcée. Ses gestes ne sont pas seulement des conséquences de la technique de pianiste, mais porteurs de la musique au-delà de sa réalité acoustique. Il avoue : « In the softer passages, I couldn’t hear



FIG. 24.3 – La gestuelle chez les pianistes Cecil Taylor (en haut à gauche), Vladimir Horowitz (en bas à gauche), Glenn Gould (en haut à droite) et Arturo Benedetti Michelangeli (en bas à droite).

any sound that I was making at all. I could feel, of course — I could sense the tactile relations with the keyboard which is replete with its own kind of acoustical associations³. »

Il pouvait en fait « entendre » ses doigts. Et il était capable d'imaginer le geste de pianistes à partir de leurs enregistrements [40].

À cause de cette conscience des gestes, il existe chez Glenn Gould un phénomène assez curieux au niveau des interprétations de Beethoven. Le cas exemplaire est la fameuse interprétation de la sonate « Appassionata » op. 57, que le pianiste prend à une vitesse très lente (entraînant une durée de 15 minutes pour le premier mouvement alors que Vladimir Horowitz met 9 minutes 40 secondes). Le début de la sonate est exemplaire. Le mouvement dramatique descendant de degrés VII arpégés des mesures 14-15 est joué avec grande prudence et sans aucune verve. Pourquoi ? On a tendance à comprendre cette descente inhibée comme analytique, afin de montrer la trivialité de la construction beethovenienne. En vérité, Gould passe à côté de l'esprit du

³Dans les passages plus doux, je n'arrivais en fait à entendre aucun son que j'étais en train de produire. Je pouvais sentir, évidemment — je pouvais sentir les relation tactiles avec le clavier qui lui est rempli avec ses propres associations acoustiques.

langage : c'est ici le geste de descente qu'il faut jouer, et non un assemblage d'arpèges qui serait en fait trivial. En écoutant Horowitz, on comprend la différence. Pourquoi alors ce faux pas ? Il semble que Gould utilise ses gestes pour illustrer sa compréhension analytique et non en tant que langage expressif propre.

Pour Vladimir Horowitz (figure 24.3, en bas à gauche), le mouvement des mains est parfaitement conditionné par son extraordinaire technique. Les mains d’Horowitz montrent ce que le critique Harold Schonberg [48] appelait « le coup du cobra ». Au-delà de cette fonction, sa gestuelle est insignifiante.

Le cas d'Arturo Benedetti Michelangeli (figure 24.3, en bas à droite) est le contraire de Gould : les mains bougent avec une économie totale, un minimalisme qui est également visible dans les mouvements du corps du pianiste et de sa mimique au niveau zéro. Pour utiliser les termes du dégel des notes : Benedetti Michelangeli réussit à jouer les notes en état surgelé, c'est un maître du gel musical. On a même l'impression que le geste, aussi minimal qu'il soit, le dégoûte.

Près de la gestuelle de Gould semble se positionner celle du grand pianiste de free jazz, Cecil Taylor (figure 24.3, en haut à gauche). Il y a cependant une différence essentielle entre ce pianiste et les trois autres : pour Taylor, le geste n'illustre ni la technique, ni une réalité fictive, mais il crée la musique. Il décrit son jeu comme la réalisation d'une danse des doigts et non comme une interprétation d'une structure de jazz. Taylor n'illustre pas avec son corps, il pense la musique dans la corporéité. Le musicologue Volker Spicker reconnaît le caractère gestuel des compositions de Taylor [52]. Il appelle « Abstraktmotiv » (figure 24.4) les unités musicales tayloriennes, qui semblent être des motifs, mais sont, comme Spicker le met en relief, des unités gestuelles dont les hauteurs et durées ne sont que des images plus ou moins aléatoires.

Plusieurs musicologues essayèrent d'analyser (au niveau harmonique et bien encore au niveau des formes) les œuvres de Taylor, mais les résultats furent toujours inutiles pour la compréhension de cette musique. D'autres essayèrent encore d'expliquer cette musique par les énergies du pianiste, comme une sorte d'activité sportive de haut niveau. Taylor n'accepta pas ces perspectives car il se considère tel un « sorcier qui exorcise les forces de l'univers » dans sa « danse digitale » et par conséquent il ne fait aucune référence aux symboles de l'intellectualité occidentale. Sans développer ces vues mystiques, l'idée fondamentale ici est que la création musicale connaît ici une source totalement différente de la source traditionnelle de la composition traditionnelle, faite de symboles et calculs. Il n'est pas étonnant qu'Adorno méprisait le jazz : sa nature gestuelle devait lui échapper complètement, car elle est située au-delà de l'analyse symbolique qui lui était si chère.

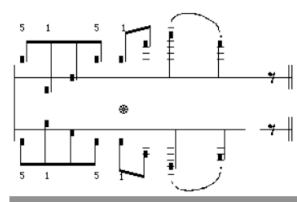


FIG. 24.4 – Un « Abs-traktmotiv » taylorien d'après Spicker.

Derrière ces cas paradigmatiques de l'approche gestuelle au piano se cache un fait bien fondamental : tandis que le système des symboles de la tradition européenne fait partie d'une sémiotique musicale, les gestes ne sont pas nécessairement chargés de signification. *Un geste existe sans devoir signifier*. On observe ici un schisme qu'il faudra thématiser dans la suite, car il définit des approches incompatibles au niveau culturel.

24.3 Le formalisme gestuel du théâtre « nô »



FIG. 24.5 – Une scène de nô.

Avant de donner une définition rigoureuse du geste au chapitre 26, nous voulons esquisser les principes gestuels du théâtre classique japonais *nô* : en effet, cette forme artistique met clairement en évidence le fait que les gestes ne sont pas nécessairement des véhicules sémiotiques dans un art classique. Cette description permettra ensuite de passer à une justification de notre définition du geste qui s'ensuivra.

Le théâtre *nô* fut créé dans la période *Muromachi* (1336-1568). Le titre complet *nogaku* = *no* + *kyogen* veut dire « divertissement parfait ». Cet art comprend les éléments suivants :

- musique vocale = *utai*
- musique instrumentale = *hayashi* (une flûte + trois percussions)
- technique d'action = *kata* (pose de danse + action)
- éléments de danse = *mai* (*kata* + *utai* + *hayashi*)
- art décoratif = masques, robes, instruments
- architecture = scène *nô*
- temps = mode de production
- espace = espace unifié (= scène + publique)

C'est donc un art composé de divers média, dont chacun joue un rôle équilibré dans l'ensemble. Chaque pièce *nô* est une section dans la vie d'une personne, le *shite*. Le *shite* a une apparition (un démon, par exemple) et un sujet (un des cinq éléments : feu, eau, bois, terre, métal). Il est couplé à un co-sujet, une personne miroir, le *waki*.

Le *nô* connaît une variété de temps et d'espaces dont les catégories principales du drame sont :

- temps condensé
- glissement du temps
- temps disparaissant

FIG. 24.6 – *Kata* : formes de mouvement du *nô*.

- temps renversé
- décalage de l'espace
- espace oscillant
- espace affluant
- espace dilatant et contractant
- espace qui emmène le public sur scène

Pourquoi les gestes sont-ils dominants dans le *nô* ? Il faut discerner les trois types d'expression humaine : l'expression de la voix, du visage et le gestuel. Etant donné que les acteurs portent des masques, le facial est impossible. Le vocal est ambigu en japonais, il est donc inapproprié pour l'expression de la volonté et donc réservé aux évocations lyriques. Il ne reste alors que la gestuelle. Par conséquent, le *nô* est un drame de danse, et non un opéra ou un ballet. Sa forme globale est extrêmement rigide et architecturale. Toutes les activités sont modularisées en :

- unités de mouvement = *kata* (formes)
- unités de chant = phrase (ligne de 12 syllabes)
- unités de musique = unités mélodiques et rythmiques
- unités d'espace = *za* (hiérarchie des lieux !)

Dans cet esprit de formes rigides, les gestes du *nô* sont réduits aux unités *kata* et rendus symboliques. Ceci permet une communication plus riche avec le public que par les gestes quotidiens. Voici la classification des *kata*. On distingue trois types d'unités de mouvement :

- réaliste, e.g. tenir un livre dans les mains, sauter dans une cloche
- symbolique, e.g. pleurer = porter la main au visage et la retirer
- abstrait, e.g. zigzag = début et fin de nombreuses danses

L'important pour nous est la caractérisation des gestes du *shite* et du *waki* : le *shite* tisse une texture de fantaisie moyennant des courbes. Le *waki* dessine la réalité moyennant des lignes droites. Ceci nous donne une première approximation du concept mathématique du geste : nous allons considérer des courbes, dont la forme (sinueuse ou droite) décrit les deux personnages principaux. Il est remarquable qu'un art aussi vieux que le *nô* soit conscient de la forme mathématique associée au concept du geste. Le *nô* ne suit pas la sémantique ordinaire : la

sémantique s'y trouve renversée. Les gestes servent de préférence à l'expression de mouvements à l'intérieur de l'espace-temps, la sémantique ordinaire est de second ordre. Le *nô* est donc essentiellement une expression d'un espace-temps, dont les catégories sont énumérées ci-dessus. *Le mouvement des gestes dans cet espace-temps est un système de courbes qui servent à l'exploration de cet espace-temps et non aux énoncés ordinaires. L'histoire ne sert que de véhicule pour ce jeu de formes.*

24.4 La gestuelle chez Brecht et Merleau-Ponty



FIG. 24.8 – Bertold Brecht.

Si l'on cherche des sources européennes pour la thèse que les gestes ne sont pas seulement des ornements de pensées ou d'émotions, la théorie de Bertold Brecht est une référence primordiale, comme le montrent les travaux de Walter Benjamin [7] et de Hans Martin Ritter [46]. Selon Brecht, les mots sont secondaires par rapport aux gestes. Son principe « Non verbis sed gestibus⁴ » est omniprésent dans sa pensée : en effet, la mimique doit pour Brecht être remplacée par le geste, principe analogue à celui du théâtre *nô*. Plus précisément, le geste est le terreau sur lequel grandit la langue, la parole, les mots. Il est la « couche germinale » de la langue. Et ce principe n'est pas compris comme genèse historique de la langue, mais comme fait systémique.

Toujours comme dans le théâtre *nô*, les gestes sont des relations humaines et non pas des porteurs d'énoncés, d'assertions ou de valeurs logiques. Un geste ne constitue pas une activité détachée de son contexte social ou intellectuel. Ce phénomène est sous-jacent à l'effet brechtien de l'aliénation (« *Verfremdung* ») et crée cette distance objective.

Comme Brecht qui se méfie de la parole dérobée du geste, Maurice Merleau-Ponty, dans le sixième chapitre (« Le corps comme expression et la parole ») de [38], avance la thèse que la parole est loin d'être un simple signifiant de la « pensée pure ». La parole n'est pas le vêtement de la pensée, mais son corps. Elle porte une première couche de signification. Merleau-Ponty la compare à la sonate musicale, dont la signification est inséparable des sons. Pendant l'exécution, les sons ne sont pas réduits aux signifiants de la sonate, elle existe à travers et dans eux. Pour Merleau-Ponty, *la pensée n'est rien « d'intérieur », elle n'existe pas hors du monde des mots.*



FIG. 24.9 – Maurice Merleau-Ponty.

Le mouvement fascinant chez Merleau-Ponty est l'introduction du geste dans la thématique parole-pensée : « La parole est un véritable geste et elle contient son sens comme le geste contient le sien. C'est ce qui rend possible la communication. » Le corps de la pensée agit donc par ses gestes. La métaphore du corps entraîne la dynamique gestuelle de la pensée. Par exemple, un geste de colère n'est pas une pensée de la colère, mais il est la colère elle-même. La pensée au sein du corps-langue s'identifie donc aux actions gestuelles de ce corps.

Comme chez Brecht, le geste est profondément communicatif : « La communication ou la compréhension des gestes s'obtient par la réciprocité de mes intentions et des gestes d'autrui, de mes gestes et des intentions lisibles dans la conduite d'autrui. Tout se passe comme si l'intention d'autrui habitait mon corps ou comme si mes intentions habitaient le sien. » Le geste, forme de l'incorporation de la pensée, communique donc comme (inter)action intentionnelle.

⁴Non par le verbe mais par le geste.

Pour résumer, Brecht et Merleau-Ponty se prononcent sur l'essence de la langue et de la pensée dans le geste, qui, loin d'être simple véhicule du sens, crée la pensée dans l'interaction communicative des intentions. Et comme dans le théâtre *nô*, le geste n'est pas un véhicule de signification, mais bel et bien un mouvement autonome.

24.5 Penser à travers le diagramme : Cavaillès, Deleuze, Châtelet, Alunni

Nous avons vu que le concept du geste implique, dans le théâtre *nô*, des courbes spatiales. Il est évident que les seules courbes ne sont pas porteuses de pensées. Par exemple, il semble difficile d'énoncer une logique directement avec des courbes.

Le concept de geste a donc besoin de ce que l'on pourrait appeler un « geste symbolique », une abstraction qui en même temps contient des aspects essentiels du geste et des directions vers la pensée symbolique. Ce lien conceptuel est exactement ce qui est au centre de la pensée dite « diagrammatique » du courant de philosophie française dont les représentants majeurs sont Jean Cavaillès, Gilles Deleuze, Gilles Châtelet, Charles Alunni [6]. Ce mouvement se focalise sur la gestuelle et plus particulièrement sur son pouvoir d'abstraction. Ainsi la première étape du mouvement est réalisée par Deleuze sans son livre sur le peintre Francis Bacon [19] qui traduit le mot anglais « graph » en « diagramme ». Dans un entretien avec David Sylvester [54], Bacon dit : « The marks are made, and you survey the thing like you would a sort of graph. And you see within this graph the possibilities of all types of fact being planted⁵. » C'est là une immersion du peintre dans son œuvre qui ne veut pas illustrer, mais quasiment « innover » la peinture par un système diagrammatique de graphe nerveux (voir figure 24.10).

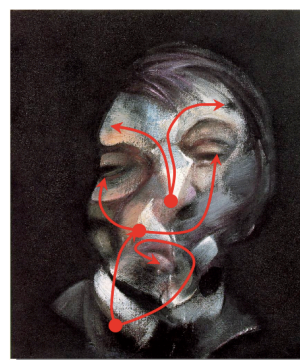


FIG. 24.10 – Le diagramme dans la peinture de Francis Bacon.

Déjà dans les années quarante, Cavaillès avança la thèse que « comprendre, c'est attraper le geste et pouvoir continuer » [6]. Ce fut un premier pas vers une théorie diagrammatique de l'intelligence qui est étroitement liée à celle de la compréhension. L'extrait suivant de Gilles Châtelet dans le même ouvrage va dans le sens de l'idée de Cavaillès : « Le concept de geste nous semble crucial pour approcher le mouvement d'abstraction amplifiante des mathématiques. (...) Un diagramme peut immobiliser un geste, le mettre au repos, bien avant qu'il ne se blottisse dans un signe, et c'est pourquoi les géomètres ou les cosmologistes contemporains aiment les diagrammes et leurs pouvoirs d'évocation péremptoire. »

Ce texte nous dit non seulement que les mathématiques dans leur symbolisme élitare et puissant s'appuient sur la pensée en diagrammes, mais aussi que le diagramme est une abstraction du geste, « un geste au repos ». C'est là une très belle formulation du rôle intermédiaire du diagramme entre le geste et le symbole. Mais elle nous révèle, tout comme les sections précédentes concernant le *nô* ou la gestuelle, la compréhension du geste (en repos ou pas) comme entité présémiotique, car le signe ne « cache » pas encore le geste. Il est remarquable de constater qu'Adorno dans ses réflexions sur l'interprétation [3] confirme ces penseurs : « Der Ausdruck ist bereits die Rationalisierung des Gestischen, d.h. dessen Objektivierung durch Si-

⁵Les marques sont faites, et vous observez les choses comme si vous faisiez une sorte de graphe. Et à l'intérieur de ce graphe, vous voyez toutes sortes de faits étant fixées.

gnifikation⁶. » La gestuelle existe donc avant son objectivation (sa « mort », pour renforcer l'image du repos évoquée par Châtelet ci-dessus) et n'y est pas encore affectée par la signification.

L'existentialité « crue » du geste et du diagramme les place loin du sémiotique et de ce fait encore plus loin de la facticité, du vrai et du faux. Le diagramme n'est pas inséré dans une machine, dans un système de règles, il est un générateur et non un « illustrateur », pour reprendre la formule de Bacon. Cette conséquence est mise en évidence par Charles Alunni : « Ce n'est pas la règle qui gouverne l'action diagrammatique, mais l'action qui fait émerger la règle. »

Dans cette école de philosophie, le diagramme apparaît comme lien entre le geste et le symbole, mais ce « geste en repos » qu'est le diagramme partage l'essence du geste dans le présémiotique et en même temps se prête comme moteur d'abstraction symbolique en mathématiques.

Il va de soi que le diagramme joue, dans les mathématiques contemporaines, un rôle central. Ce sont les nouvelles fondations des mathématiques dans la théorie des catégories (avancées par Grothendieck et William Lawvere) qui le mettent en évidence. Ce nouveau style de pensée fut aussi introduit dans la théorie mathématique de la musique par l'approche transformationnelle de David Lewin et, indépendamment de Lewin et, plus systématiquement, dans la théorie toposique de l'auteur. On peut donc constater que la pensée diagrammatique (et non la pensée gestuelle !) est présente aussi bien dans les sciences naturelles que dans la théorie de la musique⁷.

24.6 Les ontologies et sémiotiques des symboles, diagrammes et gestes

Ces réflexions ayant été esquissées, il est temps d'essayer de constituer un cadre conceptuel délimitant la science et la pratique de la musique. Je dis « réflexion » et non « calcul », car les différences ne se voient pas dans la réduction mathématique pure de la science.

Nous avons vu, dans cet ouvrage, une première dimension de ce cadre : la théorie des compositions locales et globales qui fut présentée dans les chapitres 8 à 15. Il s'agit là d'un style de pensée qui met en relief la facticité, « ce qui est le cas ». Nous nous intéressons ici aux sous-ensembles d'espaces de paramètres, à leurs combinaisons booléennes, donc au domaine de la logique géométrique. Pour ce domaine, il existe des théories formelles classiques, c'est-à-dire des modélisations formelles des logiques (toposiques en l'occurrence). Nous avons indiqué cette dimension à droite dans la figure 24.11, le ruban de Möbius rappelant un exemple typique de ce type.

La seconde dimension décrit les processus qui mènent aux faits de la première. Elle est basée sur les diagrammes, dont les objets positionnés aux sommets représentent les faits issus des processus. Les transformations qui engendrent ces objets sont dénotées par les flèches du diagramme. Ces configurations d'objets qui se transforment mutuellement s'appellent « limites » dans la théorie des catégories. Les limites sont donc les faits déduits des processus des flèches. Les diagrammes sont essentiellement des renvois par flèches, et ces flèches renvoient et

⁶L'expression est déjà la rationalisation du gestuel, i.e. son objectivation à travers la signification.

⁷Un essai d'interprétation de l'approche transformationnelle à travers le concept de limite d'un diagramme catégoriel est proposé dans [36].

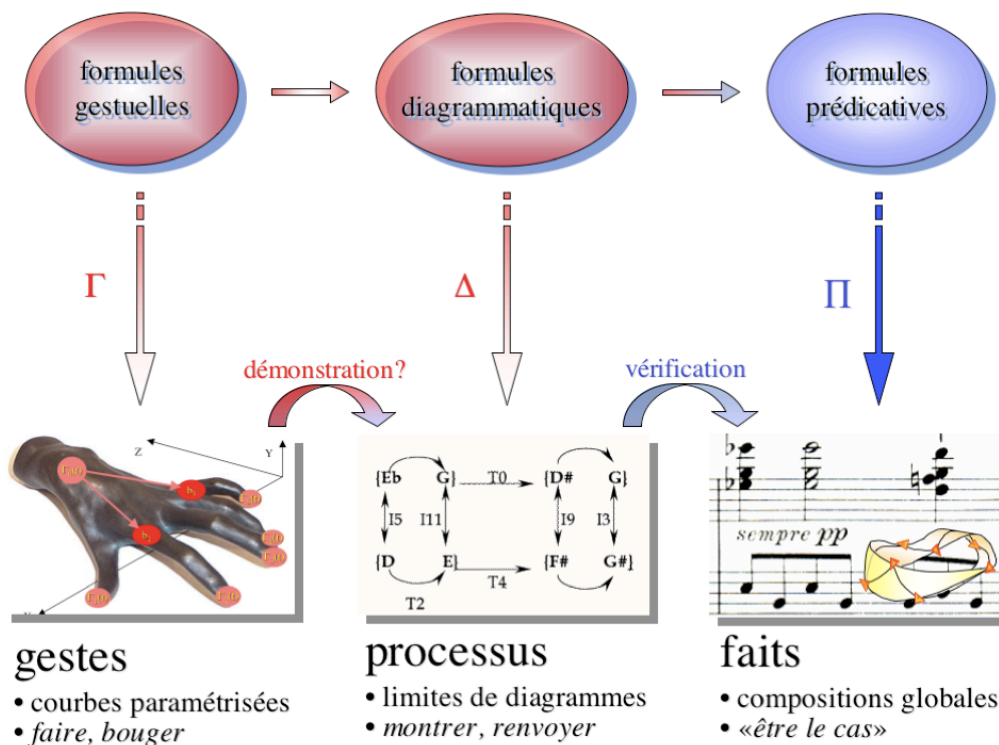


FIG. 24.11 – Les trois dimensions de la pensée : gestes, processus et faits, ainsi que leurs relations et les langages formels (les formules) qui s’y superposent.

montrent de nouveaux objets. On peut montrer qu’il existe un foncteur des diagrammes (globaux) dans les compositions globales, i.e. qu’à tout processus est associé de manière très précise un fait. J’appelle cette transition *vérification* car les processus ne possèdent pas une valeur de vérité bien définie : ils se réalisent, mais ne rentrent pas dans la catégorie philosophique d’« être le cas ». Ce ne sont que leurs résultats, les « limites » qui sont le cas, i.e. vraies (ou fausses). Dans la visualisation de la figure 24.11, au milieu, on voit un réseau de la théorie transformationnelle, objet typique de l’approche diagrammatique des processus. Cette strate met en relief un mouvement, dont le fait associé est la « composition » des hauteurs du réseau. Une théorie formelle de tels diagrammes est toujours questionnable, car elle devrait formaliser les processus, non les faits, et donc des objets qui ne prennent pas leurs valeurs dans des algèbres logiques (de Heyting, comme c’est le cas pour les faits logiques des topos).

La troisième dimension concerne donc les gestes. Pour le geste, la dimension du renvoi résout son noyau abstrait en une action concrète. Pour la comprendre, il faut se rappeler que les transformations dans les diagrammes obéissent au paradigme de la fonctionnalité de Gottlob Frege : rien ne nous dit comment, par quelle voie un argument x est transformé en la valeur $f(x)$. Les transformations n’ont pas de trajectoires. Les flèches $f : X \rightarrow Y$ ne sont que des symboles suggestifs ; au milieu d’une flèche, il n’y a rien : $f : X - ? \rightarrow Y$. C’est le geste, cette

courbe orientée qui relie le point initial avec sa pointe. Le renvoi se réalise dans le geste comme voie continue, comme trajectoire réelle, paramétrée par la variable du parcours. Ce paradigme ouvre donc le mouvement qui donne lieu à la transformation qui en résulte.

Dans le geste, la transformation $X - ? \rightarrow Y$ résulte d'un déplacement des objets de X vers les objets Y. Le geste « découvre » la topologie cachée derrière l'algèbre. La visualisation du geste par la main, à gauche dans la figure 24.11, indique ce mouvement concret, qui est le moteur qui met en marche les diagrammes. À présent, une formalisation de la dimension gestuelle est loin d'être comprise car représenter l'action en termes formels reste un problème ouvert. Un autre problème réside dans le fait de savoir comment les gestes sont exactement projetés dans des diagrammes associés. Cette opération serait appelée *démonstration* car elle transformerait le geste en renvoi, telle une paraphrase de l'acte de dé-montrer. Mais nous reviendrons sur ce sujet au cours du chapitre 26.

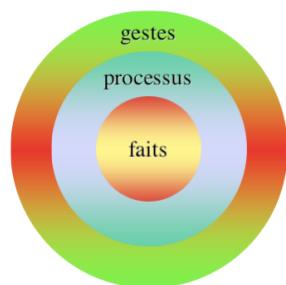


FIG. 24.12 – La dimension « oignonologique » de la musique.

L'image totale de ces composantes étale donc une triple ontologie de la musique. L'ontologie des faits est superposée à l'ontologie du renvoi qui, de son côté, est superposée à l'ontologie de l'action. La musique ne peut pas se comprendre par un choix partiel de ces strates. Et la structure de « pelure d'oignon » (figure 24.12) devient aussi de plus en plus complexe quand on se déplace du milieu des faits à la couche intermédiaire des renvois et finalement à la couche de la réalité topologique de l'action.

En même temps, la totalité de ce système engendre une sémiotique qui provient de la couche extérieure des gestes actifs, traversant la couche intermédiaire des renvois diagrammatiques vers sa complétion dans le noyau des compositions réalisées. Ce vecteur est simultanément abstraction et genèse de signification. Alors que les gestes y représentent le signifiant avant la signification, les symboles tiennent le signifié dépourvu de toute expressivité.

La genèse de l'ontologie musicale est, en quelque sorte, complémentaire de la germination sémiotique.

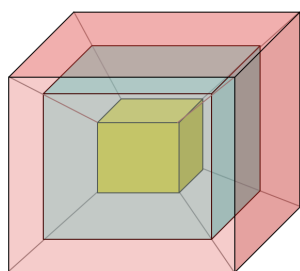


FIG. 24.13 – L'hypercube topographique de la musique : imbrication des cubes des gestes, des processus et des faits.

L'articulation réciproque de l'architecture ontologique avec le corps sémiotique me semble un phénomène qu'il faudrait discuter plus profondément dans l'analyse future de la réalité mystérieuse des arts. Pour ce faire, il faudrait évidemment intégrer le cube topographique de la musique décrit dans [34], et qui comprend les trois axes suivants : réalité, communication et sémiotique. Nous proposons ici d'étendre ce cube tridimensionnel en un hypercube de dimension quatre (figure 24.13), dont un quatrième axe serait l'ontologie ci-dessus, avec ses trois valeurs : gestes, processus et faits, définissant un total de $3^4 = 81$ positions dans l'hypercube. C'est donc une imbrication des cubes des gestes, des processus et des faits, dont chacun spécifie ses axes de réalités, de communication et de sémiotique.

24.7 Gestuelle et intelligence incorporée

Bien que la présentation de la structure ontologique soit centrée autour de la musique et implicitement, à un certain degré, des autres arts, l'énoncé ne se limite pas strictement à ce domaine. La musique est un domaine de la culture humaine ayant un caractère universel à la fois parce qu'elle est une tradition très profonde de l'expression humaine, mais aussi parce qu'elle englobe non seulement un aspect restreint, mais le total de l'étendue de l'intelligence humaine.

De ce point de vue, le développement de l'intelligence artificielle (IA) apparaît comme une trajectoire historique de la recherche, partant du centre de l'oignon avec l'IA symbolique classique des années 50 du XX^e siècle, traversant la couche intermédiaire de l'approche connexionniste, typiquement représentée par les diagrammes des réseaux neuronaux, et arrivant dans la « Nouvelle IA », aussi dite IA située, car elle s'intéresse aux agents réalisés par leur dynamisme corporel et non symbolique. L'IA située cherche les expressions intelligentes dans le dynamisme physique du corps et est donc étroitement reliée aux gestes de la couche extérieure de notre « oignonologie ».

Ce qui manque à l'IA située est le lien entre la corporéité telle quelle et la compétence humaine dans la pensée symbolique. Un simple robot qui gesticule ne restera qu'un simple pantin sans âme. La question est donc de savoir comment la gestuelle pourrait donner lieu au symbolique, ou, dans l'architecture de l'« oignonologie » : comment passer du geste au diagramme pour joindre le symbolique au fait. On reviendra sur cette question au cours du chapitre 26.

24.8 Gestuelle et temporalité

Il n'est pas question dans ce livre d'ouvrir le débat sur la nature du temps, ni dans la musique, ni dans la physique. Néanmoins, la thèse radicale de Charles Alunni sur la production de la règle par le geste possède une force déterminante pour la modélisation de la temporalité au sein de l'action gestuelle.

On sait que pour le musicien, la compréhension du temps en tant qu'axe muni d'une seule dimension réelle est inacceptable. La réalité musicale du temps est vécue dans une variété fort complexe comprenant la stratification en rythmes locaux et globaux, en hiérarchies de courbes des tempi, et en dimensions temporelles engendrées par l'action et l'interaction de l'instrumentiste dans la genèse corporelle des vibrations sonores.

Cette apparente confrontation des conceptions de temporalités ne se réduit pas à la simple négation de l'axe temporel et au contraire met en évidence le fait que cette mince ligne temporelle est une projection d'ontologies complexes dont les lois de la temporalité ne peuvent se concevoir en une seule dimension. Tout se passe dans un espace complexe temporel, dont la ligne du temps « mesuré » ne présente qu'une image illusoire.

En particulier, ces idées suggèrent que l'incorporation existentielle du temps humain a lieu au-delà du fil des heures. Le temps en tant que facteur existentiel ne peut pas être compris par une coordonnée réelle. C'est l'invention de la montre qui effectivement *montre* le temps vécu par le mouvement circulaire des aiguilles le long du cadran.

Or ce mouvement n'est autre qu'un type de geste élémentaire : le temps nous est littéralement montré du doigt. Cette compréhension est la base d'une approche gestuelle de notre existence dans le temps. L'être humain semble ne comprendre le temps que par son incorporation au sein des gestes. Ce sont les gestes qui modélisent le corps du temps. La pénétration du temps est alors proportionnelle à l'intensité gestuelle que nous y dégageons. Le passage du temps abstrait mathématique au temps vécu est provoqué par le geste que nous y infiltrons. Suivant Charles Alunni, nous disons que *la règle de la temporalité est construite dans notre existentialité gestuelle*.

Cette perspective a une conséquence considérable pour la compréhension du phénomène psychologique appelé *flow* par le psychologue Mihaly Csikszentmihalyi [14]. L'état de *flow* est décrit comme une espèce de transe temporelle, où l'on est immergé dans un courant d'énergie vitale qui change la perception de l'environnement et notre manière d'interagir. Des célèbres sportifs (tels que le footballeur Pelé ou le tennisman Jimmy Connors) décrivent le *flow* comme s'ils se trouvaient dans un film au ralenti où le déroulement des événements est si lent (de l'ordre de la microseconde!) qu'ils peuvent arriver à un contrôle extrême des actions telles que le retour d'une balle dans la direction idéale, tout en observant les mouvements (eux aussi fortement ralentis) de l'adversaire.

Le phénomène du *flow* est aussi présent dans la musique et surtout le jazz. Dans l'état d'une improvisation intense d'un groupe de jazz, on a l'impression d'être dirigé par le pilote automatique des énergies musicales. En tant que pianiste de *free jazz* de haute intensité et vélocité, je peux ressentir le mouvement de mes mains comme Pelé et Connors : une seconde devient l'espace énorme où tout un théâtre de la danse des mains est exposé.

La profonde pénétration du temps par les gestes intenses des sportifs ou des musiciens crée une sorte de microscope temporel, sous lequel explose l'abstrait dans la règle de la danse gestuelle que nous lui imposons.

Du point de vue de l'incorporation gestuelle du temps vécu, le *flow* trouve une explication naturelle : s'il est vrai que l'existentialité du temps est mise en œuvre par notre pénétration gestuelle, alors ce n'est pas la durée mathématique d'une seconde qui la définit, mais l'ampleur et la densité des gestes que nous y dégageons. Avec l'intensité des gestes, la corporéité temporelle croît et laisse donc apparaître cette seconde comme étant un scénario immense de personnalité gestuelle, d'é-motions (!) qui remplissent la durée abstraite de la vie.

Chapitre 25

La main du pianiste

*...de la main prodigieuse de l'artiste
égale et rivale de sa pensée...*
Paul Valéry

Ce chapitre est, après les pensées précédentes de haute abstraction, un premier pas dans le concret, en l'occurrence l'étude de la main du pianiste. C'est une modélisation du geste de la main sur la base de l'idée japonaise du *nô* qui introduit la courbe comme forme élémentaire. Nous pourrions, après cette étude, procéder dans le chapitre suivant à la formalisation d'une théorie mathématique.

Ce travail a été mené par Stefan Müller dans le cadre d'une thèse [39] et son but fut de concevoir et d'implémenter (en Java, comme *Rubette* de la nouvelle version de *Rubato*) un modèle simulant les gestes de la main d'un pianiste sous la forme d'un logiciel d'animation multimédia. Ce modèle permet d'animer une main qui joue les touches d'un piano suivant un extrait musical donné en s'appuyant sur deux types de données : la partition de la pièce à jouer d'une part, et d'autre part les variables et contraintes de la géométrie et dynamique mécanique de la main.

25.1 Interprétation gestuelle et sonore

Le modèle des courbes gestuelles implémenté dans [39] définit une strate gestuelle superposée à la strate de la projection interprétative $\wp : \mathbb{R}^{EHL D} \rightarrow \mathbb{R}^{ehld}$ du niveau sonore (voir figure 25.1). Cette strate contient parallèlement deux positions : la réalité symbolique et la réalité physique des gestes. Dans notre situation, un geste est une courbe continue dans l'espace $\mathbb{R}^{E, touches, position}$ dont les axes sont :

- coordonnée horizontale des touches (« touches ») du piano, correspondant à la hauteur symbolique H ,
- position (verticale et horizontale) par rapport aux touches choisies, permettant de représenter, via sa dérivée temporelle, l'intensité L ,
- temps symbolique d'attaque, identique au temps E .

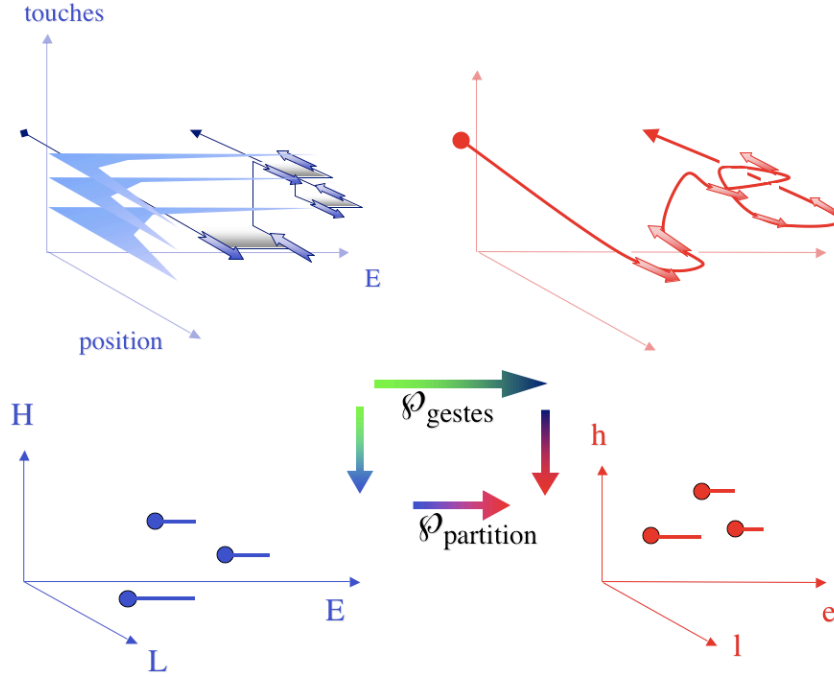


FIG. 25.1 – Le diagramme de l'interprétation et de la gestuelle.

Le geste symbolique est alors une courbe continue

$$\Gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{E, touches, position}$$

paramétrée par le paramètre de courbe t , qui montre le mouvement schématique d'un doigt qui doit frapper une touche pour produire un son. Ce geste ne suit donc pas les lois de la physique, mais uniquement un graphe qualitatif ayant les propriétés requises de cette note. On montre dans la figure 25.1 en haut à gauche le geste symbolique correspondant à la suite des trois notes montrées en bas à gauche. Pour commencer, le doigt retombe verticalement avec la vitesse paramétrique $d\Gamma/dt$ nécessaire sans changer de temps d'attaque E , pour s'arrêter sur la première touche et y rester pendant la durée D de cette note. Puis, au temps $E + D$, le doigt se lève et passe sans aucun délai d'attaque à la seconde touche, pour y retomber, et ainsi de suite pour la troisième note. L'absence de délai est ce qui est prescrit par la partition si la séquence des notes est sans pause. On voit donc que la partition représente des événements tout à fait symboliques !

Le geste symbolique est un relèvement de l'ensemble N de notes de leur état « gelé » dans un état toujours irréel, mais cette fois prêt à être « rechauffé à une température ambiante ». On réalise à partir des notes abstraites une courbe Γ mais elle possède des parties physiologiquement irréalisables. On introduit alors comme projection parallèle à la projection interprétative $\phi_{partition}$ une projection de courbes gestuelles ϕ_{gestes} qui fait du geste symbolique Γ un geste physique $\gamma = \phi_{gestes}(\Gamma)$. Cette image γ est une courbe dans l'espace correspondant

à $\mathbb{R}^{e,touches,position}$, dont les coordonnées sont une attaque physique e , le reste ne changeant pas (puisque nous avons dès le début pris des coordonnées spatiales physiques). La courbe image γ est montrée à droite en haut dans la figure 25.1.

L'idée est que cette courbe de gestuelle physique donne lieu à l'interprétation physique $n = \wp_{partition}(N)$ des notes N de départ, qui est montrée en bas à droite. On obtient donc un diagramme carré dont les traits horizontaux sont les deux projections $\wp_{partition}, \wp_{gestes}$ tandis que les deux traits verticaux sont les projections « de gel » qui transforment une courbe gestuelle dans la séquence de notes qui en résulte par interaction avec le clavier.

Afin de modéliser la main du pianiste, il s'agit de définir des sections « de dégel » des projections de « surgélation », i.e. des fonctions des notes (symboliques ou physiques) dans les courbes gestuelles (symboliques ou physiques) qui, elles, donnent lieu aux notes présentes. Nous n'allons pas, pourtant, définir le dégel physique directement ici, puisque nous voudrions essayer de définir le geste γ directement à partir de Γ en utilisant $\wp_{gestes}$. Mais cette tâche ne peut s'accomplir que si l'on dispose d'opérateurs interprétatifs de courbes gestuelles ! Nous n'avons pas actuellement la théorie capable de rendre compte d'un tel phénomène.

Nous procéderons à une réunion des deux voies qui mènent l'ensemble N des notes symboliques à γ : on prend d'un côté une interprétation sonore n de N qui est produite par les opérateurs interprétatifs discutés dans le chapitre 22. On prend simultanément une courbe gestuelle symbolique Γ au-dessus de N , une tâche rendue facile par le fait que la physique n'intervient pas dans ce cadre.

Nous suivrons ensuite une démarche classique pour obtenir le résultat final : nous donnerons les positions des doigts pour les attaques et fins des sons de l'interprétation n , ainsi que les vitesses requises pour les intensités indiquées. Puis nous devrons trouver les courbes de doigts qui relient ces positions. Malgré la simplicité de cette idée, sa réalisation précise nécessite des moyens ingénieux, comme nous le verrons dans la suite.

25.2 Géométrie et dynamique

Il faut d'abord représenter la main du pianiste dans un espace-temps approprié comme le montre la figure 25.2. Pour cela, nous considérons l'espace-temps usuel $\mathbb{R}^{xyz^e}$ en physique, ayant les trois dimensions spatiales (axes x, y, z de coordonnée) et la dimension temporelle (axe e de coordonnée). Comme on a cinq extrémités de doigts ainsi que le carpe, on doit prendre le produit cartésien $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_6(t))$ de six courbes $\gamma_i(t) = (\gamma_i^x(t), \gamma_i^y(t), \gamma_i^z(t), \gamma_i^e(t)) \in \mathbb{R}^{xyz^e}, i = 1, 2, \dots, 6$, paramétrisées par t . Pour la description de la géométrie de la main, on aura de plus besoin de deux vecteurs d_2, d_5 pointant du carpe aux bases des doigts 2 (index) et 5 (auriculaire). Pour simplifier la situation, on supposera que les vecteurs d_2, d_5 sont constants, i.e. que le dos de la main translate.

La géométrie de la main n'admet pas toutes les positions du vecteur $\gamma(t)$. Nous en tenons compte par deux conditions aux limites :

1. On limite les positions relatives (les vecteurs différence $\gamma_i(t) - \gamma_{i+1}(t)$) des paires de bouts de doigts successifs, 1 et 2, 2 et 3, 3 et 4, 4 et 5, ainsi que la position relative de l'index (2) par rapport au carpe (6).
2. Pour exprimer le fait que le pouce ne peut pas percer les autres doigts, on requiert que les déterminants des triplets $b_2 - b_5, \gamma_1(t) - b_5, \gamma_i(t) - b_5, i = 2, 3, 4, 5$, soient négatifs.

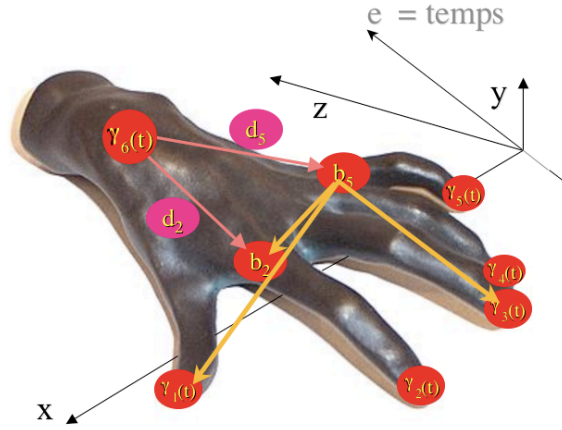


FIG. 25.2 – La représentation de la main du pianiste dans l'espace-temps, ainsi que les points importants utilisés pour sa modélisation.

Ces contraintes géométriques sont donc des inégalités que l'on peut mettre sous forme $F_k(t) \Rightarrow 0$, les fonctions $F_k(t)$ s'exprimant à l'aide des variables précédentes.

Pour réaliser une courbe gestuelle qui obéit aux lois de la physique, il faut considérer les forces en relation avec le mouvement de la main. Afin de tenir compte de ces facteurs, à chaque bout du doigt i est attribué une masse m_i , et une quantité de force maximale K_i est admise, ce qui implique la condition newtonienne

$$m_i \cdot |d^2 \gamma_i^{space} / de^2(t)| < K_i,$$

pour $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ et où γ_i^{space} est le vecteur des coordonnées spatiales de γ_i .

25.3 Implémentation de la théorie

L'implémentation de la théorie précédente présente de grandes difficultés. En effet, le choix des courbes à définir est déjà problématique et nous décidons d'utiliser des fonctions polynomiales reliées aux splines cubiques dans notre modélisation. Cependant, la complexité atteinte par ce choix reste encore trop élevée.

Le problème essentiel est le suivant : nous devons construire des courbes spatiales

$$\gamma_i^x(t), \gamma_i^y(t), \gamma_i^z(t), 0 \leq t \leq 1, i = 1, 2 \dots 6,$$

ainsi qu'une courbe temporelle commune $\gamma^e(t)$, avec les fonctions cubiques suivantes¹ :

¹La théorie des splines garantit que ce type de courbe a une solution unique pour tout point avec vitesse de départ ($t = 0$) et d'arrivée ($t = 1$).

$$\begin{aligned}
\gamma_i^x(t) &= x_{i,3}t^3 + x_{i,2}t^2 + x_{i,1}t + x_{i,0} \\
\gamma_i^y(t) &= y_{i,3}t^3 + y_{i,2}t^2 + y_{i,1}t + y_{i,0} \\
\gamma_i^z(t) &= z_{i,3}t^3 + z_{i,2}t^2 + z_{i,1}t + z_{i,0} \\
\gamma^e(t) &= e_3t^3 + e_2t^2 + e_1t + e_0
\end{aligned}$$

Pour ces courbes, nous avons donné les points de départ ($t = 0$) et d'arrivée ($t = 1$), qui se trouvent dans la région en satisfaisant les conditions géométriques $F_k(t) > 0$ et newtoniennes $m_i \cdot |d^2\gamma_i^{espace}/de^2(t)| < K_i$. Les coefficients inconnus doivent être trouvés de sorte que ces courbes aient leur valeurs dans cette même région pour tout $0 \leq t \leq 1$.

Pour satisfaire ces inégalités polynômiales pour $0 \leq t \leq 1$, on applique la méthode algébrique classique des *chaînes de Sturm* qui décrivent le nombre de zéros des polynômes par des changements de signe pour des valeurs de polynômes canoniques déduits des polynômes donnés par l'algorithme euclidien. Cette méthode est théoriquement correcte, mais le calcul explicite des polynômes canoniques (avec par exemple Mathematica®) est extrêmement fastidieux et le calcul des coefficients pour tous les doigts (!) n'a pu être achevé que pour des polynômes quadratiques. L'assise théorique de notre modèle doit donc être développée dans le futur.

25.4 Une première expérience

En se basant sur ces méthodes, Stefan Müller calcula une main de pianiste animée jouant la partie de la main droite d'une petite pièce de Czerny (la même que celle utilisée dans nos expériences avec le tempo, voir section 20.1).



FIG. 25.3 – Une main de pianiste animée jouant la partie de la main droite d'une petite pièce de Czerny d'après la modélisation de Stefan Müller.

Pour le calcul des détails anatomiques de ce jeu, on utilise non seulement les courbes des bouts de doigts, mais également la méthode de la cinématique inverse qui permet d'obtenir les coordonnées supplémentaires.

Cette première expérience dans la construction de gestes a permis de mettre en évidence des questions précises. D'abord, il semble que le concept du geste ne peut pas se limiter aux courbes isolées : un geste devrait être conçu comme un système de plusieurs courbes. Dans notre exemple, le mouvement total des doigts de la main se compose de courbes partielles (représentant la descente ou le repos sur la touche du doigt) qui sont juxtaposées l'une à l'autre. De plus, nous n'avons pas su, dans notre modèle, décrire la forme des doigts. Par ailleurs, pour un geste plus complet, comprenant tout le corps humain (les bras, la tête, etc...) il faudrait concevoir des diagrammes plus ramifiés de courbes partielles. Nous allons donc construire dans le chapitre suivant une architecture de concepts plus puissante pour répondre à ces exigences.

Chapitre 26

Eléments d'une théorie exacte de la gestuelle en musique

*Was der Geist sinnlich von der Musik empfindet,
das ist die Verkörperung geistiger Erkenntnis¹.*

Ludwig van Beethoven

26.1 Des gestes physiques aux gestes topologiques

Nous allons maintenant présenter un cadre mathématique pour décrire rigoureusement le concept du geste dont nous avons précédemment discuté la portée philosophique et donné un exemple concret de modélisation mathématique.

Nous avons conclu le chapitre précédent sur l'idée qu'il fallait concevoir la nature composée du geste en utilisant un système dans lequel nous pourrions séparer les différentes parties le composant. Ce système doit permettre de distinguer, dans cette composition de parties, le squelette d'un geste (son aspect diagrammatique abstrait) du « corps » (le système de courbes dont se compose le geste).

La discussion ontologique de la section 24.6 nous a en réalité déjà fourni une piste possible pour la solution. L'image qui y apparaît indique que le geste est une interprétation des flèches abstraites d'un graphe orienté. Cette interprétation se fait par des courbes paramétrées. D'où la définition suivante : un geste consiste en un graphe orienté Γ , un espace topologique X et une application γ qui à toute flèche $a : x \rightarrow y$ de Γ associe une courbe continue $\gamma(a) : [0, 1] \rightarrow X$ dans X à condition que les sommets en commun à deux flèches se dirigent dans des points communs des bords des courbes correspondantes. Par exemple, si $a : x \rightarrow y, b : z \rightarrow x$ sont deux flèches de Γ alors on a $\gamma(a)(0) = \gamma(b)(1)$ (voir la figure 26.1 pour une illustration d'un geste de doigts de pianiste dans un espace physique à trois dimensions). On appelle Γ *le graphe* et X *l'espace* du geste. Si $I = [0, 1]$ dénote l'intervalle réel unité, l'espace des courbes continues $c : I \rightarrow X$ est noté par $I@X$. On note² le geste par $\gamma : \Gamma \rightarrow I@X$.

¹Ce que l'esprit perçoit de la musique avec ses sens, est l'incarnation de la connaissance spirituelle.

²Cette notation fait référence à la définition mathématique rigoureuse d'un geste comme morphisme de

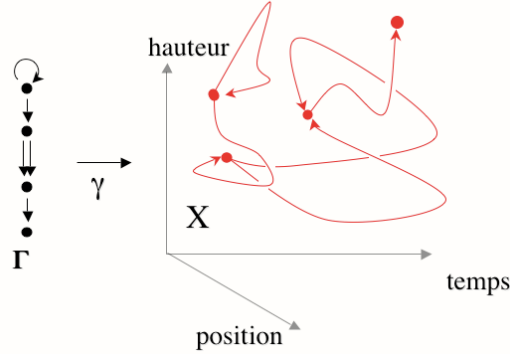


FIG. 26.1 – Une représentation du geste pianistique dans un espace physique à trois dimensions.

Notre exemple montre un espace classique en physique. C'est bien là la motivation intuitive de ce concept. Mais ceci est quelque peu trompeur car nous avons intuitivement tendance à confondre le paramètre de ces courbes avec la coordonnée du temps. Or, rien ne nous empêche de prendre pour espace X d'un geste un espace purement géométrique. Par exemple, si l'on considère un geste $\lambda : \Lambda \rightarrow I @ \mathbb{R}^3$ avec $\Lambda = t \xrightarrow{\text{boucle } T} t$ la boucle T au sommet t (c'est l'objet final dans la catégorie des graphes orientés) et $\mathbb{R}^3$ l'espace de la géométrie spatiale ordinaire, un tel geste n'est rien d'autre qu'une courbe continue fermée dans $\mathbb{R}^3$.

Notre conceptualisation est donc ouverte à l'usage d'espaces X topologiques tout à fait généraux, l'exemple physique n'étant qu'une première motivation. Cette généralisation est loin d'être un simple jeu intellectuel de mathématiciens. Elle sert entre autres à l'intégration des principes de la pensée diagrammatique que nous avons esquissés au paragraphe 24.5 et des principes qui demandent une approche gestuelle de la pensée pure au-delà de mouvements corporels. En fait, si l'IA située ne veut pas aboutir à un autre échec, elle devra tenir compte d'un concept de geste qui dépasse la simple simulation du corps concret. Notre conceptualisation illustre clairement la force unificatrice de l'abstraction mathématique : les mêmes structures qui servent à la description de gestes physiques sont les outils pour une conceptualisation de « gestes-pensées » dans leur globalité. Nous allons voir dans la suite les lourdes conséquences que contient cette approche.

26.2 Hypergestes

Pour comprendre le problème qui donne lieu à la conceptualisation proposée, nous regardons la situation connue du doigt qui enfonce une touche du clavier. On peut décrire ce geste par un graphe Γ à trois flèches comme il est montré à droite dans la figure 26.2. La première flèche pointe vers la courbe de la descente de la position verticale (la hauteur restant constante) au-dessus du clavier. La deuxième montre la courbe à position verticale et hauteur constantes

graphes orientés, de domaine Γ et de codomaine le graphe « spatial » des courbes continues dans X . Voir [37] pour plus de détails.

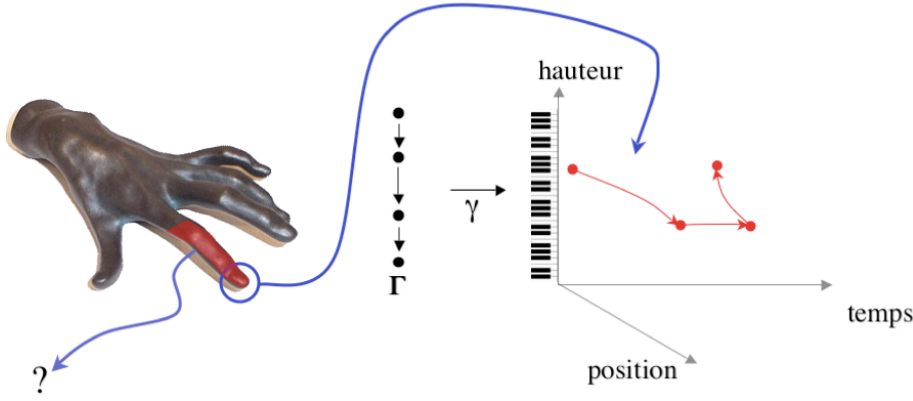


FIG. 26.2 – La gestuelle du bout d’un doigt n’inclut pas la dynamique du doigt entier. Pour achever une telle représentation, nous avons développé le concept d’« hypergeste ».

pour une durée temporelle. La troisième montre le mouvement vertical ascendant.

Ceci ne fonctionne que si l’on néglige la forme du doigt et sa déformation dynamique. Une solution approximée de ce problème serait de décrire le trajet spatio-temporel d’un réseau de points de la surface du doigt. Mais une vraie solution aurait bien sûr besoin d’un nombre élevé de paramètres.

Mais cela n’est pas uniquement une question de nombre de paramètres nécessaires pour décrire une gestuelle complexe. En effet un geste peut être composé de gestes plus élémentaires, non pas des « sous-gestes », mais des gestes qui fonctionnent comme des points d’un geste d’un niveau plus haut. Un doigt en mouvement est considéré comme un point en mouvement. Il faut donc montrer que cette pensée hiérarchique des gestes est incluse dans notre concept.

La pensée diagrammatique que nous avons discutée auparavant conçoit également le diagramme comme étant composé de diagrammes d’ordre inférieur. En effet, la thèse de Cavaillès selon laquelle la compréhension se fait en attrapant le geste et en le poursuivant est beaucoup plus profonde. Charles Alunni l’interprète dans le sens que le geste que l’on attrape est transformé le long d’une trajectoire d’ordre supérieur (dans un espace dont les points sont des gestes) et que cette trajectoire est donc un hypergeste contenant le geste à attraper.

La clé pour la réalisation du concept d’hypergeste est l’observation que l’ensemble des gestes de graphe Γ dans l’espace topologique X est encore un espace muni d’une topologie canonique, espace que nous dénotons par $\Gamma @ X$. La définition précise de cette topologie est quelque peu technique³, mais intuitivement, on peut dire que deux gestes $\gamma_1, \gamma_2 : \Gamma \rightarrow I @ X$ sont proches si les courbes correspondantes dans X le sont. Ceci étant, on peut alors automatiquement considérer pour un deuxième graphe Δ des gestes $\delta : \Delta \rightarrow I @ (\Gamma @ X)$, i.e. des gestes dont les courbes sont *des courbes de gestes* du graphe Γ dans l’espace X !

On conclut alors que cette itération est sans limite, c’est-à-dire que l’on peut donc considérer des espaces d’hypergestes n -uples

$$\Gamma_n @ \Gamma_{n-1} @ \Gamma_{n-2} @ \dots @ \Gamma_1 @ \Gamma_0 @ X.$$

³Voir [37] pour la théorie mathématique.

Pour commencer, prenons l'exemple d'un hypergeste spatial, un noeud qui consiste en une boucle de boucles (voir figure 26.3). Cet hypergeste est donc dans l'espace $\Lambda @ \Lambda @ \mathbb{R}^3$.

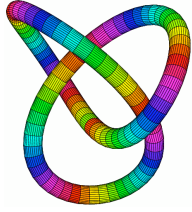
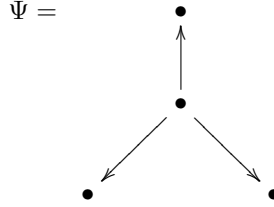


FIG. 26.3 – Un hypergeste de noeuds, composé d'une boucle de boucles.

Un exemple un peu moins simple montre le déploiement temporel d'un hypergeste spatial à trois bras. Partons de l'espace des hypergestes $\beta \in Q = \Psi @ \Sigma @ \mathbb{R}^3$ avec le graphe Ψ à trois bras :



On considère alors l'espace produit cartésien $Q \times \mathbb{R}$, dont la seconde coordonnée désigne le temps. En prenant le graphe $\uparrow = \bullet \rightarrow \bullet$, un geste $\delta : \uparrow \rightarrow I @ (Q \times \mathbb{R})$ signifie qu'on se donne une courbe dans $Q \times \mathbb{R}$, ce qui équivaut à deux gestes $\delta_Q : \uparrow \rightarrow I @ Q$ et $\delta_{\mathbb{R}} : \uparrow \rightarrow I @ \mathbb{R}$, où δ_Q est un hypergeste spatial dans $\uparrow @ \Psi @ \Sigma @ \mathbb{R}^3$ et $\delta_{\mathbb{R}}$ est un geste temporel dans $\uparrow @ \mathbb{R}$. La figure 26.4 montre quatre étapes de cette trajectoire temporelle d'un corps à trois bras.

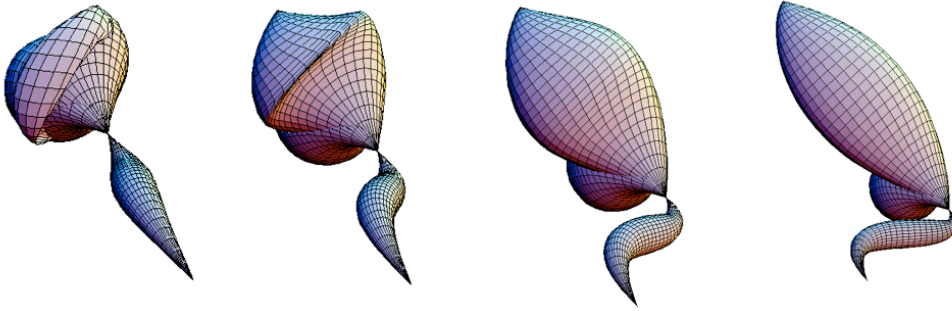


FIG. 26.4 – Quatre étapes (de gauche à droite) d'une « danse » d'un hypergeste dans Q .

26.3 Du geste au symbole : la topologie algébrique

Les constructions précédentes montrent que le concept mathématique de geste que nous venons de proposer englobe une variété riche en expressivité structurelle pour toute une gamme de gestes concrets (physiques) et abstraits (topologiques). Ce qui reste assez mystérieux pour le moment est de comprendre comment, à partir de gestes, on pourrait rejoindre la pensée symbolique (en particulier : la logique). C'est ce que nous voulons discuter dans cette section conclusive du chapitre⁴. Pour cela, le formalisme présent offre deux outils. Le premier découle du

⁴Pour une analyse détaillée de ces réflexions, on pourra se référer à [37].

graphe orienté associé à tout geste. Le second concerne la construction de structures symboliques à partir des courbes continues des gestes.

Quant au premier outil, la structure abstraite du graphe orienté (squelette du geste) s'insère naturellement dans une logique intuitionniste qui découle du fait général que la catégorie des graphes orientés est un topos. Ce puissant outil nous offre une logique « gratuite » bien meilleure que le « cheap design » courant dans l'IA située. Ces aspects logiques sont développés dans [37].

Passons plutôt au second outil, beaucoup plus « dramatique » et caractéristique de la puissance de la pensée diagrammatique des gestes. Il s'agit de la construction de structures symboliques à partir des courbes continues des gestes, rendue possible par la branche extrêmement féconde de *la topologie algébrique*. Cette branche est en effet responsable de l'invention de la théorie des catégories par Samuel Eilenberg et Saunders Mac Lane [20] il y a 60 ans.

Le passage de ce monde des courbes continues aux structures symboliques telles qu'elles sont typiquement présentes en algèbre (morphisme au lieu de courbe, se référer à la section 24.6) se fait avec une idée étonnante : on estompe légèrement le concept de courbe, ce qui suggère l'idée d'imprécision dans l'entendement courant. Pour ce faire, on confond deux courbes $c_1, c_2 : I \rightarrow X$ démarrant au point commun $c_1(0) = c_2(0) = x$ et terminant au point commun $c_1(1) = c_2(1) = y$ dans un espace topologique X si elles sont homotopes. Intuitivement, ceci signifie que que nous pouvons déformer c_1 pour obtenir c_2 par un processus continu. Mathématiquement, cela se traduit par le fait qu'il existe une fonction continue $C : I \times I \rightarrow X$ telle que $c_1 = C|I \times \{0\}$, $c_2 = C|I \times \{1\}$.

L'homotopie est une relation d'équivalence, ce qui signifie qu'elle vérifie les trois propriétés suivantes :

- Réflexivité : une courbe est toujours homotope à elle-même
- Symétrie : si c_1 est homotope à c_2 , alors c_2 est homotope à c_1
- Transitivité : si c_1 homotope à c_2 et c_2 homotope à c_3 alors c_1 homotope à c_3

Cette relation définit des classes d'homotopie $[c]$ de courbes $c : x \rightarrow y$ démarrant en x et terminant en y . L'ensemble de ces classes est noté $H_X(x, y)$.

L'essence de ce concept est que les classes d'homotopie de courbes permettent de définir une catégorie H_X de la manière suivante : les objets de H_X seront les points de X et tout couple de points (x, y) de X , l'ensemble des morphismes est par définition l'ensemble $H_X(x, y)$. Pour terminer la construction de cette catégorie, il faut comprendre ce que représente la composition de deux morphismes, c'est-à-dire de deux classes d'homotopies $[c]$ et $[d]$ des deux courbes continues $c : x \rightarrow y$ et $d : y \rightarrow z$. Pour ce faire, on pose $dc : x \rightarrow z$ pour la courbe $dc(t) = c(2t)$, $t \leq 1/2$, $dc(t) = d(2t-1)$, $t \geq 1/2$. On définit alors la composition $[d] \cdot [c]$ des classes $[d], [c]$ par $[dc]$. Cette composition est associative et les classes des courbes constantes sont les morphismes neutres. Par ailleurs, tout morphisme est un isomorphisme (en effet, l'inverse de $[c]$ est la classe de la courbe $c'(t) = c(1-t)$).

Cette catégorie H_X est appelée *le groupoïde fondamental de X* . Pour tout point x de X , on a un groupe⁵ $H_X(x, x)$, noté $\pi_1(x, X)$ et appelé *le groupe fondamental de X en x* . Plus

⁵Un groupe est un ensemble G contenant un élément e appelé élément neutre. G est muni d'une opération $\cdot$ pour tout couple (x, y) dans G . Cette opération est associative, i.e. que pour tout triplet (x, y, z) dans G on a $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$. Pour cette opération, l'élément neutre vérifie la propriété : $x \cdot e = e \cdot x = x$ pour tout x dans G . Enfin, il existe pour tout x un inverse x^{-1} vérifiant la propriété $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$. Le groupe G est commutatif ou abélien si l'opération est commutative, i.e. si $x \cdot y = y \cdot x$ pour tout couple (x, y) dans G .

précisément, on a sur H_X une composition de classes d'homotopie de courbes de x à x , définie par la composition donnée ci-dessus. Par ailleurs, l'élément neutre et l'opération d'inversion de ce groupe sont définis par les structures synonymes présentées ci-dessus. Si tout couple de points (x, y) de X est connecté par une courbe continue, tous les groupes fondamentaux sont essentiellement les mêmes (isomorphes) et on parle alors *du groupe fondamental* $\pi_1(X)$.

Par exemple, le groupe fondamental du cercle est le groupe $\mathbb{Z}$ des entiers avec l'addition naturelle. Le groupe fondamental de la sphère est le groupe trivial, i.e. le groupe uniquement composé de l'élément neutre. Le groupe fondamental du tore est $\mathbb{Z}^2$, le groupe des couples (x, y) d'entiers avec l'opération d'addition naturelle. Ajoutons que pour tout entier positif n , il existe des espaces topologiques, les espaces lenticulaires, dont le groupe fondamental est $\mathbb{Z}_n$ pour tout $n > 0$, le groupe des entiers modulaires n . On peut montrer que tout groupe abélien engendré par un nombre fini d'éléments est le groupe fondamental d'un espace topologique.

Comme les groupes centraux pour les calculs élémentaires de la théorie des nombres et pour la théorie mathématique de la musique sont les groupes abéliens engendrés par un nombre fini d'éléments, les résultats précédents mettent en évidence le fait étonnant que tous ces groupes sont des groupes fondamentaux construits à partir de courbes continues, ce qui s'inscrit dans le contexte de la théorie du geste.

Ainsi la topologie algébrique relie les structures centrales du calcul symbolique (les groupes abéliens) aux concepts centraux de la corporéité (les gestes).

Sixième partie

Epilogue

Chapitre 27

Les directions du futur

*Jeder Anfang ist ein Ende*¹.
Hermann Hesse

27.1 Les lignes directrices

Je ne vais pas, dans ce chapitre conclusif, me prononcer sur les nombreuses ramifications théoriques et tout à fait fascinantes de l'interaction mathématique-musique que la recherche actuelle met en œuvre. Mon but est plutôt de proposer des perspectives en vue d'une future synthèse des cultures des réflexions mathématiques et musicales. Une collaboration pourrait alors aider à surmonter les subtiles différences entre les deux approches.

Nous repérons les trois pistes suivantes dont l'étude devrait mettre en évidence les interfaces et les forces de friction :

Formules et gestes Ce sujet met en relief la tension profonde entre l'action du faire et la pensée du fait, ces antagonistes par excellence de la compréhension naïve du comportement humain. Nous en avons donné une très courte description au cours du chapitre introductif, par un diagramme « d'adjonction » de processus

$$\text{formules} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{musique}} \\ \xleftarrow{\text{mathématique}} \end{array} \text{gestes}$$

qui fut enrichi par « l'oignonologie » décrite dans la section 24.6. Ces deux partenaires adjoints ne sont pas, dans les modèles présents, unifiés, mais définissent les sites limites d'un dynamisme musico-mathématique de nature « ping-pong », un système communicatif riche, bien sûr, mais pas encore une cohabitation de deux aspects partiels d'un univers complet et cohérent.

Plus précisément, le projet d'une réunion des deux perspectives dans un tout plus complet devrait en premier lieu résoudre le problème du passage d'une formule, par « réchauffement

¹Tout commencement est une fin.

conceptuel », au geste, dont il représente la version gelée, ainsi que, dans la direction opposée, de l'action du gel. Du côté mathématique, c'est en effet toujours un mystère de comprendre le passage du geste à la formule. Quel est le processus menant de la compréhension d'un fait mathématique à la preuve formelle d'un théorème associé ? Alexandre Grothendieck, dans une célèbre lettre à Gerd Faltings [23], insiste sur la primauté de la compréhension sur la preuve formelle : un fait doit d'abord être compris, et seulement après coup pourra-t-on procéder à la démonstration formelle. Cette compréhension est ce que nous qualifions d'« harmonie de gestes » : une connaissance d'une coopération intense de gestes dont l'équilibre est mis en forme de théorème. Dans sa présentation lucide [4] sur l'art des conjectures, Yves André met en effet en évidence le rôle du geste dans la genèse d'une conjecture : « La conjecture possède le pouvoir un peu magique de la formulation, elle "informe l'informe" si je puis dire. C'est aussi ce que font les théories mathématiques, mais la conjecture le fait d'un geste unique, impérieux, tandis que le façonnage des théories requiert des gestes hétérogènes et multiples. »

Inversement, l'interprétation d'une formule abstraite consiste en un acte profondément musical, et ceci aussi quand on fait des mathématiques. Faire n'est pas un verbe par hasard : faire veut dire réchauffer la formule, lui rendre la vie des gestes qu'elle tient captives. Un mathématicien doit récupérer les théorèmes dans le « réfrigérateur » de la formalisation scientifique pour réaliser sa « recette » à travers les gestes. Je suggère que la pratique et théorie de l'interprétation (concertante) musicale pourrait apprendre aux mathématiciens un certain nombre de concepts pour s'enfuir de la « prison bourbakiste ».

Science et arts La seconde piste dont l'évocation me semble décisive concerne l'abolition de l'amour-haine entre la science et de l'art. On sait que les mathématiciens réclament de l'art dans la production de leur science. Et des scientifiques de premier ordre ne cessent d'utiliser des critères d'art pour leur travail scientifique. Par exemple, Hermann Weyl, questionné sur le rôle de l'esthétique dans sa recherche, répondit : « My work always tried to unite the true with the beautiful, but when I had to choose one or the other, I usually chose the beautiful². »

Je cite également Roger Penrose qui ajoute dans une intervention en 1995 : « The issues of mathematical truth and beauty are profoundly intertwined. I am sure that these issues also have much to say about music³. » De l'autre côté, un grand nombre d'artistes reconnus, tels que les compositeurs Pierre Boulez et Iannis Xenakis, s'appuient sur les mathématiques pour développer leur travail artistique. Néanmoins, malgré une volonté de synthèse, ces deux domaines ne sont cependant jamais réellement unifiés.

Notre question concernant cette distance des approches qui échangent leurs qualités est la suivante : pourquoi la création scientifique serait-elle tellement différente de la création artistique ? On pourrait être d'accord sur la différence des valeurs de vérité qui entrent dans la science vis-à-vis de l'art. Mais alors, la différence serait une nuance dans le choix des algèbres logiques (Heyting, Boole, rien de qualitatif en tout cas). Les arts engageraient des algèbres plus souples, plus riches en variations et couleurs⁴ que les algèbres « pauvres » de

²Dans mes travaux, j'ai toujours essayé d'unifier vérité et beauté, mais si j'avais à choisir entre les deux, j'avais l'habitude de choisir la beauté.

³Les questions de la vérité et de la beauté en mathématiques sont profondément interdépendantes. Je suis sûr que ces questions pourraient également apporter à la musique.

⁴N'oublions pas que tout espace topologique donne lieu à une algèbre de Heyting, i.e. la richesse d'une

la logique classique utilisée dans la création de vérités en science. Nous ignorons si la différence caractéristique des deux champs peut être réduite à cette situation ou si la souplesse logique des arts est accouplée à des styles dramatiquement différents de ceux des sciences. Les artistes prendraient plus plaisir à jouer avec les couleurs logiques qu'à se concentrer sur le simple caractère « vrai » ou « faux » de leurs résultats.

Créativité et discipline La piste précédente soulignait le fait que les mathématiciens et les musiciens construisent leurs résultats suivant des logiques radicalement différentes. La dernière piste s'apparente à celle-ci mais concerne davantage l'approche mise en œuvre par ces logiques. La relation du mathématicien avec sa production serait définie par la discipline du vrai tandis que la relation du musicien avec son œuvre serait déterminée par la création de couleurs de vérités plutôt que par des valeurs logiques qui définissent le succès ou non de ses efforts.

La question de la relation créativité versus discipline me semble centrale parce qu'elle définit l'attitude, le geste de l'intervention auprès du matériel donné. Comment envisager une théorie mathématique ? La Nouvelle Musique comme négation perpétuelle de la musique précédente, est-ce un modèle pour les nouvelles créations mathématiques ? Soyons bien clairs sur ce point : il ne s'agit pas ici de commencer à nier de manière absurde les résultats mathématiques. Le projet serait plutôt de travailler sur des styles et des cadres conceptuels pour créer de nouvelles perspectives puissantes pour la solution de problèmes difficiles.

On ne peut pas déléguer de tels projets à des mathématiciens novices, car ils sont encore trop emprisonnés dans le contrôle des techniques. Il s'agit là d'une analogie avec l'éducation musicale par le contrepoint classique : il ne faut pas le voir comme une simple imitation de styles ou schémas de pensée musicale du passé, mais bien comme une introduction à la maîtrise technique dans l'organisation des sons. Cependant l'enrichissement de la discipline technique par une créativité musicale pour le mathématicien expert est un projet valable.

27.2 Technologie et pratique

Pour terminer notre esquisse de perspectives du futur de la relation musique-mathématique, je tiens à souligner le rôle crucial de la pratique avec les interfaces instrumentales aussi bien en musique qu'en mathématique.

Les technologies instrumentales ne sont pas des béquilles servant aux expressions d'ordre supérieur. Une telle vue ne peut provenir que de réflexions de personnes qui n'ont jamais été en contact intime avec la musique ou les mathématiques. La musique comme les mathématiques sont des réalités humaines qui se font et qui, au-delà de leur réalisation ne sont que des chimères culturelles. On sait que toute compréhension humaine provient de l'action et non de la réflexion passive. Même l'orientation visuelle ne s'apprend qu'en tâtonnant le long des surfaces, ceci est un fait commun de la recherche comportementale. Le geste modèle le corps du temps et ce faisant, construit notre compréhension de la matière en question.

topologie est de nature logique !

En opposition à l'image habituelle des mathématiques en tant que science du calcul, le mathématicien penseur n'est pas l'être philosophique qui ne touche à rien et qui ne fait qu'observer les vérités éternelles des cieux platoniciens. C'est un être en pleine activité gestuelle qui vit ses pensées, qui les alimente comme le musicien engendre ses partitions. C'est un joueur de ping-pong qui fait « danser » les formules avec ses mains et reste fasciné par leur torsion qui, elle, provoque les gestes les plus forts, la créativité la plus alerte.

Bibliographie

- [1] Theodor Wiesengrund Adorno, *Fragment über Musik und Sprache*, Stuttgart, Jahresring, 1956.
- [2] Theodor Wiesengrund Adorno, *Der getreue Korrepetitor* (1963), Gesammelte Schriften, Bd. 15, Suhrkamp, Francfort, 1976.
- [3] Theodor Wiesengrund Adorno, *Zu einer Theorie der musikalischen Reproduktion*, Suhrkamp, Francfort, 2001.
- [4] Yves André, « S’orienter dans la pensée : l’art des conjectures », Séminaire *Musique et mathématiques*, ENS, Paris, 2005.
- [5] Gérard Assayag, Guerino Mazzola, François Nicolas, *Penser la musique avec les mathématiques*, Collection « Musique/Sciences », Delatour/Ircam, Paris, 2006.
- [6] Noël Batt (éd), *Penser par le diagramme*, Presses Universitaires de Vincennes, n° 22, Vincennes, 2004.
- [7] Walter Benjamin, *Versuche ber Brecht*, Suhrkamp, Francfort, 1971.
- [8] Jan Beran & Guerino Mazzola, « Analyzing Musical Structure and Performance—a Statistical Approach. Statistical Science », vol. 14, n° 1, 47-79, 1999.
- [9] Jan Beran & Guerino Mazzola, « Timing Microstructure in Schumann’s *Träumerei* as an Expression of Harmony, Rhythm, and Motivic Structure in Music Performance », *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 39, n° 5/6, 99-130, 2000.
- [10] Anne Boissière, « Geste, interprétation, invention selon Pierre Boulez », *Revue DEMéter*, déc. 2002, Univ. Lille-3.
- [11] Pierre Boulez, *Musikdenken heute I,II*, Darmstädter Beiträge V, VI, Schott, Mainz 1963, 1985.
- [12] Pierre Boulez, *Jalons (dix ans d’enseignement au Collège de France)*, Bourgeois, Paris, 1989.
- [13] Pierre Boulez, *L’Ecriture du geste*, Bourgeois, Paris, 2002.
- [14] Mihaly Csikszentmihalyi, *The Psychology of Optimal Experience*, Harper and Row, New York, 1990.
- [15] Carl Dahlhaus & Eggebrecht Hans Heinrich, *Was ist Musik ?*, Heinrichshofen, Wilhelmshaven et al., 1985.

- [16] Carl Dahlhaus, « Über den Begriff der tonalen Funktion » , in Vogel M. (ed.), *Beiträge zur Musiktheorie des 19. Jahrhunderts*, Bosse, Regensburg, 1966.
- [17] Carl Dahlhaus, *Untersuchung über die Entstehung der harmonischen Tonalität*, Bärenreiter, Kassel et al., 1967.
- [18] Carl Dahlhaus et al., *Neues Handbuch der Musikwissenschaft*, Bd. 1-13, Athenaion and Laaber, Laaber, 1980-1993.
- [19] Gilles Deleuze, *Francis Bacon : Logique de la sensation*, Éditions de la Différence, Paris, 1981.
- [20] Samuel Eilenberg & Saunders Mac Lane, « General theory of natural equivalences », *Trans. Amer. Math. Soc.*, 58, 1945.
- [21] Roberto Ferretti & Guerino Mazzola, « Algebraic Varieties of Musical Performances », *Tatra Mt. Math. Publ.*, 23, 59-69, 2001.
- [22] Hermann Gottschewski, « Tempohierarchien », *Musiktheorie*, Heft 2, 1993.
- [23] Alexander Grothendieck, « Lettre à Gerd Faltings » (1983) in Geometric Galois Actions I, P Lochak and L Schneps eds., *London Math Society Lecture Note Series*, 242, Cambridge University Press, 2000.
- [24] Eduard Hanslick, *Vom Musikalisch-Schönen*. Breitkopf und Härtel (1854), Wiesbaden, 1980.
- [25] Stephen Hawking, *A Brief History of Time*, Bantam Books, New York, 1988.
- [26] Ray Jackendoff & Fred Lerdahl, *A Generative Theory of Tonal Music*, MIT Press, Cambridge MA, 1983.
- [27] Karl Jaspers, *Psychologie der Weltanschauungen*, Berlin, Springer, 1954.
- [28] Joachim Kaiser, *Beethovens 32 Klaviersonaten und ihre Interpreten*, Fischer, Frankfurt, 1979.
- [29] Emmanuel Kant, *Kritik der reinen Vernunft*, Meiner, Hamburg, 1956. Traduction française *Critique de la raison pure*, Gallimard, Paris, 1990.
- [30] Adolf Bernhard Marx, *Lehre von der musikalischen Komposition*, Breitkopf & Härtel, Leipzig, 1837-1847.
- [31] Guerino Mazzola, *Gruppen und Kategorien in der Musik*, Heldermann, Berlin, 1985.
- [32] Guerino Mazzola, *presto Software Manual*, STOA music, Zürich, 1989-1994.
- [33] Guerino Mazzola, *Synthesis*, STOA 1001.90, Zürich, 1990.
- [34] Guerino Mazzola, *The Topos of Music*, Birkhäuser, Bâle-Boston, 2002.
- [35] Guerino Mazzola, *L'essence du bleu*, Acanthus, Rütenen, 2002.
- [36] Guerino Mazzola & Moreno Andreatta, « From a Categorical Point of View : K-nets as Limit Denotators », *Perspectives of New Music*, Vol. 44, n° 2, p. 88-113, 2006.
- [37] Guerino Mazzola & Moreno Andreatta, « Diagrams, Gestures, and Formulas in Music », *Journal of Mathematics and Music* 2007, Vol. 1, n° 1, p. 23-46, 2007.
- [38] Maurice Merleau-Ponty, *Phénoménologie de la perception*, Gallimard, Paris, 1945.

- [39] Stefan Müller, *Pianists Hands : Synthesis of Musical Gestures*, thèse PhD, Universität Zürich, 2004.
- [40] Geoffrey Payzant, *Glenn Gould : Music and Mind*, Van Nostrand Reinhold, Toronto, 1978.
- [41] Roger Penrose, *The Road to Reality*, Vintage, Londres, 2002.
- [42] Erwin Ratz, *Einführung in die musikalische Formenlehre*, Universal Edition, Vienne, 1973.
- [43] Bruno Repp, « Diversity and Commonality in Music Performance : An Analysis of Timing Microstructure in Schumann's *Träumerei* », *J. Acoustic Soc. Am.* 92, 1992.
- [44] Rudolf Reti, *The Thematic Process in Music* (1951), Greenwood Press, Westport, 2nd ed., 1978.
- [45] Hugo Riemann, *System der musikalischen Rhythmik und Metrik*, Breitkopf und Härtel, Leipzig, 1903.
- [46] Hans Martin Ritter, *Das gestische Prinzip bei Bertold Brecht*, Prometh, Cologne, 1986.
- [47] Klaus-Jürgen Sachs, *Der Contrapunctus im 14. und 15. Jahrhundert*, AMW, Franz Steiner, Wiesbaden, 1974.
- [48] Harold Charles Schonberg, *Horowitz : His Life and Music*. Simon and Schuster, New York, 1992.
- [49] Arnold Schoenberg, *Harmonielehre* (1911), Universal Edition, Vienne, 1966.
- [50] Gilbert Simondon, *Du mode d'existence des objets techniques*, Aubier, Paris, 1989.
- [51] Peter Sloterdijk, *Selbstversuch*, Carl Hanser, Munich, 1993.
- [52] Volker Spicker, « Das Abstraktmotiv bei Cecil Taylor », *MusikTexte* 73/74, 1998.
- [53] Joachim Stange-Elbe, *Analyse- und Interpretationsperspektiven zu J.S. Bachs Kunst der Fuge mit Werkzeugen der objektorientierten Informationstechnologie*, Habilitationsschrift, Osnabrück, 2000.
- [54] David Sylvester, *Interviews With Francis Bacon*, Pantheon Books, New York, 1975.
- [55] Jürgen Uhde, *Beethovens Klaviermusik III*, Reclam, Stuttgart, 1974.
- [56] Jürgen Uhde & Renate Wieland, *Denken und Spielen*, Bärenreiter, Kassel et al., 1988.
- [57] Paul Valéry, *Cahiers I-IV* (1894-1914), Celeyrette-Pietri N. & Robinson-Valéry J. (éds.), Gallimard, Paris, 1987.
- [58] Jonathan Winson, *Brain and Psyche. The Biology of the Unconscious*, Anchor Press/Doubleday, Garden City NY, 1985.

Dépôt légal : 4^e trimestre 2007
Imprimé en France