

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Espace I. Topos</b>	<b>7</b>
1.1	Topologie générale . . . . .	8
1.1.1	Ce que c'est . . . . .	8
1.1.2	Voisinages . . . . .	9
1.1.3	Intérieur et frontière . . . . .	10
1.1.4	De l'espace topologique au treillis de ses ouverts . . . . .	11
1.1.5	Applications continues . . . . .	12
1.2	L'idée de surface de Riemann. Sites . . . . .	12
1.2.1	Ambiguïtés . . . . .	12
1.2.2	Revêtements à plusieurs feuillets . . . . .	13
1.2.3	Du treillis des ouverts aux sites de Grothendieck . . . . .	13
1.3	Du local au global. Faisceaux . . . . .	14
1.3.1	Données locales. Préfaisceaux . . . . .	14
1.3.2	Recollement de données locales compatibles. Faisceaux . . . . .	15
1.3.3	Théorie des obstructions . . . . .	15
1.4	Faisceaux sur un site. Topos de Grothendieck . . . . .	15
1.4.1	Ce que c'est. . . . .	15
1.4.2	Espaces et topos. . . . .	16
1.5	Catégories, foncteurs, adjonction . . . . .	17
1.5.1	Catégories . . . . .	17
1.5.2	Foncteurs . . . . .	18
1.5.3	Foncteurs adjoints . . . . .	19
1.5.4	Application : morphismes de topos et points d'un topos . . . . .	20
1.6	Topos et Logique intuitionniste . . . . .	20
1.6.1	Les topos entre Géométrie et Logique . . . . .	20
1.6.2	Règles du calcul propositionnel . . . . .	21
1.6.3	Logique intuitionniste et treillis de Heyting . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Espace II. Algèbres d'opérateurs</b>	<b>23</b>
2.1	Associativité et commutativité . . . . .	24
2.2	Petite boîte à outils d'algèbre linéaire . . . . .	24
2.2.1	Espaces vectoriels . . . . .	25
2.2.2	Applications linéaires . . . . .	25
2.2.3	Bases, dimension, matrices . . . . .	26
2.2.4	Importance des problèmes linéaires . . . . .	27
2.2.5	Algèbres . . . . .	27
2.3	Espaces et fonctions . . . . .	28
2.3.1	Grandeur . . . . .	28
2.3.2	Localité . . . . .	29

2.3.3	Topographie . . . . .	29
2.3.4	Le point de vue fonctionnel sur les espaces . . . . .	30
2.3.5	L'idée de Géométrie non commutative . . . . .	31
2.4	Espaces de Hilbert et Analyse fonctionnelle . . . . .	32
2.4.1	Espaces euclidiens . . . . .	32
2.4.2	Espaces de Hilbert . . . . .	34
2.4.3	Opérateurs sur un espace de Hilbert et algèbres stellaires . . . . .	34
2.5	Spectres . . . . .	35
2.5.1	De Newton à Gelfand . . . . .	35
2.5.2	Retour au point de vue fonctionnel . . . . .	36
2.6	Algèbres de von Neumann, facteurs et poids . . . . .	37
2.6.1	Ce que c'est . . . . .	37
2.6.2	Facteurs de type <i>II</i> et géométrie en dimension continue . . . . .	38
2.6.3	Facteurs de type <i>III</i> et dynamique . . . . .	39
2.6.4	Classification des facteurs moyennables . . . . .	39
2.6.5	Prolongements . . . . .	40
2.7	Logique des interactions . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Symétries I. Idées galoisiennes</b>	<b>43</b>
3.1	Théorie de Galois des équations algébriques . . . . .	44
3.1.1	Résolubilité par radicaux . . . . .	44
3.1.2	Groupe de Galois . . . . .	45
3.1.3	Correspondance de Galois . . . . .	47
3.2	Portée et enjeux de la « théorie de l'ambiguïté » . . . . .	47
3.2.1	Émergence d'un corps de concepts d'un type nouveau . . . . .	47
3.2.2	Fécondité du principe de correspondance galoisienne . . . . .	48
3.2.3	Thématisation des obstructions . . . . .	49
3.2.4	Changement de paradigme dans la conception des problèmes . . . . .	49
3.3	Revêtements, groupes fondamentaux . . . . .	50
3.3.1	La « montée vers l'absolu ». Le groupe $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ . . . . .	50
3.3.2	Théorie de Galois des revêtements . . . . .	50
3.3.3	Une vision géométrique de $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ . . . . .	51
3.4	Ambiguïtés galoisiennes en Analyse . . . . .	52
3.5	Groupes de Galois et nombres transcendants . . . . .	53
3.6	Un groupe de Galois « cosmique » ? . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Symétries II. Représentations linéaires</b>	<b>55</b>
4.1	Linéarité. Linéarisation . . . . .	56
4.1.1	Bref retour à l'Algèbre linéaire . . . . .	56
4.1.2	Linéarisation . . . . .	56
4.2	Le concept mathématique de représentation . . . . .	58
4.2.1	Objets généraux/objets particuliers . . . . .	58
4.2.2	Mode intrinsèque/mode extrinsèque . . . . .	59
4.2.3	Présentations . . . . .	60
4.2.4	Représentations . . . . .	61
4.2.5	Représentations linéaires . . . . .	62
4.3	Représentations linéaires des groupes . . . . .	63
4.3.1	Caractères : la théorie de Frobenius . . . . .	63
4.3.2	Groupes compacts et Analyse harmonique . . . . .	65
4.3.3	Problème de Tannaka . . . . .	65

4.3.4	Représentations linéaires et mécanique quantique . . . . .	66
4.3.5	Représentations linéaires en dimension infinie . . . . .	66
4.4	Problèmes de classification . . . . .	67
4.4.1	« Taxinomie » mathématique . . . . .	67
4.4.2	Classification des groupes finis simples . . . . .	68
4.4.3	Classification des groupes de Lie simples . . . . .	69
4.4.4	Classification des représentations linéaires et indécidabilité . . . . .	70
<b>5</b>	<b>Singularités</b>	<b>73</b>
5.1	Généricité, lissité, singularités . . . . .	73
5.1.1	Notion de singularité . . . . .	73
5.1.2	Enjeux . . . . .	74
5.1.3	Comment les singularités apparaissent . . . . .	75
5.2	Points critiques . . . . .	76
5.2.1	Linéarisation des champs de vecteurs . . . . .	76
5.2.2	Points critiques de fonctions . . . . .	76
5.2.3	Points critiques génériques . . . . .	77
5.2.4	Topographie et Théorie de Morse . . . . .	78
5.3	Généricité et stabilité . . . . .	78
5.3.1	La dialectique générique/singulier selon Poincaré . . . . .	78
5.3.2	L'exemple des draperies . . . . .	79
5.3.3	Singularités stables . . . . .	80
5.4	Déploiements et catastrophes . . . . .	81
5.4.1	Comment les singularités se déploient . . . . .	81
5.4.2	Singularités simples . . . . .	81
5.4.3	Géométrie symplectique et catastrophes . . . . .	82
5.5	Le contexte analytique . . . . .	83
5.5.1	Principe du prolongement analytique . . . . .	83
5.5.2	Comment les singularités disparaissent . . . . .	83
5.5.3	Le rôle des « groupes platoniciens » . . . . .	84
<b>6</b>	<b>Dualité</b>	<b>85</b>
6.1	Dualité linéaire . . . . .	85
6.1.1	Débuts et vicissitudes de la Géométrie projective . . . . .	85
6.1.2	Dualité en Géométrie projective . . . . .	87
6.1.3	Formes linéaires et dualité . . . . .	88
6.2	Dualités catégoriques . . . . .	89
6.2.1	Exemple primordial : espaces vectoriels de dimension finie . . . . .	89
6.2.2	Autres exemples . . . . .	89
6.2.3	Produit tensoriel et dualité . . . . .	89
6.3	Dualités analytiques . . . . .	90
6.3.1	Dualité linéaire topologique . . . . .	90
6.3.2	Distributions . . . . .	90
6.3.3	Transformée de Fourier. Dualité onde-corpuscule . . . . .	91
6.3.4	Transformée de Legendre. Mécanique lagrangienne et Mécanique hamiltonienne . . . . .	91
6.4	Dualités géométriques/homologiques . . . . .	92
6.4.1	Dualité de Poincaré . . . . .	92
6.4.2	Dualité de de Rham-Hodge . . . . .	93
6.4.3	Dualité de Maxwell . . . . .	93

<b>7</b>	<b>« Des infinis subtils »</b>	<b>95</b>
7.1	L'infini(tésimal) et son calcul . . . . .	95
7.1.1	L'infini à penser - à propos du mouvement . . . . .	95
7.1.2	Calcul et écriture de l'infini . . . . .	96
7.1.3	L'Analyse du XVIII <sup>e</sup> et la maîtrise du calcul . . . . .	98
7.1.4	L'Analyse du XIX <sup>e</sup> et la rigueur du calcul . . . . .	99
7.2	Les multiplicités infinies et leur mesure . . . . .	100
7.2.1	Dedekind et Cantor . . . . .	100
7.2.2	Le transfini. Procession des ordinaux et cardinaux . . . . .	101
7.2.3	L'infini derrière le fini. La patience de Goodstein . . . . .	101
7.2.4	L'enjeu des grands cardinaux . . . . .	103
7.2.5	(Non-)influence de la Théorie des ensembles . . . . .	104
7.3	L'horizon : l'infiniment loin . . . . .	105
7.3.1	Points de fuite . . . . .	105
7.3.2	Compactifications . . . . .	105
7.3.3	Complétion métrique . . . . .	106
7.4	L'infini importun . . . . .	107
7.4.1	Contrôler la divergence . . . . .	107
7.4.2	Dépasser la divergence . . . . .	108
<b>8</b>	<b>S'orienter dans la pensée mathématique</b>	<b>109</b>
8.1	L'arbuste . . . . .	109
8.2	Le tricotin . . . . .	111
8.3	Brouillards et analogies . . . . .	113
8.4	Points de vue féconds . . . . .	113
8.5	Conjectures . . . . .	114
8.6	Conclusion . . . . .	116