

Università degli Studi di Pisa

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

Canoni ritmici a mosaico

Candidata
Giulia Fianza

Relatori
Prof.ssa Francesca Acquistapace
Dott. Moreno Andreatta

1343

Anno Accademico 2006 - 2007

Indice

Introduzione	1
1 I modelli algebrici	5
1.1 Definizione musicale e definizione algebrica	5
1.2 Canoni ritmici e tassellazioni degli interi	10
1.3 Rappresentazioni matematiche e grafiche	17
2 Condizioni di esistenza	21
2.1 Il teorema di Coven-Meyerowitz	21
2.2 Esempi	30
3 Canoni di Vuza	35
3.1 Fattorizzazioni aperiodiche	35
3.2 La congettura di Minkowski e il teorema di Hajós	42
3.2.1 La genesi della congettura	42
3.2.2 La traduzione algebrica	51
4 Congettura spettrale	55
4.1 Una congettura aperta	55
4.2 La congettura spettrale ed i canoni ritmici a mosaico	58
5 Trasformazione e generazione di canoni a mosaico	67
5.1 Operazioni sui canoni	67
5.2 Un algoritmo generativo per i canoni di Vuza	73
5.3 Invarianza per affinità	76
A Polinomi ciclotomici	81
B Algebra combinatoria e teoria musicale	87
B.1 La teoria di Pólya	87
B.2 Trasposizione, inversione, aumentazione	94
C Nuovi canoni	99

Introduzione

Matematica e musica hanno da sempre manifestato delle affinità elettive: la storia mostra infatti come ad ogni epoca, ad eccezione forse dell'epoca romantica, la musica e la matematica hanno trovato forme di dialogo che hanno contribuito in maniera determinante allo sviluppo delle due discipline, ed in generale del pensiero filosofico occidentale.

Dal monocordo di Pitagora all'idea di un'armonia universale basata sul calcolo combinatorio in Mersenne, dallo *speculum musicum* di Eulero al concetto di distanza armonica in Yves Hellegouarch [34], per citare quattro esempi che abbracciano più di 25 secoli di storia, si vede come le applicazioni della matematica alla musica non solo hanno radici antiche, ma interessano diversi campi di entrambe.

In effetti molti musicisti e teorici della musica hanno utilizzato metodi matematici come strumento privilegiato per strutturare l'opera musicale, o per riconoscerne le proprietà strutturali.

Questo processo ha subito indubbiamente un'accelerazione nel XX secolo, con lo scardinamento del principio di consonanza e dissonanza degli accordi musicali. Ne è un esempio la tecnica compositiva dodecafonica, che consiste nell'utilizzo di tutte e dodici le note della scala cromatica (nel sistema temperato); tale tecnica fa uso esplicito di particolari strutture algebriche (come i gruppi ciclici e di permutazioni), che diventano parte integrante dell'atto compositivo.

In questo processo di formalizzazione della teoria musicale, la teoria dei gruppi ha giocato e gioca tuttora un ruolo centrale, al punto da risvegliare l'interesse da parte della comunità matematica verso alcuni problemi teorici di natura musicale¹.

In questa tesi ci occupiamo dell'aspetto matematico di un problema musicale che ha suscitato e suscita tuttora l'interesse di matematici, informatici, teorici della musica e compositori.

Si tratta della costruzione di canoni ritmici: canoni musicali dei quali interes-

¹ La lista delle pubblicazioni, convegni internazionali e seminari di studio dedicati ai rapporti fra matematica e musica ha conosciuto un vero e proprio boom nell'ultimo decennio, e non è certo possibile darne una descrizione esaustiva in questo lavoro. Accenniamo unicamente alla pubblicazione della prima rivista di matematica dedicata ai rapporti fra matematica e musica (*Journal of Mathematics and Music*, Taylor & Francis), organo ufficiale della *Society of Mathematics and Computation in Music*, un'associazione internazionale che rappresenta il primo passo verso l'istituzionalizzazione della disciplina matematica/musica.

Introduzione

sano unicamente le proprietà ritmiche, prescindendo dalle altezze, e attraverso i quali il compositore cerca di riempire completamente lo spazio ritmico.

Un profilo ritmico funge da tassello che il compositore cerca di traslare temporalmente in modo tale da costruire macro-strutture aventi la proprietà di riempire interamente lo spazio delle pulsazioni, senza quindi alcun silenzio fra l'istante nel quale una pulsazione ritmica è presente e l'istante successivo, e senza sovrapposizione fra le diverse voci, che sono quindi fra loro complementari. Un canone ritmico di questo tipo è anche detto "a mosaico" in quanto realizza una tassellazione regolare (cioè per traslazione) dello spazio ritmico.

La costruzione di canoni musicali ha da sempre incuriosito i musicisti: si pensi alle complesse polifonie fiamminghe di compositori come Josquin Desprez o alle tecniche contrappuntistiche delle quali fa sfoggio Johann Sebastian Bach nelle *Variazioni Goldberg*, le cui proprietà formali sono state tradotte in termini algebrici nel lavoro di Scimemi [68].

Olivier Messiaen è forse il primo teorico e compositore ad aver introdotto e studiato il concetto di canone ritmico indipendentemente dalle altezze, ovvero dalle note musicali [51]. In alcune composizioni come *Visions de l'Amen* (1943) per due pianoforti, o *Harawi* (1945) per piano e voce, l'utilizzo dei canoni ritmici anticipa alcune caratteristiche formali dei canoni a mosaico, benché il compositore non abbia dato una formalizzazione rigorosa di questo processo compositivo.

Da un punto di vista matematico, la costruzione di canoni ritmici a mosaico è formalizzabile in termini di fattorizzazioni di gruppi come somma di sottoinsiemi, un concetto che probabilmente Messiaen, come molti altri compositori del XX secolo, non conosceva. Un'eccezione è sicuramente Iannis Xenakis, ingegnere, per un periodo assistente di Le Corbusier, e compositore greco: forse nessuno come lui ha utilizzato in modo approfondito strumenti matematici per lo sviluppo e l'organizzazione formale del materiale compositivo².

Ben diversa è la situazione oggi, grazie soprattutto all'utilizzazione dell'informatica nella composizione musicale (composizione assistita su calcolatore).

Infatti il processo di costruzione di canoni a mosaico, cioè di fattorizzazioni di un gruppo ciclico finito con sottoinsiemi, può essere implementato (anche se molti problemi restano aperti, come vedremo nel seguito): il compositore ha così accesso a delle macro-strutture estremamente complesse che può prendere come architetture formali alla base di composizioni musicali originali.

Il problema della fattorizzazione di gruppi come somma di due o più sottoinsiemi costituisce un campo di ricerca estremamente attivo nella matematica contemporanea.

In questa tesi trattiamo il caso dei gruppi ciclici finiti, ossia dei canoni a mosaico, che tocca non solo l'algebra ma anche la geometria delle tassellazioni (con la

²Si veda, ad esempio, il brano *Nomos Alpha* (1966) per violoncello solo, basato sul gruppo di rotazioni del cubo nello spazio e su una doppia serie di Fibonacci a valori nel gruppo.

congettura di Minkowski e la sua soluzione algebrica da parte di Hajós) e la teoria dei domini spettrali (con la congettura di Fuglede, tuttora aperta).

Molti aspetti di questo problema sono stati affrontati da vari autori (sia matematici che teorici della musica) con tecniche e soprattutto linguaggi diversi. Uno degli scopi di questa tesi è dare una visione strutturata e coerente della materia.

Nel primo capitolo si formalizzano i canoni ritmici a mosaico, se ne evidenzia il legame con particolari tassellazioni degli interi, e se ne danno diverse rappresentazioni.

In particolare si arriva alla rappresentazione in termini di polinomi a coefficienti 0 e 1, le cui proprietà sono studiate nel secondo capitolo; è in termini di tali polinomi infatti che si esprimono le condizioni (T1) e (T2) di Coven-Meyerowitz, che sono sufficienti per l'esistenza di canoni ritmici, e delle quali la (T1) è necessaria, mentre la necessità di (T2) rimane un problema aperto.

Nel terzo capitolo abbiamo trattato una classe particolare di canoni ritmici a mosaico: i canoni di Vuza. Si tratta di canoni i cui ritmi sono aperiodici (cioè sottoinsiemi aventi periodicità pari all'ordine del gruppo). Si mostra il legame di questi canoni con la soluzione algebrica del matematico ungherese G. Hajós della congettura di Minkowski sulle tassellazioni dello spazio euclideo n -dimensionale attraverso cubi unitari (che nasce in realtà da un problema di teoria dei numeri).

L'esistenza di canoni di Vuza dipende dall'ordine del gruppo ciclico $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ fattorizzato: si arriva alla divisione della classe dei gruppi ciclici finiti in due sottoclassi disgiunte, definite in modo esplicito:

- i gruppi di Hajós, per i quali non esistono canoni di Vuza, e i cui ordini sono nell'insieme

$$\{p^\alpha, p^\alpha q, p^2 q^2, pqr, p^2 qr, pqrs : \alpha \in \mathbb{N}, p, q, r, s \text{ primi distinti}\},$$

- i gruppi non-Hajós, per i quali esistono canoni di Vuza, e i cui ordini sono del tipo $N = nmk$ con

- $(n, m) = 1$
- $n = n_1 n_2, m = m_1 m_2$
- $n_1, n_2, m_1, m_2, k \geq 2$

Nel quarto capitolo si introduce la congettura di Fuglede sui domini spettrali e si tratta la sua traduzione in termini di canoni a mosaico da parte di Izabella Łaba, arrivando a collegare la necessità della condizione (T2) con la congettura di Fuglede per i canoni a mosaico, entrambi problemi ancora aperti, e si evidenzia il ruolo giocato dai gruppi non Hajós nella loro soluzione. La teoria dei canoni ritmici a mosaico diventa quindi un possibile approccio per risolvere la congettura³.

³ Rinviamo alla pagina web del seminario *MaMuX* (Matematica/Musica e relazione con altre discipline) dell'IRCAM (Institut de Recherche et Coordination Acoustique/Musique) di Parigi, nella quale sono raccolti i contributi principali sulla teoria dei canoni ritmici a mosaico: <http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/IrcamTilingResearch.html>.

Introduzione

Benché la classificazione dei gruppi di Hajós sia ben conosciuta sin dagli anni sessanta, il problema di costruire tutte le fattorizzazioni in somma di sottoinsiemi aperiodici per un gruppo ciclico che non sia un gruppo di Hajós resta un problema aperto. Ci occupiamo delle tecniche generative nel quinto ed ultimo capitolo, generalizzando la costruzione di Vuza ed ottenendo nuovi canoni aperiodici.

Seguono tre appendici, la prima sui polinomi ciclotomici, la seconda sulle tecniche enumerative di Polyá e sulla loro applicazione alla teoria musicale, e la terza con l'elenco dei nuovi canoni di Vuza che abbiamo ottenuto.

Capitolo 1

I modelli algebrici

1.1 Definizione musicale e definizione algebrica

Il *canone* è una forma musicale polifonica, nata nel XIV secolo, tipica della musica classica. Si tratta di una composizione *contrappuntistica* formata, cioè, dalla sovrapposizione progressiva di più voci, ciascuna delle quali esegue uno stesso tema melodico, o variazioni di esso secondo precise regole tonali.

La cultura popolare ne è ricca; consideriamo ad esempio “Fra’ Martino” cantato da quattro voci:

<i>Voce 1</i>	<i>Voce 2</i>	<i>Voce 3</i>	<i>Voce 4</i>
Fra’ Martino	-	-	-
campanaro	-	-	-
dormi tu?	Fra’ Martino	-	-
dormi tu?	campanaro	-	-
suona le campane	dormi tu?	Fra’ Martino	-
suona le campane	dormi tu?	campanaro	-
din don dan	suona le campane	dormi tu?	Fra’ Martino
din don dan	suona le campane	dormi tu?	campanaro

Che, a regime, diventa:

<i>Voce 1</i>	<i>Voce 2</i>	<i>Voce 3</i>	<i>Voce 4</i>
Fra’ Martino	din don dan	suona le campane	dormi tu?
campanaro	din don dan	suona le campane	dormi tu?
dormi tu?	Fra’ Martino	din don dan	suona le campane
dormi tu?	campanaro	din don dan	suona le campane
suona le campane	dormi tu?	Fra’ Martino	din don dan
suona le campane	dormi tu?	campanaro	din don dan
din don dan	suona le campane	dormi tu?	Fra’ Martino
din don dan	suona le campane	dormi tu?	campanaro

Emergono chiaramente due caratteristiche fondamentali: ogni voce esegue periodicamente il medesimo motivo e tali esecuzioni sono temporalmente traslate.

Capitolo 1. I modelli algebrici

Nel seguito ci interesseremo al caso in cui il motivo, o *pattern*, sia puramente *ritmico*, possiamo quindi immaginarlo eseguito da uno strumento percussivo, disinteressandoci della durata e dell'altezza delle singole note.

Musicalmente, un canone ritmico consiste nell'esecuzione di uno stesso motivo ritmico da parte di diverse voci, ciascuna con un diverso attacco. In questo lavoro ci interessiamo ad una particolare famiglia di canoni ritmici: supponiamo che le voci non si sovrappongano e che, eseguite contemporaneamente, diano luogo ad una pulsazione regolare, cioè in ogni battito del tempo metronomico sia presente una ed una sola voce. Tali canoni ritmici sono detti a mosaico.

Consideriamo, ad esempio, il pattern ritmico¹



ed il canone:



che a regime diventa²:



Lo scopo di questo capitolo è trovare alcuni modelli matematici dei canoni ritmici a mosaico, al fine di studiarne le proprietà nei capitoli successivi.

Il primo passo è quindi trovare un modello di un pattern ritmico.

Consideriamo ad esempio il tipico ritmo della samba brasiliana³:



Poiché stiamo considerando il pattern da un punto di vista esclusivamente ritmico, ed ogni percussione avviene solo in presenza di una nota, le pause sono ridondanti nella scrittura precedente, consideriamo quindi una scrittura musicale priva di pause, ottenuta inglobando ogni pausa nella nota che la precede, come nella seguente⁴:



¹ i simboli “♩” e “♪” indicano rispettivamente la nota e la pausa di durata un quarto (rispetto al tempo metronomico fissato)

² i simboli “|:” e “:|” indicano la ripetizione del segmento musicale racchiuso in essi

³ il simbolo $\frac{4}{4}$ indica che all'interno di una misura (lo spazio racchiuso da due barre verticali consecutive) si trova un gruppo di note e pause sommando le cui durate si ottiene un intero (come ad esempio sommando le durate di quattro note da un quarto), i simboli “♩” e “♪” indicano rispettivamente la nota e la pausa di durata di una misura (rispetto al tempo metronomico fissato)

⁴ il punto indica che la durata della nota deve essere incrementata di metà

1.1 Definizione musicale e definizione algebrica

Abbiamo visto che ad ogni nota è associata una durata, che è un numero razionale. Supponiamo che la prima percussione avvenga all'istante $t_0 = 0$, allora ogni percussione successiva avviene all'istante t uguale alla somma delle durate delle note che precedono la nota della percussione considerata. Ad esempio, nel nostro caso, la quarta percussione avviene all'istante $t = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$. Il pattern della samba può essere quindi rappresentato dall'insieme:

$$\mathcal{S} := \left\{ 0, \frac{1}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{9}{8}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4} \right\} \subset \mathbb{Q}.$$

Per Dan Tudor Vuza [78] un *ritmo* è proprio un sottoinsieme (localmente finito) dei numeri razionali. Noi adotteremo una definizione leggermente diversa, ma adottiamo da Vuza la seguente:

1.1.1 Definizione. Sia $\mathcal{R} \subset \mathbb{Q}$ finito. Si definisce *divisione minimale* di \mathcal{R} , $\text{dm}(\mathcal{R})$, il numero razionale dato da:

$$\text{dm}(\mathcal{R}) := \max \{ d \in \mathbb{Q} \mid d > 0, \forall r, s \in \mathcal{R}, \exists n \in \mathbb{Z} : r - s = nd \}.$$

Possiamo allora associare ad \mathcal{R} l'insieme di interi

$$\frac{\mathcal{R}}{\text{dm}(\mathcal{R})}.$$

Nell'esempio della samba brasiliana, $\text{dm}(\mathcal{S}) = \frac{1}{8}$, quindi possiamo rappresentare il ritmo con l'insieme di interi:

$$8\mathcal{S} = \{0, 2, 5, 7, 9, 12, 14\}.$$

Osserviamo che, dato un insieme finito di razionali \mathcal{R} , ed indicando con m il minimo comune multiplo dei denominatori dei suoi elementi (intesi come frazioni primitive), si ha $\frac{1}{m} \mid \text{dm}(\mathcal{R})$, ma, in generale, non vale il viceversa, ad esempio

$$\text{dm} \left\{ 0, \frac{3}{8}, \frac{9}{8}, \frac{3}{2} \right\} = \frac{3}{8}.$$

Per esprimere la periodicità dell'esecuzione consideriamo tali interi *modulo* il periodo del ritmo, nel caso della samba, il periodo è $8/4$ (due misure da $4/4$), quindi dobbiamo considerare l'insieme di interi ottenuto modulo $8/4 \cdot 1/\text{dm}(\mathcal{S}) = 16$:

$$\mathcal{S} := [8\mathcal{S}]_{16} = \{[0]_{16}, [2]_{16}, [5]_{16}, [7]_{16}, [9]_{16}, [12]_{16}, [14]_{16}\}.$$

Ricapitolando, abbiamo trovato un modello matematico di un pattern ritmico attraverso i seguenti passi:

- 1: Considerare la scrittura musicale del pattern priva di pause.
- 2: Definire l'insieme $\mathcal{R} \subset \mathbb{Q}$ i cui elementi sono le somme progressive delle durate delle note del pattern, partendo da 0.

Capitolo 1. I modelli algebrici

3: Considerare il periodo P del pattern, ossia la somma delle durate di tutte le sue note, ed il numero naturale

$$n := \frac{P}{\text{dm}(\mathcal{R})}.$$

4: Definire l'insieme $R \subset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, nel seguente modo:

$$R := \left[\frac{\mathcal{R}}{\text{dm}(\mathcal{R})} \right]_n.$$

Possiamo quindi definire:

1.1.2 Definizione.

Un *ritmo* è un sottoinsieme di un gruppo ciclico $R \subset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

L'ordine n del gruppo è il *periodo* del ritmo.

Per completare un modello di un canone ritmico a mosaico rimane da esprimere matematicamente la *complementarità* delle voci, ossia la concomitanza dei seguenti fatti:

I: le voci non si sovrappongono, e

II: l'esecuzione del canone, a regime, da luogo ad una pulsazione regolare.

Sia R il ritmo del canone, n il suo periodo. Poiché ogni voce del canone esegue R *traslato* nel tempo, l' i -esima voce eseguirà $R + [b_i]_n$. Supponendo per semplicità che la prima voce inizi la propria esecuzione al tempo $b_0 = 0$, possiamo esprimere matematicamente le diverse voci con i seguenti insiemi di classi di resto modulo n :

$$A_0 = R, A_1 = R + [b_1]_n, \dots, A_k = R + [b_k]_n \subset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Le due condizioni precedenti di complementarità si esprimono matematicamente nel seguente modo:

I: $A_i \cap A_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$, $i, j = 0, \dots, k$ e

II: $A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_k = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Osserviamo che non tutti i ritmi possono verificare tali condizioni: non è sempre possibile trovare un opportuno *insieme di entrate* $B = \{b_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Un esempio in tal senso è il ritmo della samba $S = \{0, 2, 5, 7, 9, 12, 14\} \pmod{16}$, come si vede direttamente:

sia $A_0 = S$ la prima voce, poiché la seconda voce, $A_1 = S + [b_1]_{16}$, non deve intersecare A_0 , necessariamente si ha $b_1 = \pm 1$. Date queste due voci da 7 elementi ciascuna, rimangono solo 2 elementi in $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$, insufficienti per una terza voce.

Nascono allora due domande fondamentali, alle quali gran parte della letteratura sull'argomento cerca ancora oggi di dare una risposta:

1.1 Definizione musicale e definizione algebrica

1. Per quali ritmi è possibile costruire un canone a mosaico?
2. Dato un ritmo che permette di generare un canone a mosaico, come trovare l'insieme (o gli insiemi) delle entrate corrispondenti?

Siamo arrivati alle definizioni conclusive.

1.1.3 Definizione. Sia $(G, +)$ un gruppo abeliano, siano $A, B \subset G$. Definiamo l'applicazione

$$\begin{aligned} \sigma : A \times B &\longrightarrow G \\ (a, b) &\longmapsto a + b \end{aligned}$$

Chiamiamo $A + B := \text{Im } \sigma$, se σ è iniettiva diciamo che A e B sono in *somma diretta*, o, equivalentemente, che $\text{Im } \sigma \subset G$ è la *somma diretta* di A e B e chiamiamo

$$A \oplus B := \text{Im}(\sigma).$$

Dato un elemento $c \in A \oplus B$, gli unici $a \in A$ e $b \in B$ tali che $c = a + b$ saranno le *proiezioni* di c su A e B rispettivamente, diremo inoltre che $a + b$ (o $c = a + b$) è una *scrittura* di c o, equivalentemente, che c si scrive come $a + b$ (o $c = a + b$) in $A \oplus B$.

Se $B = \{b\}$, $A + b := A + \{b\} = A \oplus \{b\}$ è un *traslato* di A .

Se $G = A \oplus B$, diciamo che G si *fattorizza* come somma diretta di A e B , e chiamiamo $G = A \oplus B$ una *fattorizzazione* di G .

Chiaramente, se A e B sono in somma diretta, allora $\sigma : A \times B \rightarrow A \oplus B$ è bigettiva, quindi $|A \oplus B| = |A| |B|$.

Indichiamo convenzionalmente gli elementi del gruppo ciclico $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ con i numeri interi $\{0, 1, \dots, n-1\}$, cioè con i *minimi rappresentanti non negativi* delle classi resto modulo n : $\{[0]_n, [1]_n, \dots, [n-1]_n\}$. Sarà chiaro dal contesto, oppure specificato, se un dato insieme di interi si intenda come tale o come insieme di classi modulo n .

Osserviamo che la somma diretta di insiemi, a priori, non ha nessuna struttura algebrica, ad esempio

$$A = \{1, 3\} \text{ e } B = \{2\} \subset \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \Rightarrow A \oplus B = \{0, 3\} \subset \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}.$$

Se i sottoinsiemi A e B sono anche sottogruppi di G , la somma diretta di A e B pensati come insiemi (def. 1.1.3) coincide con l'usuale somma diretta tra sottogruppi, possiamo quindi parlare di *somma diretta* senza rischio di ambiguità.

1.1.4 Definizione. Un *canone ritmico a mosaico di periodo n* è una fattorizzazione del gruppo ciclico $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ con due suoi sottoinsiemi:

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = A \oplus B$$

dove A è detto *ritmo interno* e B *ritmo esterno* del canone.

Abbiamo quindi un modello algebrico dei canoni ritmici a mosaico musicali: gli interi rappresentano i *battiti* (*beat*) del tempo metronomico (un tempo quindi discretizzato), l'insieme A rappresenta il *motivo*, o *pattern*, ritmico che viene ripetuto ciclicamente, con periodo n , da un numero di voci (interpretate da musicisti diversi o da uno solo, ad esempio un batterista) pari alla cardinalità dell'insieme B , che rappresenta, appunto, l'insieme delle entrate delle varie voci. I canoni ritmici a mosaico sono anche detti *regolari*, poiché il tempo è scandito da battiti regolari, e *complementari*, poiché in ogni battito è presente una ed una sola voce⁵.

Poiché in questa tesi ci occuperemo solo di canoni ritmici a mosaico, ci riferiremo ad essi anche solo con “canoni ritmici”, “canoni a mosaico”, o semplicemente “canoni”.

Possiamo ora già dare una condizione necessaria affinché un ritmo possa essere ritmo interno di un canone:

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = A \oplus B \Rightarrow |A| \parallel |B| = n$, in particolare $|A|$ divide il periodo n del canone.

Nel caso della samba brasiliana $S = \{0, 2, 5, 7, 9, 12, 14\} \pmod{16}$, abbiamo visto che non esiste un canone ritmico che abbia S come ritmo interno utilizzando proprio il fatto che $7 \nmid 16$.

Osserviamo che la commutatività dell'addizione nel gruppo ciclico $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ rende la definizione di canone ritmico simmetrica nei ritmi interno ed esterno (ed infatti sono entrambi dei ritmi):

se $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = A \oplus B$ è un canone ritmico, anche $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = B \oplus A$ lo è.

Quale sia il ritmo interno e quale il ritmo esterno dipende unicamente dall'ordine di scrittura, ed in effetti si definisce:

1.1.5 Definizione. Dato un canone a mosaico $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = A \oplus B$, il canone $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = B \oplus A$ si dice *canone duale*, o ottenuto da esso *per dualità*.

1.2 Canoni ritmici e tassellazioni degli interi

La teoria dei canoni ritmici si intreccia con la teoria delle tassellazioni, per motivi storici, come vedremo nella sezione 3.2, e concettuali, come vedremo ora, e anche nella sezione 4.2.

Cominciamo con qualche definizione.

1.2.1 Definizione. Un insieme $A \subset \mathbb{Z}$ *tassella* se esiste un insieme $B \subset \mathbb{Z}$ tale che

$$A \oplus B = \mathbb{Z}$$

e tale fattorizzazione viene detta *tassellazione*.

Se A tassella si dice, equivalentemente, che A è un *tassello* o che *ha la proprietà di tassellazione*.

⁵ Benché l'espressione “canone regolare complementare” sia utilizzata in molti studi di teoria musicale, preferiamo “canone a mosaico” che descrive meglio - a nostro avviso - la natura algebrico-geometrica di queste strutture musicali (si veda, in particolare, la sezione 1.2).

Se $A \oplus B \oplus n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, diciamo che A *tassella modulo* n ed il minimo di tali n è il *periodo* della tassellazione, che viene chiamata *periodica*.

I risultati che presentiamo in questa sezione ruotano attorno ad un famoso teorema che viene storicamente attribuito a Nicolaas Govert de Bruijn (vedere ad esempio [14] e [30]). Non siamo riusciti a risalire alla dimostrazione originale, ma in letteratura ne esistono diverse (più o meno dettagliate), ad esempio: Hajós, 1950 [30], Newman, 1977 [54] e Tijdemann, 1995 [76].

Per enunciare il teorema di de Bruijn dobbiamo introdurre la definizione di *insieme periodico*. Tuttavia, la definizione data da de Bruijn in [14] appare diversa dalla definizione data da Hajós in [30] ed adottata in seguito dagli studiosi dell'argomento, compreso lo stesso de Bruijn negli articoli successivi a [14]. Mostriamo di seguito che le due definizioni sono in realtà equivalenti.

1.2.2 Definizione (de Bruijn, [14]).

Sia $(G, +)$ un gruppo abeliano, $0 \in G$ l'identità.

Un insieme $A \subset G$ è *periodico* se e solo se esiste un sottogruppo non vuoto $H \triangleleft G$, $H \neq \{0\}$, tale che $A + H = A$. In tal caso, A si dice anche *periodico modulo* $H \triangleleft G$.

1.2.3 Definizione (Hajós, [30]).

Sia $(G, +)$ un gruppo abeliano, $0 \in G$ l'identità.

Un insieme $A \subset G$ è *periodico* se e solo se esiste un elemento $g \in G$, $g \neq 0$, tale che $g + A = A$. In tal caso, A si dice anche *periodico modulo* $g \in G$.

Come abbiamo anticipato, la diversità è solo apparente:

1.2.4 Proposizione. $A \subset G$ è *periodico modulo un elemento* se e solo se è *periodico modulo un sottogruppo*, cioè:

$$\exists g \in G, g \neq 0, \text{ tale che } g + A = A \Leftrightarrow \exists H \triangleleft G, H \neq \emptyset, \{0\}, \text{ tale che } H + A = A.$$

Dimostrazione:

[\Rightarrow]: Basta considerare $H = \langle g \rangle$, il sottogruppo di G generato da g , infatti: sia A *periodico modulo* g , allora $ng + A = A, \forall n \in \mathbb{Z}$, poiché:

- se $n = 0$ non c'è nulla da dimostrare,
- se $n > 0$, $A + ng = A + g + (n - 1)g = A + (n - 1)g$ e la tesi segue per induzione su n ,
- se $n = -m < 0$, $A - mg = (A + g) - mg = A - (m - 1)g$ e la tesi segue per induzione su m .

Quindi

$$\langle g \rangle + A = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{ng\} + A = A.$$

[\Leftarrow]: Un sottogruppo $H \triangleleft G$, $H \neq \emptyset, \{0\}$ è sempre *periodico modulo* ogni suo elemento, infatti, $\forall g \in H$:

$g + H \subseteq H$, infatti $\forall h \in H, g + h \in H$, e

$H \subseteq g + H$, infatti $\forall h \in H, h - g \in H \Rightarrow h = g + (h - g) \in g + H$.

Basta quindi considerare un qualsiasi $h \in H, h \neq 0$, per avere:

$$h \in H \Rightarrow h + H = H \Rightarrow h + A = h + H + A = H + A = A.$$

QED

Nel presente lavoro adottiamo inoltre la seguente:

1.2.5 Definizione. Se $A \subset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ è periodico, il *periodo* di A è la classe del minimo intero positivo m tale che A è periodico modulo $[m]_n$.

Se $B \subset \mathbb{Z}$ è periodico, il *periodo* di B è il minimo intero positivo n tale che B è periodico modulo n .

Un sottoinsieme di un gruppo abeliano $A \subset G$ è *aperiodico* se e solo se non è periodico.

Osserviamo che il sottogruppo triviale $\{0\} \triangleleft G$ non è periodico.

1.2.6 Corollario (alla proposizione 1.2.4). Se $A \subset G$ è periodico modulo $H \triangleleft G$, allora A è unione di classi laterali modulo H , cioè esiste un insieme $R \subset G$ di rappresentanti di classi modulo H (in generale non completo) tale che

$$A = R \oplus H.$$

In particolare, per la proposizione 1.2.4, se A è periodico modulo g , esiste un insieme $R \subset G$ di rappresentanti di classi modulo $\langle g \rangle$ tale che

$$A = R \oplus \langle g \rangle.$$

Dimostrazione: $A + H$ è un insieme di classi laterali modulo H , sia quindi $R \subset A$ un insieme di rappresentanti di $A + H$, per il quale cioè valga $A + H = R \oplus H$. Poiché A è periodico modulo H , $A = A + \langle g \rangle = R \oplus \langle g \rangle$.

QED

1.2.7 Osservazione. Nel caso particolare in cui $B \subset \mathbb{Z}$, B è periodico se e solo se esistono un $C \subset \mathbb{Z}$ finito ed un intero positivo n tali che $B = C \oplus n\mathbb{Z}$, ed il minimo di tali n è il periodo di B .

Notiamo inoltre che ogni sottoinsieme di un gruppo abeliano $A \subset G$ si può scrivere come

$$A = R \oplus H$$

con $H \triangleleft G$ ed R non periodico, basta considerare $H = P_A := \{g \in G \mid A + g = A\}$. P_A è un sottogruppo di G , infatti se $g, h \in P_A$ allora $g - h + A = A$, quindi per il Corollario 1.2.6

$$A = R \oplus P_A,$$

e tale R deve necessariamente essere aperiodico, infatti, se $g + R = R$, allora

- $g + A = A$, quindi $g \in P_A$, e
- per ogni $r \in R$, esiste un $r' \in R$ tale che $r = r' + g$,

quindi ogni $r \in R$ ha una doppia scrittura nella somma diretta $R \oplus P_A$: $r = r + 0 = r' + g$, quindi $g = 0$.

Possiamo ora enunciare il teorema di de Bruijn.

1.2.8 Teorema (de Bruijn, [14]).

Sia $A \oplus B = \mathbb{Z}$ una tassellazione con A e $B \subset \mathbb{Z}$.

$$A \text{ è finito} \Leftrightarrow B \text{ è periodico.}$$

In verità, in [14] de Bruijn afferma solo una delle due implicazioni, la seguente: ogni tassellazione degli interi con un tassello finito è periodica.

Dimostrazione:

Dimostriamo che se A è finito allora B è periodico.

Sia $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ con $a_1 < a_2 < \dots < a_k$. Consideriamo la funzione indicatrice di B , χ_B , che vale 1 su B e 0 su $\mathbb{Z} \setminus B$.

Poiché $\mathbb{Z} = A \oplus B$, allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$ esiste uno ed un solo $j \in \{1, \dots, k\}$ tale che $n - a_j \in B$, cioè

$$\chi_B(n - a_1) + \chi_B(n - a_2) + \dots + \chi_B(n - a_k) = 1. \quad (*)$$

Sia $\tau := a_k - a_1$. Consideriamo le τ -ple

$$c_n := (\chi_B(n + 1), \chi_B(n + 2), \dots, \chi_B(n + \tau)) \in \{0, 1\}^\tau.$$

Vogliamo dimostrare che una τ -pla c_n , per un n fissato, determina univocamente l'intera sequenza $\{\chi_B(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Lo faremo in tre passi:

1. c_n determina univocamente $\chi_B(n + \tau + 1)$.
Poniamo $m := a_1 + n + \tau + 1$, dobbiamo determinare $\chi_B(m - a_1)$.
Poiché $a_1 < a_2 < \dots < a_k$, si ha

$$n + \tau + 1 = m - a_1 > m - a_2 > \dots > m - a_k = n + 1,$$

quindi ogni $\chi_B(m - a_j)$ compare in c_n per $j = 2, \dots, k$, allora, per (*),

$$\chi_B(m - a_1) = 1 - \sum_{j=2}^k \chi_B(m - a_j).$$

2. c_n determina univocamente $\chi_B(n)$, la dimostrazione è del tutto simmetrica alla precedente.
Poniamo $m := a_k + n$, dobbiamo determinare $\chi_B(m - a_k)$.
Poiché $a_1 < a_2 < \dots < a_k$, si ha

$$n + \tau = m - a_1 > m - a_2 > \dots > m - a_k = n,$$

quindi ogni $\chi_B(m - a_j)$ compare in c_n per $j = 1, \dots, k - 1$, allora, per (*),

$$\chi_B(m - a_k) = 1 - \sum_{j=1}^{k-1} \chi_B(m - a_j).$$

3. 1 e 2 provano che c_n determina univocamente c_{n+1} e c_{n-1} , quindi, induttivamente, determina c_m per ogni $m < n$ e per ogni $m > n$, cioè l'intera sequenza $\{\chi_B(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Poiché $c_n \in \{0, 1\}^\tau$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, e $|\{0, 1\}^\tau| = 2^\tau$, per il principio dei cassetti esistono n_1 ed $n_2 \in \mathbb{Z}$ tali che $0 < N := n_2 - n_1 \leq 2^\tau$ e $c_{n_1} = c_{n_2}$.

Allora per ogni $k \in \mathbb{Z}$, $\chi_B(n_1 + k) = \chi_B(n_2 + k) = \chi_B(n_1 + N + k)$, cioè per ogni $n \in \mathbb{Z}$, $\chi_B(n) = \chi_B(n + N)$, la sequenza $\{\chi_B(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ è periodica.

Quindi $b \in B$ se e solo se $b + N \in B$, cioè B è periodico modulo N .

L'altra implicazione si deduce facilmente dal seguente:

1.2.9 Lemma. *Siano $A, B \subset \mathbb{Z}$, sia n un intero positivo.*

Le seguenti affermazioni sono equivalenti, ed implicano che A e B sono finiti:

1. $A \oplus B \oplus n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, e
2. $A \oplus B = \{r_1, \dots, r_n\} \subset \mathbb{Z}$ con $r_i \not\equiv r_j \pmod{n}$ per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$.

Dimostrazione:

[1 \Rightarrow 2]: Sia $A \oplus B = \{r_i \mid i \in I\}$. Per ogni $z \in \mathbb{Z}$, la condizione 1 implica che $z = a + b + nk$, quindi $z - nk \in A \oplus B$, cioè $A \oplus B$ contiene almeno un rappresentante per ogni classe resto modulo n , quindi dev'essere $|I| \geq n$.

D'altra parte, se fosse $|I| > n$, esisterebbero $i, j \in I$, con $i \neq j$, tali che $r_i \equiv r_j \pmod{n}$, cioè $r_i = r_j + kn$ per un certo $k \in \mathbb{Z}$. Poiché $r_i, r_j \in A \oplus B$, $r_i = a_1 + b_1$ ed $r_j = a_2 + b_2$, quindi $a_1 + b_1 = r_i = r_j + kn = a_2 + b_2 + kn$, cioè r_i ha due scritte in $A \oplus B \oplus n\mathbb{Z}$, assurdo. Quindi $|I| = n$.

[2 \Rightarrow 1]: Per ogni $z \in \mathbb{Z}$ esiste un unico $r \in A \oplus B$ tale che $z \equiv r \pmod{n}$, cioè $z = r + kn$ dove k è univocamente determinato da z ed r , quindi esiste un'unica terna (a, b, kn) tale che $z = a + b + kn$.

Inoltre 2 implica che $|A \oplus B| = n$, quindi A e B sono finiti.

QED

Se B è periodico, esistono un $C \subset \mathbb{Z}$ ed un intero positivo n tali che $A \oplus C \oplus n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, allora, per il lemma, A è finito.

QED

1.2.10 Osservazione. Data una tassellazione $A \oplus B = \mathbb{Z}$ con A finito, la dimostrazione precedente fornisce un limite superiore per il periodo N di B :

$$N \leq 2^{\max A - \min A} = 2^{l(A)-1},$$

dove $l(A)$ è la *lunghezza*, o il *diametro*, dell'insieme A .

Nella sezione precedente abbiamo definito canoni ritmici le fattorizzazioni di gruppi ciclici *finiti* attraverso sottoinsiemi, mostriamone ora l'equivalenza con particolari fattorizzazioni con sottoinsiemi del gruppo ciclico *infinito* \mathbb{Z} .

1.2.11 Corollario. *Sia $A \subset \mathbb{Z}$ finito. A è un tassello di \mathbb{Z} se e solo se esiste un naturale n tale che $[A]_n$ è il ritmo interno di un canone ritmico di periodo n . Inoltre, dato un tassello A , esiste un canone ritmico di ritmo interno $[A]_n$ di periodo $n \leq 2^{|A|-1}$.*

Dimostrazione: Segue immediatamente dal teorema di de Bruijn, dal lemma 1.2.9 e dall'osservazione 1.2.10.

QED

1.2.12 Osservazione. La proprietà di tassellazione è invariante per traslazioni, infatti:

supponiamo $A \oplus C = \mathbb{Z}$, per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si ha che $n - z \in \mathbb{Z}$, quindi esiste una ed una sola coppia $(a, c) \in A \times C$ tale che $n - z = a + c$, di conseguenza esiste una ed una sola coppia $(a + z, c) \in (A + z) \times C$ tale che $n = (a + z) + c$, cioè $(A + z) \oplus C = \mathbb{Z}$.

Possiamo allora limitare l'investigazione ai tasselli di minimo elemento 0, o equivalentemente (cor 1.2.11) ai ritmi contenenti la classe identica.

Vediamo ora alcuni esempi di canoni ritmici.

1.2.13 Esempio. Sia $N = nm$, con n ed m interi non negativi, allora il *canone triviale* su $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ associato alla fattorizzazione $N = nm$ è

$$\{0, 1, \dots, m - 1\} \oplus \{0, m, \dots, (n - 1)m\} = \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}.$$

1.2.14 Esempio. Se p è primo, gli unici canoni possibili su $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sono i canoni triviali:

$$\{0\} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

ed il suo duale.

Nella sezione 2.2 vedremo come trasformare il canone dell'esempio 1.2.13 nel seguente, per $k \geq 0$:

1.2.15 Esempio.

$$\{0, 1, \dots, m - k - 1, nm - k, nm - k + 1, \dots, nm - 1\} \oplus \{0, m, \dots, (n - 1)m\} = \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}.$$

Il precedente esempio mostra che

1.2.16 Proposizione. *Per ogni intero non negativo n , non primo, esiste un canone non banale, né duale di un canone banale, di periodo n , il cui ritmo interno ha lunghezza n (considerato come insieme di minimi rappresentanti non negativi).*

Affrontiamo ora un problema ancora aperto:

Capitolo 1. I modelli algebrici

1.2.17 Problema. Dato un tassello $A \subset \mathbb{N}$, $0 \in A$, qual è il minimo periodo n_A possibile per un canone di ritmo interno $[A]_{n_A}$?

Osserviamo innanzitutto esplicitamente che il lemma 1.2.9 implica che se A è un tassello di periodo n , $|A| = |[A]_n|$, cioè A è un insieme di rappresentanti *distinti* modulo n , quindi sicuramente $|A|$ divide n , in particolare $|A| \leq n_A$.

Nel corollario 1.2.11 si osserva che il teorema di de Bruijn fornisce una limitazione superiore per tale periodo: $n_A \leq 2^{l(A)-1} = 2^{\max A}$.

Quindi una prima stima è:

$$|A| \leq n_A \leq 2^{\max A}.$$

Dividiamo ora il problema in due casi:

1. Consideriamo solo canoni di periodo $n \geq l(A)$, cioè per i quali A sia esattamente l'insieme dei minimi rappresentanti non negativi delle classi di $[A]_n$. Abbiamo due possibilità:

- $l(A) = 2^{\max A}$, che avviene se e solo se $A = \{0\}, \{0, 1\}$, per i quali, rispettivamente, $n_A = 1, 2 = |A| = l(A)$, cioè è verificato il limite inferiore.
- $l(A) < 2^{\max A}$.
 - Per la proposizione 1.2.16, esistono tasselli che verificano il limite inferiore $n_A = l(A) \geq |A|$.
 - Esistono anche tasselli che verificano il limite superiore, ad esempio $A = \{0, 2\}$ che ha $n_A = 4$.

2. Consideriamo anche canoni di periodo $n < l(A)$.

- Anche in questo caso esistono tasselli che verificano il limite inferiore $n_A = |A|$: sono tutti e soli gli insiemi completi di rappresentanti modulo $|A|$.
- Inoltre, poiché $n_A < l(A)$, il limite superiore diventa $l(A) - 2$ (perché con un periodo di $l(A) - 1 = \max A$ si avrebbe $\max A \equiv 0$), verificato da $A = \{0, 3\}$, e coincidente con il limite inferiore. Il caso generale, cioè se esiste un tassello che verifica $n_A = l(A) - 2 \neq |A|$, rimane aperto.

1.2.18 Esempio. In un canone ritmico, sia il ritmo esterno che il ritmo interno possono essere sottogruppi:

$$\{0, 4, 8\} \oplus \{0, 3, 6, 9\} = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z},$$

oppure solo uno (cfr. teorema 3.2.14):

$$\{0, 4, 8\} \oplus \{0, 1, 2, 3\} = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z},$$

oppure nessuno dei due:

$$\{0, 2, 4\} \oplus \{0, 1, 6, 7\} = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z},$$

in questo terzo caso, per ora, osserviamo solo che $B = \{0, 1, 6, 7\}$ è periodico di periodo 6.

Concludiamo osservando che se consideriamo tasselli infiniti abbiamo molta più libertà nella loro scelta, infatti vale il seguente risultato di Carl Swenson [72]:

1.2.19 Teorema (Swenson). *Per ogni coppia di insiemi finiti $A, B \subset \mathbb{Z}$ che sono in somma diretta, esiste una coppia di insiemi infiniti $A', B' \subset \mathbb{Z}$ tali che $A' \oplus B' = \mathbb{Z}$.*

1.3 Rappresentazioni matematiche e grafiche

Ci sono diversi modi per rappresentare un canone ritmico, in questa sezione ne elenchiamo i principali: le prime due rappresentazioni sono di carattere matematico, le restanti tre sono grafiche.

Dopo averne data una descrizione generale, mostriamo ciascuna rappresentazione nel caso del canone $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} = A \oplus B$, con $A = \{0, 1, 5\}$ e $B = \{0, 3, 6\}$.

Rappresentazione insiemistica. Abbiamo visto che un ritmo di un canone, in quanto insieme di classi resto, si rappresenta convenzionalmente con il tassello (cor. 1.2.11) dei suoi minimi rappresentanti non negativi. Inoltre, per l'osservazione 1.2.12 abbiamo assunto che ogni tassello abbia come minimo elemento lo 0. Nel nostro esempio:

$$\{0, 1, 5\} \oplus \{0, 3, 6\} = \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}.$$

È la rappresentazione usata negli esempi della sezione precedente.

Rappresentazione polinomiale. Dalla rappresentazione insiemistica si passa in maniera naturale alla rappresentazione polinomiale attraverso la seguente definizione:

1.3.1 Definizione. Sia $A \subset \mathbb{N}$ finito, il *polinomio associato* ad A è definito come

$$A(x) := \sum_{a \in A} x^a.$$

La definizione precedente fornisce una corrispondenza biunivoca tra i sottoinsiemi finiti dei numeri naturali e l'insieme dei polinomi a coefficienti 0 o 1:

$$\begin{aligned} \{A \subset \mathbb{N}, |A| < \infty\} &\longrightarrow \{0, 1\}[x] \\ A &\longmapsto A(x) \\ \{a_i \mid a_i = 1\}_{i=0}^n &\longleftarrow \sum_{i=0}^n a_i x^i \end{aligned}$$

Allora i ritmi di un canone possono essere rappresentati dai rispettivi polinomi associati, nel nostro esempio: $A(x) = 1 + x + x^5$ e $B(x) = 1 + x^3 + x^6$.

Si vedrà nella prossima sezione (lemma 2.1.5) che

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = A \oplus B \text{ se e solo se}$$

$$A(x)B(x) \equiv \Delta_n(x) := 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} \pmod{x^n - 1} \quad (*)$$

Capitolo 1. I modelli algebrici

per noi (*) è la rappresentazione polinomiale del canone $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = A \oplus B$.
 Nel nostro esempio:

$$(1 + x + x^5)(1 + x^3 + x^6) \equiv \Delta_9(x) \pmod{x^9 - 1}.$$

Rappresentazione binaria. Si rappresenta il ritmo interno A con una sequenza indicizzata di 0 e 1, di lunghezza pari al diametro di A , con un 1 nelle posizioni di indice appartenente ad A e 0 altrimenti, ad esempio

$$A = \{0, 1, 5\} = 110001.$$

Si dispone tale sequenza orizzontalmente all'interno di una griglia bidimensionale finita in alto e a destra, partendo dalla b -esima casella dell' i -esima riga (numerando da sinistra a destra e dall'alto in basso con i numeri naturali), dove b è l' i -esimo elemento del ritmo esterno B , nel nostro esempio:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Talvolta si trovano rappresentazioni analoghe a questa con simboli diversi, ad esempio una x al posto dell'1 ed un punto al posto dello 0:

$$\begin{array}{cccccc} x & x & . & . & . & x \\ & & x & x & . & . & . & x \\ & & & & x & x & . & . & . & x \end{array}$$

Rappresentazione a griglia. Il principio è lo stesso del caso precedente, con la variante che la griglia è parzialmente visibile, al posto dell'1 c'è un riquadro nero e al posto dello 0 rimane il riquadro vuoto, nel nostro esempio:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0												
1												
2												

la linea verticale più marcata indica il periodo del canone, in questo modo se ne evidenzia la struttura: uno stesso pattern ritmico che viene eseguito da varie voci, con differenti entrate. Ogni voce ripete ciclicamente lo stesso pattern:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
0																						
1																						
2																						

1.3 Rappresentazioni matematiche e grafiche

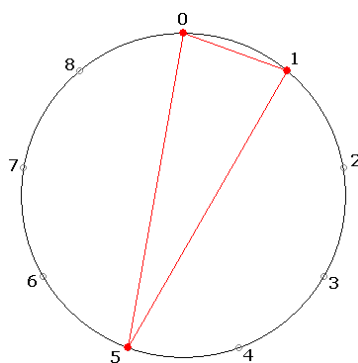
Possiamo quindi rappresentare il canone con una griglia di lunghezza la lunghezza del canone:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0									
1									
2									

in questo secondo modo si evidenzia la complementarità delle voci.

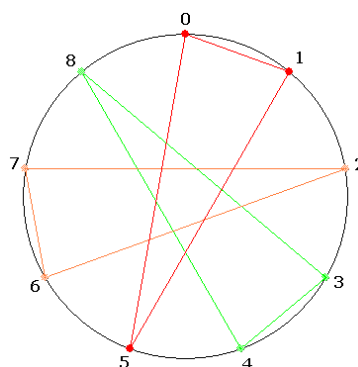
Nota storica: la rappresentazione a griglia è il *Box Notation Method* sviluppato da Philip Harland all'Università della California, a Los Angeles, nel 1962, ed è anche conosciuta come TUBS (Time Unit Box System).

Rappresentazione circolare. Si considera una rappresentazione circolare di $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ con n punti equidistanti lungo una circonferenza, partendo dal polo e procedendo in senso orario. Un pattern ritmico è rappresentato dal poligono in tale circonferenza i cui vertici sono gli elementi del pattern, nel nostro caso:



$$A = \{0, 1, 5\}$$

Le altre voci vengono aggiunte ruotando il pattern come indicato dagli elementi del ritmo esterno:



$$A = \{0, 1, 5\}$$

$$B = \{0, 3, 6\}$$

Capitolo 1. I modelli algebrici

Nota storica: le rappresentazioni circolari vengono anche chiamate *diagrammi di Krenek*, poiché furono utilizzate dal compositore e teorico austriaco Ernst Krenek negli anni trenta. Si veda in particolare il testo teorico *Über neue Musik* (1937), nel quale Krenek discute l'importanza di un approccio assiomatico nella teoria musicale. Siamo assistendo di fatto alla nascita della teoria algebrico-musicale⁶.

⁶ Rinviamo allo studio [10] per una discussione più approfondita sull'emergenza delle strutture algebriche in musica e musicologia del XX secolo.

Capitolo 2

Condizioni di esistenza

2.1 Il teorema di Coven-Meyerowitz

Ethan Coven ed Aaron Meyerowitz ([12], 1999) hanno trovato due condizioni sufficienti, ed in certi casi anche necessarie, affinché un pattern ritmico tasselli. Presentiamo in questa sezione i loro risultati in maniera dettagliata, avvalendoci della rappresentazione polinomiale dei canoni ritmici.

Cominciamo con un'osservazione.

2.1.1 Osservazione. Siano $A, B \subset \mathbb{N}$ insiemi finiti in somma diretta, e siano $A(x)$ e $B(x)$ i polinomi loro associati. Si ha:

1. $|A| = A(1)$ e
2. $(A \oplus B)(x) = \sum_{c \in A \oplus B} x^c = \sum_{a \in A, b \in B} x^{a+b} = \sum_{a \in A} x^a \sum_{b \in B} x^b = A(x)B(x)$.

2.1.2 Definizione.

Siano $A \subset \mathbb{N}$ finito e Φ_d il d -esimo polinomio ciclotomico (def. A.1), definiamo:

1. $R_A := \{d \in \mathbb{Z} : d > 0, \Phi_d(x) \mid A(x)\}$ ed
2. $S_A := \{d \in R_A : d = p^\alpha, p \text{ primo}, \alpha \text{ intero positivo}\}$.

Possiamo ora enunciare il teorema di Coven-Meyerowitz.

2.1.3 Teorema (Coven-Meyerowitz).

Consideriamo le condizioni:

$$(T1) : A(1) = \prod_{p^\alpha \in S_A} p$$

$$(T2) : \text{se } p_1^{a_1}, \dots, p_k^{a_k} \in S_A \text{ sono potenze di primi distinti, allora } p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k} \in R_A.$$

Allora

- (1) : Se A soddisfa (T1) e (T2) allora tassella;
- (2) : Se A tassella, allora soddisfa (T1);

Capitolo 2. Condizioni di esistenza

(3) : Se A tassella e $|A|$ ha al più due fattori primi, allora A soddisfa (T2).

2.1.4 Osservazione. Nell'articolo di Coven e Meyerowitz [12] la condizione (T1) è data nella seguente forma:

$$A(1) = \prod_{p^\alpha \in S_A} \Phi_{p^\alpha}(1).$$

Per la proposizione A.4(5), se p è primo allora $\Phi_{p^\alpha}(1) = p$ per ogni $\alpha \geq 1$, dunque le due forme sono equivalenti.

Introduciamo ora alcuni lemmi che useremo nella dimostrazione del teorema.

2.1.5 Lemma. Siano $A(x), B(x) \in \mathbb{N}[x]$ ed n un intero positivo. Allora

$$A(x)B(x) \equiv \Delta_n(x) := 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} \pmod{x^n - 1} \quad (T0)$$

se e solo se

1. $A(x), B(x) \in \{0, 1\}[x]$, quindi sono polinomi associati ad insiemi, A e B , e
2. $A \oplus B = \{r_1, \dots, r_n\} \subset \mathbb{Z}$ con $r_i \not\equiv r_j \pmod{n}$ per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$.

Dimostrazione:

[\Rightarrow]: Siano A e B gli insiemi degli esponenti che compaiono, rispettivamente, in $A(x)$ e $B(x)$, allora

$$A(x)B(x) = \sum_{a \in A} n_a x^a \sum_{b \in B} n_b x^b = \sum_{k \in A+B} n_k x^k$$

dove $n_k = \sum_{a+b=k} n_a n_b$.

Per ogni $k \in A + B$ consideriamo $\bar{k} \in \{0, \dots, n-1\}$ tale che $k \equiv \bar{k} \pmod{n}$, allora, riducendo $A(x)B(x)$ modulo $x^n - 1$, si ha:

$$\sum_{k \in A+B} n_k x^{\bar{k}} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1},$$

quindi, necessariamente,

- (a) $n_k = 1$ per ogni $k \in A + B$,
- (b) $n = |\overline{A+B}| = |A+B|$ e

Dunque

1. per (a), $A(x)$ e $B(x)$ sono polinomi a coefficienti in $\{0, 1\}$ e gli insiemi A e B sono in somma diretta, e
2. per (b), $A \oplus B$ è un insieme completo di rappresentanti modulo n .

[\Leftarrow]: Per l'osservazione 2.1.1 (2),

$$A(x)B(x) = (A \oplus B)(x) = \{r_1, \dots, r_n\}(x) = x^{r_1} + x^{r_2} + \dots + x^{r_n}.$$

Le classi $[r_1]_n, \dots, [r_n]_n$ sono tutte distinte, dunque esistono $k_0, \dots, k_{n-1} \in \mathbb{Z}$ tali che:

$$\begin{aligned} 0 &= r_{i_0} - k_0 n \\ 1 &= r_{i_1} - k_1 n \\ &\vdots \\ n-1 &= r_{i_{n-1}} - k_{n-1} n \end{aligned}$$

e quindi

$$A(x)B(x) = x^{k_0 n} + x^{1+k_1 n} + \dots + x^{n-1+k_{n-1} n} \equiv \Delta_n(x) \pmod{x^n - 1}.$$

QED

2.1.6 Lemma. *Siano $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ed n un intero positivo. I seguenti fatti sono equivalenti:*

1. $f(x) \equiv \Delta_n(x) \pmod{x^n - 1}$
2. (a) $f(1) = n$ e
(b) per ogni $d \mid n$ con $d > 1$, si ha $\Phi_d(x) \mid f(x)$

Dimostrazione:

Ricordiamo innanzitutto che $\Delta_n(x) = \prod_{d \mid n, d > 1} \Phi_d(x)$.

[**1** \Rightarrow **2**]: La condizione 1 implica che esiste un polinomio $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tale che $f(x) = \Delta_n(x) + g(x)(x^n - 1)$, allora

- (a) $f(1) = \Delta_n(1) = n$ e
- (b) poiché $\Delta_n(x) \mid x^n - 1$ si ha $\Delta_n(x) \mid f(x)$, quindi, per ogni $d \mid n$ tale che $d > 1$, risulta $\Phi_d(x) \mid f(x)$.

[**2** \Rightarrow **1**]: La condizione 2 implica che $\Delta_n(x) \mid f(x)$, quindi $f(x) = \Delta_n(x)g(x)$, inoltre $f(1) = n$, quindi $g(1) = 1$. Allora, ponendo $g(x) = \sum_{i=0}^k \alpha_i x^i$, modulo $x^n - 1$ si ha

$$f(x) = \Delta_n(x)g(x) = \sum_{i=0}^k \alpha_i x^i \Delta_n(x) \equiv \sum_{i=0}^k \alpha_i \Delta_n(x) = g(1)\Delta_n(x) = \Delta_n(x)$$

poiché $x^i \Delta_n(x) \equiv \Delta_n(x) \pmod{x^n - 1}$.

QED

Capitolo 2. Condizioni di esistenza

2.1.7 Osservazione. Se $A \oplus B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, per il lemma 2.1.5

$$A(x)B(x) \equiv \Delta_n(x) \pmod{x^n - 1}$$

e per il lemma 2.1.6, applicato ad $f(x) = A(x)B(x)$, unitamente al fatto che i polinomi ciclotomici sono irriducibili in $\mathbb{Z}[x]$, si ha:

per ogni $d \mid n$, con $d > 1$, si ha $\Phi_d(x) \mid A(x)$ o $\Phi_d(x) \mid B(x)$.

I lemmi 2.1.5 e 2.1.6 e l'osservazione 2.1.7 costituiscono il lemma 1.3 di [12].

Siamo pronti per dimostrare la parte (1) del teorema 2.1.3.

Dimostrazione (1):

Siano $m := \text{mcm}(S_A)$ ed $S := \{p^\alpha : p^\alpha \mid m\} \setminus S_A$.

Ad ogni $s \in S$ associamo l'intero $t(s) := \max\{d : d \mid m \text{ e } (d, s) = 1\}$, e definiamo il polinomio

$$B(x) := \prod_{s \in S} \Phi_s(x^{t(s)}).$$

Poiché $s = p^\alpha$, per la proposizione A.4 (ai punti (4) ed (1)), si ha che

$$\Phi_s(x^{t(s)}) = \Phi_p(x^{t(s)p^{\alpha-1}}) \in \{0, 1\}[x],$$

dunque $B(x) \in \mathbb{N}[x]$.

Sia $n := A(1)B(1)$ e sia $d > 1$ un intero tale che $d \mid n$, consideriamone la fattorizzazione in fattori primi $d = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$. Abbiamo 2 possibilità:

1. $p_i^{\alpha_i} \in S_A$ per ogni $i = 1, \dots, k$, allora, per (T2), $\Phi_d(x) \mid A(x)$;
2. esiste un indice i per il quale $s_i = p_i^{\alpha_i} \notin S_A$, quindi $\Phi_{s_i}(x^{t(s_i)}) \mid B(x)$, e, per la proposizione A.4(6), $\Phi_{s_i}(x) \mid \Phi_{s_i}(x^{t(s_i)})$.

Allora, per il lemma 2.1.6, vale la condizione (T0) del lemma 2.1.5, ossia

$$A(x)B(x) \equiv \Delta_n(x) \pmod{x^n - 1},$$

dunque $B(x)$ è il polinomio associato all'insieme B dei suoi esponenti, ed $A \oplus B$ è un insieme completo di rappresentanti modulo n , in particolare $A \oplus B \oplus n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, cioè A tassella.

QED

Per dimostrare la parte (2) del teorema 2.1.3 cominciamo da un lemma.

2.1.8 Lemma. Siano $A(x), B(x) \in \{0, 1\}[x]$, $n := A(1)B(1)$, $S = \{p^\alpha : p^\alpha \mid n\}$. Se per ogni intero $d > 1$ tale che $d \mid n$ si ha che $\Phi_d(x) \mid A(x)B(x)$, allora

1. $A(1) = \prod_{s \in S_A} \Phi_s(1)$ e $B(1) = \prod_{t \in S_B} \Phi_t(1)$
2. $S = S_A \cup S_B$ e $S_A \cap S_B = \emptyset$

Dimostrazione:

Poiché per ogni $d \mid n$, $d > 1$, si ha $\Phi_d(x) \mid A(x)B(x)$, allora $\mathcal{S} \subset S_A \cup S_B$.

$A(1) \leq \prod_{s \in S_A} \Phi_s(1)$ e $B(1) \leq \prod_{t \in S_B} \Phi_t(1)$, quindi

$$n = A(1)B(1) \leq \prod_{s \in S_A} \Phi_s(1) \prod_{t \in S_B} \Phi_t(1) \leq \prod_{s \in \mathcal{S}} \Phi_s(1) = n$$

L'ultima uguaglianza segue dalla proposizione A.4, punto 5. Quindi

1. $A(1)B(1) = \prod_{s \in S_A} \Phi_s(1) \prod_{t \in S_B} \Phi_t(1)$, che implica $A(1) = \prod_{s \in S_A} \Phi_s(1)$ e $B(1) = \prod_{t \in S_B} \Phi_t(1)$.
2. $\prod_{s \in S_A} \Phi_s(1) \prod_{t \in S_B} \Phi_t(1) = \prod_{s \in \mathcal{S}} \Phi_s(1)$, quindi $S_A \cup S_B \subset \mathcal{S}$ e $S_A \cap S_B = \emptyset$.

QED

Possiamo ora completare la

Dimostrazione (2): Poiché A tassella, per il teorema di de Bruijn (teorema 1.2.8) ed il lemma 2.1.5, esiste $B \subset \mathbb{Z}$ finito tale che A e B verificano la condizione (T0) del lemma 2.1.5, quindi, per l'osservazione 2.1.7, $A(x)$ e $B(x)$ verificano le ipotesi del lemma 2.1.8, in particolare A verifica la condizione (T1).

QED

Osserviamo che non vale il viceversa del teorema (2), cioè la condizione (T1) non è sufficiente affinché A tasselli. Consideriamo ad esempio l'insieme

$$A = \{0, 1, 2, 4, 5, 6\} = 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1,$$

A chiaramente non tassella, il suo polinomio associato è

$$A(x) = 1 + x + x^2 + x^4 + x^5 + x^6 = (1 + x + x^2)(1 + x^4) = \Phi_3(x)\Phi_8(x),$$

$S_A = \{2^3, 3\}$, quindi A verifica la condizione (T1):

$$A(1) = 6 = 2 \cdot 3 = \prod_{p^a \in S_A} p.$$

Prima di dimostrare anche il terzo punto del teorema di Coven-Meyerowitz, vediamo che la proprietà di tassellazione è invariante per trasformazioni affini.

2.1.9 Teorema. *Sia $A \subset \mathbb{N}$ finito. Per ogni $t \in \mathbb{Z}$ e $k \in \mathbb{N}$ si ha:*

$$A \text{ tassella} \Leftrightarrow kA + t \text{ tassella}$$

Dimostrazione: Per l'invarianza per traslazioni della proprietà di tassellazione (osservazione 1.2.12), basta dimostrare che

$$A \text{ tassella} \Leftrightarrow kA \text{ tassella}$$

Capitolo 2. Condizioni di esistenza

[\Rightarrow]: Poiché A tassella, esiste $C \subset \mathbb{Z}$ tale che $A \oplus C = \mathbb{Z}$ è una tassellazione.
 Si ha quindi $kA \oplus kC = k\mathbb{Z}$, e di conseguenza la tassellazione
 $\mathbb{Z} = \{0, \dots, k-1\} \oplus k\mathbb{Z} = \{0, \dots, k-1\} \oplus kA \oplus kC = kA \oplus (\{0, \dots, k-1\} \oplus kC)$.

[\Leftarrow]: Poiché kA tassella, esiste $C \subset \mathbb{Z}$ tale che $kA \oplus C = \mathbb{Z}$.
 Ponendo $C_0 := \{c \in C \mid c \equiv 0 \pmod{k}\}$, si ha che

$$kA \oplus C_0 = k\mathbb{Z}.$$

[\subseteq]: È chiaro;

[\supseteq]: Per ogni $kz \in k\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$, $kz = ka + c$, di conseguenza $c \in C_0$.
 Allora $A \oplus C_0/k = \mathbb{Z}$ è una tassellazione.

QED

I due prossimi lemmi stabiliscono l'invarianza per trasformazioni affini anche della proprietà di soddisfare le condizioni (T1) e (T2). Il secondo, in particolare, ci permetterà di considerare tasselli i cui elementi sono primi tra loro.

2.1.10 Lemma. *Siano $A \subset \mathbb{N}$ finito ed $n \in \mathbb{N}$, poniamo $A' := A + n$. Si ha che:*

1. $A(x)$ soddisfa (T1) se e solo se $A'(x)$ soddisfa (T1)
2. $A(x)$ soddisfa (T2) se e solo se $A'(x)$ soddisfa (T2)

Dimostrazione: Basta osservare che $|A| = |A'|$ e $A'(x) = x^n A(x)$, quindi per ogni polinomio ciclotomico $\Phi_d(x)$ si ha che $\Phi_d(x) \mid A(x) \Leftrightarrow \Phi_d(x) \mid A'(x)$.

QED

2.1.11 Lemma. *Siano $A \subset \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}$. Poniamo $\hat{A} := kA$, si ha:*

1. A soddisfa (T1) $\Leftrightarrow \hat{A}$ soddisfa (T1)
2. A soddisfa (T2) $\Leftrightarrow \hat{A}$ soddisfa (T2)

Dimostrazione: Cominciamo con una

2.1.12 Osservazione. Sia $k = p$ primo, allora

$$S_{\hat{A}} = \{p^{\alpha+1} : p^\alpha \in S_A\} \cup \{q^\beta \in S_A : q \text{ primo } \neq p\}.$$

Dimostrazione: $\hat{A}(x) = A(x^k)$, quindi, per la proposizione A.4 (7):

$$R_{\hat{A}} = pR_A \cup \{n \in R_A : p \nmid n\}.$$

In particolare $S_{\hat{A}} = \{q^\alpha \in R_{\hat{A}} \mid q \text{ primo}\}$ e

1. $q^\alpha \in pR_A \Leftrightarrow q = p$ e $q^{\alpha-1} \in R_A$
2. $q^\alpha \in \{n \in R_A : p \nmid n\} \Leftrightarrow q \neq p$ e $q^\alpha \in R_A$

da cui la tesi.

QED

Utilizzando la precedente osservazione dimostriamo separatamente i due punti della tesi:

1. Dividiamo in casi:

- (a) Se $k = p$ primo la tesi segue dall'osservazione.
- (b) Se $k = p^\alpha$, iterando l'osservazione si ha che

$$S_{\hat{A}} = \{p^{\alpha+\beta} : p^\beta \in S_A\} \cup \{q^\gamma \in S_A : q \text{ primo } \neq p\},$$

ne segue la tesi, come nel caso precedente.

- (c) Sia $k = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$ dimostriamo che

$$S_{\hat{A}} = \bigcup_{i=1}^n \{p_i^{\alpha_i+\beta} : p^\beta \in S_A\} \cup \{q^\gamma \in S_A : q \text{ primo } \neq p_i \forall i\}.$$

In effetti basta considerare

$$S_A = \bigcup_{i=1}^n \{p_i^{\beta_i} \in S_A\} \cup \{q^\gamma \in S_A : q \text{ primo } \neq p_i \forall i\}$$

ed iterare l'osservazione precedente, poiché ad ogni passo la moltiplicazione per il primo p_i modifica dell'insieme ottenuto al passo precedente solo l'esponente di p_i , aumentandolo di 1.

Anche in questo caso la tesi segue.

2. Consideriamo il caso $k = p$ primo e definiamo

$$n' := \begin{cases} pn & \text{se } p \mid n \\ n & \text{se } p \nmid n \end{cases}$$

Per la proposizione A.4 (7) si ha:

$$n \in R_A \Leftrightarrow n' \in R_{pA}.$$

Siano $p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \dots, p_k^{a_k} \in \mathbb{N}$, potenze di primi distinti.

Per l'osservazione si ha:

$$p_i^{a_i} \in S_A \Leftrightarrow (p_i^{a_i})' \in S_{pA}.$$

Allora, poiché $(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k})' = (p_1^{a_1})' (p_2^{a_2})' \dots (p_k^{a_k})'$ si ha la tesi.

Il caso generale segue iterando il caso precedente per ogni primo $p \mid k$.

QED

Capitolo 2. Condizioni di esistenza

Dimostriamo infine un lemma tecnico.

2.1.13 Lemma. *Siano $A \subset \mathbb{N}$ finito tale che $A \oplus C = \mathbb{Z}$, k è un intero positivo, e $C \subset k\mathbb{Z}$. Poniamo:*

- $A_i := \{a \in A \mid a \equiv i \pmod{k}\}$ per ogni $i = 0, \dots, k-1$,
- $a_i := \min A_i$ e
- $\bar{A}_i := \{a - a_i \mid a \in A_i\}/k$.

Allora

1. $A(x) = x^{a_0} \bar{A}_0(x^k) + x^{a_1} \bar{A}_1(x^k) + \dots + x^{a_{k-1}} \bar{A}_{k-1}(x^k)$;
2. $\bar{A}_i \oplus C/k = \mathbb{Z}$ per ogni $i = 0, \dots, k-1$;
3. $|A_i| = |A|/k$ per ogni $i = 0, \dots, k-1$;
4. $S_{\bar{A}_0} = S_{\bar{A}_1} = \dots = S_{\bar{A}_{k-1}}$;
5. se $k = p$ primo si ha:
 - (a) $S_A = \{p\} \cup S_{p\bar{A}_0}$ e
 - (b) se $\bar{A}_i(x)$ soddisfa (T2) per ogni $i = 0, \dots, k-1$, allora anche $A(x)$ soddisfa (T2).

Dimostrazione:

1. Segue dal fatto che A è l'unione disgiunta di tutti gli A_i ed $A_i = a_i + k\bar{A}_i$ per ogni $i = 0, \dots, k-1$.
2. Proviamo innanzitutto che $A_i \oplus C = i + k\mathbb{Z}$.
 - ⊂: $A_i \subset i + k\mathbb{Z}$ e $C \subset \mathbb{Z}$, quindi $A_i \oplus C \subset i + k\mathbb{Z}$,
 - ⊃: se $i + kn = a + c$ allora $a \equiv i \pmod{k}$.

Allora, poiché $A_i \oplus C = i + k\mathbb{Z} = a_i + k\mathbb{Z}$, si ha che $k\mathbb{Z} = A_i - a_i \oplus C$, dunque $\mathbb{Z} = (A_i - a_i)/k \oplus C/k = \bar{A}_i \oplus C/k$.

3. Per il punto precedente e per il teorema di de Bruijn esiste un insieme $B \subset \mathbb{Z}$ finito tale che $\bar{A}_i \oplus B \oplus n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ per ogni i , quindi $|\bar{A}_i| = n/|B|$ per ogni i .
4. Sempre per il punto 2 e per il teorema di de Bruijn esiste un insieme $B \subset \mathbb{Z}$ finito tale che $\bar{A}_i \oplus B \oplus n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ per ogni i , quindi, per il lemma 2.1.8, si ha che $S_{\bar{A}_i} = S \setminus S_B$ per ogni i , dove $S = \{p^\alpha : p^\alpha \mid n\}$.
5. Sia $k = p$ primo. Per l'osservazione 2.1.12 si ha che, per ogni i ,

$$S_{p\bar{A}_i} = \{p^{\alpha+1} : p^\alpha \in S_{\bar{A}_i}\} \cup \{q^\beta \in S_{\bar{A}_i} : q \text{ primo } \neq p\}.$$

- (a) Poiché $p\bar{A}_i(x) = \bar{A}_i(x^p)$, per i punti 1 e 4 si ha che $S_{p\bar{A}_i} \subset S_A$. Inoltre, se ρ è una radice primitiva p -esima dell'unità, per la 1 e la 3 si ha:

$$A(\rho) = \rho^{a_0}\bar{A}_0(\rho^p) + \rho^{a_1}\bar{A}_1(\rho^p) + \dots + \rho^{a_{p-1}}\bar{A}_{p-1}(\rho^p) = \\ \rho^{a_0}\bar{A}_0(1) + \rho^{a_1}\bar{A}_1(1) + \dots + \rho^{a_{p-1}}\bar{A}_{p-1}(1) = |A| / p \Phi_p(\rho) = 0$$

allora $\Phi_p(x) \mid A(x)$, quindi $S_{p\bar{A}_i} \cup \{p\} \subseteq S_A$.

D'altra parte, poiché A ed \bar{A}_i tassellano \mathbb{Z} , per il teorema (I) di Coven-Meyerowitz, verificano la condizione (T1), quindi

$$|A| = \prod_{q^\alpha \in S_A} q \geq \prod_{q^\alpha \in S_{p\bar{A}_i} \cup \{p\}} q = p \prod_{q^\alpha \in S_{p\bar{A}_i}} q = p |A| / p = |A|,$$

dunque vale anche l'altra inclusione, in particolare per $i = 0$.

- (b) Assumiamo che ogni \bar{A}_i verifichi la condizione (T2).
Dato un $s \in S_{A_i}$, poniamo

$$s' = \begin{cases} s & \text{se } p \nmid s \\ ps & \text{se } p \mid s \end{cases}$$

Allora, per (a), basta provare che, comunque dati $s_1, \dots, s_m \in S_{A_i}$, potenze di primi distinti, si abbia $\Phi_{s'_1 \dots s'_m}(x) \mid A(x)$ e $\Phi_{ps_1 \dots ps_m}(x) \mid A(x)$.

Per (T2), $\Phi_{s_1 \dots s_m} \mid \bar{A}_i(x)$ per ogni i , quindi, per l'osservazione 2.1.12 e la proposizione A.4(4), i polinomi ciclotomici $\Phi_{s'_1 \dots s'_m}(x)$ e $\Phi_{ps_1 \dots ps_m}(x)$ dividono $\bar{A}_i(x^p)$ per ogni i , quindi dividono $A(x)$.

QED

Concludiamo con la dimostrazione del teorema (3).

Dimostrazione (3):

Per il teorema 2.1.9 ed i lemmi 2.1.10, 2.1.11, assumiamo $0 \in A$ e $\text{MCD}(A) = 1$.

Per il corollario 5.3.4 al teorema di Tijdeman, esiste una tassellazione $A \oplus C = \mathbb{Z}$ il cui periodo n è il prodotto di potenze dei primi che dividono $|A|$.

Dimostriamo il teorema per induzione su $n > 0$ con al più due fattori primi.

1. Se $n = 1$, si ha che $A = \{0\}$, quindi $A(x) = 1$ ed $S_A = R_A = \emptyset$. Dunque A soddisfa (T2) trivialmente.
2. Se $n > 1$, per il teorema 5.3.5 di Sands, poiché $\text{MCD}(A) = 1$, esiste un primo $p \mid n$ tale che $C \subset p\mathbb{Z}$.

Consideriamo le notazioni del lemma 2.1.13; per il punto (2) di tale lemma $\bar{A}_i \oplus C/p$ è una tassellazione di periodo n/p .

Per ipotesi induttiva, $\bar{A}_i(x)$ soddisfa (T2) per ogni i , quindi per il lemma 2.1.13(5) anche $A(x)$ soddisfa (T2).

QED

2.2 Esempi

In questa sezione mostriamo tre esempi interessanti di canoni ritmici.

Il primo esempio mostra come applicare il teorema di Coven-Meyerowitz per dimostrare che un ritmo non tassella.

Il secondo ed il terzo esempio seguono una stessa filosofia, che andiamo ad illustrare. Un semplice algoritmo per costruire canoni ritmici di periodo n utilizza l'osservazione 2.1.7, e consiste nei seguenti passi:

1. Considerare la fattorizzazione di Δ_n in polinomi ciclotomici.
2. Dividere tali fattori ciclotomici in due gruppi il cui prodotto faccia due polinomi a coefficienti 0 e 1.
3. Considerare gli insiemi associati a tali prodotti (come da oss. 2.1.1).

Sorgono quindi due questioni:

- Tutti i polinomi ciclotomici che dividono $A(x)$ dividono anche $x^n - 1$?
- Tutti i polinomi che dividono $A(x)$ sono ciclotomici?

Ad entrambe le domande rispondiamo negativamente attraverso degli esempi (la prima nel secondo e la seconda nel terzo).

Dunque l'algoritmo illustrato non è esaustivo.

2.2.1 Esempio.

Consideriamo il ritmo tipico della salsa cubana, la *Clave Son (Tres Dos)*:

$$C = |\bullet \cdot \bullet \cdot \bullet \cdot | \dot{\bullet} \bullet \bullet \dot{\bullet} | = \{0, 3, 6, 10, 12\} \Rightarrow C(x) = 1 + x^3 + x^6 + x^{10} + x^{12}.$$

Dimostriamo che C non tassella.

Supponiamo per assurdo che tasselli, allora, per la condizione (T1) di Coven-Meyerowitz, si ha:

$$\prod_{p^\alpha \in S_C} p = C(1) = 5,$$

quindi esiste un intero positivo α tale che $S_C = \{5^\alpha\}$.

Poiché $\deg(\Phi_{5^\alpha}) = 4 \times 5^{\alpha-1}$ e $\deg(C) = 12$, l'unica possibilità è $\alpha = 1$, dunque

$$\Phi_5(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \mid C(x).$$

Esiste quindi un polinomio $p(x) = \sum_{i=0}^8 a_i x^i$ tale che $C(x) = p(x)\Phi_5(x)$.

Otteniamo il sistema:

$$\text{grado 0: } 1 = a_0$$

$$\text{grado 1: } 0 = a_0 + a_1 = 1 + a_1 \Rightarrow a_1 = -1$$

$$\text{grado 2: } 0 = a_0 + a_1 + a_2 = a_2$$

$$\text{grado 3: } 1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = a_3$$

$$\text{grado 4: } 0 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + a_4 \Rightarrow a_4 = -1$$

grado 5: $0 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = -1 + a_5 \Rightarrow a_5 = 1$

grado 6: $1 = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 1 + a_6 \Rightarrow a_6 = 0$

grado 7: $0 = a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 1 + a_7 \Rightarrow a_7 = -1$

grado 8: $0 = a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = -1 + a_8 \Rightarrow a_8 = 1$

grado 9: $0 = a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 1 + 0 - 1 + 1 = 1$

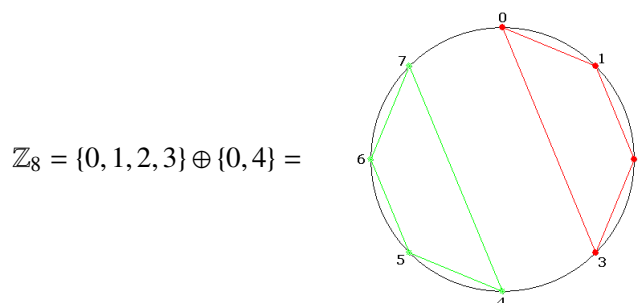
Siamo arrivati all'assurdo $0 = 1$, quindi $\Phi_5(x)$ non divide $C(x)$, pertanto C non tassella.

2.2.2 Esempio.

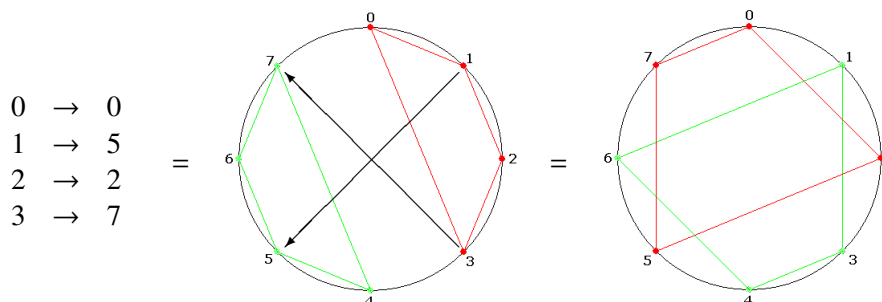
Cerchiamo un canone ritmico di ritmo interno A e periodo n tale che

$$\exists d \nmid n \text{ tale che } \Phi_d(x) \mid A(x).$$

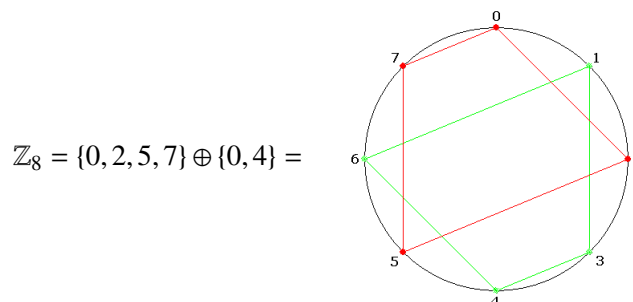
Riprendiamo l'esempio 1.2.13 di pagina 15 con $m = 4$ ed $n = 2$:



Costruiamo un nuovo ritmo interno A a partire dal canone precedente, mescolando le voci in modo tale che ogni elemento di $\{0, 1, 2, 3\}$ venga sostituito da un elemento di \mathbb{Z}_8 che appartenga alla sua stessa classe modulo 4, ad esempio:



abbiamo quindi ottenuto il canone:



Capitolo 2. Condizioni di esistenza

Si ha:

$$1. A = \{0, 2, 5, 7\} \Rightarrow A(x) = 1 + x^2 + x^5 + x^7 = \\ = (1+x)(1+x^2)(1-x+x^2-x^3+x^4) = \Phi_2(x)\Phi_4(x)\Phi_{10}(x)$$

$$2. B = \{0, 4\} \Rightarrow B(x) = 1 + x^4 = \Phi_8(x)$$

A tassella modulo 8 e $\Phi_{10}(x)|A(x)$ ma $10 \nmid 8$.

Osserviamo che $A = \{0, 2, 5, 7\} \equiv 5\{0, 1, 2, 3\} \pmod{8}$ e $(5, 8) = 1$, e infatti A tassella con lo stesso ritmo interno $B = \{0, 4\}$ del canone triviale, come si vedrà nel teorema 5.3.2.

In generale consideriamo il canone triviale

$$A \oplus B = \{0, 1, \dots, m-1\} \oplus \{0, m, 2m, \dots, (n-1)m\} = \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}.$$

Sappiamo (teorema 2.1.9) che per ogni $k \in \mathbb{N}$, kA tassella; e se inoltre $(k, nm) = 1$, si ha che $(k, m \mid A) = 1$, quindi (teorema 5.3.2) $kA \oplus B = \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$ e per la proposizione A.4,

$$(kA)(x) = A(x^k) = \Delta_m(x^k) = \prod_{d|m, d>1} \Phi_d(x^k) = \prod_{d|m, d>1} \prod_{h|k} \Phi_{dh}(x),$$

dunque per ogni $d, h > 1$ tali che $d \mid m$ e $h \mid k$ si ha $dh \nmid nm$ e $\Phi_{dh}(x) \mid (kA)(x)$.

Notiamo che il ritmo interno B rimane lo stesso, con $B(x) = \Delta_n(x^m)$.

2.2.3 Esempio.

Cerchiamo un canone ritmico di ritmo interno A e periodo n tale che

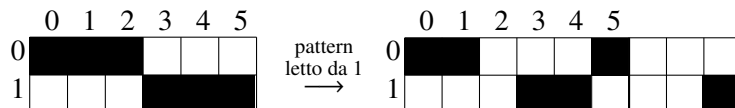
$$\exists p(x) \text{ irriducibile e non ciclotomico, tale che } p(x) \mid A(x).$$

L'idea, come nel caso precedente è quella di partire dal canone

$$\{0, 1, \dots, m-1\} \oplus \{0, m, 2m, \dots, (k-1)m\} = \mathbb{Z}/km\mathbb{Z}.$$

Questa volta, invece di mescolare le voci, leggeremo il ritmo interno a partire da $t > 0$, ad esempio:

per $m = 3$, $k = 2$ e $t = 1$, il pattern $\{0, 1, 2\}$ letto da 1 diventa il pattern $\{0, 1, 5\}$, ed il canone diventa $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{0, 1, 5\} \oplus \{0, 3\}$:



Il pattern così ottenuto è una traslazione di $-t \pmod{km}$ del pattern precedente, quindi tassella (osservazione 1.2.12), e si ha:

1. $A = \{0, 1, 5\} \Rightarrow A(x) = 1 + x + x^5 = (1 + x + x^2)(1 - x^2 + x^3) = \Phi_3(x)p(x)$ e

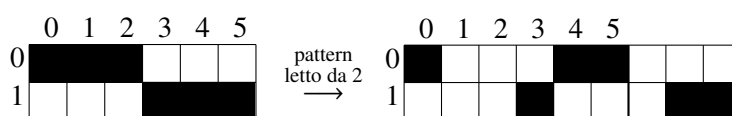
2. $B = \{0, 3\} \Rightarrow B(x) = 1 + x^3 = (1 + x)(1 - x + x^2) = \Phi_2(x)\Phi_6(x)$.

$p(x) = (1 - x^2 + x^3)$ non è divisibile per un polinomio ciclotomico, infatti:

(a) $p(x)$ è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$ (ha grado 3 e non ha radici)

(b) vale l'osservazione A.2

Analogamente per $t = 2$:



e si ha

1. $A = \{0, 4, 5\} \Rightarrow A(x) = 1 + x^4 + x^5 = (1 + x + x^2)(1 - x + x^3) = \Phi_3(x)p(x)$ e

2. B è lo stesso di prima.

E, sempre per l'osservazione A.2, il polinomio $p(x)$ non è divisibile per un polinomio ciclotomico.

In generale consideriamo il canone triviale

$$\{0, \dots, m - 1\} \oplus \{0, m, \dots, (n - 1)m\} = \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$$

letto a partire da $k \leq m$, cioè con ritmo interno traslato di $-k \pmod{mn}$:

1. $A := \{0, \dots, m - 1\} - k = \{-k, -k + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, m - k - 1\} \equiv \{0, 1, \dots, m - k - 1, nm - k, nm - k + 1, \dots, nm - 1\} \pmod{mn} \Rightarrow \Rightarrow A(x) = 1 + x + \dots + x^{m-k-1} + x^{nm-k} + \dots + x^{nm-1} \stackrel{1}{=} \Delta_m(x)(1 - x^{m-k} + x^m - x^{2m-k} + x^{2m} + \dots - x^{(n-1)m-k} + x^{(n-1)m}) = \Delta_m(x)(\Delta_n(x^m) - x^{m-k}\Delta_{n-1}(x^m))$

2. $B(x) = \sum_{i=0}^{n-1} x^{mi} = \Delta_n(x^m)$.

Poiché $\Delta_m(x)$ è prodotto di polinomi ciclotomici, ci interessa sapere per quali valori di $n, m, k \in \mathbb{N}$, con $nm \geq 1$ e $k \leq m$, esista un polinomio non ciclotomico che divida il fattore $R(x) := \Delta_n(x^m) - x^{m-k}\Delta_{n-1}(x^m)$ di $A(x)$.

Cominciamo scartando i casi triviali:

- Se $k = 0$ non c'è nessuna traslazione ed il canone rimane quello iniziale, cioè con $A(x) = \Delta_m(x)$ (infatti $R(x) = 1$), quindi gli unici polinomi irriducibili che dividono $A(x)$ sono ciclotomici.

¹segue dal fatto che se $\alpha < \beta$, allora $\Delta_\alpha(x) = \Delta_\beta(x) - x^\alpha \Delta_{\beta-\alpha}(x)$, applicandola a $\beta = m$ ed, in modo alternato, $\alpha = m - k$ e k

Capitolo 2. Condizioni di esistenza

- Se $k = m$ la traslazione cambia solo l'ordine delle voci, senza alterarne il motivo, che rimane A , infatti, come prima, $R(x) = 1$ e quindi $A(x) = \Delta_m(x)$: gli unici polinomi irriducibili che dividono $A(x)$ sono ciclotomici.

Sia ora $0 < k < m$. Abbiamo due possibilità:

1. $m = 2k$,
2. $m \neq 2k$,

corrispondenti alle due proprietà:

1. $R(x)$ è reciproco (definizione A.5),
2. $R(x)$ non è reciproco.

Basta infatti scrivere

$$R(x) = 1 - x^{m-k} + x^m - x^{2m-k} + x^{2m} + \dots - x^{(n-1)m-k} + x^{(n-1)m}$$

per osservare che $R(x)$ è reciproco se e solo se

$$(n-1)m - (m-k) = (n-1)m - k,$$

cioè se e solo se $m = 2k$.

Nel primo caso, si vede facilmente che $R(x) = \Delta_{2n-1}(-x^k)$, quindi ogni polinomio irriducibile che divide $R(x)$ divide anche $\Phi_d(-x^k)$, dove $d \mid 2n-1$ e $d > 1$. Poiché $2n-1$ è dispari, anche ogni suo divisore lo è, quindi (per la proposizione A.4(3)) $\Phi_d(-x^k) = \Phi_{2d}(x^k)$. Se ne deduce che i fattori irriducibili di $R(x)$ sono polinomi ciclotomici, di conseguenza tali sono anche i fattori irriducibili di $A(x)$.

Nel secondo caso, $R(x)$ non è reciproco.

In entrambi i casi, $R(x)$ ha un numero dispari di termini, quindi $R(1) \neq 0$ (ed anche $R(-1)$ in verità), e quindi (per la prop. A.6) tutti i polinomi ciclotomici che dividono $R(x)$ sono reciproci.

Il prodotto di polinomi reciproci è un polinomio reciproco, quindi se per assurdo tutti i fattori irriducibili di $R(x)$ fossero polinomi ciclotomici, allora $R(x)$ sarebbe reciproco.

Abbiamo supposto il contrario: quindi deve esistere un polinomio, irriducibile, non ciclotomico, che divide $R(x)$, e di conseguenza anche $A(x)$.

Ricapitolando, abbiamo dimostrato la seguente

2.2.4 Proposizione. *Siano $m, n, k \in \mathbb{N}$ tali che $nm > 0$ e $k \leq m$.*

Sia A il ritmo interno del canone ottenuto traslando di $-k$ il ritmo interno del canone triviale

$$\{0, \dots, m-1\} \oplus \{0, m, \dots, (n-1)m\} = \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}.$$

I fattori irriducibili di $A(x)$ sono tutti polinomi ciclotomici se e solo se $m = hk$ con $h \in \{0, 1, 2\}$.

Capitolo 3

Canoni di Vuza

3.1 Fattorizzazioni aperiodiche

Abbiamo definito un canone ritmico a mosaico come una fattorizzazione di un gruppo ciclico finito con due suoi sottoinsiemi; in effetti lo studio di queste strutture musicali rientra nel problema più generale nello studio delle fattorizzazioni di un gruppo abeliano con n sottoinsiemi. Tale problema si impose all'attenzione della comunità matematica quando, nel 1941 [29], il giovane matematico ungherese G. Hajós risolse la congettura di Minkowski sui ricoprimenti reticolari a cubi, dopo averla tradotta in un problema di fattorizzazione di gruppi abeliani con sottoinsiemi (di questa traduzione ci occuperemo nel paragrafo 3.2.2).

Fu infatti Hajós, in un articolo del 1950 [30], a porre la seguente domanda:

Data una fattorizzazione $G = A \oplus B$ di un gruppo abeliano con due suoi sottoinsiemi, si può dedurre che A o B deve essere necessariamente periodico (definizione 1.2.3)?

Ed egli stesso, nel medesimo articolo, vi rispose negativamente enunciando un teorema, la generalizzazione del quale (teorema 3.1.4) avrebbe poi permesso di trovare *tutti* i gruppi abeliani per i quali la risposta è negativa.

Sempre nel 1950, anche il matematico olandese Nicolaas Govert de Bruijn, studiando le basi per l'insieme degli interi [14], e senza essere a conoscenza del lavoro di Hajós, si pose la stessa domanda e ne congetturò la risposta affermativa ([14], pag. 242, congettura 3). Nonostante questo primo errore, de Bruijn è stato tra gli studiosi che hanno apportato un contributo determinante per la caratterizzazione dei gruppi per i quali la risposta alla domanda di Hajós è positiva.

Tra il 1941 ed il 1957, in articoli di Hajós ([29], [30], [31]), Rédei ([57], [58]), de Bruijn ([15], [16]) e Sands ([61], [64]), vennero esibiti diversi esempi di gruppi per i quali la risposta è affermativa, e venne generalizzato il già menzionato risultato di Hajós sui gruppi per i quali è negativa, arrivando ad una completa caratterizzazione in entrambi i casi.

Successivamente, tra il 1991 ed il 1993, furono pubblicati quattro articoli del matematico rumeno Dan Tudor Vuza [78] dedicati alla formalizzazione di una par-

icolare classe di canoni ritmici: i canoni RCCM (Regular Complementary Canons of Maximal Category), oggetto del presente capitolo. L'eccezionalità del lavoro di Vuza (cfr ad esempio Moreno Andreatta [9]) sta nel fatto che, ignorando completamente i risultati di Hajós, Redei, de Bruijn e Sands, egli dimostri molti dei teoremi contenuti negli articoli citati, ed anticipa un importante risultato, attribuito in seguito a Robert Tijdeman (1995, [76], cfr. teorema 5.3.2).

Cominciamo come di consueto con qualche definizione.

3.1.1 Definizione. Sia G un gruppo abeliano.

Una k -fattorizzazione di G è una sua fattorizzazione in somma diretta di k suoi sottoinsiemi.

Una k -fattorizzazione $G = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_k$ si dice *periodica* se esiste un indice $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ tale che A_i è periodico.

Una k -fattorizzazione non periodica si dice *aperiodica*.

3.1.2 Definizione. Sia G un gruppo abeliano.

G è k -Hajós se ogni sua k -fattorizzazione è periodica.

G è non k -Hajós se non è un gruppo k -Hajós, cioè se esiste una sua k -fattorizzazione aperiodica.

Per $k = 2$, si dirà semplicemente *di Hajós* e *non-Hajós*.

3.1.3 Definizione. Un *canone di Vuza* è una 2-fattorizzazione aperiodica di un gruppo ciclico. L'ordine del gruppo ciclico è il *periodo* del canone.

Osserviamo che i canoni di Vuza esistono solo per gruppi ciclici non-Hajós. Notiamo inoltre che un canone di Vuza è un canone ritmico $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = A \oplus B$ nel quale sia il ritmo interno A che il ritmo esterno B sono aperiodici.

In [15] de Bruijn generalizza il già citato risultato di Hajós in [30], ottenendo il seguente fondamentale risultato:

3.1.4 Teorema (Hajós - de Bruijn).

Sia G un gruppo abeliano finito, sia $H \triangleleft G$ un sottogruppo proprio tale che:

1. $H = H_1 \oplus H_2$ con H_1 ed H_2 sottogruppi non banali,
2. $o(H_i)$ non è primo, per $i = 1, 2$, e
3. H_i non è isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, per $i = 1, 2$.

Allora G è non-Hajós. □

Daremo la dimostrazione di questo teorema solo nel caso (dimostrato anche da Vuza) in cui G sia un gruppo ciclico, utilizzando l'elegante fattorizzazione suggerita da Franck Jedrzejewski [37] e la seguente proposizione:

3.1.5 Proposizione. Un insieme $A \subset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ è periodico modulo $k \mid n$, se e solo se

$$\frac{x^n - 1}{x^k - 1} \mid A(x).$$

Dimostrazione:

Per definizione, $A \subset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ è periodico modulo k se e solo se $k + A = A$, e si ha la seguente catena di doppie implicazioni:

$$\begin{aligned} k + A = A &\Leftrightarrow x^k A(x) \equiv A(x) \pmod{x^n - 1} \Leftrightarrow (x^k - 1)A(x) \equiv 0 \pmod{x^n - 1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^n - 1 \mid (x^k - 1)A(x) \Leftrightarrow \frac{x^n - 1}{x^k - 1} \mid A(x). \end{aligned}$$

QED

3.1.6 Osservazione.

Se $A \subset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ è periodico allora il suo periodo divide n .

Infatti, per il corollario 1.2.6, se A è periodico modulo m , allora

$$A = S \oplus \langle m \rangle = S \oplus \left\langle \frac{n}{o(m)} \right\rangle$$

poiché in un gruppo ciclico c'è uno ed un solo sottogruppo per ogni divisore dell'ordine del gruppo.

Alla luce della precedente osservazione, se indichiamo con $\text{div}(n)$ l'insieme $\{d \in \mathbb{N} : d \mid n\}$, la proposizione 3.1.5 si può rinunciare come:

3.1.7 Proposizione. *Un insieme $A \subset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ è aperiodico se e solo se*

$$\text{per ogni } k \mid n, k \neq n \text{ si ha che } \frac{x^n - 1}{x^k - 1} \nmid A(x),$$

ossia, se e solo se

$$\forall k \in \text{div}(n) \setminus \{n\} \exists d \in \text{div}(n) \setminus \text{div}(k) \text{ tale che } \Phi_d(x) \nmid A(x). \quad \square$$

Per i gruppi ciclici il teorema 3.1.4 diventa:

3.1.8 Teorema (de Bruijn - Vuza). *Sia $N = nmk \in \mathbb{N}$ tale che:*

1. $(n, m) = 1$,
2. $n = n_1 n_2$, $m = m_1 m_2$, ed
3. $n_1, n_2, m_1, m_2, k > 1$.

Allora $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ è non-Hajós

Dimostrazione:

Come prima cosa elenchiamo i risultati generali che applicheremo nella dimostrazione, indicando con \mathbb{Z}_n il gruppo ciclico $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ e con R_k l'insieme $\{0, 1, \dots, k - 1\}$:

Capitolo 3. Canoni di Vuza

(1) per ogni $k \mid n$, R_k è un insieme completo di rappresentanti di $\mathbb{Z}_n/k\mathbb{Z}_n$, cioè

$$\mathbb{Z}_n = R_k \oplus k\mathbb{Z}_n,$$

che infatti abbiamo chiamato canone triviale (esempio 1.2.13),

(2) per ogni $k \in \mathbb{Z}^*$, se $\mathbb{Z}_n = S \oplus T$, allora $k\mathbb{Z}_n = kS \oplus kT$;

(3) se $\mathbb{Z}_n = S \oplus T$ allora $\mathbb{Z}_n = kS \oplus T$ per ogni k tale che $(k, |S|) = 1$.

I primi due risultati sono triviali, il terzo è il teorema 5.3.2.

Sia dunque $N = nmk$ come nell'enunciato, cerchiamo una fattorizzazione $\mathbb{Z}_N = A \oplus B$ con A e B non periodici.

Cominciamo con il canone triviale:

$$\mathbb{Z}_N = R_k \oplus k\mathbb{Z}_N.$$

Applicando (1) e (2) in modo alternato, abbiamo le seguenti fattorizzazioni di $k\mathbb{Z}_N$:

$$\begin{aligned} 1. \quad k\mathbb{Z}_N &= kR_{n_1} \oplus kn_1\mathbb{Z}_N \\ &\quad kR_{n_1} \oplus kn_1R_{n_2} \oplus kn_1n_2\mathbb{Z}_N \\ &\quad kR_{n_1} \oplus kn_1R_{n_2} \oplus kn_1n_2R_{m_1} \oplus kn_1n_2m_1\mathbb{Z}_N, \text{ e} \\ 2. \quad k\mathbb{Z}_N &= kR_{m_1} \oplus km_1\mathbb{Z}_N \\ &\quad kR_{m_1} \oplus km_1R_{m_2} \oplus km_1m_2\mathbb{Z}_N \\ &\quad kR_{m_1} \oplus km_1R_{m_2} \oplus km_1m_2R_{n_1} \oplus km_1m_2n_1\mathbb{Z}_N. \end{aligned}$$

Per la (1) e la (3), poiché $n_1 \mid |R_{n_1}|$ e $(m, n_1) = 1$, risulta

$$\mathbb{Z}_N = mR_{n_1} \oplus n_1\mathbb{Z}_N,$$

e per la (2) si ha

$$k\mathbb{Z}_N = kmR_{n_1} \oplus kn_1\mathbb{Z}_N;$$

analogamente, scambiando i ruoli di n ed m , si ha

$$k\mathbb{Z}_N = knR_{m_1} \oplus km_1\mathbb{Z}_N.$$

Poniamo:

- $A := kmR_{n_1} \oplus knR_{m_1}$,
- $C_1 := kn_1R_{n_2} \oplus kn_1n_2m_1\mathbb{Z}_N$,
- $C_2 := km_1R_{m_2} \oplus km_1m_2n_1\mathbb{Z}_N$.

Le due fattorizzazioni allora diventano:

1. $k\mathbb{Z}_N = A \oplus C_1$, e
2. $k\mathbb{Z}_N = A \oplus C_2$

Ritornando alla fattorizzazione iniziale,

$$\mathbb{Z}_N = R_k \oplus k\mathbb{Z}_N = k\mathbb{Z}_N \sqcup \{1, \dots, k-1\} \oplus k\mathbb{Z}_N,$$

dove \sqcup indica l'unione disgiunta; utilizziamo per il primo $k\mathbb{Z}_N$ la prima fattorizzazione, e per il secondo la seconda, cioè:

$$\mathbb{Z}_N = A \oplus C_1 \sqcup \{1, \dots, k-1\} \oplus A \oplus C_2 = A \oplus (C_1 \sqcup \{1, \dots, k-1\} \oplus C_2).$$

Prendendo allora

$$\bullet B := C_1 \sqcup \{1, \dots, k-1\} \oplus C_2,$$

abbiamo il canone $\mathbb{Z}_N = A \oplus B$.

Rimane da vedere che A e B non sono periodici, cominciamo da A :

$$A(x) = \Delta_{n_1}(x^{km})\Delta_{n_2}(x^{kn}) = \frac{x^{kmn_1} - 1}{x^{km} - 1} \frac{x^{knm_1} - 1}{x^{kn} - 1}.$$

Utilizziamo la proposizione 3.1.7: fissiamo un qualsiasi $h \in \text{div}(N) \setminus \{N\}$ e cerchiamo un $d \in \text{div}(N) \setminus \text{div}(h)$ tale che $\Phi_d(x) \nmid A(x)$.

Abbiamo i seguenti casi:

1. $km \nmid h$, allora $\Phi_{km}(x)$ è il polinomio cercato;
2. $kn \nmid h$, allora $\Phi_{kn}(x)$ è il polinomio cercato;

non esistono altre possibilità, infatti, se per assurdo avessimo $km \mid h$ e $kn \mid h$, allora $h = \alpha km = \beta kn$, quindi $\alpha m = \beta n$, e poiché $(n, m) = 1$ seguirebbe $\alpha = n$ e $\beta = m$ quindi $h = N$, assurdo.

Passiamo a B :

$$\begin{aligned} B(x) &= C_1(x) + (x + x^2 + \dots + x^{k-1})C_2(x) = \\ &= \Delta_{n_2}(x^{kn_1})\Delta_{m_2}(x^{\frac{N}{m_2}}) + x\Delta_{k-1}(x)\Delta_{m_2}(x^{km_1})\Delta_{n_2}(x^{\frac{N}{n_2}}) = \\ &= \frac{x^{kn} - 1}{x^{kn_1} - 1} \frac{x^N - 1}{x^{\frac{N}{m_2}} - 1} + x\Delta_{k-1}(x) \frac{x^{km} - 1}{x^{km_1} - 1} \frac{x^N - 1}{x^{\frac{N}{n_2}} - 1} \end{aligned}$$

Come per A , dato un qualsiasi $h \in \text{div}(N) \setminus \{N\}$ cerchiamo un $d \in \text{div}(N) \setminus \text{div}(h)$ tale che $\Phi_d(x) \nmid B(x)$. Consideriamo i casi:

1. $kmn_1 \nmid h$, allora $\Phi_{kmn_1}(x)$ è il polinomio cercato, infatti $\Phi_{kmn_1}(x) \mid \frac{x^N - 1}{x^{\frac{N}{m_2}} - 1}$ ma $\Phi_{kmn_1}(x) \nmid x\Delta_{k-1}(x) \frac{x^{km} - 1}{x^{km_1} - 1} \frac{x^N - 1}{x^{\frac{N}{n_2}} - 1}$;
2. $knm_1 \nmid h$, allora $\Phi_{knm_1}(x)$ è il polinomio cercato (simmetricamente al caso precedente);

Capitolo 3. Canoni di Vuza

non esistono altre possibilità, infatti, se per assurdo avessimo $k m n_1 \mid h$ e $k n m_1 \mid h$, allora $h = \alpha k m n_1 = \beta k n m_1$, quindi $\alpha m_2 = \beta n_2$, e poiché $(n_2, m_2) = 1$ seguirebbe $\alpha = n_2$ e $\beta = m_2$ quindi $h = N$, assurdo.

QED

Sappiamo quindi ora che esistono canoni di Vuza di periodo $N = nmk$, come nelle ipotesi del teorema 3.1.8 di Vuza. Il risultato che segue stabilisce esplicitamente quali sono i periodi non contemplati nel precedente teorema.

3.1.9 Teorema. Siano

- $\mathcal{V} := \{N \in \mathbb{N} \mid N = nmk, \text{ con } (n, m) = 1, n = n_1 n_2, m = m_1 m_2, n_i, m_i, k > 1\}$
l'insieme dei naturali che soddisfano le ipotesi del teorema di Vuza, ed
- $\mathcal{H} = \{p^\alpha, p^\alpha q, p^2 q^2, pqr, p^2 qr, pqrs : \alpha \in \mathbb{N}, p, q, r, s \text{ primi distinti}\}$;

allora $\mathbb{N}^* := \{n \in \mathbb{N} \mid n > 0\}$ è unione disgiunta di \mathcal{V} ed \mathcal{H} .

Dimostrazione:

Indichiamo con $\mathcal{V}^c = \mathbb{N}^* \setminus \mathcal{V}$ e con $\mathcal{H}^c = \mathbb{N}^* \setminus \mathcal{H}$, basta allora dimostrare le due inclusioni $\mathcal{H} \subset \mathcal{V}^c$ e $\mathcal{H}^c \subset \mathcal{V}$.

$\mathcal{H} \subset \mathcal{V}^c$: Per ogni $x \in \mathcal{V}$ esistono $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*$ con $(n_1 n_2, m_1 m_2) = 1$ ed $n_1 n_2 m_1 m_2 \mid x$, proprietà non verificata dagli elementi di \mathcal{H} di tipo p^α e $p^\alpha q$, con p, q primi ed $\alpha \in \mathbb{N}$. Inoltre, per ogni $x \in \mathcal{V}$ esistono $n_1, n_2, m_1, m_2, k \in \mathbb{N}^*$ tali che $n_1 n_2 m_1 m_2 k \mid x$, proprietà non verificata dai restanti elementi di \mathcal{H} , quelli di tipo $p^2 q^2, pqr, p^2 qr$ e $pqrs$, con p, q, r, s primi.

$\mathcal{H}^c \subset \mathcal{V}$: Sia $x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_h^{\alpha_h} \in \mathcal{H}^c$, con p_1, p_2, \dots, p_h primi distinti. Dividiamo in casi, secondo il numero $h \geq 1$ dei primi che dividono x .

$h = 1$: Non è possibile perché $x \notin \mathcal{H}$.

$h = 2$: Poiché $x \notin \mathcal{H}$, si ha che $\alpha_1 \geq 3$ ed $\alpha_2 \geq 2$ (o viceversa), quindi basta considerare $(n, m, k) = (p_1^2, p_2^{\alpha_2}, p_1^{\alpha_1 - 2})$.

$h = 3$: Poiché $x \notin \mathcal{H}$, si ha, a meno di permutare i fattori, che:

- $\alpha_1 = 2, \alpha_2 \geq 2$ ed $\alpha_3 \geq 1$, oppure
- $\alpha_1 \geq 3, \alpha_2 \geq 1$ e sempre $\alpha_3 \geq 1$,

in entrambi i casi basta considerare $(m, n, k) = (p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, p_3^{\alpha_3})$.

$h = 4$: Poiché $x \notin \mathcal{H}$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \geq 5$, supponiamo $\alpha_1 \geq 2$, quindi basta considerare $(n, m, k) = (p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}, p_3^{\alpha_3} p_4^{\alpha_4}, p_1)$

$h > 4$: Basta considerare $(n, m, k) = (p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}, p_3^{\alpha_3} p_4^{\alpha_4}, p_5^{\alpha_5})$.

QED

3.1 Fattorizzazioni aperiodiche

In effetti i gruppi abeliani finiti non Hajós sono completamente caratterizzati dal teorema 3.1.4 di Hajós - de Bruijn.

Per i gruppi ciclici, abbiamo visto esplicitamente, nel teorema precedente, quali periodi mancano all'appello. Per la dimostrazione del fatto che tali gruppi sono tutti di Hajós, rimandiamo agli articoli citati nella seguente tabella:

Periodi	Autore/i
p^α	Hajós [30] e Rédei [58]
$p^\alpha q$	de Bruijn [16]
$p^2 q^2$	Sands [61]
pqr	Rédei [58]
$p^2 qr$	Sands [61]
$pqrs$	Sands [61]

dove p, q, r ed s sono primi distinti, ed $\alpha \in \mathbb{N}$.

Nel caso non ciclico, i gruppi abeliani finiti di Hajós sono tutti e soli

- i gruppi dei seguenti tipi [64]:

$$\{p, p\}, \{2^2, 2^2\}, \{2^1, 2\}, \{3^2, 3\}, \{p^3, 2, 2\}, \{p^2, 2, 2, 2\},$$

$$\{p, 2^2, 2\}, \{p, 2, 2, 2, 2\}, \{p, q, 2, 2\} \text{ e } \{p, 3, 3\}$$

- e tutti i loro sottogruppi,

dove p e q sono primi distinti, e ricordiamo che il *tipo* di un gruppo abeliano finito è l'insieme degli ordini dei gruppi ciclici di cui è somma diretta. Per le dimostrazioni si rimanda agli articoli di Rédei [58], de Bruijn [15] e Sands ([62] e [64]).

Osserviamo che tutti gli esempi di canoni ritmici incontrati fino ad ora non sono canoni di Vuza, hanno infatti periodi troppo piccoli: il minimo periodo necessario per un canone di Vuza è 72, per il quale cioè $(n_1, n_2, m_1, m_2, k) = (2, 2, 3, 3, 2)$.

La dimostrazione del teorema 3.1.8 fornisce la seguente fattorizzazione di $\mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} A &= kmR_{n_1} \oplus knR_{m_1} \\ &= 18\{0, 1\} \oplus 8\{0, 1, 2\} \\ &= \{0, 8, 16, 18, 26, 34\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= C_1 \sqcup \{1, \dots, k-1\} \oplus C_2 \\ &= kn_1R_{n_2} \oplus knm_1\mathbb{Z}_N \sqcup \{1, \dots, k-1\} \oplus km_1R_{m_2} \oplus kmn_1\mathbb{Z}_N \\ &= 4\{0, 1\} \oplus \langle 24 \rangle \sqcup \{1\} \oplus 6\{0, 1, 2\} \oplus \langle 36 \rangle \\ &= \{0, 4, 24, 28, 48, 52\} \sqcup 1 + \{0, 6, 12, 36, 42, 48\} \\ &= \{0, 1, 4, 7, 13, 24, 28, 37, 43, 48, 49, 52\} \end{aligned}$$

Osserviamo che la fattorizzazione aperiodica costruita nella dimostrazione è simmetrica rispetto ad m ed n , quindi come ritmo esterno possiamo considerare anche

$$\begin{aligned}
 B' &= C_2 \sqcup \{1, \dots, k-1\} \oplus C_1 \\
 &= km_1 R_{m_2} \oplus kmn_1 \mathbb{Z}_N \sqcup \{1, \dots, k-1\} \oplus kn_1 R_{n_2} \oplus knm_1 \mathbb{Z}_N \\
 &= 6\{0, 1, 2\} \oplus \langle 36 \rangle \sqcup \{1\} \oplus 4\{0, 1\} \oplus \langle 24 \rangle \\
 &= \{0, 6, 12, 36, 42, 48\} \sqcup 1 + \{0, 4, 24, 28, 48, 52\} \\
 &= \{0, 1, 5, 6, 12, 25, 29, 36, 42, 48, 49, 53\}
 \end{aligned}$$

$\mathbb{Z}_{72} = A \oplus B'$ è in effetti la fattorizzazione mostrata da Laszlo Fuchs in *Abelian Groups* [26], e ripresa dal matematico parigino François Le Lionnais, che inserisce 72 in *Les Nombres Remarquables* [47] proprio perché «le groupe cyclique à soixante-douze éléments se décompose sous la forme $S + T$ non-périodiques».

3.2 La congettura di Minkowski e il teorema di Hajós

Il teorema di Hajós, che viene considerato uno dei risultati più rilevanti nella teoria della fattorizzazione di gruppi abeliani, nasce come traduzione algebrica della congettura di Minkowski sui ricoprimenti reticolari dello spazio euclideo.

In questa sezione raccontiamo la genesi della congettura, partendo dalle considerazioni dello stesso Hermann Minkowski sul problema dell'approssimazione di reali con razionali, e ne illustriamo la traduzione algebrica di Hajós.

Non riporteremo alcune dimostrazioni e di altre daremo un'idea solo intuitiva. Lo scopo della sezione è evidenziare come i concetti di fattorizzazione di un gruppo abeliano con sottoinsiemi e di tassellazione, che trovano ampio utilizzo nella teoria dei canoni ritmici, vengono da branche della matematica apparentemente distanti da questo contesto specifico, come la geometria delle tassellazioni o la teoria dei numeri.

Per una visione completa si rimanda ai lavori degli stessi Minkowski ([52] e [53]) ed Hajós ([29] e [30]), di Stein [70], Stein e Szabó [71] e Shor [69].

3.2.1 La genesi della congettura

Sia a un numero reale. Per ogni intero $y \geq 1$ esiste un intero x tale che

$$0 \leq ay - x < 1,$$

basta infatti considerare $x = [ay]$ la parte intera di ay , come mostrato in Figura 3.1.

Consideriamo ora una *ratio* intera $t > 1$ e dividiamo l'intervallo $[0, 1[$ in t sottointervalli di ampiezza $1/t$:

$$[0, 1[= \bigcup_{k=0}^{t-1} \left[\frac{k}{t}, \frac{k+1}{t} \right[.$$

3.2 La congettura di Minkowski e il teorema di Hajós

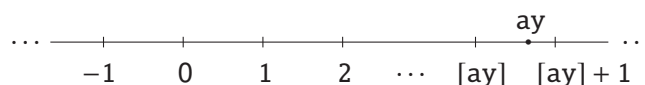


Figura 3.1

Al variare di $y \in \{0, \dots, t\}$, consideriamo un intero x tale che il numero reale

$$\xi := ay - x$$

sia in $[0, 1[$. Abbiamo così $t + 1$ numeri reali in t intervalli, quindi, per il principio dei cassetti, esistono due interi $y_1, y_2 \in \{0, \dots, t\}$, $y_1 \neq y_2$, tali che i rispettivi

$$\xi_1 = ay_1 - x_1 \text{ e } \xi_2 = ay_2 - x_2$$

sono nello stesso intervallo $[k/t, (k + 1)/t[$, come mostrato in Figura 3.2.

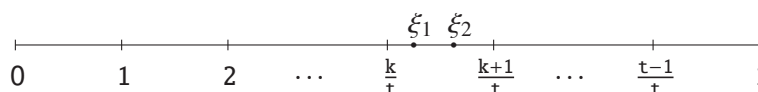


Figura 3.2

Supponiamo sia $y_1 > y_2$, allora, ponendo

$$y := y_1 - y_2 \text{ ed } x := x_1 - x_2,$$

si ha

$$0 < y \leq t \text{ e } |ay - x| < \frac{1}{t}.$$

Abbiamo dimostrato il

3.2.1 Teorema. *Per ogni numero reale a e per ogni ratio intera $t > 1$, esistono due interi x ed y tali che*

$$0 < y \leq t \text{ e } |ay - x| < \frac{1}{t}.$$

□

Consideriamo ora due numeri reali a_1 ed a_2 , ed una ratio intera $t > 1$. La suddivisione dell'intervallo $[0, 1[$ in t sottointervalli di ampiezza $1/t$ genera una suddivisione del quadrato unitario (non chiuso) $[0, 1]^2$ in t^2 quadrati di lato $1/t$:

$$[0, 1]^2 = \bigcup_{k,h=0}^{t-1} \left[\frac{k}{t}, \frac{k+1}{t} \right] \times \left[\frac{h}{t}, \frac{h+1}{t} \right].$$

Capitolo 3. Canoni di Vuza

Al variare di $z \in \{0, \dots, t^2\}$, consideriamo due interi x ed y tali che la coppia di numeri reali (ξ, η) definiti come

$$\xi := az - x \quad \text{ed} \quad \eta := az - y,$$

sia nel quadrato unitario $[0, 1]^2$. Abbiamo così $t^2 + 1$ coppie di numeri reali (ξ, η) in t^2 quadrati, quindi, per il principio dei cassetti, esistono due interi $z_1, z_2 \in \{0, \dots, t^2\}$, $z_1 \neq z_2$, tali che le rispettive coppie (ξ_1, η_1) e (ξ_2, η_2) , con

$$\xi_1 = az_1 - x_1, \quad \xi_2 = az_2 - x_2, \quad \eta_1 = az_1 - y_1 \quad \text{ed} \quad \eta_2 = az_2 - y_2,$$

siano nello stesso quadrato, diciamo $[k/t, (k+1)/t] \times [h/t, (h+1)/t]$, come mostrato in Figura 3.3.

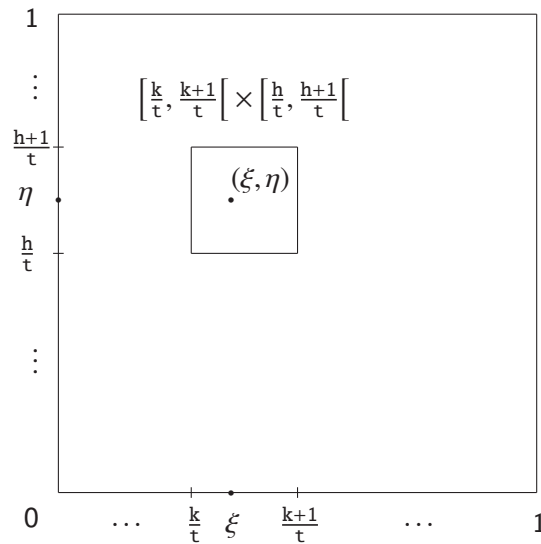


Figura 3.3

Il precedente argomento si generalizza facilmente in dimensione n qualsiasi, dimostrando il

3.2.2 Teorema. *Per ogni n -upla di numeri reali a_1, \dots, a_n e per ogni ratio intera $t > 1$, esistono $n + 1$ interi x_1, \dots, x_n, y tali che*

$$0 < y \leq t^n \quad \text{e} \quad |a_i y - x_i| < \frac{1}{t}, \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, n.$$

□

Questi ragionamenti hanno indotto Minkowski a porre il seguente problema di approssimazione simultanea di n reali con n razionali e ratio non necessariamente intera:

3.2 La congettura di Minkowski e il teorema di Hajós

3.2.3 Problema. Dati $n + 1$ numeri reali $a_1, \dots, a_n, t \in \mathbb{R}$ con $t > 1$, è sempre possibile trovare $n + 1$ numeri interi $x_1, \dots, x_n, y \in \mathbb{Z}$ tali che

$$0 < y < t^n \quad \text{e} \quad \left| a_i - \frac{x_i}{y} \right| < \frac{1}{ty}, \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, n$$

sia verificata?

Minkowski tenta di risolvere il precedente problema di teoria dei numeri traducendolo in un problema geometrico.

Consideriamo la matrice reale $(n + 1) \times (n + 1)$

$$A = \begin{pmatrix} t & 0 & \dots & 0 & -a_1 t \\ 0 & t & \dots & 0 & -a_2 t \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t & -a_n t \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1/t^n \end{pmatrix}$$

con $t > 1$, sia $C = [-1, 1]^{n+1}$ il cubo di vertici $(\pm 1, \dots, \pm 1)$ ed indichiamo con $\overset{\circ}{C}$ la sua parte interna. Il problema 3.2.3 diventa:

esiste un vettore a coordinate intere $X = (x_1, \dots, x_n, y) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ tale che $y > 0$ e $AX \in \overset{\circ}{C}$?

Osservando che $\det(A) = 1$, Minkowski si pose un problema più generale:

3.2.4 Problema. Sia $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ una matrice $n \times n$ reale di determinante 1 e sia $C = [-1, 1]^n$. Esiste un vettore non nullo a coordinate intere $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ tale che $BX \in \overset{\circ}{C}$?

Egli stesso si accorse che la risposta è in generale negativa, esibendo come controesempio la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Infatti, si vede che l'unica soluzione intera del sistema di disuguaglianze

$$\begin{aligned} |x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3| &< 1 \\ |x_2 + b_{23}x_3| &< 1 \\ |x_3| &< 1 \end{aligned}$$

è il vettore nullo $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$.

Torniamo al caso generale. Sia B la matrice del Problema 3.2.4, poiché B è invertibile, i vettori colonna $v_j = (b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj})$, per $j = 1, \dots, n$, formano una base di \mathbb{R}^n e consideriamo l'insieme

$$L := \{BX = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \mid X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Introduciamo ora alcune definizioni.

3.2.5 Definizione. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di \mathbb{R}^n e $B = (v_1, \dots, v_n)$ la matrice le cui colonne sono i vettori di \mathcal{B} . L'insieme

$$L = \{BX \mid X \in \mathbb{Z}^n\} = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i v_i \mid x_i \in \mathbb{Z}, v_i \in \mathcal{B} \right\}$$

di tutte le combinazioni lineari a coefficienti interi dei vettori di \mathcal{B} si dice *reticolo*. \mathcal{B} è la *base* del reticolo, B la sua *matrice*, n la sua *dimensione*.

Se $P = BX = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ è un punto del reticolo L , $X = (x_1, \dots, x_n)$ è il *vettore delle coordinate* di P sul reticolo L

Si chiama *parallelepipedo fondamentale* del reticolo l'insieme

$$\mathcal{P} := \left\{ \sum_{i=1}^n a_i v_i \mid a_i \in [0, 1] \subset \mathbb{R} \text{ per ogni } i = 1, \dots, n \right\}.$$

Il volume del parallelepipedo fondamentale si chiama *determinante* del reticolo e si indica con $\det(L)$.

Osserviamo che il volume del parallelepipedo fondamentale di un reticolo è il determinante della sua matrice:

$$\det(L) = \text{vol}(\mathcal{P}) = |v_1, v_2, \dots, v_n| = \det(B).$$

3.2.6 Definizione. Un insieme $C \subset \mathbb{R}^n$ si dice *a simmetria centrale* se e solo se esiste un punto $S \in \mathbb{R}^n$ tale che C è invariante per la simmetria rispetto ad S . S è detto *centro di simmetria* di C .

Siamo pronti per enunciare il risultato fondamentale di Minkowski che risolve completamente i Problemi 3.2.3 e 3.2.4: il Lattice Point Theorem (teorema del punto reticolare), brevemente LPT.

3.2.7 Teorema (LPT).

Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ compatto, convesso e centralmente simmetrico tale che

1. $\text{vol}(C) = 2^n d$ e
2. l'origine è il suo centro di simmetria.

Sia $L \subset \mathbb{R}^n$ un reticolo n -dimensionale di determinante d .

Allora C contiene un punto del reticolo diverso dall'origine.

□

Per la dimostrazione del teorema 3.2.7 si veda ad esempio [71] o [32]. Abbiamo così la soluzione del Problema 3.2.4:

3.2.8 Teorema. Siano B una matrice reale $n \times n$ di determinante 1 e $C = [-1, 1]^n$ il cubo di vertici $(\pm 1, \dots, \pm 1)$.

Allora esiste un vettore non nullo $X \in \mathbb{Z}^n$ tale che $BX \in C$.

3.2 La congettura di Minkowski e il teorema di Hajós

Dimostrazione: Consideriamo il reticolo $L = \{BX \mid X \in \mathbb{Z}^n\}$. Poiché $\det(L) = \det(B) = 1$ e $\text{vol}(C) = 2^n$, possiamo applicare il Lattice Point Theorem, esiste quindi un punto P , diverso dall'origine, tale che $P \in L \cap C$. Sia $X \in \mathbb{Z}^n$ il vettore delle coordinate di P su L , allora X non è nullo e $BX \in C$.

QED

La risposta al Problema 3.2.4 è quindi positiva se ne indeboliamo la richiesta: il vettore $X \in \mathbb{Z}^n$ potrebbe individuare un punto $P = BX$ che non si trova nella parte interna del cubo C , ma sulla sua frontiera ∂C (come si vedrà anche in alcuni esempi).

Possiamo ora enunciare la soluzione del Problema 3.2.3:

3.2.9 Teorema (Minkowski). *Per ogni insieme di $n + 1$ numeri reali $a_1, \dots, a_n, t \in \mathbb{R}$ con $t > 1$, esistono $n + 1$ numeri interi $x_1, \dots, x_n, y \in \mathbb{Z}$ tali che*

$$0 < y \leq t^n \quad e \quad |a_i - \frac{x_i}{y}| \leq \frac{1}{ty}, \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, n. \quad (*)$$

Dimostrazione:

Consideriamo la matrice reale $(n + 1) \times (n + 1)$

$$A = \begin{pmatrix} t & 0 & \dots & 0 & -a_1 t \\ 0 & t & \dots & 0 & -a_2 t \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t & -a_n t \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1/t^n \end{pmatrix}$$

Per il teorema 3.2.8, esiste un vettore non nullo $X = (x_1, \dots, x_n, y)$ a coordinate intere tale che $AX \in C = [-1, 1]^{n+1}$, cioè valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{aligned} |x_1 - ya_1| t &\leq 1 \\ |x_2 - ya_2| t &\leq 1 \\ &\vdots \\ |x_n - ya_n| t &\leq 1 \\ |y/t^n| &\leq 1 \end{aligned}$$

Se fosse $y = 0$, poiché $t > 1$, le prime n disequazioni implicherebbero che $x_i = 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$, cioè X sarebbe il vettore nullo, assurdo, quindi $y \neq 0$. Inoltre, poiché anche il reticolo $L = \{AX \mid X \in \mathbb{Z}^{n+1}\}$ è centralmente simmetrico rispetto all'origine, se $X \in L \cap C$ anche $-X \in L \cap C$, possiamo quindi assumere $y > 0$. Allora il precedente sistema di disuguaglianze, unito ad $y > 0$, diventa esattamente (*), cioè la tesi.

QED

Nelle ipotesi del teorema 3.2.9 abbiamo quindi due possibilità:

Capitolo 3. Canoni di Vuza

- (N1): esistono $n + 1$ interi per i quali tutte le disuguaglianze di (*) sono strette,
 (N2): per ogni $n + 1$ - upla di interi per i quali valga (*), una delle disuguaglianze è in realtà una uguaglianza.

Conservando le notazioni fino ad ora utilizzate, indichiamo con A la matrice definita nella dimostrazione del teorema 3.2.9, con L il reticolo $\{AX \mid X \in \mathbb{Z}^{n+1}\}$, associato ai reali a_1, \dots, a_n, t , con C il cubo $[-1, 1]^{n+1}$ e con $X = (x_1, \dots, x_n, y)$ il vettore di coordinate sul reticolo L di un punto P , diverso dall'origine, contenuto nel cubo. Le precedenti alternative numeriche corrispondono quindi alle seguenti situazioni geometriche:

(G1): esiste un punto $P \in L \cap \overset{\circ}{C}$,

(G2): per ogni $P \in L \cap C$, $P \in \partial C$.

Indichiamo ora con C_O il cubo unitario¹ centrato nell'origine O , $C_O = [-1/2, 1/2]^{n+1}$, e con C_P il cubo unitario centrato nel punto P , $C_P = [-1/2, 1/2]^{n+1} + P$.

Le precedenti situazioni corrispondono ai seguenti casi:

($\hat{G}1$): $\overset{\circ}{C}_O \cap \overset{\circ}{C}_P \neq \emptyset$,

($\hat{G}2$): $C_O \cap C_P = \partial C_O \cap \partial C_P$, cioè $\overset{\circ}{C}_O \cap \overset{\circ}{C}_P = \emptyset$.

Seguono due esempi, con $n = 1$, che illustrano, rispettivamente, le due possibilità

$$(N1) \Leftrightarrow (G1) \Leftrightarrow (\hat{G}1) \quad \text{ed} \quad (N2) \Leftrightarrow (G2) \Leftrightarrow (\hat{G}2)$$

- (1): Sia $a = 1/4$ il numero reale da approssimare con ratio $t = 2$.
 Il reticolo L associato ad a e t ha base e matrice rispettivamente

$$\mathcal{B} = \left\{ v = (t, 0) = (2, 0), w = (-at, 1/t) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} t & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Come si vede nella Figura 3.4, esiste un punto P del reticolo ($P = w$), diverso dall'origine O , che si trova nella parte interna del quadrato C , siamo cioè nella situazione (G1). $X = (x, y) = (0, 1)$ è il vettore delle coordinate di P su L . Sostituendo X in (*), si vede che valgono le disuguaglianze strette:

$$0 < y = 1 < t = 2 \quad \text{e} \quad \left| a - \frac{x}{y} \right| = \left| \frac{1}{4} \right| < \frac{1}{2} = \frac{1}{ty},$$

siamo infatti nella situazione (N1).

Consideriamo ora i quadrati unitari sopra definiti C_O e C_P . Come mostra la Figura 3.5,

$$\overset{\circ}{C}_P \cap \overset{\circ}{C}_O \neq \emptyset,$$

siamo cioè nel caso ($\hat{G}1$).

¹di volume 1

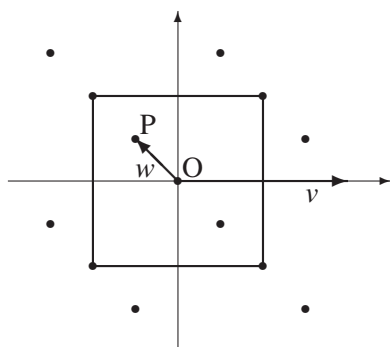


Figura 3.4

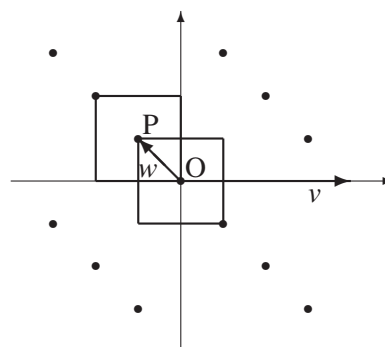


Figura 3.5

- (2): Sia $a = 1/2$ il numero reale da approssimare con ratio $t = 2$.
 Il reticolo L associato ad a e t ha base e matrice rispettivamente

$$\mathcal{B} = \{v = (t, 0) = (2, 0), w = (-at, 1/t) = (-1, 1)\} \text{ e } B = \begin{pmatrix} t & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Come si vede in Figura 3.6, ogni punto del reticolo, diverso dall'origine, interseca il quadrato C sulla frontiera, siamo cioè nella situazione (G2). Consideriamo ad esempio $P = w$. Il vettore delle coordinate di P sul reticolo L è $X = x, y = (0, 1)$, e sostituendo X in (*), si vede che una delle disuguaglianze è in realtà una uguaglianza:

$$0 < y = 1 < t = 2 \text{ e } |a - \frac{x}{y}| = |\frac{1}{2}| = \frac{1}{ty},$$

siamo infatti nella situazione (N2).

Consideriamo ora i quadrati unitari sopra definiti C_O e C_P . Come mostra la Figura 3.7,

$$\overset{\circ}{C}_P \cap \overset{\circ}{C}_O = \emptyset,$$

siamo cioè nel caso ($\hat{G}2$).

Osserviamo che le situazioni geometriche descritte sono invarianti per traslazioni poiché i reticoli stessi lo sono:

sia $T := \{\tau_v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \tau_v(x) = x + v, v \in \mathbb{R}^n\}$ l'insieme delle traslazioni in \mathbb{R}^n e sia $L \subset \mathbb{R}^n$ un reticolo di base \mathcal{B} ; T è un gruppo abeliano rispetto alla composizione di mappe, L è il gruppo libero generato dai vettori di \mathcal{B} , $L = \langle \mathcal{B} \rangle_{\mathbb{Z}}$, e la mappa

$$\begin{aligned} L &\rightarrow \{\tau \in T \mid \tau(L) = L\} \\ v &\mapsto \tau_v \end{aligned}$$

è un isomorfismo di gruppi.

Quindi, dato un reticolo L di determinante 1 ed un punto $Q \in L$, esiste sempre un punto P , diverso dall'origine, tale che $P \in L \cap [-1, 1]^2 + Q$. cioè, indicando con

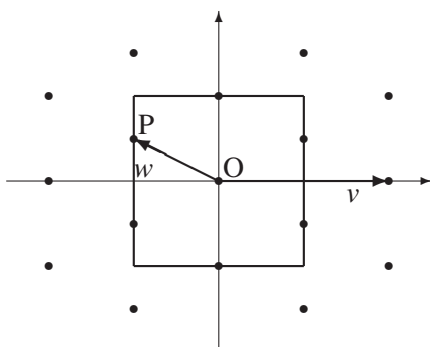


Figura 3.6

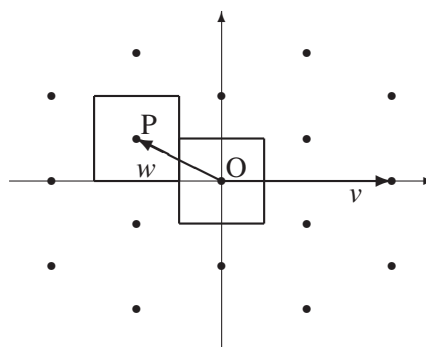


Figura 3.7

$C_P = [-1/2, 1/2]^2 + P$ e $C_Q = [-1/2, 1/2]^2 + Q$ i quadrati unitari centrati in P e Q rispettivamente, si ha che $C_P \cap C_Q \neq \emptyset$.

Siamo vicinissimi all'enunciato della congettura, mancano solo delle definizioni.

3.2.10 Definizione. Un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ di misura di Lebesgue finita e positiva *tassella* \mathbb{R}^n per traslazioni se esiste un insieme discreto $T \subset \mathbb{R}^n$ tale che:

1. per ogni $s, t \in T$ con $s \neq t$ si ha $m((E + s) \cap (E + t)) = 0$, e
2. $\bigcup_{t \in T} (E + t) = \mathbb{R}^n$, cioè $\bigcup_{t \in T} (E + t)$ è un ricoprimento di \mathbb{R}^n .

T è l'insieme di traslazione di E .

3.2.11 Definizione. Dato un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ che tassella per traslazioni con insieme di traslazione T , il ricoprimento $\bigcup_{t \in T} (E + t)$ di \mathbb{R}^n si dice *ricoprimento reticolare* se l'insieme di traslazione T è un reticolo.

Un ricoprimento reticolare si dice *a cubi* (o *Lattice Cube Tiling*) se il tassello del ricoprimento è il cubo n -dimensionale $[0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$.

Allora, dato un reticolo di determinante 1, il Lattice Point Theorem afferma che l'unione dei cubi unitari centrati nei punti del reticolo (e con gli spigoli paralleli agli assi) ricoprono tutto lo spazio, e le precedenti situazioni geometriche corrispondono alle seguenti alternative:

1. tale ricoprimento non è un ricoprimento reticolare a cubi,
2. tale ricoprimento è un ricoprimento reticolare a cubi.

Osserviamo che nel primo caso L possiede dei punti sulla frontiera di C , e per tali punti varrà almeno una uguaglianza in (*), ma il fatto che ne esiste uno con le disequaglianze strette implica che L non può essere l'insieme di traslazione di un ricoprimento reticolare a cubi.

Le figure 3.8 e 3.9 mostrano due ricoprimenti reticolari, rispettivamente del piano e dello spazio tridimensionale.

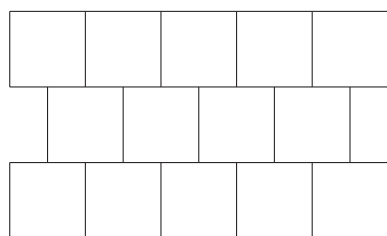


Figura 3.8

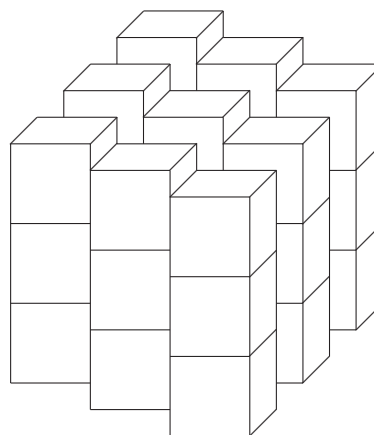


Figura 3.9

Lo stesso Minkowski ha dimostrato che nei casi bi e tridimensionale tutti i ricoprimenti reticolari a cubi sono fatti come nelle Figure 3.8 ed 3.9: unione di strisce nel caso bidimensionale e di tubi a sezione quadrata (che a loro volta formano lastre), nel caso tridimensionale, ha cioè dimostrato per $n = 2, 3$ la seguente

3.2.12 Congettura (Minkowski).

Dato un ricoprimento reticolare a cubi dello spazio euclideo n -dimensionale, si può sempre trovare una coppia di cubi che hanno in comune una faccia di dimensione $n - 1$.

Nel prossimo paragrafo vedremo come G. Hajós ha risolto questa congettura.

O. Keller ha poi ipotizzato che si potesse eliminare l'ipotesi reticolare dalla congettura di Minkowski:

3.2.13 Congettura (Keller). *Dato un ricoprimento a cubi dello spazio euclideo n -dimensionale, si può sempre trovare una coppia di cubi che hanno in comune una faccia di dimensione $n - 1$.*

La congettura di Keller è stata dimostrata da Oskar Perron [55] per $n \leq 6$ e confutata da John Mackey [48] per $n \geq 8$, il caso $n = 7$ è ancora aperto.

3.2.2 La traduzione algebrica

Consideriamo un ricoprimento reticolare a cubi dello spazio euclideo n -dimensionale. Come insieme di traslazione del ricoprimento possiamo considerare il reticolo H formato dai vertici di minor coordinate dei cubi (invece che dai loro centri, come abbiamo visto nel paragrafo precedente).

Hajós osserva innanzitutto che possiamo assumere senza perdita di generalità che le coordinate dei punti di H (o, equivalentemente, dei vettori della sua base) siano razionali. Precisamente, Hajós dimostra (in [29], Satz 8, pag 434) che una

piccola perturbazione dei vettori della base del reticolo di un ricoprimento reticolare a cubi non ne altera la proprietà di essere un controesempio per la congettura di Minkowski.

Consideriamo gli iperpiani di giacenza delle facce dei cubi. Poiché le coordinate degli elementi del reticolo sono razionali, ogni cubo è diviso da tali iperpiani in un numero finito di parallelepipedi n -dimensionali, diciamo m_i per l' i -esima coordinata, $i = 1, \dots, n$, come si vede in Figura 3.10 ($n = 2, m_1 = 1, m_2 = 3$) ed in Figura 3.11 ($n = 3, m_1 = m_2 = 3, m_3 = 1$).

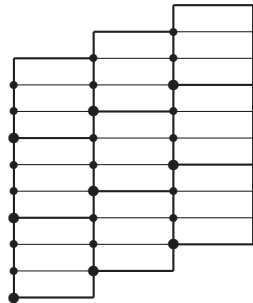


Figura 3.10

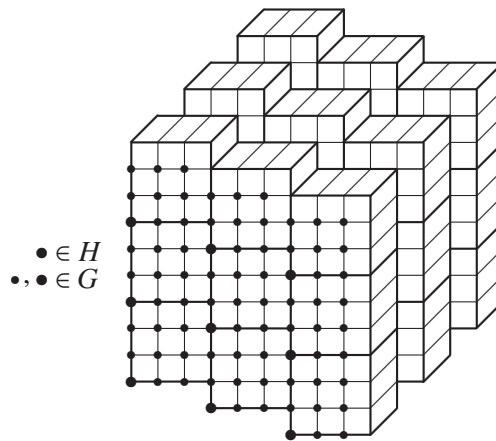


Figura 3.11

Considerando i vertici di minor coordinate di tali parallelepipedi, otteniamo un reticolo G di cui H è sottogruppo. Nelle Figure 3.10 e 3.11 i dischi neri indicano i punti del reticolo G , mentre H è indicato solo dai dischi di maggior diametro. G è anche l'insieme di traslazione del ricoprimento reticolare formato dai parallelepipedi.

Poiché H contiene l'origine e gli spigoli dei cubi sono paralleli agli assi, esiste una base $\{a_1, \dots, a_n\}$ del reticolo G formata da sottomultipli interi della base canonica $\{e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)\}$, cioè tale che

$$m_i a_i = e_i \text{ per ogni } i = 1, \dots, n,$$

dove, ricordiamo, m_i è il numero di (iper)fette in cui viene diviso ogni cubo lungo l' i -esima coordinata.

Siamo pronti per tradurre algebricamente la congettura di Minkowski.

1. Il fatto che i cubi ricoprono lo spazio implica in particolare che ogni parallelepipedo D sta in un cubo C , cioè, indicando con $g \in G$ il vertice (di minime coordinate) di D e con $h \in H$ il vertice (di minime coordinate) di C :

$$\forall g \in G \exists h \in H, k_1, \dots, k_n \in \{0, \dots, m_i - 1\} \text{ tali che } g = h + \sum_{i=1}^n k_i a_i \quad (*)$$

3.2 La congettura di Minkowski e il teorema di Hajós

2. Il fatto che i cubi si intersecano al più nella frontiera significa che un parallelepipedo può appartenere ad un solo cubo, cioè, se $h, h' \in H$ ed $k_i, k'_i \in \{0, \dots, m_i - 1\}$, $i = 1, \dots, n$, si ha:

$$h + \sum_{i=1}^n k_i a_i = h' + \sum_{i=1}^n k'_i a_i \Rightarrow h = h' \text{ e } k_i = k'_i \text{ per ogni } i = 1, \dots, n \quad (**)$$

3. Dire che due cubi condividono una faccia, significa che il reticolo è formato da tubi (a sezione ipercubica) lungo la direzione ortogonale a tale faccia, diciamo l' i -esima. In particolare quindi H contiene l' i -esimo vettore della base canonica, cioè:

$$\exists i \in \{1, \dots, n\} \text{ tale che } m_i a_i = e_i \in H \quad (***)$$

Consideriamo ora il gruppo quoziente G/H e definiamo, al variare di $i = 1, \dots, n$, gli insiemi

$$A_i := \{\bar{0}, \bar{a}_i, \dots, (m_i - 1)\bar{a}_i\} \subset G/H.$$

Le condizioni (*) ed (**) equivalgono a:

$$G/H = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n$$

e la (***) equivale a:

$$\exists i \text{ tale che } m_i \bar{a}_i = \bar{0}.$$

La congettura di Minkowski in questo modo diventa il

3.2.14 Teorema (Hajós).

Sia G un gruppo abeliano finito e siano a_1, \dots, a_n n elementi di G .

Poniamo $A_i := \{0, a_i, 2a_i, \dots, (m_i - 1)a_i\}$, con m_i intero positivo per ogni $i = 1, \dots, n$.

Se

$$G = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$$

allora uno dei fattori A_i è un gruppo, cioè esiste un $i \in \{1, \dots, n\}$ tale che $m_i a_i = 0$, cioè A_i è periodico.

Hajós ha dimostrato questo teorema in [29].

Per lo studio dei canoni ritmici possiamo limitarci a darne una dimostrazione nel caso in cui G sia un gruppo ciclico.

Dimostrazione ($G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$):

Per ipotesi,

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$$

con $A_i := \{0, a_i, 2a_i, \dots, (m_i - 1)a_i\}$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

Tradotto in termini di polinomi diventa:

$$\Delta_m(x) \equiv \prod_{i=1}^n \Delta_{m_i}(x^{a_i}) \pmod{x^m - 1},$$

quindi

$$\Delta_m(x) \mid \prod_{i=1}^n \Delta_{m_i}(x^{a_i}),$$

e poiché $\Delta_m(x) = \prod_{d|m} \Phi_d(x)$, e i polinomi ciclotomici sono irriducibili in $\mathbb{Z}[x]$, esiste un indice $i \in \{1, \dots, n\}$ tale che $\Phi_m(x) \mid \Delta_{m_i}(x^{a_i})$.

In virtù della proposizione A.4, punto 6(b), si ha:

$$\Delta_{m_i}(x^{a_i}) = \prod_{d|m_i} \Phi_d(x^{a_i}) = \prod_{d|m_i} \prod_{e|a_i, e \geq b} \Phi_{de}(x)$$

dove $a_i = bc$ con $(c, d) = 1$ e per ogni primo $p \mid b$, si ha che $p \mid d$.

In particolare quindi, esistono un $d \mid m_i$ ed un $e \mid a_i$, $e \geq b$, tali che $n = de \mid m_i a_i$, cioè $m_i a_i = 0$.

QED

Concludiamo questo capitolo sottolineando come il lavoro di Hajós abbia indotto allo studio delle fattorizzazioni di un gruppo abeliano con sottoinsiemi matematici come de Bruijn, Rèdei, Sands, Fuchs, Tijdeman e molti altri, menzionati nella bibliografia del presente lavoro. Come abbiamo visto, tale problema è stato risolto (anche se non in maniera costruttivamente esaustiva) per i gruppi ciclici, che è il caso di nostro interesse, ma in generale rimane ancora un importante soggetto di ricerca matematica.

Capitolo 4

Conggettura spettrale

4.1 Una congettura aperta

Nella sezione 3.2 abbiamo seguito Hermann Minkowski, che da un problema di teoria dei numeri è arrivato ad una congettura riguardante la geometria delle tassellazioni, ed alla fine ne abbiamo visto la soluzione algebrica di Hajós. In questo capitolo assistiamo ad un percorso analogo: la congettura di Fuglede nasce da un problema analitico, il cui sviluppo porta ancora ad una congettura sulla geometria delle tassellazioni. In dimensione 1, che è il caso che riguarda i canoni ritmici, ne scopriamo anche un risvolto algebrico.

Ecco il problema posto da I. Segal a Bent Fuglede (1958):

4.1.1 Problema. Per quali domini¹ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ esiste una famiglia $\{H_j\}_{j=1}^n \subset L^2(\Omega)$ commutativa, di operatori autoaggiunti, restrizione della famiglia $\{-i\frac{\partial}{\partial x_j}\}_{j=1}^n$?

Fuglede, restringendo il campo d'indagine ai domini Ω di misura di Lebesgue finita, dimostra che una tale famiglia esiste se e solo se esiste un insieme $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ tale che l'insieme $\{e^{2\pi i \lambda x}\}_{\lambda \in \Lambda}$ è una base ortogonale di $L^2(\Omega)$, ed in tal caso Λ risulta essere lo spettro della famiglia di operatori $\{H_j\}_{j=1}^n$ [27].

Cominciamo richiamando qualche concetto di analisi funzionale.

Consideriamo lo spazio euclideo n - dimensionale \mathbb{R}^n . Indichiamo nel seguito con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ l'usuale prodotto scalare in \mathbb{R}^n , con m la misura di Lebesgue e con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile di misura finita positiva.

Sia inoltre

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : \int_{\Omega} |f|^2 dm < \infty \right\} / \simeq$$

dove $f \simeq g \Leftrightarrow$ l'insieme $\{x \in \Omega \mid f(x) \neq g(x)\}$ ha misura nulla.

$L^2(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert² con il prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle_{\Omega} = \int_{\Omega} f \bar{g} dm ,$$

¹un dominio è un insieme aperto e connesso

²spazio con prodotto scalare completo rispetto alla norma indotta

Capitolo 4. Congettura spettrale

dove $\bar{g}(x) = \overline{g(x)}$ indica la funzione *complessa coniugata* di g .

Una *base ortogonale* di $L^2(\Omega)$ è un suo sottoinsieme $\mathcal{B} = \{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ tale che

1. $\langle f_\lambda, f_\mu \rangle_\Omega \neq 0 \Leftrightarrow \lambda = \mu$ (*ortogonalità*) e
2. per ogni $g \in L^2(\Omega)$ si ha che $g(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle g, f_\lambda \rangle_\Omega f_\lambda(x)$ (*completezza*).

Un risultato classico di analisi funzionale è che qualsiasi base ortogonale di $L^2(\Omega)$ ha al più una infinità numerabile di elementi (cfr [1]), è quindi ben posta la seguente:

4.1.2 Definizione. Sia $e_\lambda(x)$ la funzione esponenziale complessa $e^{2\pi i \langle \lambda, x \rangle}$. $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}^n$ è uno *spettro* per $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se l'insieme delle funzioni a valori complessi $\mathcal{B}_\Lambda := \{e_\lambda(x)\}_{\lambda \in \Lambda}$ è una base ortogonale di $L^2(\Omega)$.

In tal caso Ω è un *insieme spettrale* e la coppia (Ω, Λ) si dice *coppia spettrale*.

Osserviamo che la proprietà di essere uno spettro è invariante per traslazioni: se (Ω, Λ) è una coppia spettrale, e $t \in \mathbb{R}^n$, allora $(\Omega, t + \Lambda)$ è una coppia spettrale. Si verifica infatti che $\mathcal{B}_\Lambda = \{e_{\lambda+t}\}_{\lambda \in \Lambda}$ è una base ortogonale di $L^2(\Omega)$:

1. ortogonalità:

$$\langle e_{\lambda+t}, e_{\mu+t} \rangle_\Omega = \int_\Omega e^{2\pi i \langle \lambda+t, x \rangle} e^{-2\pi i \langle \mu+t, x \rangle} dx = \int_\Omega e^{2\pi i \langle \lambda+t-\mu-t, x \rangle} dx = \langle e_\lambda, e_\mu \rangle_\Omega,$$

quindi $\langle e_{\lambda+t}, e_{\mu+t} \rangle_\Omega = 0 \Leftrightarrow \lambda = \mu \Leftrightarrow \lambda + t = \mu + t$;

2. completezza:

notiamo innanzitutto che

$$e_{\lambda+t}(x) = e^{2\pi i \langle \lambda+t, x \rangle} = e^{2\pi i \langle \lambda, x \rangle} e^{2\pi i \langle t, x \rangle} = e_\lambda(x) e_t(x)$$

e che

$$\langle f, e_{\lambda+t} \rangle_\Omega = \int_\Omega f(x) \overline{e_t(x)} \overline{e_\lambda(x)} dx = \langle f \overline{e_t}, e_\lambda \rangle_\Omega,$$

quindi

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle f, e_{\lambda+t} \rangle_\Omega e_{\lambda+t} &= \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle f \overline{e_t}, e_\lambda \rangle_\Omega e_\lambda(x) e_t(x) = \\ e_t(x) \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle f \overline{e_t}, e_\lambda \rangle_\Omega e_\lambda(x) &= e_t(x) f(x) e_t(x) = f(x). \end{aligned}$$

Possiamo quindi assumere senza perdita di generalità che uno spettro contenga sempre l'origine $0 \in \mathbb{R}^n$.

Richiamiamo ora la definizione di tassellazione di uno spazio euclideo introdotta nella sezione 3.2.

Definizione (3.2.10). $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *tassella* \mathbb{R}^n *per traslazioni* se esiste un insieme discreto $T \subset \mathbb{R}^n$ tale che

1. per ogni $s, t \in T$ con $s \neq t$ si ha che $m((\Omega + s) \cap (\Omega + t)) = 0$, e
2. $\bigcup_{t \in T} (\Omega + t) = \mathbb{R}^n$.

T è l'insieme di traslazione di Ω .

Le tassellazioni dello spazio euclideo e le tassellazioni degli interi (di cui abbiamo parlato a partire dalla sezione 1.2) diventano casi particolari delle tassellazioni di gruppi abeliani, se consideriamo su essi la misura di Haar :

4.1.3 Definizione. Sia $(G, +)$ un gruppo abeliano localmente compatto (come gruppo topologico di Hausdorff).

Una *misura di Haar* su G è una misura h di Borel tale che:

1. $h(U) > 0$ per $U \neq \emptyset$ aperto,
2. $h(K) < \infty$ per K compatto e
3. $h(g + A) = h(A)$.

Le tassellazioni di gruppi abeliani sono state definite ad esempio da Mihail Koluntzakis e Máté Matolcsi [40]:

4.1.4 Definizione. Sia $(G, +)$ un gruppo abeliano localmente compatto, un suo sottoinsieme A di misura $h(A)$ di Haar positiva e finita *tassella (per traslazioni)* G se esiste un insieme $T \subset G$ discreto tale che

1. per ogni $s, t \in T$ con $s \neq t$ si ha che $h((A + s) \cap (A + t)) = 0$, e
2. $\bigcup_{t \in T} (A + t) = G$.

Questa definizione coincide con la 3.2.10 per $G = \mathbb{R}^n$ ed $h = m$, con la 1.2.1 per $G = \mathbb{Z}$ ed h uguale alla cardinalità, e con la definizione 1.1.4 di canone ritmico per $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ed h sempre uguale alla cardinalità.

In virtù di tale coincidenza, non sorprende che le proprietà 1 e 2 della definizione 3.2.10 si trovino talvolta (cfr. ad esempio lo stesso Fuglede, [27], o Izabella Łaba, [45]) sotto la forma

$$\mathbb{R}^n = \Omega \oplus T \text{ a meno di insiemi di misura nulla,}$$

ed $\mathbb{R}^n = \Omega \oplus T$ venga detta *tassellazione* di \mathbb{R}^n .

4.1.5 Esempio. Sappiamo (sezione 3.2) che il cubo n - dimensionale $C = [0, 1]^n$ tassella \mathbb{R}^n se prendiamo come insiemi di traslazione il reticolo $L = \mathbb{Z}^n$.

Consideriamo l'insieme

$$\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^n} = \{e_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} \subset L^2(C).$$

Le funzioni di $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^n}$ sono ortogonali, infatti, siano $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}^n$, si ha:

$$\langle e_\lambda, e_\mu \rangle_C = \int_C e^{2\pi i \langle \lambda - \mu, x \rangle} dx = \int_C e^{\sum_{j=1}^n 2\pi i (\lambda_j - \mu_j) x_j} dx =$$

$$= \int_C \prod_{j=1}^n e^{2\pi i(\lambda_j - \mu_j)x_j} dx = \int_0^1 \prod_{j=1}^n e^{2\pi i(\lambda_j - \mu_j)x_j} dx = \prod_{j=1}^n \int_0^1 e^{2\pi i(\lambda_j - \mu_j)x_j} dx_j = \prod_{j=1}^n \begin{cases} 1 & \text{se } \lambda_j = \mu_j \\ \frac{e^{2\pi i(\lambda_j - \mu_j)} - 1}{2\pi i(\lambda_j - \mu_j)} & \text{se } \lambda_j \neq \mu_j \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } \lambda = \mu \\ 0 & \text{se } \lambda \neq \mu \end{cases}$$

poiché $e^{2\pi i(\lambda_j - \mu_j)} = 1$ per $\lambda_j - \mu_j \in \mathbb{Z}$.

Come si vede, l'insieme $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^n}$ è non solo ortogonale ma anche *ortonormale*. Inoltre un risultato classico della teoria di Fourier stabilisce che $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^n}$ è completo in $L^2(C)$, ne è quindi una base ortonormale.

Quindi \mathbb{Z}^n è contemporaneamente uno spettro ed un insieme di traslazione per C .

Siamo pronti per enunciare la

4.1.6 Congettura (Fuglede).

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è *spettrale* se e solo se *tassella* \mathbb{R}^n per traslazioni.

La congettura è stata dimostrata in alcuni casi particolari, se:

1. lo spettro e l'insieme di traslazione di Ω sono reticoli (Fuglede, [27]).
2. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è un dominio convesso (Iosevich, Katz e Tao, [35]).
3. $\Omega \subset [0, L] \subset \mathbb{R}$, $m(\Omega) = 1$, $L < 3/2$ (Koluntzakis e Łaba, [39]).
4. $\Omega = (a, b) \cup (c, d) \subset \mathbb{R}$ (Łaba, [44]).

È stata inoltre confutata per $n \geq 3$ (Tao, [75], Matolcsi, [49], e Koluntzakis e Matolcsi, [40]).

Una implicazione è tuttavia ancora aperta in tutte le dimensioni: non ci sono fino ad ora esempi di tassellazioni con insiemi non spettrali (cfr [49]).

4.2 La congettura spettrale ed i canoni ritmici a mosaico

Il legame della congettura spettrale con i canoni ritmici nasce dalla semplice osservazione che i canoni ritmici generano tassellazioni della retta reale, infatti: un insieme finito di naturali $A \subset \mathbb{N}$, con $0 \in A$, tassella \mathbb{Z} , e quindi è il ritmo interno di un canone, se e solo se $A + [0, 1]$ tassella \mathbb{R} .

Nasce quindi l'esigenza di capire cosa significa che l'insieme $\Omega = A + [0, 1]$, con $0 \in A \subset \mathbb{N}$ finito, sia spettrale. Si ha la seguente

4.2.1 Proposizione. *Sia $\Omega = A + [0, 1]$, con $0 \in A \subset \mathbb{N}$ finito.*

Se Ω ha uno spettro Λ allora esiste un insieme $\Gamma \subset [0, 1)$, $0 \in \Gamma$, tale che

1. $\Lambda = \Gamma \oplus \mathbb{Z}$,

³per il teorema di Fubini

2. $|\Gamma| = |A|e$

3. per ogni $\gamma, \mu \in \Gamma$, con $\gamma \neq \mu$, il numero complesso $e^{2\pi i(\gamma-\mu)}$ è una radice del polinomio $A(x)$ associato ad A (cfr 1.3.1).

Dimostrazione:

Per invarianza per traslazioni abbiamo assunto che $0 \in \Lambda$.

Consideriamo l'insieme $\Lambda + \mathbb{Z}$ di tutte le classi laterali modulo \mathbb{Z} degli elementi di Λ . Per ogni classe esiste uno ed un solo rappresentante in $[0, 1)$, sia Γ l'insieme di tali rappresentanti. Γ sarà l'insieme richiesto.

Poiché $0 \in \Lambda$, chiaramente $0 \in \Gamma$, rimangono quindi da dimostrare i punti 1, 2 e 3. Cominciamo a dimostrare il primo.

Per definizione di Γ , si ha che $\Lambda \subset \Gamma \oplus \mathbb{Z}$, dimostriamo ora il viceversa.

Fissiamo un $\mu \in \Lambda$ e sia $I = [0, 1]$, consideriamo l'insieme

$$\Lambda_I := \{\lambda \in \Lambda - \mu \mid \int_I e_{\lambda} dx = 0\} \cup \{0\}.$$

Per il teorema 2.3.1 di [38] l'insieme $\{e_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda_I}$ è completo in $L^2(I)$.

Inoltre, se $\lambda \neq 0$, si ha

$$\int_I e_{\lambda} dx = \frac{e^{2\pi i\lambda} - 1}{2\pi i\lambda} = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{Z} - \{0\},$$

quindi $\Lambda_I \subset \mathbb{Z}$.

Poiché \mathbb{Z} stesso è uno spettro per I , in particolare $\{e_z\}_{z \in \mathbb{Z}}$ è completo, quindi necessariamente $\Lambda_I = \mathbb{Z}$. Il punto 1 della tesi segue facilmente:

$$\forall \mu \in \Lambda, \mu + \mathbb{Z} = \mu + \Lambda_I \subset \Lambda \Rightarrow \Gamma \oplus \mathbb{Z} = \Lambda + \mathbb{Z} \subset \Lambda.$$

Dimostriamo ora una formula che tornerà utile nel seguito.

Siano $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^n$, si ha:

$$\langle e_{\lambda}, e_{\mu} \rangle_{\Omega} = \begin{cases} |A| & \text{se } \lambda = \mu \\ \frac{e^{2\pi i(\lambda-\mu)}}{2\pi i(\lambda-\mu)} A(e^{2\pi i(\lambda-\mu)}) & \text{se } \lambda \neq \mu \end{cases} \quad (*)$$

Basta svolgere il conto (analogo a quello fatto nell'esempio 4.1.5):

$$\begin{aligned} \langle e_{\lambda}, e_{\mu} \rangle_{\Omega} &= \int_{\Omega} e^{2\pi i(\lambda-\mu)x} dx = \sum_{a \in A} \int_a^{a+1} e^{2\pi i(\lambda-\mu)x} dx = \\ &= \sum_{a \in A} \begin{cases} 1 & \text{se } \lambda = \mu \\ \frac{e^{2\pi i(\lambda-\mu)} - 1}{2\pi i(\lambda-\mu)} e^{2\pi i(\lambda-\mu)a} & \text{se } \lambda \neq \mu \end{cases} = \\ &= \begin{cases} |A| & \text{se } \lambda = \mu \\ \frac{e^{2\pi i(\lambda-\mu)}}{2\pi i(\lambda-\mu)} \sum_{a \in A} e^{2\pi i(\lambda-\mu)a} = \frac{e^{2\pi i(\lambda-\mu)}}{2\pi i(\lambda-\mu)} A(e^{2\pi i(\lambda-\mu)}) & \text{se } \lambda \neq \mu \end{cases} \end{aligned}$$

Capitolo 4. Congettura spettrale

Dimostriamo ora contemporaneamente i punti 2 e 3:

Sia $A = \{a_1, \dots, a_k\}$, al variare di $\gamma \in \Gamma$ consideriamo i vettori

$$v_\gamma = (e^{2\pi i \gamma a_1}, \dots, e^{2\pi i \gamma a_k}) \in \mathbb{C}^k.$$

Osserviamo che per ogni $\gamma, \mu \in \Gamma$, con $\gamma \neq \mu$, si ha che $\gamma - \mu \notin \mathbb{Z}$, quindi la (*) implica che:

$$\langle e_\gamma, e_\mu \rangle_\Omega = 0 \Leftrightarrow A(e^{2\pi i(\gamma-\mu)}) = 0,$$

cioè il punto 3. Inoltre

$$\langle v_\gamma, v_\mu \rangle_{\mathbb{C}} = \sum_{j=1}^k e^{2\pi i(\gamma-\mu)a_j} = A(e^{2\pi i(\gamma-\mu)}),$$

allora $\{v_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ è un insieme di vettori ortogonali in \mathbb{C}^k , quindi può avere al massimo k elementi, cioè:

$$|\Gamma| \leq k = |A|.$$

Supponiamo per assurdo che $|\Gamma| < k$, esiste allora un vettore $v = (v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{C}^k \setminus \{0\}$ tale che $\langle v, v_\gamma \rangle_{\mathbb{C}} = 0$ per ogni $\gamma \in \Gamma$, cioè

$$\sum_{j=1}^k v_j e^{-2\pi i \gamma a_j} = 0 \quad (**)$$

Consideriamo ora la funzione

$$g(x) := \begin{cases} v_j & \text{se } x \in [a_j, a_j + 1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$g \in L^2(\Omega)$ e, per ogni $\lambda = \gamma + n \in \Lambda = \Gamma \oplus \mathbb{Z}$, si ha:

$$\begin{aligned} \langle g, e_\lambda \rangle_\Omega &= \int_\Omega g(x) e^{-2\pi i \lambda x} = \sum_{j=1}^k \int_{a_j}^{a_j+1} v_j e^{-2\pi i(\gamma+n)x} = \\ &= \sum_{j=1}^k v_j \frac{e^{-2\pi i(\gamma+n)} - 1}{-2\pi i(\gamma+n)} e^{-2\pi i(\gamma+n)a_j} = \frac{1 - e^{-2\pi i(\gamma+n)}}{2\pi i(\gamma+n)} \sum_{j=1}^k v_j e^{-2\pi i(\gamma+n)a_j} = \\ &= \frac{1 - e^{-2\pi i\gamma}}{2\pi i(\gamma+n)} \sum_{j=1}^k v_j e^{-2\pi i\gamma a_j} = 0 \end{aligned}$$

perché $a_j \in \mathbb{Z}$ e per la (**). Allora, per la completezza di $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, si ha:

$$g(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle g, e_\lambda \rangle_\Omega e_\lambda(x) = 0$$

cioè $v = 0$, assurdo.

Quindi $|\Gamma| = |A|$.

QED

La proposizione 4.2.1 suggerisce la seguente

4.2.2 Definizione. Sia $A \subset \mathbb{N}$ finito, con $0 \in A$, e sia $k = A(1) = |A|$. $\Gamma \subset [0, 1)$ è uno spettro per $A(x)$ se e solo se

1. $0 \in \Gamma$,
2. $|\Gamma| = k$ e
3. per ogni $\gamma, \mu \in \Gamma$ con $\gamma \neq \mu$, il numero complesso $e^{2\pi i(\gamma - \mu)}$ è una radice di $A(x)$.

In tal caso, si dice anche che Γ è uno spettro per A , o che A è spettrale.

Con la proposizione 4.2.1 abbiamo trovato un modo algebrico per esprimere il fatto che un insieme del tipo $A \oplus [0, 1)$ è spettrale, possiamo quindi riformulare la congettura spettrale per tasselli di \mathbb{Z} :

4.2.3 Congettura (Fuglede).

$A \subset \mathbb{N}$ finito, con $0 \in A$, tassella $\mathbb{Z} \Leftrightarrow A$ è spettrale.

4.2.4 Teorema (Łaba). Sia $A \subset \mathbb{N}$ finito con $0 \in A$.

Se A soddisfa le condizioni (T1) e (T2) di Coven-Meyerowitz, allora è spettrale.

Nella dimostrazione del teorema 4.2.4 useremo il seguente

4.2.5 Lemma. Siano $k_1, \dots, k_n, s_1, \dots, s_n \in \mathbb{N}^*$ tali che

1. $(k_i, s_i) = 1$ per ogni $i = 1, \dots, n$ e
2. $(s_i, s_j) = 1$ per ogni $i, j = 1, \dots, n$ con $i \neq j$.

Allora

$$\sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s_i} = \frac{k}{s},$$

dove $s = s_1 \dots s_n$ e $k = k_1 \frac{s}{s_1} + \dots + k_n \frac{s}{s_n}$, è una frazione primitiva, cioè $(k, s) = 1$.

Dimostrazione:

Sia p un primo tale che $p \mid s$, allora esiste un $i \in \{1, \dots, n\}$ tale che $p \mid s_i$, da cui:

1. per l'ipotesi 1, $p \nmid k_i$ e
2. per l'ipotesi 2, $p \nmid s_j$ per ogni $i \neq j$ e quindi
 - (a) $p \nmid \frac{s}{s_i}$ e
 - (b) $p \mid \frac{s}{s_j}$ per ogni $i \neq j$.

Capitolo 4. Congettura spettrale

Se, per assurdo p dividesse k , per il precedente punto 2(b), si avrebbe

$$p \mid k - \sum_{j \neq i} k_j \frac{s}{s_j} = k_i \frac{s}{s_i} = k_i \prod_{j \neq i} s_j,$$

che è assurdo per i precedenti punti 1 e 2(a).

QED

Dimostrazione (del teorema 4.2.4): Siano, come nella definizione 2.1.2:

$$R_A = \{d \in \mathbb{N} : d \mid n \text{ e } \Phi_d(x) \mid A(x)\}, \text{ ed}$$

$$S_A = \{d \in R_A : d = p^\alpha, p \text{ primo}, \alpha \in \mathbb{N}^*\}.$$

Ricordiamo le condizioni di Coven-Meyerowitz definite nel teorema 2.1.3:

$$(T1) : A(1) = \prod_{p^\alpha \in S_A} p, \text{ e}$$

$$(T2) : p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_k^{\alpha_k} \in S_A \Rightarrow p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \in R_A.$$

Consideriamo l'insieme

$$\Gamma := \left\{ \sum_{s \in S_A} \frac{k_s}{s} \mid k_s = 0, \dots, p-1, \forall s = p^\alpha \in S_A \right\}.$$

Dimostriamo che Γ è uno spettro per $A(x)$.

Si vede subito che $0 \in \Gamma$ e, per la condizione (T1),

$$|\Gamma| = \prod_{s=p^\alpha \in S_A} p = A(1) = |A|.$$

Rimane quindi da verificare che se $\gamma, \mu \in \Gamma$, con $\gamma \neq \mu$, allora $A(e^{2\pi i(\gamma-\mu)}) = 0$. Siano

$$\gamma = \sum_{s \in S_A} \frac{k_s}{s} \text{ e } \mu = \sum_{s \in S_A} \frac{h_s}{s},$$

allora

$$\gamma - \mu = \sum_{s \in S_A} \frac{k_s - h_s}{s}.$$

Siano $s_1, \dots, s_n \in S_A$ potenze di primi distinti tali che

- $k_{s_i} - h_{s_i} \neq 0$, e
- per ogni $s \in S_A$ tale che $k_s - h_s \neq 0$, esiste un $i \in \{1, \dots, n\}$ tale che $s \mid s_i$,

4.2 La congettura spettrale ed i canoni ritmici a mosaico

allora esiste un intero $k \in \mathbb{Z}$ tale che

$$\gamma - \mu = \frac{k}{s_1 \dots s_n}.$$

Per il Lemma 4.2.5, $(k, s_1 \dots s_n) = 1$, quindi

$$\rho = e^{2\pi i \frac{k}{s_1 \dots s_n}} = \zeta_{s_1 \dots s_n}^k$$

è una radice primitiva $s_1 \dots s_n$ -esima dell'unità, cioè $\Phi_{s_1 \dots s_n}(\rho) = 0$.

Poiché $s_1, \dots, s_n \in S_A$ sono potenze di primi distinti, per la condizione (T2), $s_1 \dots s_n \in R_A$ cioè $\Phi_{s_1 \dots s_n}(x) \mid A(x)$, quindi $A(\rho) = 0$.

QED

Possiamo ora dimostrare due risultati sulla congettura di Fuglede:

4.2.6 Corollario.

1. Se $|A|$ è prodotto di al più due potenze di primi ed A tassella allora è spettrale.
2. In ogni canone ritmico ottenuto dalla fattorizzazione di un gruppo ciclico di Hajós, i ritmi sono spettrali.

Dimostrazione:

1. Per il teorema (3) di Coven-Meyerowitz, se A tassella allora valgono le condizioni (T1) e (T2), quindi, per il teorema 4.2.4, $A(x)$ ha uno spettro.

2. Indichiamo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ con \mathbb{Z}_n .

Consideriamo un canone $A \oplus B = \mathbb{Z}_n$, fattorizzazione di un gruppo ciclico di Hajós.

Sappiamo (paragrafo 3.1) che n appartiene al seguente insieme di naturali:

$$\mathcal{H} = \{p^\alpha, p^\alpha q, p^2 q^2, pqr, p^2 qr, pqr s \mid p, q, r, s \text{ primi distinti}, \alpha \in \mathbb{N}\}.$$

Per il primo punto, se $|A|$ e $|B|$ sono prodotto di al più due potenze di primi, allora A e B sono spettrali; rimangono da verificare quindi, senza perdita di generalità, solo i seguenti casi:

- (a) $|A| = pqr$ e $|B| = p$,
- (b) $|A| = pqr$ e $|B| = s$,

con p, q, r, s primi distinti.

In entrambi i casi B è spettrale (sempre per il primo punto), rimane da verificare che lo è anche A .

Dimostriamo che A verifica la condizione (T2) di Coven-Meyerowitz, e quindi, per il teorema di Łaba, è spettrale.

Poiché A tassella, per il teorema di Coven-Meyerowitz, verifica la condizione (T1), quindi i due precedenti casi diventano, rispettivamente:

Capitolo 4. Congettura spettrale

- (a) i. $\Phi_p(x)$, $\Phi_q(x)$ e $\Phi_r(x)$ sono i soli polinomi ciclotomici di indice la potenza di un primo che dividono $A(x)$, bisogna quindi dimostrare che $\Phi_{pq}(x)$, $\Phi_{pr}(x)$ e $\Phi_{qr}(x)$ dividono $A(x)$;
- ii. $\Phi_{p^2}(x)$, $\Phi_q(x)$ e $\Phi_r(x)$ sono i soli polinomi ciclotomici di indice la potenza di un primo che dividono $A(x)$, bisogna quindi dimostrare che $\Phi_{p^2q}(x)$, $\Phi_{p^2r}(x)$ e $\Phi_{qr}(x)$ dividono $A(x)$;
- (b) $\Phi_p(x)$, $\Phi_q(x)$ e $\Phi_r(x)$ sono i soli polinomi ciclotomici di indice la potenza di un primo che dividono $A(x)$, bisogna quindi dimostrare che $\Phi_{pq}(x)$, $\Phi_{pr}(x)$ e $\Phi_{qr}(x)$ dividono $A(x)$.

Poiché \mathbb{Z}_n è di Hajós, B è periodico, quindi (cor. 1.2.6) B è unione di classi laterali modulo un sottogruppo di \mathbb{Z}_n . In entrambi i casi $|B| = t$ primo, segue allora che $B = (n/t)\mathbb{Z}_n$, quindi $B(x) = \Phi_t(x^{n/t})$.

Si ha allora, per la proposizione A.4(6), che:

- (a) $B(x) = \Phi_p(x^{pqr}) = \Phi_{p^2}(x^{qr}) = \prod_{d|qr} \Phi_{p^2d}(x) = \Phi_{p^2}(x)\Phi_{p^2q}(x)\Phi_{p^2r}(x)\Phi_n(x)$, quindi $\Phi_p(x)$ non divide $B(x)$, allora necessariamente divide $A(x)$, siamo nel caso (a); inoltre anche $\Phi_{pq}(x)$, $\Phi_{pr}(x)$ e $\Phi_{qr}(x)$ non dividono $B(x)$, quindi dividono $A(x)$.
- (b) $B(x) = \Phi_s(x^{pqr}) = \prod_{d|pqr} \Phi_{sd}(x)$, in particolare $\Phi_{pq}(x)$, $\Phi_{pr}(x)$ e $\Phi_{qr}(x)$ non dividono $B(x)$, quindi dividono $A(x)$.

QED

Riassumiamo i risultati generali di Coven-Meyerowitz (cfr. sezione 2.1) e di Izabella Łaba:

- ✓ A tassella $\Rightarrow A(x)$ verifica (T1)
- ✓ $A(x)$ verifica (T1) e (T2) $\Rightarrow A$ tassella
- ✓ $A(x)$ verifica (T1) e (T2) $\Rightarrow A$ è spettrale

Rimangono indimostrate le implicazioni

- (1) A tassella $\Rightarrow A(x)$ verifica (T2)
- (2) A è spettrale $\Rightarrow A(x)$ verifica (T2)

e non sono noti controesempi.

Osserviamo che per trovare un controesempio ad (1) basterebbe trovare un tassello non spettrale, infatti, per il teorema di Łaba, se A tassella (e quindi verifica (T1) ma $A(x)$ non ha uno spettro, certamente non verifica (T2).

Inoltre, per il corollario 4.2.6, sappiamo che tasselli non spettrali possono esistere solo in fattorizzazioni di gruppi ciclici

- il cui ordine abbia più di due fattori primi e

- non Hajós.

Quindi per i primi due ordini di gruppi non Hajós ($72 = 2^3 3^2$ e $108 = 2^2 3^3$), i ritmi sono spettrali, ad esempio:

4.2.7 Esempio.

Consideriamo il già citato canone di Vuza di periodo $n = 72$ con i ritmi:

$$A = \{0, 8, 16, 18, 26, 34\}, \text{ e}$$

$$B = \{0, 1, 5, 6, 12, 25, 29, 36, 42, 48, 49, 53\}.$$

(cfr. fine paragrafo 3.1).

$72 = 2^3 3^2$ è prodotto di potenze di due primi, quindi A e B sono spettrali.

Esibiamo ad esempio gli spettri costruiti nella dimostrazione del teorema di Łaba.

Dobbiamo innanzitutto trovare S_A ed S_B .

Per il lemma 2.1.8(2), sappiamo che $S_A \cup S_B = \{2, 4, 8, 3, 9\}$ e $S_A \cap S_B = \emptyset$.

Con un semplice calcolo si verifica che $\Phi_4(x)$ e $\Phi_3(x)$ dividono $A(x)$, e per la condizione (T1) non ce ne sono altri, quindi $S_A = \{4, 3\}$ ed $S_B = \{2, 8, 9\}$.

Allora gli spettri sono:

$$\Gamma_A = \frac{1}{12}\{0, 3, 4, 7, 8, 11\} \text{ e}$$

$$\Gamma_B = \frac{1}{36}\{0, 4, 8, 9, 13, 17, 18, 22, 26, 27, 31, 35\}.$$

Capitolo 5

Trasformazione e generazione di canoni a mosaico

In quest'ultimo capitolo descriviamo alcune tecniche per la costruzione di canoni a mosaico a partire da altri canoni o semplicemente dall'ordine del gruppo da fattorizzare.

Iniziamo illustrando alcune operazioni che generano nuovi canoni da canoni esistenti. Dimostriamo che tali operazioni conservano la condizione (T2) ed evidenziamo il ruolo centrale dei canoni di Vuza in questo tipo di costruzione.

Nella seconda sezione mostriamo un algoritmo utilizzato per la generazione dei canoni di Vuza di periodo dato. Tale algoritmo non è esaustivo, e ne diamo una versione migliorata, i cui risultati sono in appendice C.

Infine proviamo l'invarianza per affinità della proprietà di tassellazione, utile per la generazione di nuovi canoni da canoni esistenti, e motivazione fondamentale dello studio delle azioni di gruppo introdotte nell'appendice B. Tali azioni legano la teoria musicale all'algebra combinatoria e forniscono uno strumento utile alla stesura delle liste di canoni a mosaico, come i nuovi canoni di Vuza che abbiamo elencato in appendice C.

5.1 Operazioni sui canoni

Dato un canone ritmico, ci sono molti modi per generare nuovi canoni, usati (e spesso ideati) dai compositori stessi. Vediamo l'importanza matematica di tali manipolazioni.

5.1.1 Definizione. Siano $A_i \oplus B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, per $i = 0, \dots, k-1$, k canoni di medesimo ritmo esterno. Il loro *intreccio* è il canone

$$\bigcup_{i=0}^{k-1} (i + kA_i) \oplus kB = \mathbb{Z}/(kn)\mathbb{Z}.$$

Capitolo 5. Trasformazione e generazione di canoni a mosaico

Si vede facilmente che la precedente definizione è ben posta, infatti, dati k canoni $A_i \oplus B \oplus n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, $i = 0, \dots, k-1$, si ha:

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{i=0}^{k-1} (i + k\mathbb{Z}) = \bigcup_{i=0}^{k-1} (i + kA_i \oplus kB \oplus kn\mathbb{Z}) = \bigcup_{i=0}^{k-1} (i + kA_i) \oplus kB \oplus kn\mathbb{Z}.$$

5.1.2 Esempio. Consideriamo i seguenti canoni di ordine 36:

$$\{0, 3, 6, 18, 21, 24\} \oplus \{0, 4, 8, 9, 13, 17\} = \mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$$

la cui rappresentazione a griglia (vedi sezione 1.3) è in in figura 5.1(a), e

$$\{0, 2, 12, 14, 24, 26\} \oplus \{0, 4, 8, 9, 13, 17\} = \mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$$

la cui rappresentazione a griglia è in figura 5.1(b).

L'intreccio dei precedenti canoni è il canone di Vuza di ordine 72

$$\{0, 1, 5, 6, 12, 25, 29, 36, 42, 48, 49, 53\} \oplus \{0, 8, 16, 18, 26, 34\} = \mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$$

duale (def. 1.1.5) del canone visto nell'esempio 4.2.7 e la cui rappresentazione a griglia è in figura 5.1(c).

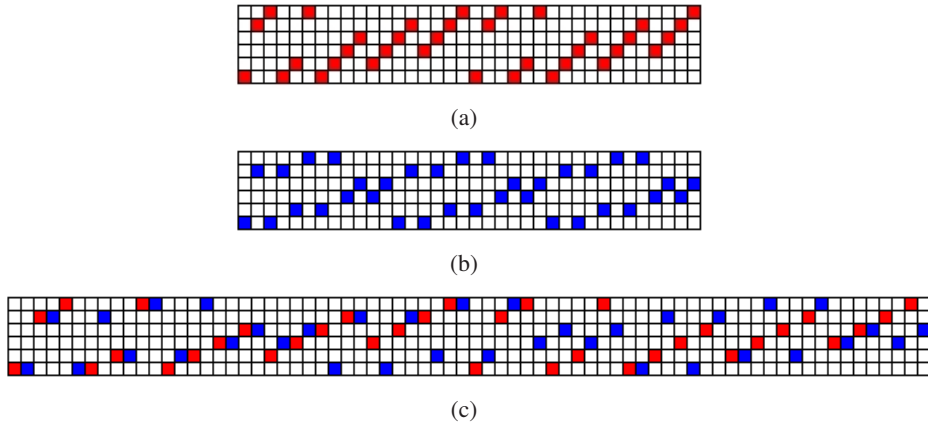


Figura 5.1

5.1.3 Osservazione. Per il lemma 2.1.13, ogni canone $A \oplus B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tale che $k \mid n$ e $B \subset k\mathbb{Z}_n$ è l'intreccio dei k canoni $A_i = A \cup (i + k\mathbb{Z}_n)$ per $i = 0, \dots, k-1$.

L'intreccio di k copie dello stesso canone è:

5.1.4 Definizione. Il k -zoom di un canone ritmico $A \oplus B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ è il canone ritmico ottenuto dall'intreccio di k copie di partenza:

$$(kA \oplus \{0, 1, \dots, k-1\}) \oplus kB = \mathbb{Z}/(kn)\mathbb{Z}.$$

Si dice anche che $(kA \oplus \{0, 1, \dots, k-1\}) \oplus kB$ è ottenuto *per dilatazione* da $A \oplus B$.

5.1.5 Definizione. La k -concatenazione del canone ritmico $A \oplus B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ è il canone ritmico:

$$(A \oplus \{0, n, 2n, \dots, (k-1)n\}) \oplus B = \mathbb{Z}/(kn)\mathbb{Z}.$$

Si dice anche che $(A \oplus \{0, n, 2n, \dots, (k-1)n\}) \oplus B$ è ottenuto *per concatenazione* da $A \oplus B$.

Si vede facilmente che la precedente definizione è ben posta: per ogni $z \in \mathbb{Z}$ e per ogni $r = s + tk$, con $0 \leq s < k$, si ha

$$z = a + b + rn \Leftrightarrow z = (a + sn) + b + t(kn).$$

5.1.6 Definizione. Diciamo che il canone $A \oplus B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ verifica la condizione (T2) se almeno uno tra i ritmi A e B la verifica.

Diciamo che il canone $A \oplus B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ è spettrale se almeno uno tra i ritmi A e B lo è.

Osserviamo trivialmente che i ritmi di un canone verificano sempre la condizione (T1) (per il teorema 2.1.3(1) di Coven-Meyerowitz), in particolare quindi la condizione (T1) è invariante per concatenazione.

Cosa accade alla condizione (T2)?

5.1.7 Proposizione. *L'intreccio conserva la condizione (T2).*

Dimostrazione: Sia $A = \bigcup_{i=0}^{k-1} (i + kA_i)$ il ritmo interno dell'intreccio di k canoni di ritmo interno A_i e di medesimo ritmo esterno B . Se B verifica (T2), la verifica anche kB (lemma 2.1.11(2)), quindi non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo che B non verifichi (T2), allora ogni A_i la verifica. Procediamo per induzione sul numero di primi (non necessariamente distinti) che dividono k .

1. Se $k = p$ primo, la tesi segue immediatamente dal lemma 2.1.13(5).
2. Sia $k = pk'$, quindi $I = \{1, \dots, k\} = \{1, \dots, k'\} \cup \{k' + 1, \dots, 2k'\} \cup \dots \cup \{(p-1)k', \dots, pk'\} = I_1 \cup \dots \cup I_p$. Consideriamo i canoni di ritmo interno $A'_j = \bigcup_{i \in I_j} (i + k'A_i)$ e medesimo ritmo esterno $B' = k'B$, allora $A \bigcup_{i=0}^{k-1} (i + kA_i) = \bigcup_{i=0}^p (i + pA'_i)$ e $kB = pB'$, quindi, per ipotesi induttiva, se gli A_i verificano (T2), anche A la verifica.

QED

5.1.8 Proposizione. *La concatenazione conserva la condizione (T2).*

Dimostrazione: Chiamiamo $\Delta_k := \{0, \dots, k-1\}$. Osserviamo che

$$\{0, n, 2n, \dots, (k-1)n\}(x) = (n\Delta_k)(x) = \Delta_k(x^n) = \frac{x^{kn} - 1}{x^n - 1} = \prod_{d|kn, d \nmid n} \Phi_d(x),$$

Capitolo 5. Trasformazione e generazione di canoni a mosaico

allora $R_{n\Delta_k} = \{d \mid kn : d \nmid n\}$ ed $S_{n\Delta_k} = \{p^\alpha \mid kn : p^\alpha \nmid n, p \text{ primo}\}$.

Per ogni $p_1^{\alpha_1}, \dots, p_m^{\alpha_m} \in S_{n\Delta_k}$ potenze di primi distinti, $p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m} \in R_A$, cioè $n\Delta_k$ verifica la condizione (T2).

Poiché $(A \oplus \{0, n, 2n, \dots, (k-1)n\})(x) = A(x)\Delta_k(x^n)$ ed i polinomi ciclotomici sono irriducibili, si ha che $R_{A \oplus n\Delta_k} = R_A \cup R_{n\Delta_k}$ ed $S_A \cup S_{n\Delta_k}$.

Vediamo che anche $A \oplus n\Delta_k$ verifica la condizione (T2):

se $p_1^{\alpha_1}, \dots, p_m^{\alpha_m} \in S_{A \oplus n\Delta_k}$ sono potenze di primi distinti, ci sono tre possibilità:

1. $p_i^{\alpha_i} \in S_A \forall i = 1, \dots, m \Rightarrow \prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i} \in R_A$ perché, per ipotesi, A verifica la condizione (T2), quindi $\prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i} \in R_{A \oplus n\Delta_k}$.
2. $p_i^{\alpha_i} \in S_{n\Delta_k} \forall i = 1, \dots, m \Rightarrow \prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i} \in R_{n\Delta_k}$ perché, come abbiamo visto, $n\Delta_k$ verifica la condizione (T2), quindi $\prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i} \in R_{A \oplus n\Delta_k}$.
3. $p_i^{\alpha_i} \in S_A \forall i = 1, \dots, h$ e $p_j^{\alpha_j} \in S_{n\Delta_k} \forall j = h+1, \dots, m$, allora $\forall i, j$ si ha che $p_i^{\alpha_i} \mid n, p_j^{\alpha_j} \mid kn$ e $p_j^{\alpha_j} \nmid n$, quindi, poiché si tratta di potenze di primi distinti, $\prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i} \mid kn$ e $\nmid n$, cioè $\prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i} \in R_{n\Delta_k} \subset R_{A \oplus n\Delta_k}$.

QED

5.1.9 Definizione. Un canone ritmico è *collassabile* (o *riducibile*) ad un altro canone ritmico se può essere ottenuto da esso per concatenazione e/o dualità (def. 1.1.5).

Ad esempio in figura 5.2 si vede il collasso del canone

$$\{0, 2, 4, 12, 14, 16\} \oplus \{0, 1, 6, 7\} = \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$$

al canone triviale $\{0\} \oplus \{0\} = \{0\}$, attraverso le seguenti trasformazioni:

- (a) $\{0, 2, 4, 12, 14, 16\} \oplus \{0, 1, 6, 7\} = \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$
 \uparrow 2-concatenazione
- (b) $\{0, 2, 4\} \oplus \{0, 1, 6, 7\} = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$
 \uparrow dualità
- (c) $\{0, 1, 6, 7\} \oplus \{0, 2, 4\} = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$
 \uparrow 2-concatenazione
- (d) $\{0, 1\} \oplus \{0, 2, 4\} = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$
 \uparrow dualità
- (e) $\{0, 2, 4\} \oplus \{0, 1\} = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$
 \uparrow 3-concatenazione
- (f) $\{0\} \oplus \{0, 1\} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
 \uparrow dualità
- (g) $\{0, 1\} \oplus \{0\} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
 \uparrow 2-concatenazione
- (h) $\{0\} \oplus \{0\} = \{0\}$

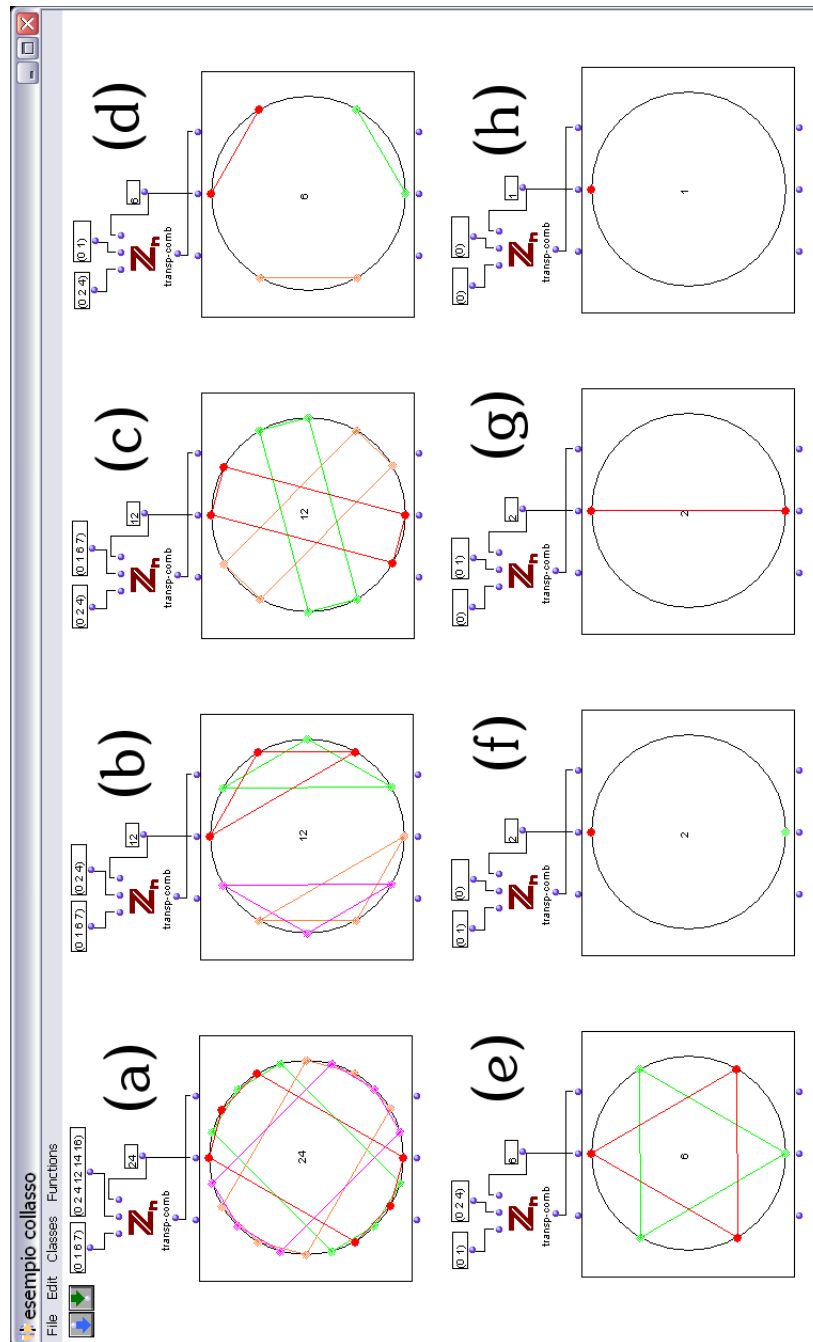


Figura 5.2: esempio di collasso

Capitolo 5. Trasformazione e generazione di canoni a mosaico

La figura 5.2 mostra uno dei possibili utilizzi di *OpenMusic*, un linguaggio di programmazione grafica concepito e sviluppato dall'quipe rappresentazioni musicali dell'IRCAM (Institut de Recherche et Coordination Acoustique/Musique). *OpenMusic* è basato su CommonLisp e permette all'utilizzatore di avere a disposizione la ricchezza espressiva di un linguaggio di programmazione funzionale (lambda calcolo).

Vediamo ora come i canoni di Vuza diventino fondamentali per lo studio dei canoni ritmici.

5.1.10 Teorema (Amiot, [3], teorema 11). *Ogni canone ritmico è riducibile al canone triviale $\{0\} \oplus \{0\} = \{0\}$ o ad un canone di Vuza.*

Dimostrazione: Consideriamo il canone $A \oplus B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Dimostriamo la tesi per induzione su $n \geq 1$.

1. Per $n = 1$ abbiamo il canone triviale e non c'è nulla da dimostrare.
2. Per $n > 1$, se il canone è di Vuza non c'è nulla da dimostrare, supponiamo quindi che uno dei due ritmi sia periodico. Se il ritmo interno A non fosse periodico lo sarebbe il ritmo esterno B , allora il canone si ridurrebbe (per dualità) ad un canone con ritmo interno periodico. Sia quindi A periodico, cioè (cor. 1.2.6) esiste un $k \mid n$ tale che $A = A' \oplus \langle k \rangle = A' \oplus k\{0, \dots, (n/k) - 1\}$, quindi

$$A \oplus B = A' \oplus k\{0, \dots, (n/k) - 1\} \oplus B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

che si ottiene per (n/k) -concatenazione dal canone

$$A' \oplus B = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$$

che, per ipotesi induttiva, si riduce al canone triviale o ad un canone di Vuza.

QED

5.1.11 Corollario.

1. *Se un canone ritmico non soddisfa la condizione (T2) è possibile collassarlo ad un canone di Vuza che non soddisfa la condizione (T2).*
2. *Se un canone non è spettrale, allora è possibile collassarlo ad un canone di Vuza che non soddisfa la condizione (T2).*

Dimostrazione:

1. Il canone triviale verifica banalmente la condizione (T2) ed il collasso la conserva, quindi, per il teorema 5.1.10 di Amiot, si ha la tesi.
2. Segue immediatamente dal punto precedente e dal teorema 4.2.4 di Łaba.

QED

Édouard Gilbert [28] dimostra che se un canone non è spettrale, allora è possibile collassarlo ad un canone di Vuza non spettrale, assumendo però una definizione di spettro apparentemente più restrittiva della definizione 4.2.2, precisamente:

5.1.12 Definizione (Gilbert).

Sia $A \subset \mathbb{N}$ finito, con $0 \in A$, il ritmo interno di un canone di periodo n .

$\Gamma \subset [0, 1)$ è uno *spettro* per $A(x)$ se e solo se

1. Γ è uno spettro nel senso della definizione 4.2.2,
2. ogni $\gamma \in \Gamma$ si può scrivere nella forma q/n .

Osserviamo che non ogni spettro ha questa forma; consideriamo ad esempio il seguente canone di periodo 16:

$$\{0, 5, 10, 15\} \oplus \{0, 4, 8, 12\} = \mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$$

si vede subito che $A(x) = \Delta_4(x^5) = \Phi_2(x)\Phi_4(x)\Phi_{10}(x)\Phi_{20}(x)$ (proposizione A.4(6)), e che $A(x)$ possiede uno spettro secondo la definizione 4.2.2 che non soddisfa la seconda condizione della definizione 5.1.12:

$$\Gamma = \left\{ 0, \frac{1}{20}, \frac{1}{10}, \frac{3}{20} \right\}$$

Sottolineiamo però che tutti i ritmi che soddisfano la condizione (T2) hanno uno spettro della forma richiesta da Gilbert, basta considerare lo spettro trovato da Łaba nella dimostrazione del teorema 4.2.4.

Torniamo quindi al problema aperto della necessità della condizione (T2): se fosse provata, allora le definizioni 4.2.2 e 5.1.12 sarebbero equivalenti.

Abbiamo visto che il problema della necessità della condizione (T2) si riduce all'investigazione dei canoni di Vuza; molti matematici e teorici della musica hanno cercato di trovare un algoritmo costruttivo ed esaustivo per la generazione di tutti i canoni di Vuza di periodo dato.

In *OpenMusic* è stato implementato un algoritmo che permette di generare un insieme di canoni di Vuza di un dato periodo; Harald Friepertinger [25] mostra che tale algoritmo è esaustivo per il primo periodo possibile, $N = 72$, ma non esaustivo già dal secondo, $N = 108$.

Nella prossima sezione vedremo come sia possibile migliorare l'algoritmo implementato in *OpenMusic*.

5.2 Un algoritmo generativo per i canoni di Vuza

L'algoritmo di generazione di *OpenMusic* è l'implementazione della fattorizzazione che si trova nella dimostrazione del teorema di Vuza (teorema 3.1.8) ad opera di Vuza stesso (proposizione 2.2 di [78], part one).

Capitolo 5. Trasformazione e generazione di canoni a mosaico

Tale fattorizzazione è un caso particolare di quella che si trova nella dimostrazione del teorema di Hajós-de Bruijn (teorema 3.1.4) ad opera di de Bruijn stesso (teorema 1 di [15]), e che sviluppa un'idea di Hajós in [31] (in cui egli assume anche l'ipotesi non necessaria $(k, nm) = 1$).

Concludiamo questo lavoro descrivendo il metodo di de Bruijn e mostrando che il metodo di Vuza ne è un caso particolare.

Ricordiamo che, dato un gruppo abeliano G ed un suo sottogruppo H , un *insieme completo di rappresentanti di G/H* è un insieme $R \subset G$ composto da uno ed un solo elemento per ogni classe laterale modulo H .

Siano $d, m, n \in \mathbb{N}^*$ tali che $d \mid m \mid n$. Indichiamo con $\mathcal{R}_n(d \mid m)$ un insieme completo e aperiodico di rappresentanti di $d\mathbb{Z}_n/m\mathbb{Z}_n$, e se $d = 1$ scriviamo $\mathcal{R}_n(m)$, quindi si ha che:

1. $d\mathbb{Z}_n = \mathcal{R}_n(d \mid m) \oplus m\mathbb{Z}_n$
2. $|\mathcal{R}_n(d \mid m)| = |d\mathbb{Z}_n/m\mathbb{Z}_n| = |d\mathbb{Z}_n| / |m\mathbb{Z}_n| = (n/d)/(m/n) = m/d$
3. $\mathcal{R}_n(d \mid m) = d\mathcal{R}_{n/d}(m/d)$

Osserviamo che un tale insieme di rappresentanti esiste sempre, basta prendere ad esempio $\{0, d, \dots, (\frac{m}{d} - 1)d\}$.

Sia ora $N = nmk = n_1n_2m_1m_2k$ come nell'enunciato del teorema di Vuza, poniamo $I_h = \{0, 1, \dots, h-1\} \subset \mathbb{Z}_N$, siano

- $A = \mathcal{R}_N(kn \mid knm_1) \oplus \mathcal{R}_N(km \mid kmn_1) = k(n\mathcal{R}_m(m_1) \oplus m\mathcal{R}_n(n_1))$ e
- $B = C \cup [(R \setminus k\mathbb{Z}_N) \oplus D]$ dove:
 - R è un insieme completo di rappresentanti di $\mathbb{Z}_N/k\mathbb{Z}_N$,
 - dato $x \in kn\mathbb{Z}_N \setminus knm_1\mathbb{Z}_N$, si definisce:

$$C = [\{x\} \cup (kmn_1\mathbb{Z}_N \setminus \{0\})] \oplus knm_1\mathbb{Z}_N$$

- dato $y \in km\mathbb{Z}_N \setminus kmn_1\mathbb{Z}_N$, si definisce:

$$D = [\{y\} \cup (knm_1\mathbb{Z}_N \setminus \{0\})] \oplus kmn_1\mathbb{Z}_N$$

dove, se $\beta \mid \alpha$, abbiamo identificato $\beta\mathbb{Z}_\alpha$ e $\mathbb{Z}_{\alpha/\beta}$. Osserviamo inoltre che

$$|A| = n_1m_1 \text{ e } |B| = kn_2m_2$$

Si dimostra [15] che A e B sono aperiodici e che $\mathbb{Z}_N = A \oplus B$.

La costruzione di Vuza è un caso particolare della precedente, infatti si ottiene prendendo $n_2 = p_1$ ed $m_2 = p_2$ primi.

5.2.1 Definizione. Chiamiamo *Vuza-costruibili* i canoni ottenuti con la fattorizzazione precedente.

I primi due ordini per i quali esistono canoni di Vuza ed esiste una fattorizzazione (come nell'enunciato del teorema di Vuza) con n_2 ed m_2 non necessariamente primi sono 144 e 216.

Nell'appendice C si trovano, per tali ordini, i cataloghi dei canoni vuza-costruibili che si ottengono dalle fattorizzazioni con almeno uno tra n_2 ed m_2 non primo.

Tali canoni non possono essere costruiti con altre fattorizzazioni, come si può vedere da una verifica diretta.

Precisamente, a meno di traslazione,

- per $144 = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2$ e $144 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2$ si ottengono gli stessi 72 nuovi canoni (6 nuovi ritmi interni e 12 nuovi ritmi esterni),
- per 216 si ottengono 3186 nuovi canoni:
 - per $216 = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ si ottengono 1296 nuovi canoni (6 nuovi ritmi interni e 216 nuovi ritmi esterni)
 - per $216 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3$ si ottengono 1728 nuovi canoni (6 nuovi ritmi interni, gli stessi del punto precedente poiché la costruzione di A è simmetrica rispetto ad n ed m , e 288 nuovi ritmi esterni);
 - per $216 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 2$ e $216 = 3 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ si ottengono gli stessi 162 nuovi canoni (27 nuovi ritmi interni e 6 nuovi ritmi esterni).

Sottolineamo che anche questa costruzione più generale rimane non esaustiva, infatti per $n = 108$ coincide con la costruzione di Vuza che non esaurisce tutti i possibili canoni aperiodici, come mostra Harald Friepertinger nel già citato [25].

Mostriamo ora che un canone Vuza-costruibile di periodo $N = knm$ si può vedere come intreccio di k canoni di periodo nm .

Siano A e B i ritmi Vuza-costruiti, poniamo

$$A' = A/k, B_0 = C/k, \text{ e, per ogni } i + \alpha_i k \in R, 0 < i < k, B_i = (\alpha_i k + D)/k.$$

Allora si ha

$$A = kA' \text{ e } B = \bigcup_{i=0}^{k-1} (i + B_i).$$

cioè $A \oplus B = \mathbb{Z}_N$ è (il duale del) l'intreccio dei (duali dei) k canoni $A' \oplus B_i = \mathbb{Z}_{nm}$.

5.2.2 Esempio. Consideriamo il canone Vuza-costruibile dell'esempio 4.2.7 e mostrato in figura 5.3(c):

$$\{0, 8, 16, 18, 26, 34\} \oplus \{0, 1, 5, 6, 12, 25, 29, 36, 42, 48, 49, 53\} = \mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$$

Come si è visto nell'esempio 5.1.2, il precedente canone è (il duale del) l'intreccio dei (duali dei) seguenti canoni:

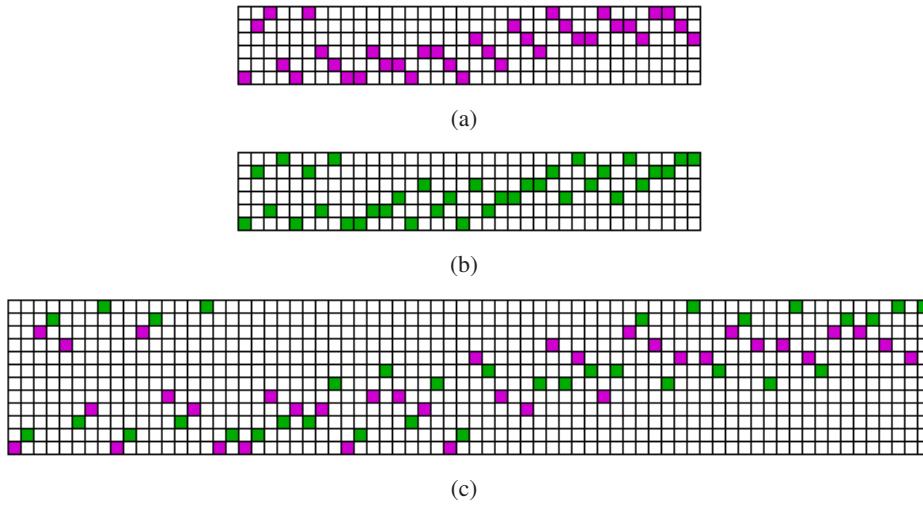


Figura 5.3

(C1) $\{0, 4, 8, 9, 13, 17\} \oplus \{0, 3, 6, 18, 21, 24\} = \mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ in figura 5.3(a)

(C2) $\{0, 4, 8, 9, 13, 17\} \oplus \{0, 2, 12, 14, 24, 26\} = \mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ in figura 5.3(b)

Notiamo infine che i canoni di periodo nm di cui è intreccio il canone Vuza-costruibile di periodo knm non sono canoni di Vuza, poiché, per ogni $i = 0, \dots, k-1$, il canone $A' \oplus B_i$ ha ritmo esterno periodico:

$$B_i = \frac{1}{k}(\alpha_i k + D) = \frac{1}{k}[\{y\} \cup (knm_1 \mathbb{Z}_N \setminus \{0\})] \oplus mn_1 \mathbb{Z}_{mn}$$

Nell'esempio 5.2.2 infatti si ha

(C1) $\{0, 3, 6, 18, 21, 24\} = \{0, 3, 6\} \oplus \langle 18 \rangle_{36}$

(C2) $\{0, 2, 12, 14, 24, 26\} = \{0, 2\} \oplus \langle 12 \rangle_{36}$

5.3 Invarianza per affinità

Trattiamo in questa sezione un importante risultato dovuto a Robert Tijdeman [76], riportandone la dimostrazione di Ethan Coven ed Aaron Meyerowitz [12], e, come conseguenza, dimostriamo il teorema di Sands [67].

5.3.1 Definizione. Se $A \subset \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$ definiamo

- $kA := \{ka : a \in A\}$ e
- se $k \mid a \forall a \in A$, $A/k := \{a/k : a \in A\}$.

5.3.2 Teorema (Tijdeman). (Teorema 1 di [76], pag 267)

Se $A \oplus B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ è un canone ritmico, allora anche $kA \oplus B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ per ogni intero positivo k tale che $(k, |A|) = 1$.

Per la dimostrazione abbiamo bisogno del seguente

5.3.3 Lemma. (Lemma 3.1 di [12], pag 8) $A, B \in \mathbb{N}$ finiti, $A(x), B(x)$ i polinomi associati, $n := A(1)B(1)$, p primo tale che $p \nmid A(1)$, allora:

$$A(x)B(x) \equiv \Delta_n(x) \pmod{x^n - 1} \Rightarrow A(x^p)B(x) \equiv \Delta_n(x) \pmod{x^n - 1}.$$

Dimostrazione: Consideriamo le congruenze:

$$\begin{aligned} A(x^p) &\equiv (A(x))^p && \pmod{p}^*, \\ (A(x))^p B(x) &= (A(x))^{p-1} A(x) B(x) \equiv (A(x))^{p-1} \Delta_n(x) && \pmod{x^n - 1}, \\ x^i \Delta_n(x) &\equiv \Delta_n(x) && \pmod{x^n - 1}^{**}, \\ &\text{quindi} \\ (A(x))^{p-1} \Delta_n(x) &\equiv (A(1))^{p-1} \Delta_n(x) && \pmod{x^n - 1}, \\ (A(1))^{p-1} &\equiv 1 && \pmod{p}^{***}, \\ &\text{in conclusione:} \\ A(x^p) B(x) &\equiv \Delta_n(x) && \pmod{x^n - 1, p} \end{aligned}$$

Dove gli asterischi indicano le motivazioni delle congruenze:

*: perché p è primo,

** : la moltiplicazione per x^i permuta gli elementi di $\Delta_n(x)$,

*** : Piccolo Teorema di Fermat, qui si usa l'ipotesi $p \nmid n$.

Sia ora $r(x) = \sum_{i=0}^{n-1} r_i x^i$ il resto della divisione di $A(x^p)B(x)$ per $x^n - 1$; per quanto detto $r(x) \equiv \Delta_n(x) \pmod{p}$, cioè $r_i \equiv 1 \pmod{p}$, ed essendo $r(1) = A(1)B(1) = n$ si ha $r_i = 1$ per ogni $i = 0, \dots, n-1$, cioè la tesi.

QED

Dimostrazione (del teorema di Tijdeman): $A(x)B(x) \equiv \Delta_n(x) \pmod{x^n - 1}$. Osserviamo innanzitutto che per ogni $h \in \mathbb{N}$ $(hA)(x) = A(x^h)$, in particolare $(hA)(1) = A(1)$. Consideriamo la fattorizzazione di k , $k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$, $(k, |A|) = 1$ ma allora per ogni $i = 1, \dots, m$, $(p_i, |A|) = 1$, possiamo quindi iterare l'applicazione del lemma 5.3.3 ed ottenere

$$(kA)(x)B(x) \equiv \Delta_n(x) \pmod{x^n - 1},$$

cioè $(kA) \oplus B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, la tesi.

QED

5.3.4 Corollario. Sia $A \subset \mathbb{Z}$, $|A| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$.

Se A tassella allora tassella con periodo $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$.

Capitolo 5. Trasformazione e generazione di canoni a mosaico

Dimostrazione: Sia $A \oplus C = \mathbb{Z}$ una tassellazione con periodo n .

Per ogni $k > 1$ tale che $k \mid n$ e $(k, |A|) = 1$, per il teorema 5.3.2, $kA \oplus C = \mathbb{Z}$, quindi, posto $C_0 := \{c \in C \mid c \equiv 0 \pmod{k}\}$, $kA \oplus C_0 = k\mathbb{Z}$, allora $A \oplus C_0/k = \mathbb{Z}$ è una tassellazione di periodo n/k .

QED

Dal teorema di Tijdeman segue anche il seguente teorema sulle tassellazioni degli interi:

5.3.5 Teorema (Sands). *Se $A \oplus C = \mathbb{Z}$ è una tassellazione di periodo n tale che A è finito ed n ha al più due fattori primi, allora esiste un primo p che divide n tale che $A \subset p\mathbb{Z}$ oppure $C \subseteq p\mathbb{Z}$.*

Per dimostrare il teorema di Sands utilizziamo il seguente

5.3.6 Lemma. *Siano A e B tali che $A \oplus B \oplus n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, con $A, B \supseteq \{0\}$; definiamo $A - A = \{a - a' \mid a, a' \in A\}$ e analogamente $B - B$. Allora almeno una delle seguenti è vera:*

1. per ogni $a \in A - A$, $(a, |B|) > 1$
2. per ogni $b \in B - B$, $(b, |A|) > 1$

Dimostrazione: Supponiamo per assurdo che siano entrambe false. Allora esistono $a = a_1 - a_2 \in A - A$ e $b = b_1 - b_2 \in B - B$ tali che, per il teorema 5.3.2, $ba \oplus aB \oplus n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. Allora esiste un elemento in $ba \oplus aB$ che si scrive in due modi differenti:

$$\begin{aligned} a_1b_1 - a_2b_2 &= (b_1 - b_2)a_1 + (a_1 - a_2)b_2 = ba_1 + ab_2 \\ &= (b_1 - b_2)a_2 + (a_1 - a_2)b_1 = ba_2 + ab_1 \end{aligned}$$

assurdo.

QED

Dimostrazione (del teorema di Sands): Per il teorema di de Bruijn, $C = B \oplus n\mathbb{Z}$. Siano p ed eventualmente q i primi che dividono n . Se valesse la prima affermazione del lemma, allora $A \subset A - A \subset p\mathbb{Z} \cup q\mathbb{Z}$. Se, per assurdo, A non fosse contenuto né in $p\mathbb{Z}$, né in $q\mathbb{Z}$, esisterebbero due interi $a_1, a_2 \in A$ tali che $a_1 \in p\mathbb{Z} \setminus q\mathbb{Z}$ e $a_2 \in q\mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$. Allora $a_1 - a_2 \in A - A$ è coprimo con $|B|$, assurdo, quindi $A \subset p\mathbb{Z}$ oppure $A \subset q\mathbb{Z}$.

Analogamente, se valesse la seconda affermazione si avrebbe $B \subset p\mathbb{Z}$ oppure $B \subset q\mathbb{Z}$, dunque $C \subseteq p\mathbb{Z}$ oppure $C \subseteq q\mathbb{Z}$.

QED

Dato un canone ritmico $A \oplus B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, consideriamo l'insieme delle trasformazioni A -affini $\mathcal{Aff}_A := \{f : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n \mid f(x) = kx + t, (|A|, k) = 1, t \in \mathbb{Z}_n\}$.

Il teorema di Tijdeman, unitamente all'invarianza per traslazioni, stabilisce che:

$$(I1) \quad A \oplus B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \Rightarrow f(A) \oplus B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \quad \forall f \in \mathcal{A}ff_A.$$

Questa proprietà dipende chiaramente dal ritmo interno A del canone. Allora, per ogni canone ritmico si ha:

$$(I2) \quad A \oplus B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \Rightarrow f(A) \oplus B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \quad \forall f \in \mathcal{A}ff_n,$$

dove $\mathcal{A}ff_n = \{f : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n \mid f(x) = kx + t, (n, k) = 1, t \in \mathbb{Z}_n\}$ è il gruppo affine di grado n , come definito in B.12, ed $\mathcal{A}ff_n \subset \mathcal{A}ff_A$.

In particolare quindi i canoni sono invarianti per *trasposizione* ed *inversione*, cioè per l'azione (def. B.1) dei gruppi di permutazioni \mathbb{Z}_n e \mathcal{D}_n , come definiti nell'appendice B.

5.3.7 Esempio. Consideriamo il seguente canone di periodo 12:

$$\{0, 1, 6, 7\} \oplus \{0, 2, 4\} = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$$

e consideriamo le trasformazioni $f_1 \in \mathcal{A}ff_{12}$ ed $f_2 \in \mathcal{A}ff_A$ date da:

$$f_1(x) = 5x \quad \text{ed} \quad f_2(x) = 3x$$

Il ritmo interno $A = \{0, 1, 6, 7\}$ diventa, rispettivamente,

$$A_1 = 5A = \{0, 5, 6, 11\} \quad \text{ed} \quad A_2 = 3A = \{0, 3, 6, 9\}$$

come mostrato in figura 5.4.

Confrontiamo ora il teorema di Tjeldeman con il teorema

Teorema (2.1.9). *Sia $A \subset \mathbb{N}$ finito. Per ogni $t \in \mathbb{Z}$ e $k \in \mathbb{N}$ si ha:*

$$A \text{ tassella} \Leftrightarrow kA + t \text{ tassella}.$$

Dato un tassello, A , quindi, anche kA è un tassello per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Se $(k, |A|) = 1$ possiamo considerare per kA lo stesso ritmo esterno di A , se invece $(k, |A|) > 1$ può accadere che il ritmo esterno considerato per A non dia luogo ad un canone ritmico con ritmo interno kA , come si vede nel prossimo esempio.

5.3.8 Esempio. Consideriamo il canone dell'esempio 5.3.7:

$$\{0, 1, 6, 7\} \oplus \{0, 2, 4\} = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$$

e la trasformazione $f(x) = 4x$. Il ritmo interno $A = \{0, 1, 6, 7\}$ diventa $A' = \{0, 4\}$ che non è in somma diretta con $B = \{0, 2, 4\}$.

A' è comunque un tassello, basta infatti considerare $B' = \{0, 1, 2, 3\}$ per generare un canone a mosaico di periodo 8, come mostrato in figura 5.5.

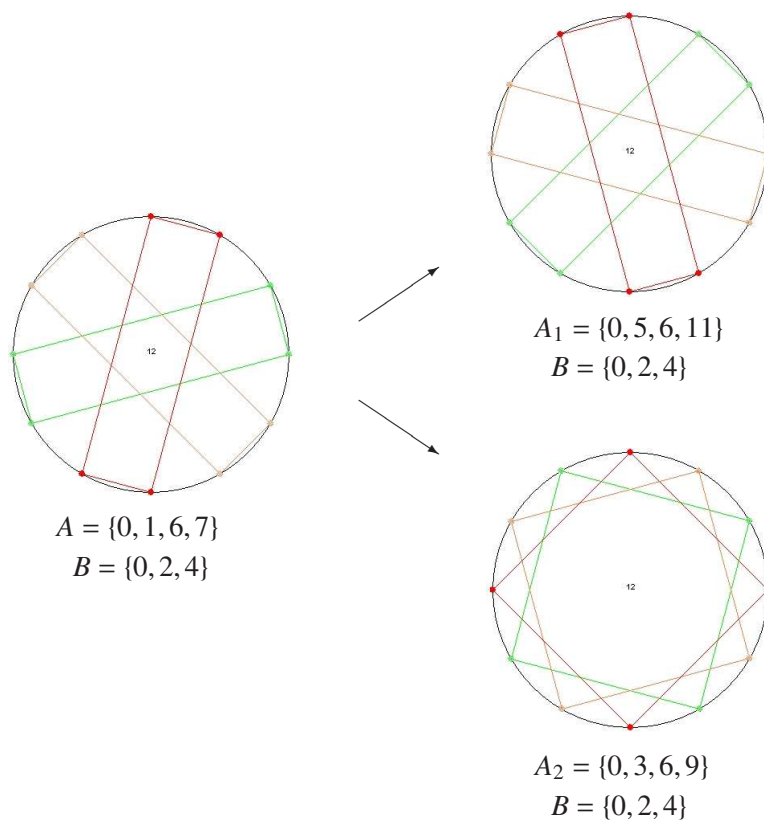


Figura 5.4

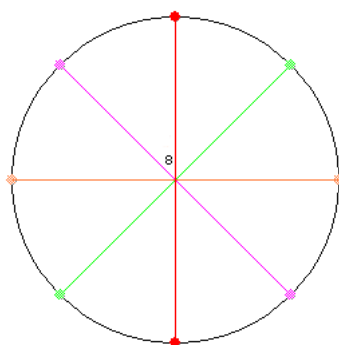


Figura 5.5

Appendice A

Polinomi ciclotomici

Riporto alcune definizioni e proprietà che riguardano i polinomi ciclotomici. Non riporto molte delle dimostrazioni che possono essere trovate in un buon testo di algebra, come ad esempio *Algebra* di Serge Lang [46].

Consideriamo $n \in \mathbb{N}$ ed il polinomio $x^n - 1 \in \mathbb{Z}[x]$.

Alcune definizioni e fatti noti preliminari:

1. Una radice $\zeta \in \mathbb{C}$ di $x^n - 1$ si dice *radice n-sima dell'unità*.
2. L'insieme di tutte le radici n-sime dell'unità verrà indicato con μ_n .
3. $\mu_n = \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta^n = 1\} = \{e^{i\theta} : \theta = k\frac{2\pi}{n}, k = 0, \dots, n-1\}$.
4. Ponendo $\zeta_n := e^{i\frac{2\pi}{n}}$, μ_n è un gruppo ciclico di ordine n generato da ζ_n^k per ogni k tale che $(k, n) = 1$.
5. Le ζ_n^k , $(k, n) = 1$, vengono dette radici *primitive n-esime* dell'unità, ed il loro numero è calcolato dalla *funzione ϕ di Eulero*:

$$|\{\zeta_n^k : (k, n) = 1\}| = |\{k < n : (k, n) = 1\}| = \phi(n),$$

6. Per ogni $d|n$, μ_d è un sottogruppo di μ_n (l'unico di ordine d).

A.1 Definizione. Dati $n \in \mathbb{N}$ e ζ_n radice primitiva n -sima dell'unità, chiamiamo *polinomio ciclotomico di ordine n* (o *n -simo polinomio ciclotomico*) il polinomio:

$$\Phi_n(x) := \prod_{k < n, (k, n) = 1} (x - \zeta_n^k)$$

le cui radici sono le radici primitive n -sime dell'unità.

Elenchiamo alcune ben note proprietà dei polinomi ciclotomici:

1. $\Phi_d(x) \in \mathbb{Z}[x]$
2. $\Phi_n(x)$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$ (e quindi in $\mathbb{Z}[x]$ per il lemma di Gauss).

Appendice A. Polinomi ciclotomici

3. $\Phi_n(x)$ è il polinomio minimo di ζ_n su \mathbb{Q} (e quindi su \mathbb{Z} , vedi punto 2).
4. $\Phi_d(x) = \prod_{o(\zeta)=d}(x - \zeta)$
5. $\deg \Phi_n = \phi(n)$
6. $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$, e quindi $\Delta_n(x) := 1 + x + \dots + x^{n-1} = \prod_{d|n, d \neq 1} \Phi_d(x)$

A.2 Osservazione. $\deg \Phi_n(x)$ è pari se e solo se $n > 2$.

Infatti, $\Phi_1(x) = 1 - x$, $\Phi_2(x) = 1 + x$, e se $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n} \geq 3$, si ha:

$$\deg \Phi_n(x) = \phi(n) = p_1^{\alpha_1-1}(p_1 - 1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2 - 1) \dots p_n^{\alpha_n-1}(p_n - 1)$$

che è pari.

A.3 Definizione. Dato un polinomio a coefficienti interi

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x],$$

chiamiamo *contenuto* del polinomio il massimo comun divisore dei suoi coefficienti:

$$\text{cont } f(x) := \text{MCD}\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$$

A.4 Proposizione.

Siano p primo ed $n \in \mathbb{N}$, allora:

1. $\Phi_p(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{p-1}$.
2. $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$, p_i primo $\forall i = 1, \dots, n \Rightarrow \Phi_n(x) = \Phi_{p_1 \dots p_n}(x^{p_1^{\alpha_1-1} \dots p_n^{\alpha_n-1}})$.
3. n dispari $> 1 \Rightarrow \Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$.
4. $\Phi_n(x^p) = \begin{cases} \Phi_{pn}(x) & \Leftrightarrow p | n \\ \Phi_n(x) \Phi_{pn}(x) & \Leftrightarrow p \nmid n \end{cases}$
5. $\Phi_n(1) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow n = 1 \\ p & \Leftrightarrow n = p^\alpha \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$
6. Sia m un intero positivo e sia $k := \max\{d | m : (d, n) = 1\}$, allora, ponendo $m = hk$, si ha:

$$\Phi_n(x^m) = \prod_{d|k, h|d} \Phi_{dn}(x).$$

In particolare, se $(m, n) = 1$ si ha: $\Phi_n(x^m) = \prod_{d|m} \Phi_{dn}(x)$.

7. Siano $A(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $\hat{A}(x) := A(x^p)$, R_A ed $R_{\hat{A}}$ come nella definizione 2.1.2, allora

$$R_{\hat{A}} = pR_A \cup \{n \in R_A : p \nmid n\}.$$

Dimostrazione:

1. $(x - 1)(x^{p-1} + \dots + 1) = x^p - 1 = \prod_{d|p} \Phi_d(x) \Rightarrow \Phi_p(x) = x^{p-1} + \dots + 1.$

2. Poiché

$$\zeta_n^{p_1^{\alpha_1-1} \dots p_n^{\alpha_n-1}} = e^{i\frac{2\pi}{n} p_1^{\alpha_1-1} \dots p_n^{\alpha_n-1}} = e^{i2\pi \frac{p_1^{\alpha_1-1} \dots p_n^{\alpha_n-1}}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}}} = e^{i\frac{2\pi}{n} p_1 \dots p_n} = \zeta_{p_1 \dots p_n}$$

si ha:

$$\Phi_{p_1 \dots p_n}(\zeta_n^{p_1^{\alpha_1-1} \dots p_n^{\alpha_n-1}}) = 0.$$

$\Phi_n(x)$ è il polinomio minimo di ζ_n , quindi

$$\Phi_{p_1 \dots p_n}(x^{p_1^{\alpha_1-1} \dots p_n^{\alpha_n-1}}) | \Phi_n(x),$$

inoltre

$$\deg \Phi_{p_1 \dots p_n}(x^{p_1^{\alpha_1-1} \dots p_n^{\alpha_n-1}}) = p_1^{\alpha_1-1} (p_1 - 1) \dots p_n^{\alpha_n-1} (p_n - 1) = \phi(n) = \deg \Phi_n(x)$$

e

$$\text{cont } \Phi_{p_1 \dots p_n}(x^{p_1^{\alpha_1-1} \dots p_n^{\alpha_n-1}}) = \text{cont } \Phi_n = 1,$$

quindi $\Phi_{p_1 \dots p_n}(x^{p_1^{\alpha_1-1} \dots p_n^{\alpha_n-1}}) = \Phi_n(x).$

3. n dispari $\Rightarrow \deg \Phi_{2n}(x) = \phi(2n) = \phi(n) = \deg \Phi_n(-x)$, inoltre $\text{cont } \Phi_{2n}(x) = \text{cont } \Phi_n(-x) = 1$, quindi, poiché Φ_{2n} è il polinomio minimo di ζ_{2n} , basta vedere che $\Phi_n(-\zeta_{2n}) = 0$, cioè che $-\zeta_{2n}$ è una radice primitiva n -sima dell'unità, e infatti:

- $\zeta_{2n}^{2n} = 1 \Rightarrow \zeta_{2n}^n = -1 \Rightarrow (-\zeta_{2n})^n = 1$ e
- se $m < n$:
 - m pari $\Rightarrow (-\zeta_{2n})^m = \zeta_{2n}^m \neq 1$,
 - m dispari $\Rightarrow (-\zeta_{2n})^m = -\zeta_{2n}^m$ e se fosse $= 1$ si avrebbe $\zeta_{2n}^m = -1 \Rightarrow \zeta_{2n}^{2m} = 1$ con $2m < 2n$, assurdo.

4. • $p | n$, sia $\alpha \in \mathbb{N}$ tale che $p^\alpha | n$ ma $p^{\alpha+1} \nmid n$, $n = p^{\alpha+1} m$. Poiché $p \nmid m$ si ha: $\deg \Phi_{pn}(x) = \phi(pn) = \phi(p^{\alpha+1} m) = p^\alpha (p - 1) \phi(m) = p p^{\alpha-1} (p - 1) \phi(m) = p \phi(n) = \deg \Phi_n(x^p)$, e $\text{cont } \Phi_{pn}(x) = \text{cont } \Phi_n(x^p) = 1$. $\Phi_{pn}(x)$ è il polinomio minimo delle radici pn -sime dell'unità, quindi basta dimostrare che $\Phi_n(\zeta_{pn}^p) = 1$, ma questo è vero perché $\zeta_{pn}^p = e^{i\frac{2\pi}{pn} p} = e^{i\frac{2\pi}{n}} = \zeta_n$.

- $p \nmid n$, quindi

$$\begin{aligned} \deg \Phi_n(x^p) &= p\phi(n) = \phi(n) + (p - 1)\phi(n) = \\ &= \deg \Phi_n(x) + \deg \Phi_{pn}(x) = \deg (\Phi_n(x)\Phi_{pn}(x)), \end{aligned}$$

Appendice A. Polinomi ciclotomici

inoltre

$$\text{cont } \Phi_n(x^p) = 1 = \text{cont } \Phi_n(x) \text{cont } \Phi_{pn}(x) = \text{cont } (\Phi_n(x)\Phi_{pn}(x)),$$

quindi basta vedere che $\Phi_n(x^p)$ si annulla sulle radici di $\Phi_n(x)$ e di $\Phi_{pn}(x)$, cioè sulle radici primitive n -sime e pn -esime dell'unità:

- (n) $(p, n) = 1 \Rightarrow$ l'automorfismo di Frobenius $\zeta \mapsto \zeta^p$ di μ_n conserva i sottogruppi delle radici primitive: se ζ è una radice primitiva n -sima dell'unità anche ζ^p lo è, quindi $\Phi_n(\zeta^p) = 0$.
- (pn) Una radice primitiva np -esima dell'unità ζ ha la forma $\zeta_{pn}^k = e^{ik\frac{2\pi}{pn}}$, $(k, np) = 1$, quindi $(\zeta_{pn}^k)^p = e^{ik\frac{2\pi}{pn}p} = e^{ik\frac{2\pi}{n}} = \zeta_n$ (poiché $(k, n) = 1$), segue immediatamente che $\Phi_n(\zeta^p) = 0$.

5. • **(n = 1):** $\Phi_1(x) = x - 1 \Rightarrow \Phi_1(1) = 0$.
- **(n = p $^\alpha$):** $\Phi_{p^\alpha}(x) = \Phi_p(x^{p^{\alpha-1}})$ per il punto 2, $\Phi_p(x) = 1 + x + \dots + x^{p-1}$ per il punto 1, quindi $\Phi_{p^\alpha}(1) = \Phi_p(1) = p$
- **(n $\neq 1, p^\alpha$):** sia $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$, p_i primo $\forall i = 1, \dots, n$, per i punti 2 e 4 si ha:

$$\Phi_n(1) = \Phi_{p_1 \dots p_n}(1) = \frac{\Phi_{p_1 \dots p_{n-1}}(1)}{\Phi_{p_1 \dots p_{n-1}}(1)} = 1.$$

6. Supponiamo $(m, n) = 1$. Sia $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, procedo per induzione su $k \geq 1$:

- $(k = 1)$: Procedo per induzione su $\alpha \geq 1$:

$(\alpha = 1)$: per il punto 4,

$$\Phi_n(x^p) = \Phi_n(x)\Phi_{pn}(x) = \prod_{d|p} \Phi_{dn}(x)$$

$(\alpha \Rightarrow \alpha + 1)$: per il punto 4,

$$\Phi_n(x^{p^{\alpha+1}}) = \Phi_n(x^{p^\alpha})\Phi_{pn}(x^{p^\alpha}) = \Phi_n(x^{p^\alpha})\Phi_{p^{\alpha+1}n}(x) =$$

per ipotesi induttiva

$$= \left(\prod_{d|p^\alpha} \Phi_{dn}(x) \right) \Phi_{p^{\alpha+1}n}(x) = \left(\prod_{0 \leq \beta \leq \alpha} \Phi_{p^\beta n}(x) \right) \Phi_{p^{\alpha+1}n}(x) =$$

$$\prod_{0 \leq \beta \leq \alpha+1} \Phi_{p^\beta n}(x) = \prod_{d|p^{\alpha+1}} \Phi_{dn}(x),$$

- ($k \Rightarrow k + 1$): suppongo la tesi vera per $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, la dimostro per mp^α , con $p \nmid m$. Per il passo base dell'induzione,

$$\Phi_n(x^{mp^\alpha}) = \Phi_n((x^m)^{p^\alpha}) = \prod_{d|p^\alpha} \Phi_{dn}(x^m) =$$

per ipotesi induttiva

$$= \prod_{d|p^\alpha} \prod_{h|m} \Phi_{hdn}(x) = \prod_{d|mp^\alpha} \Phi_{dn}(x).$$

Quindi la tesi è dimostrata nel caso $(m, n) = 1$.

Consideriamo ora il caso generale. Sia $k = \max\{d \mid m : (k, n) = 1\}$ ed $m = hk$, allora per ogni primo $p \mid h$ si ha che $p \mid n$, quindi

- $(h, k) = 1$ e,
- per il punto 4, ed il caso già dimostrato $(m, n) = 1$, si ha:

$$\Phi_n(x^m) = \Phi_{nh}(x^k) = \prod_{d|k} \Phi_{nhd}(x) = \prod_{d|m, h|d} \Phi_{nd}(x).$$

7. Dimostro le due inclusioni:

- $pR_A \cup \{n \in R_A : p \nmid n\} \subseteq R_{\hat{A}}$:
 $\forall n \in R_A, \Phi_n(x) \mid A(x) \Rightarrow \Phi_n(x^p) \mid \hat{A}(x)$, per il punto 4:
 - $p \mid n \Rightarrow \Phi_{pn}(x) \mid \hat{A}(x) \Rightarrow pn \in R_{\hat{A}}$,
 - $p \nmid n \Rightarrow \Phi_n(x)\Phi_{pn}(x) \mid \hat{A}(x) \Rightarrow n, pn \in R_{\hat{A}}$.
- $R_{\hat{A}} \subseteq pR_A \cup \{n \in R_A : p \nmid n\}$:
 $\forall n \in R_{\hat{A}}, \Phi_n(x) \mid \hat{A}(x) \Rightarrow \hat{A}(\zeta_n^p) = A(\zeta_n^p) = 0$ quindi:
 - $p \mid n \Rightarrow n = pm$ e $\zeta_{pm}^p = \zeta_m \Rightarrow \Phi_m(x) \mid A(x) \Rightarrow m \in R_A$,
 - $p \nmid n \Rightarrow \zeta_n^p$ è ancora una radice primitiva n -sima dell'unità $\Rightarrow \Phi_n(x) \mid A(x) \Rightarrow n \in R_A$.

QED

A.5 Definizione. Un polinomio $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ è *reciproco* se e solo se la sequenza dei suoi coefficienti è *palindroma*, cioè:

$$a_i = a_{n-i} \text{ per ogni } i = 0, \dots, n.$$

A.6 Proposizione. $\Phi_n(x)$ è *reciproco* se e solo se $n > 1$.

Dimostrazione:

osserviamo innanzitutto che $\Phi_1(x) = x - 1$ non è reciproco.

Per $n = 2$ si ha che $\Phi_2(x) = x + 1$, che è reciproco.

Rimane quindi da vedere che $\Phi_n(x)$ è reciproco per ogni $n > 2$, cioè che, indicando

Appendice A. Polinomi ciclotomici

con c_h il coefficiente del termine di grado h , per ogni $h = 0, \dots, k$ si abbia $c_h = c_{k-h}$. Poniamo $k := \deg \Phi_n(x) = \phi(n)$, sia $\zeta_h := e^{i\frac{2\pi}{n}h}$ l' h -sima radice n -sima primitiva dell'unità ed indichiamo con \mathcal{P}_h l'insieme $\{S \subset \{1, \dots, n\} : |S| = h\}$.

Allora, se $h > 0$, per la definizione A.1, si ha:

$$c_h = - \sum_{S \in \mathcal{P}_h} \prod_{s \in S} \zeta_s.$$

Si vede subito che $c_0 = 1 = c_k$.

Ricordiamo che, per $n > 2$, $\phi(n) = k$ è pari (oss. A.2), quindi è sufficiente dimostrare che $c_h = c_{k-h}$ per ogni $h = 1, \dots, k/2$.

Dato $S \in \mathcal{P}_h$, sia $S^{-1} := \{r \in \{1, \dots, k\} : \zeta_r^{-1} \in S\}$.

Consideriamo la mappa $f : \mathcal{P}_h \rightarrow \mathcal{P}_{k-h}$ tale che $f(S) = (S^{-1})^c$.

f è surgettiva, infatti dato $T \in \mathcal{P}_{k-h}$, basta prendere $S = (T^c)^{-1}$ per avere $f(S) = T$, inoltre $|\mathcal{P}_h| = |\mathcal{P}_{k-h}|$, quindi f è una bigezione.

osserviamo inoltre che per ogni $S \in \mathcal{P}_h$,

$$\prod_{s \in S} \zeta_s = \left(\prod_{r \in S^{-1}} \zeta_r \right)^{-1} \quad \text{e} \quad \prod_{s \in S} \zeta_s = \left(\prod_{t \in S^c} \zeta_t \right)^{-1}$$

quindi $\prod_{s \in S} \zeta_s = \prod_{t \in f(S)} \zeta_t$, allora, per ogni $h = 1, \dots, k/2$, si ha:

$$c_h = - \sum_{S \in \mathcal{P}_h} \prod_{s \in S} \zeta_s = - \sum_{S \in \mathcal{P}_h} \prod_{r \in f(S)} \zeta_r = - \sum_{T \in \mathcal{P}_{k-h}} \prod_{t \in T} \zeta_t = c_{k-h}.$$

QED

A.7 Definizione. Si chiama *funzione di Möbius* la mappa $\mu : \mathbb{N} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ definita da:

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \exists p \text{ primo} : p^2 | n \\ (-1)^m & \Leftrightarrow n = p_1 \dots p_m \text{ primi distinti} \\ 1 & \Leftrightarrow n = 1 \end{cases}$$

Se μ è la funzione di Möbius si ha:

$$\Phi_n(x) = \prod_{d|n} (x^{n/d} - 1)^{\mu(d)}, \text{ e}$$

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow n = 1 \\ 0 & \Leftrightarrow n > 1 \end{cases}$$

Appendice B

Algebra combinatoria e teoria musicale

In questa appendice vogliamo mostrare un utilizzo della teoria enumerativa di Pólya in ambito musicale per la classificazione degli accordi (che si vedrà nella sezione B.2) e dei ritmi (utilizzata nella stesura dei cataloghi nell'appendice C). Sottolineiamo il fatto che la struttura di gruppo ciclico è adatta alla rappresentazione e allo studio della parte ritmica delle composizioni tanto quanto alla parte tonale (e in realtà anche a quella espressiva, ma non ci addentreremo in quest'ultimo studio).

B.1 La teoria di Pólya

Indichiamo con G un gruppo, con X un insieme e con

$$\mathcal{S}_X = \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ è bigettiva} \}$$

il gruppo delle permutazioni di X .

B.1 Definizione. Un'azione di G su X è un omomorfismo di gruppi

$$\alpha : G \longrightarrow \mathcal{S}_X.$$

L'azione è *fedele* se $\ker(\alpha) = \{e\}$.

Nel seguito considereremo solo azioni fedeli, identifichiamo quindi G con la sua immagine $\alpha(G) < \mathcal{S}_X$ e scriviamo gx invece di $g(x)$. In particolare, se X è finito, e G agisce su X , allora anche G è finito.

B.2 Definizione. Data un'azione di G su X , chiamiamo

$$Gx := \{gx \mid g \in G\} \text{ l'orbita di } x \in X;$$

$$G_x := \{g \in G \mid gx = x\} \text{ lo stabilizzatore di } x \in X;$$

Appendice B. Algebra combinatoria e teoria musicale

$X_g := \{x \in X \mid gx = x\}$ l'insieme dei *punti fissi* di $g \in G$.

Indichiamo con \sim_G la relazione di equivalenza su X indotta dall'azione di G :

$$x \sim_G y \Leftrightarrow \exists g \in G : y = gx,$$

e con $G \backslash X$ l'insieme quoziente $X / \sim_G = \{Gx \mid x \in X\}$, che, come si vede, coincide con l'insieme delle orbite.

Fissato un $x \in X$, si verifica facilmente che $G_x < G$ e che la mappa

$$\begin{aligned} G/G_x &\rightarrow X \\ gG_x &\mapsto gx \end{aligned}$$

è iniettiva ed ha come immagine l'orbita Gx , quindi, se G è finito, si ha

$$|Gx| = |G/G_x| = \frac{|G|}{|G_x|}.$$

Se X è finito e $|X| = n$, allora \mathcal{S}_X è isomorfo ad \mathcal{S}_n , il *gruppo simmetrico* di grado n . Richiamiamo alcuni risultati su \mathcal{S}_n :

1. $|\mathcal{S}_n| = n!$
2. Un *ciclo* è una permutazione $\rho \in \mathcal{S}_n$ tale che l'azione di $\langle \rho \rangle$ su $\{1, \dots, n\}$ induce al più una sola orbita di cardinalità maggiore di 1.
3. Ogni permutazione $\pi \in \mathcal{S}_n$ è prodotto di cicli disgiunti e la *decomposizione standard in cicli* di π è:

$$\pi = \circ_{i=1}^{c(\pi)} (a_i, \pi(a_i), \dots, \pi^{k_i-1}(a_i))$$

dove:

- (a) $c(\pi)$ è il numero dei cicli di π ,
 - (b) k_i è la lunghezza dell' i -esimo ciclo,
 - (c) $1 = a_1 < a_2 < \dots < a_{c(\pi)} \leq n$, ed a_i è il più piccolo elemento dell' i -esimo ciclo.
4. Il *tipo* della permutazione $\pi \in \mathcal{S}_n$ è l' n -upla $\lambda(\pi) = (\lambda_1(\pi), \dots, \lambda_n(\pi))$ dove $\lambda_i(\pi)$ è il numero dei cicli di lunghezza i nella decomposizione standard di π .

B.3 Definizione. Dati un insieme X ed un anello R contenente \mathbb{Q} , una *funzione peso* è una funzione $w : X \rightarrow R$, l'immagine $w(x) \in R$ è il *peso* di x , l'*inventario* di X è la somma

$$I_X := \sum_{x \in X} w(x).$$

Se $G < \mathcal{S}(X)$ ed una funzione peso $w : X \rightarrow R$ è costante sulle orbite, possiamo definire il peso di un'orbita come il peso di un qualsiasi suo elemento: $w(\Omega) = w(x)$ con $x \in \Omega$. In tal caso, il prossimo lemma fornisce un modo per calcolare l'inventario dell'insieme quoziente $G \backslash X$.

B.4 Lemma.

Sia X finito, $G < \mathcal{S}_X$, e $w : X \rightarrow R$ una funzione peso costante sulle orbite. Si ha:

$$I_{G \backslash X} = \sum_{\Omega \in G \backslash X} w(\Omega) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{x \in X_g} w(x).$$

Dimostrazione: Basta osservare che

$$\{(g, x) \mid g \in G, x \in X_g\} = \{(g, x) \mid g \in G, x \in X, gx = x\} = \{(g, x) \mid x \in X, g \in G_x\},$$

quindi si ha:

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} \sum_{x \in X_g} w(x) &= \sum_{x \in X} \sum_{g \in G_x} w(x) = \sum_{x \in X} |G_x| w(x) = \\ &= \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|G_x|} w(x) = |G| \sum_{\Omega \in G \backslash X} \sum_{x \in \Omega} \frac{w(\Omega)}{|\Omega|} = |G| \sum_{\Omega \in G \backslash X} w(\Omega). \end{aligned}$$

QED

Il lemma B.4 è la versione “pesata” del lemma di Cauchy-Frobenius (o di Burnside):

B.5 Lemma (Cauchy-Frobenius).

Sia X finito e $G < \mathcal{S}_X$. Si ha:

$$|G \backslash X| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|.$$

Dimostrazione:

Basta considerare come funzione peso la funzione costantemente 1 ed applicare il lemma B.4.

QED

B.6 Definizione. Data un'azione di G su X finito, si chiama *ciclindice* il polinomio

$$P_G(\mathbf{z}) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathbf{z}^{\lambda(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \prod_{i=1}^{|\lambda(g)|} z_i^{\lambda_i(g)}$$

dove $\lambda(g) = (\lambda_1(g), \dots, \lambda_{|\lambda|}(g))$ è il tipo di g e $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_{|\lambda|})$.

Appendice B. Algebra combinatoria e teoria musicale

Dati X ed Y finiti, ed un'azione di G su X , consideriamo l'azione indotta di G su Y^X data da $(gf)(x) = f(g^{-1}x)$. Sia $W : Y \rightarrow R$ una funzione peso.

Allora la funzione

$$w : Y^X \rightarrow R$$

$$f \mapsto \prod_{x \in X} W(f(x))$$

è una funzione peso su Y^X ed è costante sulle orbite rispetto all'azione di G indotta, infatti:

$$w(gf) = \prod_{x \in X} W(f(g^{-1}x)) = \prod_{x \in X} W(f(x)) = w(f),$$

poiché g è una permutazione di X .

Possiamo ora enunciare il

B.7 Teorema (Pólya). *Dati X, Y, G, W e w come sopra, l'inventario di $G \backslash Y^X$ è:*

$$I_{G \backslash Y^X} = \sum_{\Omega \in G \backslash Y^X} w(\Omega) = P_G \left(\sum_{y \in Y} W(y), \sum_{y \in Y} W(y)^2, \dots, \sum_{y \in Y} W(y)^{|X|} \right)$$

Dimostrazione: Per il lemma B.4 basta dimostrare che

$$\sum_{f \in Y_g^X} w(f) = \prod_{i=1}^{|X|} \left(\sum_{y \in Y} W(y)^i \right)^{\lambda_i(g)}$$

Osserviamo che $f \in Y_g^X$ se e solo se f è costante sui cicli di g , cioè sulle orbite dell'azione di $\langle g \rangle$ su X , quindi possiamo identificare Y_g^X e $Y^{\langle g \rangle \backslash X}$ e si ha:

$$\begin{aligned} \sum_{f \in Y_g^X} w(f) &= \sum_{f \in Y_g^X} \prod_{x \in X} W(f(x)) = \sum_{f \in Y^{\langle g \rangle \backslash X}} \prod_{\Omega \in \langle g \rangle \backslash X} W(f(\Omega))^{|\Omega|} =^{(*)} \\ &= \prod_{\Omega \in \langle g \rangle \backslash X} \sum_{y \in Y} W(y)^{|\Omega|} =^{(**)} \prod_{i=1}^{|X|} \left(\sum_{y \in Y} W(y)^i \right)^{\lambda_i(g)} \end{aligned}$$

dove:

(*): Partiamo dal secondo membro:

$$\begin{aligned} &\prod_{\Omega \in \langle g \rangle \backslash X} \sum_{y \in Y} W(y)^{|\Omega|} = \\ &= (W(y_1)^{|\Omega_1|} + \dots + W(y_m)^{|\Omega_1|}) \dots (W(y_1)^{|\Omega_k|} + \dots + W(y_m)^{|\Omega_k|}) = \\ &= \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, m\}^k} \prod_{j=1}^k W(y_{i_j})^{|\Omega_j|} = \sum_{f \in Y^{\langle g \rangle \backslash X}} \prod_{\Omega \in \langle g \rangle \backslash X} W(f(\Omega))^{|\Omega|}, \end{aligned}$$

poiché la mappa

$$\begin{aligned} \{1, \dots, m\}^k &\rightarrow Y^{\langle g \rangle \backslash X} \\ (i_1, \dots, i_k) &\mapsto f \end{aligned}$$

tale che $f(\Omega_j) = y_{i_j}$ è una corrispondenza biunivoca.

(**): Le orbite dell'azione di $\langle g \rangle$ sono esattamente gli insiemi permutati ciclicamente da g , quindi ci sono esattamente $\lambda_i(g)$ orbite di cardinalità i per ogni $i = 1, \dots, |X|$.

QED

Sia ora $X = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ che indichiamo convenzionalmente con \mathbb{Z}_n o $\{0, 1, \dots, n\}$. Consideriamo tre diverse azioni di gruppo su \mathbb{Z}_n .

B.8 Esempio. Consideriamo la permutazione $\tau = (1, 2, \dots, n) \in \mathcal{S}_n$, e l'omomorfismo di gruppi

$$\alpha : \begin{array}{l} \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathcal{S}_n \\ k \rightarrow \tau^k \end{array}$$

Si ha $\alpha(\mathbb{Z}_n) = \langle \tau \rangle < \mathcal{S}_n$, consideriamo quindi l'azione di \mathbb{Z}_n su sé stesso e calcoliamone il ciclice:

$$P_{\mathbb{Z}_n}(\mathbf{z}) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{z}^{\lambda(\tau^k)}$$

Abbiamo bisogno di calcolare il tipo della rotazione τ^k .

Per ogni $a \in \mathbb{Z}_n$, a sta in un ciclo di τ^k di lunghezza l se e solo se $(\tau^k)^l(i) = a$ e $(\tau^k)^h(i) \neq a$ per ogni $h < l$, cioè se e solo se l è la minima soluzione positiva della congruenza $a + kx = a \pmod{n}$, ossia $kx = 0 \pmod{n}$, quindi $l = n/(k, n)$.

Poiché l non dipende da a se ne deduce che τ^k si decompone esattamente in (k, n) cicli di lunghezza $n/(k, n)$, cioè

$$\lambda_i(\tau^k) = \begin{cases} (k, n) & \text{se } i = n/(k, n) \\ 0 & \text{se } i \neq n/(k, n) \end{cases}$$

Quindi

$$P_{\mathbb{Z}_n}(z_1, \dots, z_n) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} z_{n/(k, n)}^{(k, n)}$$

Inoltre per ogni $k \in \{0, \dots, n-1\}$, si ha $(k, n) | n$, e per ogni $d | n$ si ha $|\{k \in \{0, \dots, n-1\} : (k, n) = d\}| = \phi(n/d)$, quindi

$$P_{\mathbb{Z}_n}(z_1, \dots, z_n) := \frac{1}{n} \sum_{d|n} \phi(n/d) z_{n/d}^d.$$

B.9 Esempio. Consideriamo la permutazione $\sigma \in \mathcal{S}_n$ così definita:

$$\sigma = \begin{cases} (1, n)(2, n-1) \dots \left(\frac{n-1}{2}, \frac{n+3}{2}\right) \left(\frac{n+1}{2}\right) & \text{se } n \text{ è dispari} \\ (1, n)(2, n-1) \dots \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1\right) & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

Il *gruppo diedrale* è il sottogruppo generato da τ e σ , $\mathcal{D}_n = \langle \tau, \sigma \rangle < \mathcal{S}_n$.

Poiché $\tau^n = \sigma^2 = id$ e $\tau\sigma = \sigma\tau^{-1}$, si ha

$$\mathcal{D}_n = \{\tau^i \sigma^j \mid i = 0, \dots, n-1 \text{ e } j = 0, 1\}.$$

Appendice B. Algebra combinatoria e teoria musicale

Calcoliamo il ciclindice dell'azione di \mathcal{D}_n su \mathbb{Z}_n :

$$P_{\mathcal{D}_n}(\mathbf{z}) := \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^1 \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{z}^{\lambda(\tau^i \sigma^j)} = \frac{1}{2} P_{\mathbb{Z}_n}(\mathbf{z}) + \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{z}^{\lambda(\tau^i \sigma)}$$

Dobbiamo quindi calcolare il tipo della permutazione $\tau^i \sigma$.

Poiché $(\tau^i \sigma)^2 = id$, nella decomposizione di $\tau^i \sigma$ ci saranno solo cicli di lunghezza 1 o 2, basta quindi calcolare il numero dei cicli di lunghezza 1, cioè il numero dei punti fissi della permutazione.

$(\tau^i \sigma)(x) = x \Leftrightarrow n+1-x+i \equiv x \pmod{n} \Leftrightarrow 2x \equiv i+1 \pmod{n}$, che ha soluzione se e solo se $(2, n) \mid i+1$ ed in tal caso esistono esattamente $(2, n)$ soluzioni.

Se ne deduce quindi che

1. se n è dispari, esiste un solo punto fisso ed $\frac{n-1}{2}$ trasposizioni,
2. se n è pari ci sono 2 possibilità:
 - (a) se $i+1$ è pari, esistono 2 punti fissi ed $\frac{n-2}{2}$ trasposizioni,
 - (b) se $i+1$ è dispari, non esistono punti fissi, e ci sono $n/2$ trasposizioni.

Quindi:

$$P_{\mathcal{D}_n}(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} P_{\mathbb{Z}_n}(\mathbf{z}) + \begin{cases} \frac{1}{2} z_1 z_2^{(n-1)/2} & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \frac{1}{4} (z_1^2 z_2^{(n-2)/2} + z_2^{n/2}) & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

Per l'ultimo esempio abbiamo bisogno di introdurre la seguente

B.10 Definizione. Dati $A \subset \mathbb{N}^n$ e $B \subset \mathbb{N}^m$ finiti, consideriamo i polinomi

$$P(z_1, \dots, z_n) = \sum_{a=(a_1, \dots, a_n) \in A} \alpha_a \prod_{i=1}^n z_i^{a_i} \in \mathbb{Q}[z_1, \dots, z_n] \text{ e}$$

$$Q(z_1, \dots, z_m) = \sum_{b=(b_1, \dots, b_m) \in B} \beta_b \prod_{j=1}^m z_j^{b_j} \in \mathbb{Q}[z_1, \dots, z_m]$$

e definiamo il prodotto

$$\odot : \mathbb{Q}[z_1, \dots, z_n] \times \mathbb{Q}[z_1, \dots, z_m] \rightarrow \mathbb{Q}[z_1, \dots, z_{nm}]$$

con:

$$P(z_1, \dots, z_n) \odot Q(z_1, \dots, z_m) := \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} \alpha_a \beta_b \left(\prod_{i=1}^n z_i^{a_i} \right) \odot \left(\prod_{j=1}^m z_j^{b_j} \right)$$

dove

$$\left(\prod_{i=1}^n z_i^{a_i} \right) \odot \left(\prod_{j=1}^m z_j^{b_j} \right) := \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (z_i^{a_i} \odot z_j^{b_j})$$

e

$$z_i^{a_i} \odot z_j^{b_j} := z_{\text{mcm}(i,j)}^{a_i b_j \text{MCD}(i,j)}$$

B.11 Lemma. Siano X ed Y insiemi finiti con $|X| = n$ e $|Y| = m$.
 Date due azioni $G < \mathcal{S}(X)$ e $H < \mathcal{S}(Y)$, consideriamo l'azione $G \times H < \mathcal{S}(X \times Y)$
 data da $(g, h)(x, y) = (gx, hy)$, naturalmente indotta da G e H .
 Il cicliindice di tale azione è

$$P_{G \times H}(z_1, \dots, z_{nm}) = P_G(z_1, \dots, z_n) \odot P_H(z_1, \dots, z_m)$$

Dimostrazione: Si ha

$$\begin{aligned} P_{G \times H}(z_1, \dots, z_{nm}) &= \frac{1}{|G \times H|} \sum_{(g,h) \in G \times H} \prod_{k=1}^{nm} z_k^{\lambda_k(g,h)} = \frac{1}{|G|} \frac{1}{|H|} \sum_{g \in G} \sum_{h \in H} \prod_{k=1}^{nm} z_k^{\lambda_k(g,h)} \\ P_G(z_1, \dots, z_n) \odot P_H(z_1, \dots, z_m) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \prod_{i=1}^n z_i^{\lambda_i(g)} \odot \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \prod_{j=1}^m z_j^{\lambda_j(h)} = \\ &= \frac{1}{|G|} \frac{1}{|H|} \sum_{g \in G} \sum_{h \in H} \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m z_{\text{mcm}(i,j)}^{\lambda_i(g)\lambda_j(h)\text{MCD}(i,j)} \end{aligned}$$

Bisogna quindi dimostrare che

$$\prod_{k=1}^{nm} z_k^{\lambda_k(g,h)} = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m z_{\text{mcm}(i,j)}^{\lambda_i(g)\lambda_j(h)\text{MCD}(i,j)}$$

Questa relazione si deduce direttamente dalle seguenti osservazioni:

1. x appartiene ad un ciclo di g di lunghezza i ed y appartiene ad un ciclo di h di lunghezza j se e solo se (x, y) appartiene ad un ciclo di (g, h) di lunghezza $\text{mcm}(i, j)$, quindi

$$\lambda_k(g, h) \neq 0 \Leftrightarrow \exists i, j : \text{mcm}(i, j) = k, \lambda_i(g) \neq 0 \text{ e } \lambda_j(h) \neq 0$$

2. date un'orbita $\langle g \rangle x$ di cardinalità i , ed un'orbita $\langle h \rangle y$ di cardinalità j , l'insieme $\langle (g, h) \rangle \setminus \langle g \rangle x \times \langle h \rangle y$ ha cardinalità $ij/\text{mcm}(i, j) = \text{MCD}(i, j)$, quindi, fissati i e j tali che $\text{mcm}(i, j) = k$, esistono esattamente $\lambda_i(g)\lambda_j(h)\text{MCD}(i, j)$ cicli di lunghezza $\text{mcm}(i, j)$.

QED

B.12 Esempio. Il gruppo affine di grado n è definito da

$$\mathcal{Aff}_n := \{f : x \mapsto ax + b \mid a \in \mathbb{Z}_n^*, b \in \mathbb{Z}_n\} < \mathcal{S}_n$$

dove $\mathbb{Z}_n^* = \{m \in \mathbb{Z}_n \mid (m, n) = 1\}$ è l'insieme degli elementi invertibili in \mathbb{Z}_n .

Si ha chiaramente $|\mathcal{Aff}_n| = n\phi(n)$.

Sia $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, consideriamo l'isomorfismo

$$\psi : \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_k^{\alpha_k}}$$

Appendice B. Algebra combinatoria e teoria musicale

dato da

$$\psi(m) = (m \bmod p_1^{\alpha_1}, \dots, m \bmod p_k^{\alpha_k}) = (\psi_1(m), \dots, \psi_k(m)).$$

Esso induce l'isomorfismo

$$\Psi : \mathcal{A}ff_n \cong \mathcal{A}ff_{p_1^{\alpha_1}} \times \dots \times \mathcal{A}ff_{p_k^{\alpha_k}}$$

dato, per $f(x) = ax + b$, da:

$$\Psi(f)(x) = \psi(ax + b) = \left((a \bmod p_i^{\alpha_i})x + (b \bmod p_i^{\alpha_i}) \right)_{i=1}^k$$

Il ciclindice dell'azione di $\mathcal{A}ff_n$ su \mathbb{Z}_n è quindi il ciclindice dell'azione di $\times_{i=1}^k \mathcal{A}ff_{p_i^{\alpha_i}}$ su $\times_{i=1}^k \mathbb{Z}_{p_i^{\alpha_i}}$, cioè:

$$P_{\mathcal{A}ff_n}(z_1, \dots, z_n) = \bigodot_{i=1}^k P_{\mathcal{A}ff_{p_i^{\alpha_i}}}(z_1, \dots, z_{p_i^{\alpha_i}})$$

dove $P_{\mathcal{A}ff_{p_i^{\alpha_i}}}(z_1, \dots, z_{p_i^{\alpha_i}})$ è il ciclindice dell'azione di $\mathcal{A}ff_{p_i^{\alpha_i}}$ su $\mathbb{Z}_{p_i^{\alpha_i}}$.

B.13 Esempio. Osserviamo che dato un insieme X , esiste una funzione biunivoca

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(X) &\leftrightarrow \{0, 1\}^X \\ A &\mapsto \chi_A \\ f^{-1}(1) &\leftarrow f \end{aligned}$$

dove χ_A è la funzione caratteristica di A ($\chi_A(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A$).

Una azione $G < \mathcal{S}_X$ su X induce quindi l'azione $G < \mathcal{S}_{\mathcal{P}(X)}$, tale che $gA = \{ga \mid a \in A\}$. Consideriamo ora la funzione peso $W : Y = \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{Q}[z]$ tale che $W : 0 \mapsto 1$ ed $1 \mapsto z$, allora risulta definita la funzione peso su $\mathcal{P}(X)$ $w(A) = z^{|A|}$ costante sulle orbite (g è biunivoca!) ed il teorema di Pólya diventa,

$$I_{G \setminus \mathcal{P}(X)} = \sum_{\Omega \in G \setminus \mathcal{P}(X)} z^{|\Omega|} = P_G(z_i = 1 + z^i).$$

B.2 Trasposizione, inversione, aumentazione

In questa sezione ci occupiamo dell'azione su $\mathcal{P}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ (cfr esempio B.13) dei seguenti gruppi di permutazioni:

1. il gruppo delle rotazioni, o *trasposizioni*, $\mathbb{Z}_n \cong \langle \tau \rangle$, dove $\tau = (1, 2, \dots, n) \in \mathcal{S}_n$ (cfr esempio B.8);
2. il gruppo diedrale $\mathcal{D}_n = \langle \tau, \sigma \rangle$, dove $\sigma \in \mathcal{S}_n$ è l'*inversione* definita da

$$\sigma = \begin{cases} (1, n)(2, n-1) \dots \left(\frac{n-1}{2}, \frac{n+3}{2}\right) \left(\frac{n+1}{2}\right) & \text{se } n \text{ è dispari} \\ (1, n)(2, n-1) \dots \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1\right) & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

(cfr esempio B.9);

B.2 Trasposizione, inversione, aumentazione

3. il gruppo affine $\mathcal{A}ff_n = \{f : x \mapsto ax + b \mid a \in \mathbb{Z}_n^*, b \in \mathbb{Z}_n\} < \mathcal{S}_n$, dove \mathbb{Z}_n^* è l'insieme delle unità di \mathbb{Z}_n (cfr esempio B.12).

Come si evince dalla terminologia musicale utilizzata nei primi due casi, tali gruppi di permutazioni sono spesso utilizzati in un contesto *tonale*, piuttosto che ritmico, a patto di considerare un temperamento equabile, nel quale cioè la proporzione tra le frequenze di due note successive della scala cromatica è costante. Nella musica occidentale, ad esempio, la scala cromatica è composta da 12 note (fig. B.1) e la proporzione tra le frequenze di due note successive è $\sqrt[12]{2}$: scompare la differenza tra semitono diatonico e semitono cromatico del temperamento naturale.

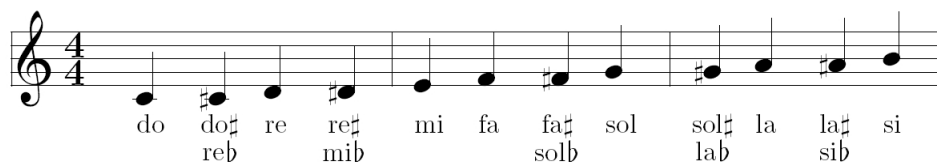


Figura B.1: scala cromatica occidentale

In quest'ottica $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ è il modello utilizzato per esprimere la ciclicità tonale della scala cromatica, ed i sottoinsiemi di $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, a meno di traslazione, vengono chiamati *accordi* (talvolta anche *modi*); ad esempio l'accordo *semidiminuito* e la *scala maggiore* vengono rappresentati dai diagrammi di Krenek nelle figure B.2 e B.3, rispettivamente.

Utilizzando la teoria enumerativa di Pólya (appendice B), ci proponiamo di contare il numero di accordi, o di ritmi, di periodo e cardinalità fissata.

Iniziamo quindi considerando l'azione di $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ su sé stesso e l'azione indotta su $\mathcal{P}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ come descritto negli esempi B.8 e B.13.

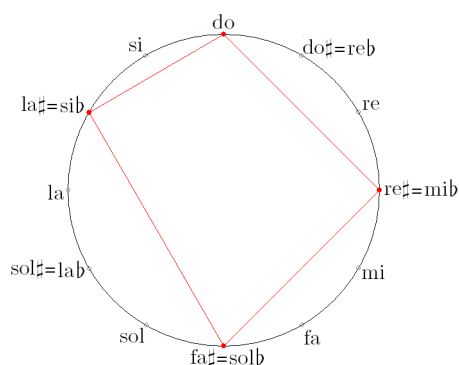


Figura B.2: do-7(b5)

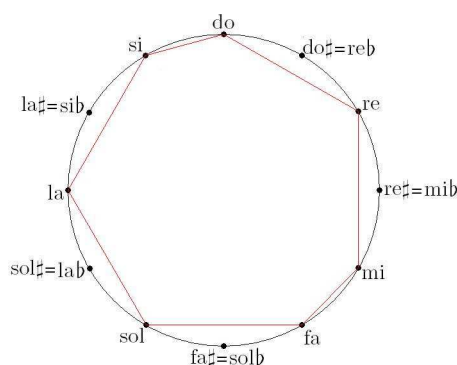


Figura B.3: scala maggiore di do

Appendice B. Algebra combinatoria e teoria musicale

Il numero di classi di traslazione di sottoinsiemi di $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ di cardinalità k fissata è il coefficiente di z^k nel polinomio:

$$I_{\mathbb{Z}_n \setminus \mathcal{P}(\mathbb{Z}_n)} = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \phi(n/d) (1 + z^{(n/d)})^d =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{d|n} \sum_{i=0}^{n/d} \binom{n/d}{i} \phi(n/d) z^{id} = \sum_{k=0}^n \left[\frac{1}{n} \sum_{j|(n,k)} \phi(j) \binom{n/j}{k/j} \right] z^k$$

Possiamo osservare subito che il numero degli accordi di cardinalità k è uguale al numero degli accordi di cardinalità $n - k$, quindi, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

cardinalità	0	1	n-1	n
numero accordi	1	1	1	1

Ad esempio, per $n = 12$ si ha:

cardinalità	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
numero accordi	1	1	6	19	43	66	80	66	43	19	6	1	1

Consideriamo ora l'azione di \mathcal{D}_n su $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, e l'azione indotta su $\mathcal{P}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ come descritto negli esempi B.9 e B.13.

Il numero di classi di accordi di cardinalità k fissata, a meno di inversione, è il coefficiente di z^k nel polinomio:

$$I_{\mathcal{D}_n \setminus \mathcal{P}(\mathbb{Z}_n)}(z) =$$

$$= \frac{1}{2} I_{\mathbb{Z}_n \setminus \mathcal{P}(\mathbb{Z}_n)} + \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2} (1+z)(1+z^2)^{(n-1)/2} & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \frac{1}{4} ((1+z)^2(1+z^2)^{(n-2)/2} + (1+z^2)^{n/2}) & \text{se } n \text{ è pari} \end{array} \right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^n z^k \left(\frac{1}{2n} \sum_{j|(n,k)} \phi(j) \binom{n/j}{k/j} + \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2} \binom{(n-1)/2}{\lfloor k/2 \rfloor} & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \frac{1}{2} \binom{n/2}{k/2} & \text{se } n \text{ e } k \text{ sono pari} \\ \frac{1}{2} \binom{n/2-1}{\lfloor k/2 \rfloor} & \text{se } n \text{ è pari e } k \text{ è dispari} \end{array} \right\} \right)$$

Ad esempio, per $n = 12$ si ha:

cardinalità	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
numero accordi	1	1	6	12	29	38	50	38	29	12	6	1	1

Consideriamo infine l'azione di \mathcal{Aff}_n su $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, e l'azione indotta su $\mathcal{P}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ come descritto negli esempi B.12 e B.13.

B.2 Trasposizione, inversione, aumentazione

Sia $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_1^{\alpha_1}$, allora il numero di classi di accordi di cardinalità k fissata, a meno di inversione, è il coefficiente di z^k nel polinomio (lemma B.11):

$$I_{\mathcal{A}ff_n \setminus \mathcal{P}(\mathbb{Z}_n)}(z) = \bigodot_{i=1}^k P_{\mathcal{A}ff_{p_i^{\alpha_i}}}(z_i = 1 + z^i, i = 1, \dots, p_i^{\alpha_i})$$

dove $P_{\mathcal{A}ff_{p_i^{\alpha_i}}}(z_1, \dots, z_{p_i^{\alpha_i}})$ è il ciclidice (def. B.6) dell'azione di $\mathcal{A}ff_{p_i^{\alpha_i}}$ su $\mathbb{Z}_{p_i^{\alpha_i}}$ e \odot è definito in B.10.

Ad esempio, per $n = 12$ si ha:

$$I_{\mathcal{A}ff_{12} \setminus \mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12})}(z_1, \dots, z_{12}) = P_{\mathcal{A}ff_4}(z_i = 1 + z^i, i = 1, \dots, 4) \odot P_{\mathcal{A}ff_3}(z_i = 1 + z^i, i = 1, 2, 3)$$

Calcoliamo i fattori del prodotto \odot :

1. $P_{\mathcal{A}ff_4}(z_1, \dots, z_4) = \frac{1}{4\phi(4)} \sum_{f \in \mathcal{A}ff_4} \prod_{i=1}^4 z_i^{\lambda_i(f)} = \frac{1}{8}(z_1^4 + 3z_2^2 + 2z_4 + 2z_1^2 z_2)$, e
2. $P_{\mathcal{A}ff_3}(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{3\phi(3)} \sum_{f \in \mathcal{A}ff_3} \prod_{i=1}^3 z_i^{\lambda_i(f)} = \frac{1}{6}(z_1^3 + 2z_3 + 3z_1 z_2)$.

Allora

$$P_{\mathcal{A}ff_{12}}(z_1, \dots, z_{12}) = \frac{1}{48} \left[(z_1^4 + 3z_2^2 + 2z_4 + 2z_1^2 z_2) \odot (z_1^3 + 2z_3 + 3z_1 z_2) \right] =$$

$$\frac{1}{48} (z_1^{12} + 12z_2^6 + 2z_3^4 + 8z_4^3 + 6z_6^2 + 4z_{12} + 2z_1^6 z_2^3 + 3z_1^4 z_2^4 + 6z_1^2 z_2^5 + 4z_3^2 z_6)$$

e sostituendo z_i con $1 + z^i$ si ha:

$$I_{\mathcal{A}ff_{12} \setminus \mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12})}(z_i = 1 + z^i) = \frac{1}{48} \left((1+z)^{12} + 12(1+z^2)^6 + 2(1+z^3)^4 + \right.$$

$$+ 8(1+z^4)^3 + 6(1+z^6)^2 + 4(1+z^{12}) + 2(1+z)^6(1+z^2)^3 +$$

$$\left. + 3(1+z)^4(1+z^2)^4 + 6(1+z)^2(1+z^2)^5 + 4(1+z^3)^2(1+z^6) \right) =$$

$$= 1 + z + 5z^2 + 9z^3 + 21z^4 + 25z^5 + 34z^6 + 25z^7 + 21z^8 + 9z^9 + 5z^{10} + z^{11} + z^{12}$$

Si ottiene quindi il seguente catalogo delle orbite affini nel caso della divisione dell'ottava in 12 parti uguali:

cardinalità	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
numero accordi	1	1	5	9	21	25	34	25	21	9	5	1	1

La figura B.4 mostra l'architettura "paradigmatica" nella quale i tre gruppi evocati precedentemente (ciclico, diedrale e affine) permettono di analizzare gli accordi di un brano musicale riconducendoli ad uno dei tre cataloghi di base.

L'approccio paradigmatico può essere generalizzato con l'aggiunta di altri gruppi, come per esempio il gruppo simmetrico \mathcal{S}_n in figura B.4, la cui azione sulle strutture intervallari permette di ridurre il catalogo degli accordi a 77 rappresentanti. Questo catalogo, introdotto dal compositore messicano Julio Estrada, equivalente all'insieme delle 77 partizioni di 12. L'algebra combinatorica diventa in questo modo uno strumento estremamente versatile per la teoria, l'analisi e la composizione assistita su calcolatore.

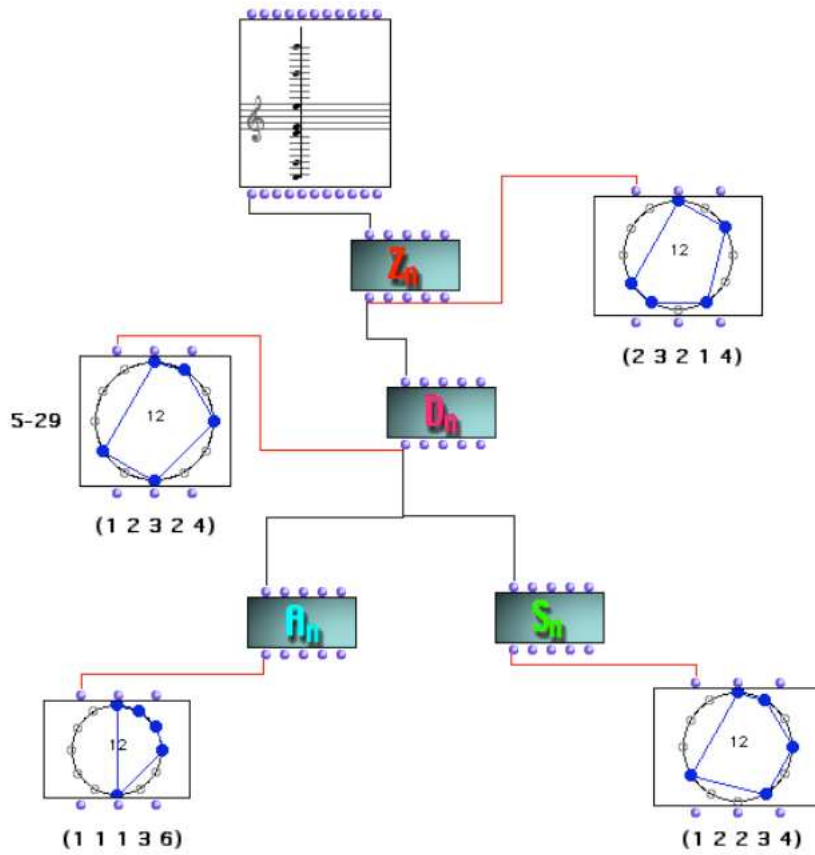


Figura B.4

Appendice C

Nuovi canoni

Consideriamo i seguenti periodi, con le relative fattorizzazioni:

N	n_1	n_2	m_1	m_2	k	fattorizzazione
144	2	2	3	3	4	vecchia
144	3	3	2	2	4	vecchia
144	2	4	3	3	2	nuova
144	3	3	2	4	2	nuova
216	2	2	3	3	6	vecchia
216	3	3	2	2	6	vecchia
216	2	4	3	3	3	nuova
216	3	3	2	4	3	nuova
216	2	2	3	9	2	nuova
216	3	9	2	2	2	nuova

Dove “vecchia” indica che la fattorizzazione nelle colonne centrali rientra in quelle considerate da Vuza (nelle quali, ricordiamo, n_2 ed m_2 sono primi), e “nuova” indica che non vi rientra.

Osserviamo che la costruzione del ritmo interno A è simmetrica in n_i ed m_i , $i = 1, 2$, e, se $k = 2$, anche la costruzione di B è simmetrica in n_i ed m_i , $i = 1, 2$, a meno di traslazione.

È quindi sufficiente considerare solo le seguenti fattorizzazioni:

N	n_1	n_2	m_1	m_2	k
144	2	4	3	3	2
216	2	4	3	3	3
216	3	3	2	4	3
216	2	2	3	9	2

Definiamo

Appendice C. Nuovi canoni

C.1 Definizione. Dato un ritmo $A = \{0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{k-1}\} \subset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, definiamo la sua *struttura intervallare* come la k -upla:

$$SI(A) = (a_1, a_2 - a_1, \dots, a_{k-1} - a_{k-2}, n - a_{k-1})$$

Abbiamo visto nell'appendice B che i gruppi \mathbb{Z}_N , \mathcal{D}_N ed \mathcal{Aff}_N agiscono su $\mathcal{P}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ (esempi B.8, B.9 e B.12), partizionando quindi l'insieme dei ritmi in orbite, rispettivamente, traslazionali, diedrali ed affini. Riportiamo di seguito, per ogni fattorizzazione considerata e per ognuna delle tre azioni, le liste delle strutture intervallari di un insieme completo di rappresentanti di tali orbite.

N	n_1	n_2	m_1	m_2	k
144	2	4	3	3	2

ORBITE TRASLAZIONALI

RITMI INTERNI

(10 22 32 26 32 22)
 (16 10 54 10 16 38)
 (16 58 16 16 22 16)
 (14 18 14 18 62 18)
 (16 46 18 46 16 2)
 (16 94 16 2 14 2)

RITMI ESTERNI

(11 1 5 3 3 1 23 1 5 6 1 8 4 11 6 6 1 12 8 3 1 5 6 13)
 (9 3 3 5 1 3 21 3 3 6 3 8 4 9 6 6 3 12 8 1 3 3 6 15)
 (7 5 1 6 1 4 19 5 1 6 5 8 4 7 6 6 5 12 7 1 4 1 6 17)
 (5 6 1 5 3 4 17 6 1 5 7 8 4 5 6 6 7 12 5 3 3 1 5 19)
 (3 6 3 3 5 4 15 6 3 3 9 8 4 3 6 6 9 12 3 5 1 3 3 21)
 (1 6 5 1 7 4 13 6 5 1 11 8 4 1 6 6 11 12 1 6 1 4 1 23)
 (4 7 1 5 6 1 23 1 4 1 6 1 12 11 6 6 1 4 8 11 1 5 6 13)
 (4 5 3 3 6 3 21 3 3 1 5 3 12 9 6 6 3 4 8 9 3 3 6 15)
 (4 3 5 1 6 5 19 5 1 3 3 5 12 7 6 6 5 4 8 7 5 1 6 17)
 (4 1 6 1 5 7 17 6 1 4 1 7 12 5 6 6 7 4 8 5 6 1 5 19)
 (3 1 5 3 3 9 15 6 3 3 1 8 12 3 6 6 9 4 8 3 6 3 3 21)
 (1 3 3 5 1 11 13 6 5 1 3 8 12 1 6 6 11 4 8 1 6 5 1 23)

ORBITE DIEDRALI

RITMI INTERNI

(10 22 32 26 32 22)
 (16 10 54 10 16 38)
 (16 58 16 16 22 16)
 (14 18 14 18 62 18)
 (16 46 18 46 16 2)
 (16 94 16 2 14 2)

RITMI ESTERNI

(11 1 5 3 3 1 23 1 5 6 1 8 4 11 6 6 1 12 8 3 1 5 6 13)
 (9 3 3 5 1 3 21 3 3 6 3 8 4 9 6 6 3 12 8 1 3 3 6 15)
 (7 5 1 6 1 4 19 5 1 6 5 8 4 7 6 6 5 12 7 1 4 1 6 17)
 (5 6 1 5 3 4 17 6 1 5 7 8 4 5 6 6 7 12 5 3 3 1 5 19)
 (3 6 3 3 5 4 15 6 3 3 9 8 4 3 6 6 9 12 3 5 1 3 3 21)
 (1 6 5 1 7 4 13 6 5 1 11 8 4 1 6 6 11 12 1 6 1 4 1 23)

ORBITE AFFINI

RITMI INTERNI

(10 22 32 26 32 22)

RITMI ESTERNI

(11 1 5 3 3 1 23 1 5 6 1 8 4 11 6 6 1 12 8 3 1 5 6 13)
 (9 3 3 5 1 3 21 3 3 6 3 8 4 9 6 6 3 12 8 1 3 3 6 15)
 (7 5 1 6 1 4 19 5 1 6 5 8 4 7 6 6 5 12 7 1 4 1 6 17)
 (5 6 1 5 3 4 17 6 1 5 7 8 4 5 6 6 7 12 5 3 3 1 5 19)
 (3 6 3 3 5 4 15 6 3 3 9 8 4 3 6 6 9 12 3 5 1 3 3 21)
 (1 6 5 1 7 4 13 6 5 1 11 8 4 1 6 6 11 12 1 6 1 4 1 23)

N	n_1	n_2	m_1	m_2	k
216	2	2	3	9	2

ORBITE TRASLAZIONALI

RITMI INTERNI

(10 54 10 54 34 54)	(34 40 14 40 34 54)	(16 34 54 58 16 38)
(40 10 54 58 40 14)	(10 40 14 40 58 54)	(34 16 38 16 58 54)
(16 10 54 82 16 38)	(26 14 40 82 40 14)	(10 16 38 16 82 54)
(2 14 40 106 16 38)	(2 38 16 106 40 14)	(2 54 26 54 26 54)
(2 54 50 54 2 54)	(16 16 130 16 16 22)	(32 2 54 74 32 22)
(32 26 54 50 32 22)	(32 50 54 26 32 22)	(32 74 54 2 32 22)
(32 98 32 22 10 22)	(8 32 122 8 32 14)	(8 2 54 98 8 46)
(8 26 54 74 8 46)	(8 50 54 50 8 46)	(8 74 54 26 8 46)
(8 98 54 2 8 46)	(8 122 32 8 14 32)	(8 146 8 8 38 8)

RITMI ESTERNI

(4 11 9 3 1 11 9 3 1 5 6 9 3 1 11 9 3 1 20 3 1 11 9 3 1 11 6 3 3 1 11 9 3 1 11 9)
(4 9 11 1 3 9 11 1 3 3 6 11 1 3 9 11 1 3 20 1 3 9 11 1 3 9 6 5 1 3 9 11 1 3 9 11)
(4 7 12 1 4 7 12 1 4 1 6 12 1 4 7 12 1 4 19 1 4 7 12 1 4 7 6 6 1 4 7 12 1 4 7 13)
(4 5 12 3 4 5 12 3 3 1 5 12 3 4 5 12 3 4 17 3 4 5 12 3 4 5 6 6 3 4 5 12 3 4 5 15)
(4 3 12 5 4 3 12 5 1 3 3 12 5 4 3 12 5 4 15 5 4 3 12 5 4 3 6 6 5 4 3 12 5 4 3 17)
(4 1 12 7 4 1 12 6 1 4 1 12 7 4 1 12 7 4 13 7 4 1 12 7 4 1 6 6 7 4 1 12 7 4 1 19)

ORBITE DIEDRALI

RITMI INTERNI

(10 54 10 54 34 54)	(34 40 14 40 34 54)	(16 34 54 58 16 38)
(40 10 54 58 40 14)	(16 10 54 82 16 38)	(26 14 40 82 40 14)
(2 14 40 106 16 38)	(2 54 26 54 26 54)	(2 54 50 54 2 54)
(16 16 130 16 16 22)	(32 2 54 74 32 22)	(32 26 54 50 32 22)
(32 98 32 22 10 22)	(8 32 122 8 32 14)	(8 2 54 98 8 46)
(8 26 54 74 8 46)	(8 50 54 50 8 46)	(8 146 8 8 38 8)

RITMI ESTERNI

(4 11 9 3 1 11 9 3 1 5 6 9 3 1 11 9 3 1 20 3 1 11 9 3 1 11 6 3 3 1 11 9 3 1 11 9)
(4 7 12 1 4 7 12 1 4 1 6 12 1 4 7 12 1 4 19 1 4 7 12 1 4 7 6 6 1 4 7 12 1 4 7 13)
(4 5 12 3 4 5 12 3 3 1 5 12 3 4 5 12 3 4 17 3 4 5 12 3 4 5 6 6 3 4 5 12 3 4 5 15)

ORBITE AFFINI

RITMI INTERNI

(10 54 10 54 34 54)	(16 34 54 58 16 38)
---------------------	---------------------

RITMI ESTERNI

(4 11 9 3 1 11 9 3 1 5 6 9 3 1 11 9 3 1 20 3 1 11 9 3 1 11 6 3 3 1 11 9 3 1 11 9)
(4 7 12 1 4 7 12 1 4 1 6 12 1 4 7 12 1 4 19 1 4 7 12 1 4 7 6 6 1 4 7 12 1 4 7 13)

N	n_1	n_2	m_1	m_2	k
216	2	4	3	3	3

Appendice C. Nuovi canoni

In quest'ultimo caso, riportiamo solo la lista per le orbite affini poiché le orbite traslazionali e diedrali sono eccessivamente lunghe (216 e 108 elementi rispettivamente).

ORBITE AFFINI
RITMI INTERNI
(15 33 48 39 48 33)
RITMI ESTERNI
(9 8 1 13 4 5 7 2 4 1 9 9 13 4 5 9 4 1 9 2 6 1 13 9 9 4 1 9 8 1 11 2 4 5 9 5)
(9 5 4 10 4 5 7 2 4 4 9 9 10 4 5 9 4 4 8 1 5 4 10 9 9 4 4 9 5 4 8 2 4 5 9 8)
(9 2 7 7 4 5 7 2 4 7 9 9 7 4 5 9 4 7 5 4 2 7 7 9 9 4 7 9 2 7 5 2 4 5 9 11)
(8 1 9 4 4 5 7 2 4 10 9 9 4 4 5 9 4 10 2 6 1 9 4 9 9 4 10 8 1 9 2 2 4 5 9 14)
(5 4 9 1 4 5 7 2 4 13 9 9 1 4 5 9 4 12 1 5 4 9 1 9 9 4 13 5 4 8 1 1 4 5 9 17)
(2 7 7 2 2 5 7 2 4 16 9 7 2 2 5 9 4 12 4 2 7 7 2 7 9 4 16 2 7 5 2 2 2 5 9 20)
(9 8 1 16 1 8 4 5 1 1 9 9 16 1 8 9 1 1 9 2 6 1 16 9 9 1 1 9 8 1 11 5 1 8 9 2)
(9 5 4 13 1 8 4 5 1 4 9 9 13 1 8 9 1 4 8 1 5 4 13 9 9 1 4 9 5 4 8 5 1 8 9 5)
(9 2 7 10 1 8 4 5 1 7 9 9 10 1 8 9 1 7 5 4 2 7 10 9 9 1 7 9 2 7 5 5 1 8 9 8)
(8 1 9 7 1 8 4 5 1 10 9 9 7 1 8 9 1 10 2 6 1 9 7 9 9 1 10 8 1 9 2 5 1 8 9 11)
(5 4 9 4 1 8 4 5 1 13 9 9 4 1 8 9 1 12 1 5 4 9 4 9 9 1 13 5 4 8 1 4 1 8 9 14)
(2 7 9 1 1 8 4 5 1 16 9 9 1 1 8 9 1 12 4 2 7 9 1 9 9 1 16 2 7 5 4 1 1 8 9 17)

L'implementazione delle funzioni che hanno generato tali liste è stata fatta in Common Lisp. Il codice sorgente è disponibile su richiesta scrivendo a

giulia.fidanza@yahoo.it

Bibliografia

- [1] Paolo Acquistapace, *Appunti di Analisi funzionale*. (2007) Disponibile on line: <http://www.dm.unipi.it/~acquistp/anafun.pdf>
- [2] Emmanuel Amiot, *Why Rhythmic Canons Are Interesting*. Perspectives of Mathematical and Computational Music Theory (G. Mazzola, E. Puebla et T. Noll eds.), EpOs, Universität Osnabrück (2004), 194-213.
- [3] Emmanuel Amiot, *À propos des canons rythmiques*. Gazette des Mathématiciens 106 (2005), 43-67.
- [4] Emmanuel Amiot, *Rhythmic canons and Galois Theory*. Grazer. Math. Ber. 347 (2005), 1-25.
- [5] Emmanuel Amiot, *Structure et outils algébrique dans les canons rythmiques*. Di prossima pubblicazione in *Mosaïques et pavages en musique*, Moreno Andreatta e Carlos Agon (ed.), Les Monographies MaMuX, Collection *Musique/Science*, IRCAM/Delatour (2008).
- [6] Emmanuel Amiot, Moreno Andreatta and Carlos Agon, *Tiling the (musical) line with polynomials: some theoretical and implementational aspects*. ICMC (2005), 227-230.
- [7] Moreno Andreatta, Emmanuel Amiot and Carlos Agon, *Tiling problems in music composition: Theory and Implementation*. International Computer Music Conference, Göteborg (2002), 156-163.
- [8] Moreno Andreatta, *Gruppi di Hajós, Canoni e Composizioni*. Tesi di Laurea in Matematica, Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali, Università di Pavia (1996).
- [9] Moreno Andreatta, *On Group-Theoretical Methods Applied To Music: Some Compositional and Implementational Aspects*. Perspectives in Mathematical Music Theory, (G. Mazzola, E. Puebla et T. Noll éd.) EpOs, Università di Osnabrück (2004), 122-162.
- [10] Moreno Andreatta, *Quelques aspects thoiriques d'une approche algbrique en musique*. L'Ouvert 112 (2005), 1-18

BIBLIOGRAFIA

- [11] Moreno Andreatta, *De la Conjecture de Minkowski aux Canons Rythmiques Mosaiques*. L'Ouvert 114 (2007), 51-61.
- [12] Ethan M. Coven and Aaron Meyerowitz, *Tiling the Integers with Translates of One Finite Set*. J. Algebra 212 (1999), 161-174.
- [13] Keresztély Corrádi and Sándor Szabó, *An Axiomatic Approach for the Hajós Theorem*. Contribution to Algebra and Geometry 38(2) (1997), 241-248.
- [14] Nicolaas Govert de Bruijn, *On Bases for the Set of Integers*. Publicationes Mathematicae Tomus 1 (1950), 232-242.
- [15] Nicolaas Govert de Bruijn, *On the Factorization of Finite Abelian Groups*. Indag. Math. 15 (1953), 258-264.
- [16] Nicolaas Govert de Bruijn, *On the Factorization of Cyclic Groups*. Indag. Math. 17 (1955), 370-377.
- [17] Nicolaas Govert de Bruijn, *On Number Systems*. Nieuw Arch. Wisk.(3) 4 (1956), 15-17.
- [18] Nicolaas Govert de Bruijn, *Some Direct Decomposition of the Set of Integers*. Math. Comp. 18 (1964), 537-546.
- [19] Nicolaas Govert de Bruijn, *Pólya's theory of counting*. Applied Combinatorial Mathematics, Wiley, New York (1964), 144-184.
- [20] Nicolaas Govert de Bruijn, *On the Number of Partition Patterns of a Set*. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 82 = Indag. Math. 41 (1979), 229-234.
- [21] Harald Friepertinger, *Classification of motives: a mathematical approach*. (1999) Disponible on line:
<http://www.uni-graz.at/~friepert/motive.html>
- [22] Harald Friepertinger, *Enumeration of mosaics*. Discrete Mathematics 199 (1999), 49-60.
- [23] Harald Friepertinger, *Enumeration of non-isomorphic canons*. Tatra Mountains Mathematical Publications 23 (2002), 47-57.
- [24] Harald Friepertinger, *Tiling problems in music theory*. Perspectives of Mathematical and Computational Music Theory, (G. Mazzola, E. Puebla et T. Noll eds.) EpOs, Universität Osnabrück (2004), 153-168.
- [25] Harald Friepertinger, *Remarks on rhythmical canons*. Colloquium on mathematical music theory 347 (2005), 73-90.
- [26] Laszlo Fuchs, *Abelian Groups*. Pergamon Press (1960).

- [27] Bent Fuglede, *Commuting self-adjoint partial differential operators and a group theoretic problem*. Journal of Functional Analysis, 16 (1974), 101-121.
- [28] Édouard Gilbert, *Polynômes cyclotomiques, canons mosaïques et rythmes k -asymétriques*. Mémoire de Master ATIAM, Università di Parigi VI / Ircam (2007)
- [29] G. Hajós, *Über einfache und mehrfache Bedeckung des n -dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter*. Math. Zeitschrift 47 (1941), 427-467.
- [30] G. Hajós, *Sur la factorisation des groupes abéliens*. Časopis Pěst. Mat. Fys. 74 (1950), 157-162.
- [31] G. Hajós, *Sur le problème de factorisation des groupes cycliques*. Acta Math. Acad. Sci. Hungar 1 (1950), 189-195.
- [32] Godfrey H. Hardy ed Edward M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers (V ed.)*. Clarendon Press, Oxford (1979).
- [33] Rachel W. Hall and Paul Klinsberg, *Asymmetric Rhythms and Tiling Canons*. American Mathematical Monthly 113(10) (2006), 887-896.
- [34] Yves Hellegouarch, *Gammes Naturelles*. S.M.F. - Gazette des Mathmaticiens 82 (1999), 13-26.
- [35] Alex Iosevich, Nets Katz and Terence Tao, *The Fuglede Spectral Conjecture holds for convex planar domains*. Mathematical Research Letters, 10 (2003), 559-569.
- [36] Paul Ishiara and Michael Knapp, *Basic \mathbb{Z}_{12} -Analysis of Musical Chords*. UMAP Journal 14(4) (1993), 319-348.
- [37] Franck Jedrzejewski, *Mathematical Theory of Music*. Editions Delatour France/Ircam-Centre Pompidou (2006).
- [38] Palle E.T. Jorgensen and Steen Pedersen, *Estimates on the Spectrum of Fractals Arising from Affine Iterations*. Fractal Geometry and Stochastics, Progress in Probability 17 (1995), 191-219.
- [39] Mihail N. Kolountzakis and Izabella Łaba, *Tiling and spectral properties of near-cubic domains*. Studia Math. 160 (2004), 287-299.
- [40] Mihail N. Kolountzakis and Máté Matolcsi, *Complex Hadamard matrices and the spectral set conjecture*. Collectanea Mathematica, Vol Extra (2006), 281-291.
- [41] Sergei Konyagin and Izabella Łaba, *Spectra of Certain Types of Polynomials and Tiling of Integers with Translates of Finite Sets*. Journal of Number Theory 103 (2004), 267-280.

BIBLIOGRAFIA

- [42] Jeffrey C. Lagarias and Yang Wang, *Tiling the line with translates of one tile*. Inventiones Math. 124 (1996), 341-365.
- [43] Jeffrey C. Lagarias and Peter W. Shor, *Keller's cube-tiling conjecture is false in high dimensions*. Bull. Amer. Math. Soc. 27 (1992), 279-283.
- [44] Izabella Łaba, *Fuglede's Conjecture for a union of two intervals*. Proc. AMS 129 (2001), 2965-2972.
- [45] Izabella Łaba, *The Spectral Set Conjecture and the Multiplicative Properties of Roots Of Polynomials*. J. London Math. Soc. 65 (2002), 661-671.
- [46] Serge Lang, *Algebra. Revised Third Edition*. Springer-Verlag, New York (2002).
- [47] François Le Lionnais, *Les Nombres Remarquables*. Hermann, Paris (1983).
- [48] John Mackey, *A Cube Tiling of Dimension Eight with No Facesharing*. Discrete and Computational Geometry 28 (2002), 275-279.
- [49] Máté Matolcsi, *Fuglede's Conjecture fails in dimension 4*. Proc. Amer. Math. Soc., 133, no. 10 (2005), 3021-3026.
- [50] Guerino Mazzola, *The topos of music*. Birkhäuser Verlag (2002).
- [51] Olivier Messiaen, *Traité de Rythme, de couleur et d'Ornithologie (1949-1992)*. Alphonse Leduc, Parigi, (1992).
- [52] Hermann Minkowski, *Geometrie der Zahlen*. Leipzig (1896).
- [53] Hermann Minkowski, *Diophantische Approximationen. Eine Einführung in die Zahlentheorie*, Chelsea Publishing Company, New York (1907).
- [54] Donald. J. Newman, *Tassellation of Integers*. J. Number Theory 9 (1977), 107-111.
- [55] Oskar Perron, *Über lückenlose Ausfüllung des n -dimensionalen Raumes durch kongruente Würfel*. Mathematische Zeitschrift 46 (1940), 1-26, 161-180.
- [56] R.C. Read, *Combinatorial Problems in the Theory of Music*. Discrete Mathematics 167-168(1-3) (1997), 543-551.
- [57] László Rédei, *Zwei Lückensätze über Polynome in endlichen Primkörpern mit Anwendungen auf die endlichen Abelschen Gruppen und die Gaussischen Summen*. Acta Math. 79 (1947), 273-290.
- [58] László Rédei, *Ein Beitrag zum Problem der Faktorisierung von endlichen Abelschen Gruppen*. Acta Math. Acad. Sci. Hungar 1 (1950), 197-207.

- [59] David L. Reiner, *Enumeration in Music Theory*. Amer. Math. Monthly 92 (1985), 51-54.
- [60] Walter Rudin, *Functional analysis* 2nd ed. New York, McGraw-Hill (1991).
- [61] Arthur D. Sands, *On the factorisation of finite abelian groups*. Acta Math. Acad. Sci. Hungar 8 (1957), 65-86.
- [62] Arthur D. Sands, *The Factorization of Abelian Groups*. Quart. J. Math. Oxford (2) 10 (1959), 81-91.
- [63] Arthur D. Sands, *The Factorization of Abelian Groups (II)*. Quart. J. Math. Oxford (2) 13 (1962), 45-54.
- [64] Arthur D. Sands, *On the factorisation of finite abelian groups (II)*. Acta Math. Acad. Sci. 13 (1962), 153-169.
- [65] Arthur D. Sands, *On a Problem of L. Fuchs*. J. London Math. Soc. 37 (1962), 277-284.
- [66] Arthur D. Sands, *Factorization of Cyclic Groups*. Proc. Coll. Abelian groups, Tihany (1964), 139-145.
- [67] Arthur D. Sands, *On Kellers conjecture for certain cyclic groups*. Proc. Edinburgh Math. Soc. 22 (1977), 17-21.
- [68] Benedetto Scimemi, *Contrappunto musicale e trasformazioni geometriche*. Atti del Convegno "Matematica e cultura", Venezia (1997), a cura di M.Emmer, supplemento a "Lettera matematica pri-stem" n.27-28, pagg.77-86, ed.Springer (1998).
- [69] Peter W. Shor, *Minkowski's and Keller's Cube-Tiling Conjectures*. IAP Mathematics Lecture Series, (January 26 2004).
- [70] Sherman K. Stein, *Algebraic Tiling*. American Mathematical Monthly 81 (1974), 445-462.
- [71] Sherman K. Stein and Sándor Szabó, *Algebra and Tiling*. The Carus Mathematical Monographs 25 (1994).
- [72] Carl Swenson, *Direct Sum Subset Decomposition of \mathbb{Z}* . Pacific J. Math 53 (1974), 629-633.
- [73] Sándor Szabó, *Cube Tilings as Contributions of Algebra to Geometry*. Contributions to Algebra and Geometry 34(1) (1993), 63-75.
- [74] Sándor Szabó, *A type of factorization of finite abelian groups*. Discrete Math. 54 (1985), 121-124.

BIBLIOGRAFIA

- [75] Terence Tao, *Fuglede's Conjecture is false in 5 and higher dimensions*. Math. Res. Letters, 11 (2004), 251-258.
- [76] Robert Tijdeman, *Decomposition of the Integers as a Direct Sum of two Subsets*. Séminaire de Théorie des Nombres de Paris 3D (1995), 261-276.
- [77] Godfried Toussaint, *The Geometry of Musical Rhythm*. Proceedings of the Japan Conference on Discrete and Computational Geometry, Springer-Verlag (2005), 198-212.
- [78] Dan Tudor Vuza, *Supplementary Sets and Regular Complementary Unending Canons, I, II, III, IV*. Perspectives of New Music, 29-31 (1991-93).

Indice analitico

- R_A , 21
- S_A , 21
- accordo, 95
- automorfismo di Frobenius, 84
- azione di gruppo, 87
- base di un reticolo, 46
- battito, 10
- beat, 10
- box notation method, 19
- canone
 - duale, 10
 - ritmico, 9
 - complementare, 10
 - regolare, 10
 - triviale, 15
 - vuza costruibile, 74
- cilindrice, 89
- collasso, 70
- common lisp, 72
- concatenazione, 69
- condizione
 - (T0), 22
 - (T1), 21
 - (T2), 21, 69
- congettura
 - di Fuglede, 58, 61
 - di Keller, 51
 - di Minkowski, 51
 - spettrale, 58, 61
- contenuto di un polinomio, 82
- coppia spettrale, 56
- decomposizione standard in cicli, 88
- determinante di un reticolo, 46
- diagrammi di Krenek, 20, 95
- diametro di un insieme, 14
- dilatazione, 68
- dimensione di un reticolo, 46
- divisione minimale, 7
- dualità, 10
- fattorizzazione
 - k -, 36
 - periodica, 36
- funzione
 - di Eulero, 81
 - di Möbius, 86
 - peso, 88
- gruppo
 - k -Hajós, 36
 - delle permutazioni, 87
 - di Hajós, 36
 - non k -Hajós, 36
 - non-Hajós, 36
 - simmetrico di grado n , 88
- insieme
 - aperiodico, 12
 - centralmente simmetrico, 46
 - dei punti fissi, 87
 - di traslazione, 50, 56
 - periodico, 11
 - spettrale, 56
 - traslato, 9
- intreccio, 67
- invarianza per traslazioni, 15
- inventario, 88
- IRCAM, 72
- lambda calcolo, 72

INDICE ANALITICO

- lattice point theorem, 46
- lemma
 - di Burnside, 89
 - di Cauchy-Frobenius, 89
- lunghezza di un insieme, 14
- misura
 - di Haar, 57
- modo, 95
- OpenMusic, 72
- orbita, 87
- parallelepipedo fondamentale di un reticolo, 46
- periodo
 - di un insieme, 12
 - di una tassellazione, 10
- peso, 88
- polinomio
 - associato ad un insieme, 17
 - ciclotomico, 81
 - contenuto di un, 82
 - reciproco, 85
- radice n -esima dell'unità, 81
 - primitiva, 81
- rappresentazione
 - a griglia, 18
 - binaria, 18
 - circolare, 19
 - insiemistica, 17
 - polinomiale, 17
- reticolo, 46
- ricoprimento reticolare, 50
- riduzione, 70
- ritmico
 - canone, 9
 - motivo, 10
 - pattern, 6, 10
- ritmo, 8
 - esterno, 9
 - interno, 9
- sequenza palindroma, 85
- somma diretta, 9
- sottogruppo generato da un elemento, 12
- spettro
 - di un insieme, 56
 - di un polinomio, 61, 73
- stabilizzatore, 87
- struttura intervallare, 100
- t.u.b.s., 19
- tassellare, 10
 - modulo n , 10
 - per traslazioni, 50, 56
- tassellazione, 10
 - di un gruppo abeliano, 57
 - periodica, 10
 - proprietà della, 10
- tassello, 10
- tempo metronomico, 10
- teorema
 - di Łaba, 61
 - di Amiot, 72
 - di Coven-Meyerowitz, 21
 - di de Bruijn, 13
 - di Hajós, 53
 - di Pólya, 90
 - di Swenson, 17
 - LPT, 46
- time unit box system, 19
- tipo
 - di un gruppo abeliano finito, 41
 - di una permutazione, 88
- zoom, 68