ÉCOLE MATHÉMATIQUE POUR MUSICIENS ET AUTRES NON-MATHÉMATICIENS

Avant-propos

Nous avons décidé de mettre en place, cette année, une « école » spéciale de mathématiques en direction des musiciens et autres non-mathématiciens. Le principe en sera tout à fait singulier : il s'agira de rendre compréhensible un concept central de la mathématique la plus contemporaine à des non-spécialistes, en tentant de les mener au cœur de la pensée mathématique la plus active, et sans économiser la spécificité de l'écriture mathématique. Il ne s'agira pas d'« appliquer » les mathématiques à la musique, que ce soit sous une modalité technique et calculatoire ou sous une forme plus métaphorique.

La raisonance possible du concept mathématique avec la musique ne sera pas au cœur de l'exposé lequel visera, simplement (si l'on ose dire !), à transmettre le plus fidèlement possible, le contenu de pensée investi dans le concept examiné (et, bien sûr, dans la théorie mathématique où il prend place), sans négliger, tout au contraire, les aperçus historiques qui peuvent permettre d'apprécier les problématiques au sein desquelles se déploie le concept présenté.

Yves André (Cnrs/Ens) a bien voulu accepter la chaire de cette école.

L'« École mathématique pour musiciens et autres non-mathématiciens » est co-organisée sous l'égide du Séminaire MaMuPhi (Mathématique, musique et philosophie) et du Séminaire MaMuX (Mathématiques/Musique et relations avec d'autres disciplines).

Avertissement

L'objectif de chacun de ces exposés est de rendre compréhensible un concept central, une idée-force, de la mathématique la plus contemporaine à des non-spécialistes (et d'abord à des musiciens) en tentant de les mener au cœur de la pensée mathématique la plus active.

Il ne s'agira donc pas d'un cours au sens usuel : il n'y aura ni parcours univoque et graduel, ni visée de transmission/appropriation d'un savoir-faire mathématique particulier.

Il ne s'agira pas davantage d'une «entreprise scientifico-caritative», comme disait G. Châtelet, et nous éviterons les facilités de «la panoplie puérile charriée par le big-bang (qui ne cesse de commencer), le chaos (qui neutralise tout), la catastrophe (qui n'effraie plus grand monde), le fractal (qui fascine surtout les esprits un peu simples)»[1] - ainsi que les apories des théorèmes de Gödel (pour compléter la liste des thèmes-bateaux de la vulgarisation mathématique).

On saisira mieux la singularité de ce projet si l'on imagine ce que serait son symétrique : rendre «compréhensibles» des œuvres de la musique la plus contemporaine à des non-connaisseurs (par exemple mathématiciens), non par le biais d'un cours intensif de solfège, mais par une confrontation, préparée, aux œuvres elles-mêmes. L'analogie laisse penser que la compréhension passe par une phase de «choc» qu'il s'agit de dépasser ; elle suggère aussi à l'auditeur (lecteur) de ne pas chercher à s'approprier le contenu des séances de cette école sur le mode des dictées musicales, mais à construire sa propre écoute[2].

Voici les quelques principes que nous suivrons au cours de cette entreprise.

1) Tout d'abord l'*absence de prérequis* mathématiques de la part du public (ce qui ne revient pas du tout à nier le rôle de la culture mathématique de chacun dans l'appropriation des exposés). En revanche, nous supposerons acquis un intérêt a priori pour la pensée mathématique en général et ses liens avec d'autres modes de penser.

Par ailleurs, durant ces exposés de trois heures chacun, nous demanderons beaucoup aux capacités de concentration et de synthèse du public (qui, après tout, est sans doute habitué à se concentrer totalement pendant les cinq heures d'écoute d'un Parsifal, sans perdre le fil des leitmotive). L'une des difficultés principales nous semble résider précisément dans la multiplicité des thèmes en jeu : autant d'idées à tisser qui ont une longue histoire chacune.

[1] Gilles Châtelet, les enjeux du mobile, Seuil 1993, introduction.

[2] l'analogie rappelle aussi la bravade de G. Gould, prétendant que le piano pouvait s'enseigner en guère plus d'une heure. Toutefois, le parallèle tourne court : d'une part, il n'a jamais, semble-t-il, tenté l'expérience ; d'autre part, il ne s'agit pas ici, on l'a dit, de transmettre un savoir-faire.

2) Le ou les concepts fondamentaux qui feront l'objet de chaque séance seront non seulement situés, mais aussi effectivement *présentés*. Il ne s'agira pas de les enrober d'un discours décoratif et métaphorique, mais d'aller «à la chose même». On essaiera en contrepartie de réduire les détails techniques au minimum compatible avec cette exigence.

3) Les concepts fondamentaux qui seront présentés seront choisis sur le critère qu'ils condensent des points de vue mathématiques sur des *notions communes* - i. e. n'appartenant pas en propre à la mathématique - telles qu'espace, symétries, singularités, temps etc... Chacun pourra alors confronter ces points de vue mathématiques aux points de vue qui lui sont plus familiers - musicaux, architecturaux, picturaux, ou philosophiques - sur ces notions communes, et disposer ainsi d'un point d'ancrage sûr.

4) On veillera à ce que les concepts présentés (principaux ou auxiliaires) réapparaissent au fil des séances sous diverses perspectives, de manière à favoriser une compréhension rétrospective.

Yves André.

Première séance
samedi 9 décembre 2006

Algèbres d'opérateurs et géométrie non commutative

Les deux premiers exposés évoqueront deux points de vue mathématiques les plus avancés et les plus profonds sur la notion commune d'*espace* : la géométrie non commutative initiée par Alain Connes[1], et la géométrie des topos initiée par Alexander Grothendieck[2]. On verra dans les deux cas l'espace se métamorphoser et les points disparaître.

****

Cette première séance[3] est consacrée aux algèbres d'opérateurs (dont le nom technique plus précis est : algèbres de von Neumann), qui jouent un rôle-clé en géométrie non commutative.

Une raison plus factuelle de ce choix est que l'idée de cette école est née lors d'un colloque récent à Cerisy autour de la logique des interactions, dernier avatar de la logique linéaire de Jean-Yves Girard[4] où interviennent, de manière surprenante, les algèbres d'opérateurs.

Par ailleurs, la notion d'algèbre de von Neumann est typique d'un *concept mathématique complexe*, et pourra peut-être intéresser à ce titre les philosophes des sciences.

Pour aller de nulle part au concept complexe, je tracerai une sorte de diagonale, en évitant la redondance. Je commencerai, sur un mode rhapsodique, par faire sonner puis varier quelques thèmes, avant de les tisser ensemble.

****

La théorie des algèbres d'opérateurs peut être vue sous deux aspects complémentaires : comme étant obtenue par passage à la dimension infinie en algèbre linéaire, ou par passage au non commutatif dans la théorie de la mesure (voir figure 1.1).

[1]en partie inspirée par la mécanique quantique.

[2]en partie inspirée par la théorie des faisceaux de Leray et Cartan.

[3]rédigée à partir d'une transcription par Moreno Andreatta de l'exposé oral.

[4]Logique et Interaction : Géométrie de la cognition, Ecole Thématique du CNRS, coordination : Jean-Baptiste Joinet, Cerisy-la-Salle, 19-26 septembre 2006. Voir à l'adresse :
`http ://www-philo.univ-paris1.fr/Joinet/CerisyLIGC.html`

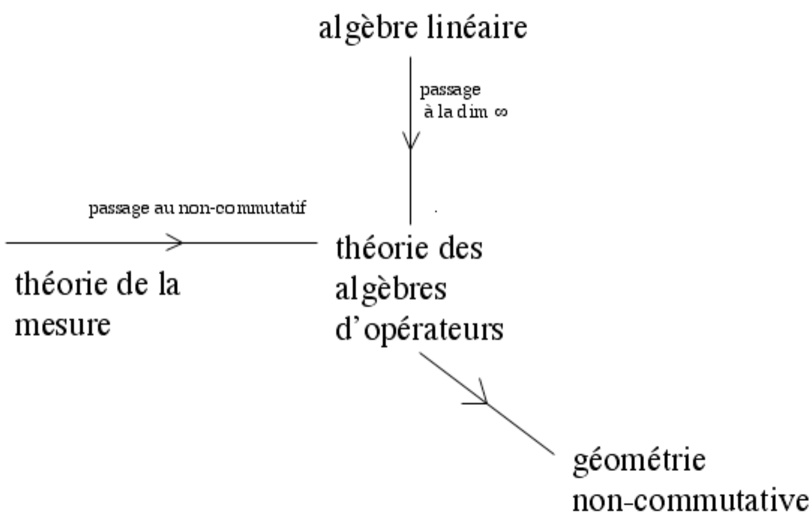

Fig. 1.1. Leitfaden (la place de la théorie des algèbres d'opérateurs par rapport à l'algèbre linéaire et à la théorie de la mesure).

Plan

1. Espaces linéaires (=vectoriels)
2. Espaces et fonctions. Vers la géométrie non commutative
3. Espaces de Hilbert et analyse fonctionnelle
4. Spectres
5. Algèbres de von Neumann, facteurs et poids
6. Coda : logique des interactions

Pour le lecteur pressé de lire la «morale» de l'histoire, je signale d'emblée qu'elle se trouve aux paragraphes 2.4 et 2.5.

****

Commençons par une remarque générale :

les mathématiques sont un *monde associatif*.

J'entends par là que la plupart des lois de composition auxquelles on a affaire en mathématiques sont associatives[5], ce qui veut dire la chose suivante : supposons qu'on ait des transformations $f, g, h \cdots$ et un moyen de les composer (gf représentant la transformation composée de f suivie de g), alors on a la relation

$$(hg)f = h(gf).$$

[5] ou bien s'y ramènent aisément, par des constructions universelles, si elles ne le sont pas elles-mêmes (comme le crochet de Lie par exemple).

Par contre les mathématiques sont loin d'être un monde commutatif : si f et g sont composables dans les deux sens, en général gf *n'est pas égal à* fg. On dit que f commute à g lorsque $gf = fg$.

Autrement dit, la commutativité est la possibilité de changer l'*ordre des opérations*, tandis que l'associativité est la possibilité de changer le *groupement des opérations*, sans en changer l'ordre.

La non-commutativité est du reste un phénomène fort commun : si l'on demande son chemin et que l'on s'avise de permuter l'ordre des déplacements indiqués, il y a peu de chance que l'on parvienne à destination... Gardons-nous donc de voir du «quantique» dans tout ce qui est non commutatif !

J'en profite pour écarter d'emblée un malentendu à propos du terme «non commutatif» : il faut prendre garde qu'en mathématique, ce terme est bien plus souvent employé dans le sens de «*non nécessairement commutatif*» (et donc représente une généralisation du cas commutatif) que comme négation de «commutatif».

1 Espaces vectoriels.

Commençons par explorer le diagramme en fig. 1.1, en partant du haut.

L'*algèbre linéaire* est la partie la plus simple des mathématiques. Elle traite des espaces les plus «homogènes» qui soient, les *espaces vectoriels*, dont les points sont appelés vecteurs.

1.1 Ce que c'est.

L'homogénéité d'un espace vectoriel V se traduit par l'existence d'une origine (le vecteur nul noté simplement 0), et par le fait que les vecteurs peuvent être additionnés entre eux d'une part[6]

$$v_1, v_2 \mapsto v_1 + v_2,$$

et être multipliés par des nombres[7] (réels ou complexes, suivant la situation[8]) d'autre part

$$v \mapsto \lambda \cdot v.$$

[6]L'addition des vecteurs est associative et commutative, l'addition de 0 à un vecteur v ne change pas v, et tout vecteur v admet un opposé $-v$, qui, lui étant ajouté, donne $v + (-v) = 0$; on dit que $(V, +)$ est un «groupe abélien».

[7]la multiplication d'un vecteur v par le nombre 1 ne change pas v. Par ailleurs, la multiplication de v par un nombre vérifie la relation d'«associativité» $(\lambda_1\lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v)$ et est liée à l'addition des vecteurs par les relations de «distributivité» $\lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2$ et $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v$. On allège souvent l'écriture en se dispensant du point : on écrit λv au lieu de $\lambda \cdot v$; la pratique montre que cela ne crée pas d'ambiguïté.

[8]on parle d'espace vectoriel réel ou complexe, respectivement ; en général, nous considérerons des expaces vectoriels complexes. L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$, et l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$; rappelons que ces derniers s'écrivent sous la forme $z = x + \sqrt{-1}y$ où x et y sont réels, et $\sqrt{-1}$ est le nombre «imaginaire» racine carrée de -1 ; le conjugué de z, noté $\bar{z}$, est le nombre complexe $x - \sqrt{-1}y$; le module de z, noté $|z|$, est la racine carrée de $z\bar{z} = x^2 + y^2$.

Exemples d'espaces vectoriels : la droite réelle $V = \mathbb{R}$ (ou un vecteur s'identifie à un nombre), le plan réel $V = \mathbb{R}^2$ (ou un vecteur s'identifie à un couples de nombres, son abscisse et son ordonnée), etc...

1.2 Applications linéaires.

Etant donnés deux espaces vectoriels V et W, une application linéaire $F : V \to W$ de V vers W est une règle qui associe à tout vecteur v de V un vecteur $F(v)$ de W et qui vérifie les compatibilités naturelles relatives à la structure d'espace vectoriel, à savoir :

1. $F(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot F(v)$
2. $F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2)$

(il découle tant de 1. que de 2. que F envoie l'origine de V sur l'origine de W).

Les applications linéaires de V vers W forment elles-mêmes un espace vectoriel : $F+G$ est l'application linéaire définie par $(F+G)(v) = F(v) + G(v)$, et $\lambda \cdot F$ est l'application linéaire définie par $(\lambda \cdot F)(v) = \lambda \cdot F(v)$.

Un cas qui nous intéresse particulièrement est celui où $V = W$. On parle alors d'*opérateur* (sous-entendu : linéaire) sur V plutôt que d'application linéaire de V vers V, et on note $\mathcal{L}(V)$ l'espace vectoriel des opérateurs (linéaires) de V ($\mathcal{L}$ comme «linéaire»).

C'est un cas intéressant parce qu'on peut *composer* les opérateurs entre eux :

$$GF : V \xrightarrow{F} V \xrightarrow{G} V.$$

1.3 Bases, dimension, matrices.

La *dimension* d'une espace vectoriel est le «nombre de ses degrés de liberté». Un peu plus précisément, l'espace vectoriel V est de dimension finie n si tout vecteur v de V peut s'écrire de façon unique comme *combinaison linéaire*[9]

$$v = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda^i e_i$$

de vecteurs particuliers $e_1, e_2, ..., e_n$ (formant ce que l'on appelle une *base* de V). Les nombres λ^i sont les *coordonnées* de v dans la base $(e_1, e_2, ..., e_n)$[10].

Une base étant fixée, se donner un vecteur revient donc à se donner n nombres (ses coordonnées). De la sorte, tout espace vectoriel réel de dimension n s'identifie à $\mathbb{R}^n$ (modulo le choix d'une base). De même, tout espace vectoriel complexe de dimension n s'identifie à $\mathbb{C}^n$.

Si F est un opérateur, on peut écrire :

$$F(e_1) = \sum_i \lambda_1^i e_i, \; ..., \; F(e_n) = \sum_i \lambda_n^i e_n$$

[9] le signe $\sum_{i=1}^{i=n}$ indique que l'on somme sur tous les indices i de 1 à n.

[10] ici, λ^i est juste le symbole pour la $i$ème coordonnée, ne pas confondre avec λ à la puissance i (il n'y a pas de λ !).

et la donnée de l'opérateur F équivaut à la simple donnée du tableau carré des $n \times n$ nombres (λ_j^i), λ_j^i figurant à la i-ème ligne et à la j-ème colonne. Ce tableau est appelé «matrice» de F. La composition des opérateurs s'exprime très simplement en termes de leurs matrices :

$$F \leftrightsquigarrow \lambda_j^i,\ G \leftrightsquigarrow \mu_j^i,\ GF \leftrightsquigarrow \sum_k \mu_k^i \lambda_j^k.$$

1.4 Importance des problèmes linéaires.

Le rôle de l'algèbre linéaire est de traiter les «problèmes linéaires», c'est-à-dire, grosso modo, ceux dont l'ensemble des solutions est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel. Ces problèmes sont particulièrement faciles en dimension finie[11].

En mécanique classique, les problèmes sont souvent non linéaires, mais de dimension finie. Une technique classique consiste à se ramener, par une approximation au premier ordre, au cas linéaire, ce qui permet d'appliquer les techniques de l'algèbre (ou de l'analyse) linéaire pour traiter le problème approché.

En mécanique quantique, la situation est en quelque sorte opposée : le principe de superposition nous assure que les équations d'évolution sont linéaires ; mais cette fois la difficulté vient du fait que la dimension est infinie.

C'est une difficulté sérieuse : l'algèbre linéaire pure «bute» en dimension infinie. Par exemple, l'expression $\sum\limits_k \mu_k^i \lambda_j^k$ qui traduit la composition des opérateurs devient une somme infinie et n'a donc pas de sens en général. Pour qu'elle ait un sens, il faut que la série soit convergente, et pour cela il faut introduire un peu de topologie...

Nous y reviendrons après un certain détour. Mais il nous reste à clore ces généralités sur l'algèbre linéaire en précisant la notion d'«algèbre» - au sens technique que lui donne le domaine des mathématiques appelé «algèbre».

1.5 Algèbres.

Une *algèbre* est la donnée d'un espace vectoriel A et d'une loi de composition

$$(g, f) \to gf$$

qui est associative, bilinéaire et avec un élément unité[12] 1.

Elle est dite commutative si l'on a toujours $gf = fg$. Par exemple l'espace vectoriel des *fonctions*[13] $f : X \to \mathbb{C}$ sur un espace X quelconque, muni de la multiplication entre fonctions[14] est une algèbre *commutative.*

Un autre exemple d'algèbre est l'espace $\mathcal{L}(V)$ des *opérateurs* $F : V \to V$, muni de la composition (on notera I l'élément unité, c'est-à-dire l'opérateur «qui ne fait rien»). C'est

[11] du moins du point de vue théorique. En revanche, bien des problèmes concrets de calcul numérique sont des problèmes linéaires en très grande dimension qui font peiner les ordinateurs...

[12] vérifiant $1f = f1 = f$ pour tout f dans A.

[13] une fonction f sur un ensemble X est une règle qui associe à tout élément de X (ou parfois seulement à certains d'entre eux) un nombre réel ou complexe. On met en général des conditions supplémentaires adaptés à l'ensemble particulier X que l'on considère. Par exemple, si X est un espace «topologique», il est naturel de considérer des fonctions continues (voir exposé suivant).

[14] définie par $(fg)(x) = f(x).g(x)$.

une algèbre *non commutative*[15]. Nous verrons en particulier que les algèbres de von Neumann sont des sous-algèbres (*i.e.* des sous-ensembles stables par addition, multiplication par un nombre, et composition) de $\mathcal{L}(V)$.

Remarquons également que si A est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(V)$, on peut en fabriquer une autre en prenant son *commutant* A', c'est-à-dire l'ensemble de tous les opérateurs qui commutent à tout opérateur dans A. Le commutant de $\mathcal{L}(V)$ est réduit aux opérateurs dits «scalaires» (ceux qui multiplient tout vecteur de V par un nombre fixe).

On vérifie que $A' = A'''$, et après une petite contorsion d'esprit, on en déduit qu'une algèbre A est égale à son bi-commutant A'' si et seulement si A est elle-même un commutant. Ce n'est pas automatiquement le cas, du reste.

2 Espaces et fonctions. Vers la géométrie non commutative.

Revenons au Leitfaden, et quittons temporairement la direction verticale pour la direction horizontale, en partant de la gauche.

Il n'y a pas de notion générale d'«espace en tant qu'espace» en mathématique ; jusqu'à présent, même les écoles les plus doctrinaires se sont abstenues de s'approprier symboliquement cette notion commune en la «taguant» d'une définition mathématique générale !

En revanche, il existe bien des *points de vue mathématiques* sur la notion commune d'espace, dont dérivent beaucoup de types d'espaces mathématiques particuliers, d'ailleurs toujours flanqués d'un prédicat (nous avons déjà rencontré les espaces vectoriels, caractérisés par leur homogénéité).

Je vais brièvement mentionner trois points de vue mathématiques sur la notion d'espace qui donnent lieu à des «catégories» d'espaces particuliers : grandeur, localité, topographie. Démêler ces trois points de vue fut d'ailleurs un très long travail conceptuel, achevé peu avant la première guerre mondiale.

2.1 «Grandeur».

D'une certaine façon, c'est peut-être le point de vue le plus ancien (problèmes d'arpentage de l'antiquité). En termes mathématiques contemporains, j'ai ici en vue tout ce qui se rapporte à la *théorie de la mesure*. La catégorie attachée à ce point de vue est celle des *espaces mesurés*[16] $(X, d\mu)$.

Les fonctions $f : X \to \mathbb{C}$ qu'il est naturel de considérer dans ce contexte sont les fonctions *bornées presque partout*, c'est-à-dire bornées hors d'une partie de mesure nulle. Elles forment une algèbre commutative notée $L^\infty(X, d\mu)$ (ou $L^\infty(X)$ pour abréger).

Cette théorie fait la synthèse entre les idées apparemment éloignées d'arpentage, de moyenne, de probabilité. Techniquement, la théorie des probabilités s'y rattache en effet :

[15] sauf en dimension 0 ou 1.

[16] une mesure $d\mu$ est une fonction à valeurs positives ou infinies sur certaines parties de X, qui est additive pour la réunion disjointe d'une collection finie ou dénombrable de parties deux à deux disjointes. On peut en profiter pour associer à quantité de notions leur «presque-»contrepartie.

une probabilité n'étant rien d'autre, selon la définition moderne de Kolmogorov, qu'une mesure telle que la mesure de l'espace X, vu comme ensemble de tous les évènements possibles, soit égale à 1. S'y rattachent de même les aspects mathématiques de la mécanique statistique, où l'étude mécanique d'un système de très nombreuses particules est remplacé par celui de l'espace des états muni de la mesure de Gibbs au moyen de laquelle on prend les moyennes.

C'est un chapitre passionnant de l'histoire des mathématiques que l'étude des chemins sinueux et ramifiés ayant mené des antiques problèmes d'arpentage à la théorie de la mesure, sous la forme définitive qu'elle a prise avec Lebesgue, en passant par le calcul intégral au XVII^e siècle, par l'intégrale de Riemann au milieu du XIX^e, et par les travaux de Cantor.

2.2 «Localité».

Il s'agit ici des notions de voisinage, de frontière, de compacité et de complétude, qui font l'objet de la *topologie générale*. La catégorie attachée à ce point de vue est celle des *espaces topologiques* $(X, \mathfrak{O})$ (qui sera détaillée dans l'exposé suivant).

Les fonctions sur X qu'il est naturel de considérer dans ce contexte sont les *fonctions continues*. Elles forment une algèbre commutative notée $C(X, \mathfrak{O})$ (ou $C(X)$ pour abréger).

Bien que Leibniz l'ait, semble-t-il, appelée de ses vœux, c'est sans doute B. Riemann qui doit être considéré comme le fondateur de la théorie, dont la forme qualitative épurée a été mise au point par Hausdorff (1914).

[Puisque j'aurai à parler d'espaces topologiques *compacts* ou *complets*, je vais, sans rentrer dans les détails techniques, donner une idée (qu'on est invité à ignorer en première lecture) de ces deux notions voisines, en supposant pour simplifier qu'on dispose d'une métrique permettant de préciser numériquement la proximité de deux points ; on a alors aussi la notion de limite d'une suite de points.

La complétude d'un espace X reflète le fait qu'une suite de points converge (*i.e.* a une limite dans X) dès que les points sont tous arbitrairement proches les uns des autres à partir d'un certain rang.

La compacité de X reflète le fait que de toute suite de points de X, on peut extraire une suite convergente (*i.e.* qui a une limite).

Par exemple, les espaces $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ sont complets mais non compacts. Les parties compactes de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ sont les parties bornées et fermées (*i.e.* qui contiennent leur frontière) ; elles sont aussi complètes.]

2.3 «Topographie».

Il s'agit ici des notions de cartes, de ligne de niveau, de thalweg, de géodésie en général, de courbure, etc... J'ai ici en vue tout ce qui se rapporte à la *géométrie différentielle*, et plus particulièrement à la géométrie différentielle riemannienne. La catégorie attachée à ce point de vue est celle des *variétés riemanniennes* (X, ds^2), qui sont, *infinitésimalement*, linéaires et munies d'une distance ds^2.

Les fonctions sur X qu'il est naturel de considérer dans ce contexte sont les *fonctions lisses*, c'est-à-dire indéfiniment différentiables. Elles forment une algèbre commutative notée $C^\infty(X)$.

Ce point de vue est encore dû aux réflexions de Riemann sur les fondements de la géométrie «courbe» en toute dimension (après Gauss, qui traita le cas des surfaces dans un ouvrage célèbre).

2.4 Le point de vue fonctionnel sur les espaces. Les points et leur ombre.

Ce point de vue - qui est apparu à divers moments et dans divers contextes de l'histoire des mathématiques - consiste grosso modo à *inverser le rôle de la fonction et celui de la variable* : au lieu de voir une fonction $f : X \to \mathbb{C}$ comme fonction (fixe) d'un point variable x de l'espace X, on regarde le point x comme fixe, et on considère son «ombre» constituée des valeurs $f(x)$ prises par toutes les fonctions f sur X (ou plus précisément la règle qui associe à une fonction variable f le nombre complexe $f(x)$).

Cela amène à remplacer l'espace X (mesuré, topologique, ou riemannien) par l'algèbre commutative $L^\infty(X)$, ou $C(X)$, ou $C^\infty(X)$ suivant le cas.

La question qui se pose alors est de savoir si l'on ne perd rien ce faisant. Notamment, peut-on récupérer un point à partir de son «ombre» ?

Il se trouve que sous des hypothèses assez larges, c'est effectivement le cas, comme nous le verrons plus loin : on retrouve grosso modo l'espace comme *spectre* de l'algèbre associée, c'est-à-dire essentiellement comme l'ensemble des «ombres» des points.

Mais, si l'on ne perd rien, que gagne-t-on ?

En premier lieu, c'est de pouvoir *calculer* : on calcule avec des fonctions (qui forment une algèbre, à laquelle on peut appliquer les outils de l'analyse classique), et non avec les points d'un espace. Autrement dit, on gagne de passer du visuel (géométrie) au scriptural (algèbre).

A cet égard, j'aimerais inviter le lecteur à une grande prudence en ce qui concerne les thèses sur le prétendu antagonisme calcul/raisonnement en mathématique. Ni le slogan romantique «les mathématiques consistent à remplacer les calculs par des idées», ni les slogans opposés d'une certaine tradition logico-informaticienne (plus récente mais se réclamant non sans raison de Leibniz) ne rendent le moins du monde justice à la très délicate dialectique «borroméenne» entre *calcul, raisonnement* et *formation de concepts* en mathématiques.

Bien que cette «école» privilégie de manière presque exclusive le troisième terme de cette dialectique, il convient de ne pas négliger le rôle crucial des deux autres si l'on veut éviter de se forger une image idéale complètement déformée de la pensée mathématique.

2.5 Comment le non commutatif s'introduit aussi subrepticement que naturellement dans le point de vue fonctionnel sur les espaces, en reléguant les points dans l'ombre. L'idée de géométrie non commutative.

Beaucoup d'espaces intéressants s'obtiennent par recollement. Par exemple, toute variété différentielle de dimension n s'obtient par recollement de «cartes» qui sont des parties ouvertes de $\mathbb{R}^n$.

L'opération de recollement est donc une des opérations les plus fondamentales de la géométrie, et dans beaucoup de problèmes, il importe de ne pas considérer seulement le résultat du recollement, mais de garder trace de l'opération-même de recollement. Comment traduire cela dans le point de vue fonctionnel esquissé ci-dessus ?

Considérons le cas le plus simple, passablement trivial, d'un espace X constitué d'un seul point, obtenu en identifiant deux espaces du même type $\{x\}$ et $\{y\}$. L'algèbre des fonctions sur la réunion disjointe $\{x\} \cup \{y\}$ est l'algèbre commutative $\mathbb{C}^2$ des couples de nombres (un pour chaque point). L'opération ensembliste de recollement se traduit alors en considérant tous les opérateurs sur $\mathbb{C}^2$, c'est-à-dire l'algèbre non commutative de toutes les matrices 2×2

$$\begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} \end{pmatrix}.$$

Dans le cas beaucoup moins trivial quoique similaire d'une variété différentielle compacte X obtenue par recollement de «cartes», l'algèbre qui décrit le recollement est l'algèbre des matrices infinies $(f_{x,x'})$, nulles à l'infini, indéxées continûment par les couples de points où le recollement a lieu. C'est une algèbre non commutative de dimension infinie.

Toutefois, dans ces deux exemples, on peut encore retrouver les points (c'est-à-dire l'espace X lui-même) à partir de spectres, comme dans le cas commutatif : du point de vue spectral, les algèbres non commutatives que l'on voit apparaître par recollement sont en fait équivalentes à l'algèbre commutative des fonctions sur X. Cela est dû au fait que les espaces en question obtenus par recollement restent très «conventionnels» du point de vue de l'analyse classique.

En revanche, pour des recollements plus sauvages (comme ceux qui apparaissent quand on considère les feuilles d'un feuilletage associé à un système dynamique), ce n'est plus du tout le cas. L'espace recollé peut avoir très peu de points «physiques» subsistants - l'opération de recollement ayant relégué en quelque sorte les points dans l'ombre (ou dans la colle !). Le point de vue ensembliste est totalement inadéquat pour décrire des situations de cette sorte (pourtant communes dans la théorie des systèmes dynamiques par exemple), et il en est de même de l'analyse classique : l'algèbre commutative des fonctions des points de cet espace recollé est un objet beaucoup trop pauvre pour décrire le recollement en question. Il devient nécessaire de remplacer résolument ensembles de points et algèbres de fonctions par une algèbre non commutative du type de celles considérées ci-dessus.

Parvenu à ce stade, on peut alors retourner complètement le point de vue et tâcher de définir et d'étudier directement, en termes d'algèbres non commutatives, les structures qui correspondaient, dans les situations géométriques classiques, aux notions de grandeur (mesure), de localité (topologie), de topographie (géodésie). Ce sont ces algèbres non commutatives qui remplacent les espaces, ou plutôt, qui jouent le rôle d'«espaces non commutatifs» sans points.

C'est là l'objet de la *géométrie non commutative*, initiée et développée principalement par A. Connes à partir des années 80[17].

Dans la suite, nous nous concentrerons sur l'aspect «théorie de la mesure» de la

[17] le discours ci-dessus passe complètement sous silence les motivations et sources d'inspiration très importantes provenant de la mécanique quantique et de la physique statistique quantique. Nous y ferons brièvement allusion dans la suite.

géométrie non commutative, qui n'est autre que la théorie des algèbres de von Neumann et des poids (théorie qui est en fait antérieure à la géométrie non commutative).

3 Espaces de Hilbert et analyse fonctionnelle.

Revenons derechef au Leitfaden, en reprenant la direction verticale là où nous l'avions laissée, c'est-à-dire au passage à la dimension infinie en algèbre linéaire.

3.1 Espaces euclidiens.

Revenons d'abord brièvement à Euclide. Il construisait des triangles, abaissait des perpendiculaires, comparait des angles et des longueurs de côtés. Pour faire ces opérations, on pense, après deux millénaires et demi de réflexion, que le substrat adéquat est celui d'espace euclidien.

Un *espace euclidien* est un espace vectoriel V de dimension finie muni d'une *produit scalaire*[18], qui associe à un couple de vecteur (v_1, v_2) un nombre (réel ou complexe) noté $< v_1, v_2 >$. On requiert que $< \lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2 >= \lambda_1 \bar{\lambda}_2 < v_1, v_2 >$, que $< v_1, v_2 >$ soit additif en v_1 et en v_2 et soit un nombre positif non nul lorsque $v_1 = v_2 \neq 0$.

À partir du produit scalaire, on peut définir la *norme* d'un vecteur :

$$|v| = \sqrt{< v, v >}.$$

La norme permet de mesurer la distance entre deux vecteurs (c'est la norme de la différence des vecteurs).

Le produit scalaire permet aussi de définir la notion d'*orthogonalité* (= perpendicularité) :

$$v_1 \perp v_2 \Leftrightarrow < v_1, v_2 >= 0.$$

Pour deux vecteurs orthogonaux, on a la «relation de Pythagore»

$$|v_1 + v_2|^2 = |v_1|^2 + |v_2|^2.$$

Etant donné un sous-espace W de l'espace euclidien V, l'espace orthogonal à W (formé des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de W) est noté $W^\perp$. Il a la propriété que

$$V = W \bigoplus W^\perp \text{ et } W^{\perp\perp} = W.$$

Quand on a un opérateur $F \in \mathcal{L}(V)$ on peut définir son adjoint F^* de deux façons. Une façon abstraite et intrinsèque est de dire que l'adjoint satisfait l'équation

$$< F^*(v), w >=< v, F(w) > .$$

Une façon plus concrète est d'utiliser les matrices associées (modulo le choix de bases). L'adjonction est l'opération qui remplace lignes par colonnes en en prenant le conjugué, c'est-à-dire $(\lambda^i_j) \rightsquigarrow (\bar{\lambda}^j_i)$. On a :

[18] dans le cas du plan euclidien réel proprement dit, le produit scalaire $< v_1, v_2 >$ n'est autre que le produit des normes (= longueurs) de v_1 et de v_2 par le cosinus de l'angle entre v_1 et v_2.

- $F^{**} = F$
- $(GF)^* = F^*G^*$.

Par exemple, considérons le *projecteur* P_W sur un sous-espace vectoriel W de V. C'est l'opérateur qui à tout vecteur $v \in V$ associe sa composante dans W eu égard à la décomposition $V = W \bigoplus W^\perp$ (ce point se décrit aussi comme le point de W le plus proche de v).

Alors P_W vérifie les équations $P_W = P_W^* = P_W P_W$, et ces équations caractérisent les opérateurs qui sont des projecteurs.

Autre exemple important : les opérateurs *unitaires.* Ce sont ceux (inversibles) qui préservent le produit scalaire. Ils vérifient les équations $U^*U = UU^* = I$, qui les caractérisent.

3.2 Espaces de Hilbert.

Il s'agit de la généralisation en dimension infinie des espaces euclidiens. Ces espaces ont été introduits par Hilbert en 1909[19], pour développer l'analyse fonctionnelle abstraite, dont le point de départ consiste à considérer des fonctions comme points d'un espace vectoriel topologique idoine - dans les cas les plus simples, d'un espace de Hilbert.

Un espace (vectoriel) *de Hilbert* $\mathcal{H}$ admet un produit scalaire tout comme un espace euclidien, mais il est de dimension infinie (dénombrable, pour simplifier), et complet (pour la distance définie par la norme définie elle-même par le produit scalaire comme ci-dessus).

En particulier, $\mathcal{H}$ admet une base orthonormée infinie $(\ldots, e_{-1}, e_0, e_1, e_2, \ldots)$, et tout vecteur $v \in \mathcal{H}$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire infinie convergente

$$v = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \lambda^n e_n, \quad \text{où } \lambda^n =< v, e_n >,$$

et on a la relation «relation de Pythagore» en dimension infinie

$$|v|^2 = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} |\lambda^n|^2.$$

Les espaces de Hilbert ressemblent donc beaucoup aux espaces euclidiens, mais la dimension infinie donne une plus grande souplesse (bien qu'il n'existe, à isomorphie près, qu'un seul espace de Hilbert ![20]). Par exemple, $\mathcal{H}$ peut être décomposé en somme directe de deux copies de lui-même !

L'exemple standard est fourni par les séries de Fourier[21]. Etant donné deux fonctions périodiques $f_1(t)$ et $f_2(t)$ de période 2π, on définit leur produit scalaire par :

$$< f_1, f_2 >= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1 \bar{f}_2 dt$$

[19] époque de l'Erwartung de Schönberg.

[20] sous-entendu : de dimension dénombrable.

[21] préfet de l'Isère, auteur de la théorie de la chaleur - pour laquelle il inventa il y a 200 ans le développement en séries trigonométriques (séries de Fourier) et la transformation de Fourier - et du bel aphorisme selon lequel les mathématiques «n'ont pas de signe pour exprimer les notions confuses».

L'espace $\mathcal{H}$ des fonctions f pour lesquelles $< f, f >$ est bien défini, est un espace de Hilbert. Une base orthonormée est donnée par $e_n = e^{\sqrt{-1}nt}$ (où n est un entier positif ou négatif quelconque) : tout $f \in \mathcal{H}$ s'écrit de manière unique

$$f = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} < f, e_n > e_n,$$

où les coordonnées $< f, e_n >$ s'appellent coefficients de Fourier de f.

3.3 Opérateurs sur un espace de Hilbert et algèbres stellaires.

Un opérateur sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est une application linéaire $F : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ qui est continue, ce qui revient à dire qu'elle est bornée sur la *boule unité* formée des vecteurs de norme au plus 1. La norme de F est le maximum des normes des valeurs que prend F sur la boule unité.

Les opérateurs se composent, et forment une algèbre non commutative notée $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, munie d'une norme $|\ |$ et d'une involution (l'adjonction $F \mapsto F^*$). On a la relation $|FF^*| = |F|^2$.

De manière générale, une algèbre involutive normée vérifiant cette propriété répond au beau nom d'*algèbre stellaire*.

4 Spectres.

4.1 De Newton à Gelfand.

L'histoire des spectres en sciences physico-mathématiques est une histoire merveilleuse pour laquelle je renvoie aux travaux de J. Mawhin.

Il semble que les spectres apparaissent pour la première fois en physique chez Newton à propos de la dispersion de la lumière solaire par un prisme (1671)[22].

D'après Mawhin, «le développement de ces travaux au cours du XIXe siècle conduit à la spectroscopie, indispensable outil d'exploration de l'infiniment grand (astrophysique) et de l'infiniment petit (physique atomique). L'introduction du mot « spectre » en mathématiques est beaucoup plus tardive (fin du XIXe siècle), mais les notions qu'il recouvre sont plus anciennes et trouvent leur origine dans des disciplines mathématiques multiples (équations différentielles, mécanique céleste, géométrie analytique, physique mathématique, théorie de propagation de la chaleur, algèbre). Il faut attendre le XXe siècle pour que les notions physique et mathématique de spectre se réconcilient, au sein de la mécanique quantique».

On a pu dire que le spectre d'un élément chimique est comme son «code-barre». Dans le cas de l'hydrogène, les raies du spectre d'émission obéissent à la loi arithmétique de fréquence en $\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}$ $(n > m)$ (loi de Ritz-Rydberg 1890), dont l'incompatibilité avec

[22]incidemment, cette apparition est presque exactement contemporaine des lettres de Spinoza sur les spectres ! «Si les philosophes veulent appeler spectres ce que nous ignorons, je n'en nierai pas l'existence, car il y a une infinité de choses que j'ignore. [...] Ce sont des puérilités, dirais-je, en y mettant de l'indulgence, ou cela rappelle les jeux auxquels se plaisent les simples. »

les lois de Newton et de Maxwell a été l'une des sources de l'émergence de la mécanique quantique de Heisenberg et Schrödinger (1925-26).

Du côté mathématique, si $F \in \mathcal{L}(V)$ est un opérateur, *son spectre* est l'ensemble des nombres complexes λ tels que $F - \lambda I$ ne soit pas inversible[23].

Par exemple, si l'on prend comme opérateur un projecteur P non nul d'un espace euclidien ou de Hilbert, le spectre de P est l'ensemble à deux éléments $\{0, 1\}$. Plus généralement, si un opérateur (continu) est auto-adjoint, c'est-à-dire si $F = F^*$, son spectre est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}$.

Si l'on considère en revanche des opérateurs auto-adjoints «non continus»[24], alors le spectre est réel mais pas nécessairement compact. C'est le cas notamment des opérateurs hamiltoniens de la mécanique quantique, et c'est ainsi que s'interprète par exemple l'ensemble de Ritz-Rydberg des $\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}$ (sous-ensemble non compact de $\mathbb{R}$).

Revenant au cas d'un opérateur (continu) auto-adjoint F, on peut aussi définir son spectre comme l'ensemble des caractères (= fonctions linéaires multiplicatives[25]) de l'algèbre stellaire $A = \mathbb{C}[F]$ qu'il engendre. Ceci permet d'étendre la notion de spectre au cas d'une algèbre stellaire commutative quelconque A : Gelfand définit le *spectre* de A comme l'ensemble des caractères de A. C'est de manière naturelle un espace topologique compact (mais plus forcément un ensemble de nombres).

4.2 Retour au point de vue fonctionnel. Les théorèmes de Gelfand et de Riesz.

Revenons maintenant au point de vue fonctionnel, et précisons le fait qu'on «ne perd rien» dans ce passage.

Commençons par le cas d'un espace topologique compact $(X, \mathfrak{O})$. On lui associe l'algèbre stellaire commutative $A = C(X, \mathfrak{O})$ des fonctions continues à valeurs complexes sur X[26].

Réciproquement, partant d'une algèbre stellaire commutative A, Gelfand lui associe son spectre X qui est un espace topologique compact. Le théorème de Gelfand dit que ces deux opérations sont *inverses* l'une de l'autre. En particulier, on récupère X à partir de A : un point $x \in X$ correspond à un caractère χ via la formule

$$f(x) = \chi(f) \text{ pour tout } f \in A.$$

Supposons en outre que X soit muni d'une mesure $d\mu$ (et pour faire «bonne mesure», faisons aussi l'hypothèse technique que la topologie de X provient d'une métrique). La mesure $d\mu$ permet d'intégrer les fonctions, et définit donc une application linéaire

$$\mu : A = C(X) \to \mathbb{C}, \quad \mu(f) = \int_X f d\mu,$$

[23] un opérateur F est dit inversible s'il existe un opérateur G tel que $FG = GF = I$, où I est, rappelons-le, l'opérateur identité.

[24] contrairement à notre convention précédente selon laquelle les opérateurs d'un espaces de Hilbert sont par définition continus.

[25] en particulier, tout caractère χ vérifie $\chi(ff^*) \geq 0$ et $\chi(1) = 1$.

[26] l'involution $f \mapsto f^*$ étant induite par la conjugaison complexe, et la norme $|f|$ étant le maximum des modules des valeurs prises par f sur X.

telle que $\mu(ff^*) \geq 0$.

Le théorème de Riesz affirme que, réciproquement, une telle fonction μ correspond toujours à une mesure $d\mu$, telle que $\mu(f) = \int f d\mu$[27]. On peut alors considérer l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(X, d\mu) = \{f | \int f|^2 |d\mu < \infty\}$ des fonctions complexes sur X de carré intégrable. Toute fonction presque partout bornée agit par multiplication sur $\mathcal{H}$, de sorte que l'algèbre $M = L^\infty(X, d\mu)$ des fonctions presque partout bornées est une sous-algèbre stellaire de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Elle contient $A = C(X)$, et coïncide en fait avec le commutant de A. Elle est donc égale à son propre bicommutant : $M = M''$. En outre, μ s'étend à M, avec la même propriété de positivité.

En combinant les théorèmes de Gelfand et de Riesz, on voit que les données géométriques (espace topologique mesuré)

$$(X, \mathfrak{O}, d\mu)$$

et les données fonctionnelles

$$(A, M \xrightarrow{\mu} \mathbb{C})$$

se déterminent mutuellement[28].

On peut alors préciser ce qui a été dit à la fin de 2.5.

En géométrie non commutative, c'est la théorie des algèbres stellaires non commutatives[29]*, analogues non commutatifs des algèbres $C(X, \mathfrak{O})$, qui jouera le rôle de «topologie générale non commutative».*

C'est la théorie des algèbres de von Neumann et de leurs poids, analogues non commutatifs des algèbres $M = L^\infty(X, d\mu)$ et des mesures μ, qui jouera le rôle de «théorie de la mesure non commutative».

5 Algèbres de von Neumann, facteurs et poids.

5.1 Ce que c'est.

La théorie des algèbres de von Neumann a été créée en l'espace de quelques années (de 1936 à 1943) par von Neumann et son élève F. J. Murray. Leur motivation principale venait de la mécanique quantique : tentative de classification des algèbres d'observables qu'on y rencontre.

Une *algèbre de von Neumann*[30] (on dit aussi, plus simplement : *algèbre d'opérateurs*) est une sous-algèbre stellaire M de l'algèbre stellaire $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ des opérateurs sur espace de Hilbert complexe $\mathcal{H}$, qui est égale à son bi-commutant (voir 1.4), c'est-à-dire telle que

$$M = M''.$$

[27] cas particulier : le caractère associé à un point x n'est autre que la mesure de Dirac en x.

[28] Il y a quelque chose d'analogue, mais plus compliqué (en termes d'opérateurs de Dirac) dans le cas où l'on ajoute une structure riemannienne.

[29] de préférence séparables en norme, ce qui reflète, dans le cas commutatif, la condition que le spectre peut être muni d'une métrique.

[30] Si par hasard, un connaisseur tombait sur ces lignes, je préviens que, techniquement, je me limiterai souvent tacitement aux algèbres de von Neumann à prédual séparable.

C'est la généralisation non commutative de l'algèbre $L^\infty(X)$ des fonctions presque partout bornées sur un espace mesuré X.

Un *facteur* M est une algèbre de von Neumann telle que les seuls éléments de M qui commutent avec tous les autres sont les opérateurs scalaires (opérateurs de multiplication par un nombre fixe), ce qui revient à dire que

$$M \bigcap M' = \mathbb{C}.$$

Nous avons déjà rencontré des exemples simples de facteurs (les moins intéressants qui soient, à dire vrai) :
- pour tout $n = 1, 2, ...$ l'algèbre stellaire $I_n = \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ des matrices $n \times n$,
- l'algèbre stellaire $I_\infty = \mathcal{L}(\mathcal{H})$ des opérateurs (continus) sur l'espace de Hilbert.

Ce sont les facteurs *de type I*. On verra qu'il existe deux autres types bien plus intéressants.

Un théorème fondamental de von Neumann assure la possibilité de «désintégrer» toute algèbre de von Neumann M en facteurs ; les facteurs sont les briques élémentaires, et il suffit de les comprendre pour comprendre les algèbres d'opérateurs.

Voilà donc le début de la théorie de von Neumann. Des motivations solides d'où est issu un concept fondamental bien précis (celui de facteur en l'occurrence). Il s'est alors agi de développer cette théorie :

1. développement d'une technologie aussi riche que celle de la théorie classique de la mesure (dans le cas commutatif). Par exemple la notion de mesure a un analogue dans le cas non commutatif, celle de *poids* ; le théorème de Riesz vu plus haut assure que dans le cas commutatif, il n'y a pas «deux poids, deux mesures», c'est la même chose.
2. Exploration de phénomènes nouveaux.
3. Construction et classification des facteurs.

5.2 Facteurs de type II et géométrie en dimension continue.

Soit $M \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un facteur. Murray et von Neumann ont eu l'idée de chercher à classifier les projecteurs P de M (voir 3.1), en s'inspirant de ce qui se passe en dimension finie n, c'est-à-dire pour le type I_n.

Deux projecteurs P_1 et P_2 sont équivalents (on écrit $P_1 \sim P_2$) s'il existe un opérateur $V \in M$ tel que $P_1 = V^*V$ et $P_2 = VV^*$ (on a alors $P_2V = VP_1$). En dimension finie, cela signifie simplement que les dimensions des espaces vectoriels images des projecteurs sont les mêmes ; modulo équivalence, les projecteurs P sont donc entièrement classifiés par la dimension $D(P)$ de leur image.

Murray et von Neumann ont découvert quelque chose d'analogue pour tout facteur M. On peut associer de façon canonique à chaque projecteur P une *dimension* $D(P) \in [0, \infty]$ qui est un nombre réel positif ou l'infini, vérifiant :

1. $P_1 \sim P_2 \Leftrightarrow D(P_1) = D(P_2)$,
2. $P_1P_2 = 0 \Rightarrow D(P_1 + P_2) = D(P_1) + D(P_2)$.

On peut alors effectuer une première classification grossière des facteurs suivant les valeurs que peuvent prendre les dimensions des projecteurs. On obtient les cinq familles suivantes (y compris les deux vues précédemment), réparties en trois types :
– $I_n : \{1, 2, ..., n\}$
– $I_\infty : \{1, 2, 3, ...\}$
– $II_1 : [0, 1]$
– $II_\infty : [0, \infty]$
– $III : \{0, \infty\}$

L'apparition de «dimensions continues» constitue la première grande découverte de la théorie. Ces dimensions apparaissent en fait comme des «densités de dimension», au sens où on pourrait dire que les entiers pairs sont de densité 1/2 parmi tous les entiers (elles n'ont guère à voir avec les dimensions fractionnaires des fractals).

Pour construire un exemple de facteur de type II_1, on peut s'y prendre de la manière suivante. Prenons un groupe (discret) dénombrable Γ d'opérateurs unitaires qui est «assez non commutatif» ; alors le commutant $M = \Gamma'$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est un facteur de type II_1.

5.3 Facteurs de type III et dynamique.

Les facteurs de type III sont précisément ceux sur lesquels la théorie de la dimension de von Neumann et Murray ne dit rien. Pendant un quart de siècle, et bien que la provision d'exemples s'enrichît, cette classe resta complètement mystérieuse.

La deuxième grande découverte de la théorie les concerne, et vient des travaux de Tomita, Takesaki et Connes[31]. Pour tout facteur M muni d'un poids μ, il existe un groupe à un paramètre d'évolution (analogue aux flots d'évolution dans le temps que l'on rencontre en mécanique statistique quantique)

$$t \mapsto (F \in M \mapsto e^{\sqrt{-1}tH_\mu} \cdot F \cdot e^{-\sqrt{-1}tH_\mu}),$$

qui ne dépend du poids μ qu'à conjugaison unitaire près. Il définit donc un homomorphisme canonique

$$\delta : \mathbb{R} \to Out\, M,$$

où $Out\, M$ est le groupe des «automorphismes extérieurs» (c'est-à-dire les automorphismes à conjugaison unitaire près) du facteur M.

Ce qui est tout à fait remarquable est justement cet aspect canonique : si l'on interprète $\mathbb{R}$ comme la droite du temps (ainsi qu'on le fait dans la situation qui a motivé la théorie : en mécanique statistique quantique), le groupe à un paramètre d'évolution ne dépend pas du choix d'une unité de temps.

Il se trouve que les facteurs de type III sont justement ceux pour lesquels ce groupe à un paramètre d'évolution est non trivial : *les facteurs de type III sont des objets dynamiques.*

[31] Voir, par exemple, Alain Connes, «Une classification des facteurs de type III», *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* Sér. 4, 6 no. 2 (1973), p. 133-252.

5.4 Classification des facteurs moyennables.

Comme dans beaucoup de théories, où des motivations solides et quelques exemples non triviaux ont mené, dans un premier mouvement, à la définition d'un objet mathématique fondamental, se pose le problème de la classification des objets répondant à cette définition. C'est là un second mouvement, en général très difficile et dont l'achèvement signe souvent la maturité de la théorie.

La classification des objets, loin de «sortir» de la définition-même, requiert d'abord une période de «gestation» où s'accumulent des exemples provenant de constructions variées et parfois surprenantes, puis une période «taxonomique» où les objets construits sont analysés en détail et comparés entre eux ; vient un moment où l'on a l'impression d'avoir une liste complète. Reste à le démontrer[32].

Il arrive parfois qu'une classification complète soit impossible, et que cette impossibilité - en un sens précisé - soit démontrée. C'est en fait ce qui se passe pour les facteurs. La tâche de classification se complique alors : il s'agit de déterminer d'abord une «bonne» classe qui, tout en étant suffisamment ubiquitaire, soit susceptible de classification.

Dans le cas des facteurs, de nombreux travaux convergents ont permis de dégager cette «bonne» classe : c'est celle des *facteurs moyennables*[33], caractérisés par la propriété d'être approximés par des sous-algèbres stellaires de dimension finie.

Ce sont des algèbres de dimension infinie (sauf pour le type I_n), mais «pas trop» !

La classification des facteurs moyennables est due à A. Connes[34]. C'est la suivante :
- I_n
- I_∞
- II_1 : il n'y a qu'un seul facteur moyennable de ce type.
- II_∞ : idem.
- III_λ avec $\lambda \in]0,1[$: idem. En fait λ est directement relié à la dynamique δ : l'ensemble $\{t : \delta(t) = 0\}$ est l'ensemble des $\frac{2\pi n}{\log \lambda}$ pour n entier quelconque.
- III_1 : encore un seul facteur moyennable de ce type.
- III_0 : dans cette rubrique, il y a une infinité de facteurs moyennables, tous décrits «géométriquement» à l'aide de la théorie des systèmes dynamiques.

5.5 Prolongements.

Le facteur moyennable de type II_1 est l'un des plus remarquables de la liste, tant à cause de ses multiples propriétés que de ses applications. On peut le construire comme indiqué en 5.2 en prenant pour Γ un groupe localement fini (par exemple un groupe

[32] Il me paraît dommage que les philosophes des mathématiques se penchent si peu sur les problèmes de classification. Si les épistémologies d'inspiration platonicienne semblent à première vue «pré-adaptées» pour décrire cet aspect de la pensée mathématique - ce qui n'est pas si sûr : comment penser le «sporadique» ? -, quel éclairage pourraient apporter d'autres épistémologies ? - par exemple, des épistémologies de type «nominaliste» ou «cognitiviste» sur le Monstre ?

[33] il y a beaucoup d'autres noms «équivalents», par exemple facteurs hyperfinis, ou encore injectifs. Il ne s'agit d'ailleurs nullement d'une pure synonymie : chacun de ces noms est associé à une propriété spécifique de facteurs, qui a d'abord été étudiée pour elle-même, et la coïncidence de ces propriétés est un résultat majeur de la théorie qui met en évidence l'importance de cette classe de facteurs.

[34] voir, en particulier, l'article «Classification of injective factors», *Ann. of Math.* 104 (1976), 73-115.

de substitutions sur un alphabet infini ou chaque élément du groupe ne permute qu'un nombre fini de lettres).

C'est un facteur de dimension infinie, certes, mais il possède une double propriété de finitude : la moyennabilité - approximation par des sous-algèbres stellaires de dimension finie -, et l'existence d'une *trace*, c'est-à-dire un poids particulier qui joue le rôle d'une probabilité. C'est l'analogue non commutatif d'un espace de probabilités.

La classification des sous-facteurs du facteur II_1 moyennable par V. Jones a donné lieu à des nouveaux invariants pour la théorie des nœuds, et a ouvert un nouveau chapitre des mathématiques, la «topologie quantique».

6 Coda : logique des interactions.

En guise de conclusion[35], je dirai quelques mots (beaucoup trop brefs) sur l'intervention surprenante du facteur moyennable de type II_1 en logique, dans le cadre de la théorie de la démonstration, plus précisément dans la récente «logique des interactions» de J.-Y. Girard.

Il est intéressant de remarquer que l'histoire en logique mime un peu l'histoire que j'ai racontée à propos du changement de point de vue :

espace des points $\rightsquigarrow$ algèbres de fonctions $\rightsquigarrow$ algèbres d'opérateurs.

Le point de vue naïf d'espace de points correspond au point de vue des débuts de la logique formelle : dans cette analogie les points correspondent aux formules logiques. Les fonctions, quant à elles, correspondent aux programmes, et l'équivalence de Gelfand entre espaces compacts de points et algèbres stellaires commutatives de fonctions correspond à l'équivalence de de Bruijn-Curry-Howard entre preuves et programmes. L'analyse poussée de la notion de preuve a souligné l'importance théorique de l'élimination des coupures (il s'agit, grosso modo, de transformer une preuve en une autre plus directe, en supprimant les lemmes intermédiaires). Or le processus d'élimination des coupures est, d'après des résultats de Church-Rosser-Girard, un processus associatif. Une description en termes topologiques classiques avait été tentée (domaines de Scott), mais le résultat est peu satisfaisant, les espaces obtenus étant non séparés ; cela correspond à la situation décrite en 2.5 des points «englués».

Grâce à sa notion opératorielle de feed-back dans le processus d'élimination des coupures, Girard est parvenu à donner une description géométrique (au sens non commutatif) de la situation, en termes de géométrie de dimension continue associée au facteur moyennable de type II_1, en jouant de la double propriété de finitude de ce facteur remarquable.

Il est impossible de rentrer ici dans les détails, mais disons simplement ce que devient la tautologie «de a, on infère a» dans ce nouveau contexte : on utilise la décomposition de l'espace de l'Hilbert en deux copies de lui-même, et l'avatar opératoriel de ladite tautologie est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ associée à cette décomposition.

****

[35]«la bêtise consiste à vouloir conclure» disait Flaubert...

Bibliographie

[1] -A. Connes, *Géométrie non commutative*, Interéditions, Paris, 1990 (réédité éditions Dunod, 2005)

[2] - J.-Y. Girard, *Le Point Aveugle. Cours de théorie de la démonstration*, Roma Tre, Octobre-Décembre 2004. En cours de publication chez *Hermann*, collection «Visions des Sciences». Tome I, Vers la perfection, Juin 2006, 296 pp.

[3] - J.-Y. Girard, «Introduction aux algèbres d'opérateurs I : Des espaces de Hilbert aux algèbres stellaires», texte inédit disponible à l'adresse :
`http ://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/AlgOpGirard.pdf`

[4] - L. Schwartz, *Analyse hilbertienne*, Hermann, Paris, 1979

[5] - J. Dixmier, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (Algèbres de von Neumann)*, Editions Jacques Gabay, 1996 (reprint)

[6] -V. S. Sunder, *An Invitation to Von Neumann Algebras*, Springer, 1987

Deuxième séance
samedi 24 mars 2007

Les topos de Grothendieck

«C'est le thème du topos qui est ce «lit» où
viennent s'épouser la géométrie et l'algèbre,
la topologie et l'arithmétique, la logique mathématique
et la théorie des catégories, le monde du continu
et celui des structures «discontinues» ou «discrètes».
Il est ce que j'ai conçu de plus vaste,
pour saisir avec finesse, par un même langage
riche en résonnances géométriques,
une «essence» commune à des situations
des plus éloignées les unes des autres.»
A. Grothendieck [5, p. 59]

****

Cette deuxième séance est consacrée à la théorie des topos qui peut être vue comme une vaste extension de la topologie générale d'inspiration algébro-géométrique, qui intègre et fusionne l'idée de surface de Riemann et celle de faisceau.

Au lieu du double mouvement de la géométrie non commutative

espace des points $\rightsquigarrow$ algèbres de fonctions $\rightsquigarrow$ algèbres d'opérateurs,

on a ici le double mouvement

espace des points $\rightsquigarrow$ site des ouverts (ou des revêtements) $\rightsquigarrow$ topos des faisceaux (ou des faisceaux étales).

Plan

1. Topologie (présentation et représentations)
2. L'idée de surface de Riemann. Sites
3. Du local au global. Faisceaux
4. Faisceaux sur un site. Topos de Grothendieck
5. Interlude : catégories, foncteurs, adjonction
6. Topos et logique intuitionniste

La «morale» de l'histoire se trouve aux paragraphes 4 et 6.1.

****

1 Topologie (présentation et représentations).

Ce que l'on appelle aujourd'hui *topologie générale* est l'étude mathématique *qualitative* des «lieux» et des «rapports spaciaux» : elle théorise les notions de proximité, frontière, localité, continuité etc... et leurs liens mutuels.

Comme on l'a rappelé dans l'exposé précédent (2.2), on peut sans doute faire remonter le projet de la topologie (analysis situs, en latin) à Leibniz, mais c'est Riemann qui en jeta les bases dans sa célèbre dissertation, et la topologie générale fut ensuite axiomatisée par Hausdorff (1914).

Tout comme le terme *algèbre* vu dans l'exposé précédent, *topologie* désigne à la fois un chapitre des mathématiques et un objet mathématique dont s'occupe cette discipline.

1.1 Ce que c'est.

Lisons donc la définition d'une topologie dans le «texte canonique» : Bourbaki, Topologie générale, chapitre 1 [2].

«DÉFINITION 1 . *On appelle structure topologique (* ou plus brièvement *topologie) sur un ensemble X une structure constituée par la donnée d'un ensemble $\mathfrak{O}$ de parties de X possédant les propriétés suivantes :*

(O_I) *Toute réunion d'ensembles de $\mathfrak{O}$ est un ensemble de $\mathfrak{O}$.*

(O_{II}) *Toute intersection finie d'ensembles de $\mathfrak{O}$ est un ensemble de $\mathfrak{O}$.*

Les ensembles de $\mathfrak{O}$ sont appelés ensembles ouverts.

DÉFINITION 2 . *On appelle espace topologique un ensemble muni d'une structure topologique.*

Les éléments d'un espace topologique sont appelés *points*. [...] L'axiome (O_I) implique en particulier que la réunion de la partie vide de $\mathfrak{O}$, c'est-à-dire *l'ensemble vide*, appartient à $\mathfrak{O}$. L'axiome (O_{II}) implique en particulier que l'intersection de la partie vide de $\mathfrak{O}$, c'est-à-dire de *l'ensemble X*, appartient à $\mathfrak{O}$.»[1].

Et voici le commentaire du poète mathématicien J. Roubaud [10, 159-160] :

«J'ai lu et relu d'innombrables fois ces définitions, toute cette première page et les pages suivantes, sans rien comprendre, littéralement sans rien comprendre. Mais je n'ai pris que peu à peu conscience du fait que la difficulté essentielle venait non d'une extrême impénétrabilité du sujet (ce n'est certes pas le cas) ni d'une incapacité congénitale de ma part à le comprendre (heureusement), mais de ce que je ne savais pas lire.

[...] Le mode de lecture romanesque, l'extrême rapidité qui m'était coutumière depuis l'enfance pour la dévoration des romans, ne pouvait à l'évidence pas me servir dans ces circonstances nouvelles.

[1]ce commentaire de Bourbaki sur la définition 1, qui semble de prime abord assez obscur, explique que, comme conséquence des axiomes, dans tout espace topologique X, le tout X et la partie vide $\emptyset$ sont des ouverts : pour Bourbaki (bon barbier selon Occkam), une réunion vide de parties (de X) est la partie vide, une intersection vide de parties est la partie pleine. Cela se justifie pleinement du point de vue «catégorique», mais guère du point de vue pédagogique, et bien d'autres exposés préfèrent être clairs et pécher par redondance en ajoutant aux axiomes (O_I) et (O_{II}) l'axiome suivant lequel X et $\emptyset$ sont des ouverts.

[...] Restait la poésie. [...] (à la différence de ce qui se passait pour la prose) je relisais la poésie sans cesse jusqu'au point d'une réappréhension de tous ses éléments au présent, dans la simultanéité du temps intérieur. [...] Je me mis donc, et sans réfléchir, à lire les paragraphes du chapitre 1 du livre de Topologie comme s'il s'agissait d'une séquence de poèmes.»

Qu'est-ce donc que comprendre une notion mathématique ? C'est plus subtil, semble-t-il, que comprendre une démonstration. Comprendre littéralement - connaître la signification des termes employés dans la définition formelle - n'est clairement pas suffisant : Il faut un complément heuristique.

Il ne suffit pas de savoir lire. Il faut disposer d'exemples significatifs pour donner corps à la définition, et éventuellement de contre-exemples pour la baliser. Il faut par ailleurs saisir la motivation et surtout l'usage de cette notion, ce qui relève tant de la connaissance de l'histoire de la discipline que de la pratique : il faut voir «fonctionner» la définition dans divers contextes.

L'exemple de base d'un espace topologique est bien entendu la droite réelle $\mathbb{R}$ munie de la topologie dont les ouverts sont les réunions (éventuellement infinies) d'intervalles (privés de leurs extrémités).

Plus généralement, l'espace $\mathbb{R}^n$ à n dimensions muni de la topologie dont les ouverts sont les réunions de boules ouvertes[2].

1.2 Voisinages.

Un *voisinage* d'un point $x \in X$ est un partie de X contenant un ouvert contenant x.

Si cette notion dérive de celle d'ouvert, on récupère, réciproquement, la notion d'ouvert à partir de celle de voisinage : un ouvert est une partie de X qui est voisinage de chacun de ses points. Ces notions sont ainsi logiquement équivalentes et il est donc possible de définir, de manière équivalente, une topologie par une axiomatique des voisinages. Cette axiomatique consiste en fait à dire que l'ensemble $\mathfrak{V}(x)$ des voisinages d'un point quelconque $x \in X$ forme un *filtre*, à savoir :

(V_I) Toute partie de X qui contient un élément de $\mathfrak{V}(x)$ (c'est-à-dire un voisinage de x) est un élément de $\mathfrak{V}(x)$.

(V_{II}) Toute intersection finie de parties de X qui sont des éléments de $\mathfrak{V}(x)$ est un élément de $\mathfrak{V}(x)$.

(V_{III}) Le vide n'est pas un élément de $\mathfrak{V}(x)$ (en effet x appartient à chacun de ses voisinages).

Revenons au problème de la compréhension des notions mathématiques. Il suit de ce que j'en ai dit qu'il s'agit d'un processus progressif - qui peut passer par le malentendu. Il est en tout cas fort utile de se forger une représentation (même fantaisiste) donnant un contenu intuitif à la présentation formelle - sans jamais toutefois confondre celle-ci avec celle-là.

[2] la boule ouverte de centre x et de rayon r est l'ensemble des points à distance strictement inférieure à r de x.

Écoutons par exemple le commentaire de Roubaud à propos du filtre des voisinages [10, 164-165, 199] :

«C'est ici que le mot *filtre*, et l'image qu'aussitôt il évoque vient s'interposer entre la topologie telle qu'elle est [...] et le souvenir que j'en ai gardé.

Cela veut dire qu'il ne m'était pas possible alors, qu'il ne m'est pas possible encore aujourd'hui de ne pas voir ces filtres, et surtout de ne pas les voir comme liés, et même surimprimés à une représentation mentale de ces objets exaspérants qu'étaient les cafés-filtres des cafés.

[...] Je pense tout particulièrement à la lenteur générale de l'écoulement de leur contenu, cette soupe brunâtre qualifiée sans honte de café, qui m'amenait à les saisir, en dépit de toutes mes expériences antérieures, avant l'achèvement du trajet de haut en bas du liquide et par conséquent à me brûler les doigts ; puis à me brûler la langue en essayant de m'en débarrasser trop tôt en les buvant. Je les vois et je vois aussitôt quelque chose comme une icône d'espace topologique, une sorte de grande prairie de «points», chacun placé au-dessous d'une tasse-filtre, son «filtre de voisinages».

[...] Cette image donnait à l'idée de point une tout autre représentation que celle de la géométrie élémentaire scolaire et elle s'est pour moi entièrement substituée à la première.

Et je ne vous parlerai pas des divins et singuliers ultrafiltres.

[...] Si je m'y attarde un peu, le paysage glisse vers autre chose, vers un support de narration ; il devient un paysage «carrollien», où une licorne vient boire dans les tasses avec une unique paille au-dessus de son unique corne. Elle en fausse la topologie, bien sûr. [...] Tel est le scénario irrémédiablement frivole, mathématiquement irresponsable, dont j'accompagne en pensée l'idée de topologie. [...] On ne commande pas aisément ce qui peuple notre espace intérieur, et ses lointains. »

1.3 Intérieur et frontière.

L'*intérieur* d'une partie A de X est l'ensemble des points de A dont A est un voisinage. On le note A°.

C'est encore une notion logiquement équivalente à celle d'ouvert : une partie est ouverte si et seulement si elle est son propre intérieur. On peut donc définir une topologie par une axiomatique des intérieurs[3] :

$$X^\circ = X,\ A^\circ \subset A,\ (A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ,\ A^{\circ\circ} = A^\circ.$$

La *frontière* d'une partie A de X est l'ensemble des points de X qui ne sont ni à l'intérieur de A, ni à l'intérieur du complémentaire de A.

Voici la vision «éthologique» de l'intérieur et de la frontière (d'un territoire) que propose le mathématicien R. Thom [11, 41, 43], fondateur d'une théorie topologique de la morphogenèse :

«Si l'on examine les emplois actuels du mot *lieu* en français, on observera qu'un lieu demande toujours un habitant qui en fait sa résidence. [...] De là l'hypothèse que le mot *topos* implique un être humain ou un animal qui séjourne (normalement) en ce lieu.

[3] C'est cette axiomatique qui est utilisée, par exemple, par A. Badiou [1, VI].

[...] On peut partir de l'hypothèse (simpliste) qu'Aristote, s'imaginant un être vivant, le dotera d'un territoire. [...] Mais ce domaine aura, dans la pratique, des bornes que l'individu préférera ne pas franchir. De là la notion [...] de limites : les *eschata*.

[...] En fait, selon la conception ici proposée, la théorie des lieux serait liée à un problème central de l'éthologie actuelle : comment un animal (ou un humain) se repère-t-il au sein de son territoire ? »

1.4 De l'espace topologique au treillis de ses ouverts.

Bien que moins «intuitive» que la notion de voisinage, la notion d'ouvert s'avère souvent techniquement plus utile.

L'ensemble $\mathfrak{O}$ des ouverts d'un espace topologique X est muni d'une structure de *treillis* : c'est un ensemble ordonné[4] (par l'inclusion $\subset$), muni de deux lois de composition associatives $\cap$ et $\cup$ (en général : la borne inférieure et la borne supérieure ; ici, l'intersection et la réunion) qui vérifient la propriété suivante :

pour tous $U, V \in \mathfrak{O}$, $U \cap (U \cup V) = U \cup (U \cap V) = U$.

En associant à l'espace topologique $(X, \mathfrak{O})$ le treillis des ouverts $\mathfrak{O}$, il semble donc qu'on oublie les points de X. Or il n'en est rien : sous une condition extrêmement faible de séparation - la *sobriété*, toujours vérifiée en pratique - on ne perd rien : *on peut reconstruire l'ensemble X à partir du treillis $\mathfrak{O}$.*

L'idée est simple : on identifie un point $x \in X$ au filtre de ses voisinages ouverts.

1.5 Applications continues.

Une application $f : X \to Y$ entre espaces topologiques est dite *continue* si l'image *inverse* par f de tout ouvert de Y est un ouvert de X.

Une telle application f induit donc une application f^*, dans l'autre sens, entre le treillis des ouverts de Y et celui des ouverts de X.

Lorsque l'espace but Y est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni de sa topologie naturelle[5], on dit que f est une fonction continue (à valeurs réelles ou complexes). L'algèbre $C(X, \mathfrak{O})$ que forment ces fonctions jouait un rôle-clé dans l'exposé précédent.

Terminons ce paragraphe en concluant que la topologie générale a réussi à formaliser les notions de voisinage, frontière, continuité (et bien d'autres : limites, connexité, compacité etc...) de manière purement qualitative, sans faire appel à la notion de distance ou de mesure.

2 L'idée de surface de Riemann. Sites.

2.1 «Ambiguïtés».

Tout polynôme, tel que x^2 ou bien x^3+1 définit une fonction (continue) d'une variable réelle ou complexe ($x \mapsto x^2$ ou $x \mapsto x^3 + 1$, etc...).

[4]un ordre $\leq$ sur un ensemble X est une relation binaire $x \leq y$ entre les éléments de X qui vérifie les conditions suivantes : $x \leq x$, $(x \leq y \,\text{et}\, y \leq x) \Rightarrow x = y$, $(x \leq y \,\text{et}\, y \leq z) \Rightarrow x \leq z$.

[5]rappelons que $\mathbb{C}$ s'identifie canoniquement à $\mathbb{R}^2$ (en décomposant un nombre complexe en sa partie réelle et sa partie imaginaire), cette topologie est induite par celle de $\mathbb{R}^2$.

La situation est plus délicate pour une fonction algébrique telle que $\sqrt{x}$ ou bien $\sqrt{x^3+1}$. Elle définit bien une fonction (continue) d'une variable réelle positive. En revanche, elle n'est pas bien définie en tant que fonction d'une variable complexe : si l'on part d'un point x non nul, et qu'on tourne autour de 0, cette fonction variera continûment, mais en revenant à x au bout d'un tour, la valeur ne sera pas la valeur initiale, mais son opposé : $-\sqrt{x}$ ou $-\sqrt{x^3+1}$. On n'obtiendra la valeur initiale qu'au bout d'un second tour. Il y a donc une ambiguïté (dans notre exemple : un signe) qui empêche de considérer une fonction algébrique comme une fonction (d'une variable complexe) bien définie.

2.2 Revêtements à plusieurs feuillets.

C'est Riemann qui a trouvé comment lever l'ambiguïté et donner à ces soi-disantes fonctions «multiformes» f le statut d'authentiques fonctions bien définies. Pour cela, il convient de regarder f comme une fonction définie non pas sur le plan complexe $X = \mathbb{C}$ ou l'un de ses ouverts, mais sur un certain *revêtement à plusieurs feuillets* de $\mathbb{C}$, (appelé *surface de Riemann* de f).

L'exemple de $f(x) = \sqrt{x}$ est trivial : on considère une autre copie Y de $\mathbb{C}$ qu'on voit comme revêtement à deux feuillets du plan complexe original X via la fonction $y \mapsto x = y^2$ (les deux feuillets se touchent au point de ramification $y = 0$). Alors f devient la fonction identique $y \mapsto y = \sqrt{x}$ sur Y.

Autrement subtil est le cas de $f(x) = \sqrt{x^3+1}$. Sa surface de Riemann est encore un revêtement à deux feuillets (qui se touchent en trois points de ramification), qui n'est plus du tout le plan complexe (c'est ce que l'on appelle une courbe elliptique : topologiquement, c'est une «bouée»).

2.3 Du treillis des ouverts aux sites de Grothendieck.

Retenons de cela que pour traiter correctement des fonctions algébriques, il convient de remplacer les ouverts de X par des revêtements à plusieurs feuillets d'ouverts de X.

Grothendieck, élargissant cette idée aux variétés algébriques de dimension quelconque, a proposé de généraliser «catégoriquement» la notion de topologie de la manière suivante, en introduisant les sites.

Un *site* est une catégorie $\mathcal{S}$ muni de la donnée, pour chaque objet U de $\mathcal{S}$, de familles $(U_i \to U)$ (dites couvrantes) de morphismes de but U, stables par changement de base et composition.

Tout espace topologique classique fournit un site : le treillis de ses ouverts (vu comme catégorie, les morphismes étant donnés par les inclusions[6]), une famille couvrante de but l'ouvert U étant une collection d'ouverts U_i contenus dans U dont la réunion est égale à U.

La première application (et la plus importante, sans doute) de cette généralisation de la notion de topologie est la construction du site étale attaché à une variété algébrique X, dont les objets sont les morphismes $U \to X$ «étales», c'est-à-dire à un nombre fini de feuillets qui ne se touchent pas (pas de ramification). Ce site pallie l'absence de théorème des fonctions implicites en géométrie algébrique.

[6] voir plus bas, 5.1.

3 Du local au global. Faisceaux.

3.1 Données locales (préfaisceaux).

Rappelons que les *variétés* de dimension n sont des objets géométriques *localement* isomorphes à des ouverts de $\mathbb{R}^n$.

En général, bien entendu, elles ne sont pas globalement isomorphes à des ouverts de $\mathbb{R}^n$ (penser au ruban de Möbius ou la bouée).

Les problèmes de passage du local au global (problèmes de recollement, en particulier) sont fondamentaux en géométrie (et au-delà). Un concept universel pour poser et traiter ces problèmes est celui de *faisceau*, introduit par J. Leray vers 1945 et mis au point par H. Cartan.

Pour commencer, on formalise l'idée de données locales par la notion de préfaisceau : un *préfaisceau* $\mathcal{F}$ sur un espace topologique X est une règle qui associe à chaque ouvert U de X un ensemble $\mathcal{F}(U)$ (de «données locales») et à chaque inclusion d'ouverts $V \subset U$ une application dite de *restriction* $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$. On demande que pour une inclusion composée $W \subset V \subset U$, la restriction correspondante soit la composée des restrictions.

Les éléments de $\mathcal{F}(U)$ s'appellent les *sections* de $\mathcal{F}$ au-dessus de U.

Un morphisme de préfaisceau $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est la donnée, pour tout ouvert U d'une application $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ compatible aux applications de restriction.

3.2 Recollement de données locales compatibles (faisceaux).

Un préfaisceau $\mathcal{F}$ est un faisceau si toute famille $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ de sections «locales» compatibles (*i.e.* telles que les restrictions de s_i et s_j coïncident dans $\mathcal{F}(U_i \cap U_j)$) se recolle en une unique section «globale» $s \in \mathcal{F}(\bigcup U_i)$ (dont la restriction à U_i est s_i). Ici les U_i sont des ouverts quelconques de X.

Donnons quelques exemples.

Si X est un espace topologique, les fonctions continues forment un faisceau sur X.

Si X est en outre une variété lisse (ou algébrique), on dispose du faisceau $\mathcal{T}_X$ des champs de vecteurs tangents sur X.

On dispose aussi du faisceau d'orientation ε_X, dont les valeurs sont contenues dans $\{1, -1\}$ (X est orientable si et seulement si $\varepsilon_X(X) \neq \emptyset$).

3.3 Théorie des obstructions et cohomologie des faisceaux.

L'obstruction à recoller des données locales s'exprime donc en général par le fait qu'un certain préfaisceau n'est pas un faisceau. Mais on peut souvent aller plus loin, et donner à une telle obstruction le statut d'un objet mathématique.

Voici un cas typique. Considérons un faisceau abélien $\mathcal{F}$ (c'est-à-dire un faisceau de groupes commutatifs), et un sous-faisceau abélien $\mathcal{G}$. On peut alors former le quotient au sens naïf : c'est le préfaisceau qui associe à tout ouvert U le groupe quotient $\mathcal{F}/\mathcal{G}$. En général, ce n'est pas un faisceau : l'obstruction à ce qu'il en soit ainsi peut être vue comme un élément d'un certain «groupe de cohomologie» $H^1(\mathcal{G})$.

La théorie des obstructions a pour objet de fournir des interprétations «cohomologiques» aux obstructions à diverses constructions mathématiques : recollement, déformation, etc... Par exemple, l'obstruction à déformer un variété X peut être vue comme un élément du groupe de cohomologie $H^1(X, \mathcal{T}_X)$.

Dans un second volet, la théorie fournit des critères généraux pour l'annulation de ces groupes de cohomologie (annulation qui entraîne l'absence d'obstruction au problème posé).

Par ailleurs, les obstructions elles-mêmes, une fois interprétées cohomologiquement, posent des problèmes de recollement, qui conduisent à considérer aussi des obstructions supérieures, qui vivent dans des groupes $H^i(U, \mathcal{F}),\ i > 1$. La cohomologie des faisceaux[7], c'est-à-dire la théorie de ces groupes $H^i(U, \mathcal{F})$, est un outil très souple et fondamental en géométrie analytique ou algébrique.

4 Faisceaux sur un site. Topos de Grothendieck.

Comme Grothendieck l'a observé, la définition des préfaisceaux et faisceaux se transpose à tout site $\mathcal{S}$: un préfaisceau sur $\mathcal{S}$ est un foncteur contravariant $\mathcal{F}$ de $\mathcal{S}$ vers la catégorie des ensembles, et c'est un faisceau si pour toute famille couvrante $(U_i \to U)$, une section globale $s \in \mathcal{F}(U)$ s'identifie à une famille de sections locales $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ «compatibles».

Dans le cas où $\mathcal{S} = \mathfrak{O}$ est le treillis des ouverts d'un espace topologique X, on retrouve bien la notion de faisceau sur X.

Grothendieck appelle *topos* toute catégorie $\mathcal{X}$ équivalente à la catégorie $\mathcal{F}aisc_{\mathcal{S}}$ des faisceaux sur un site.

Exemples : le topos ponctuel, *i.e.* la catégorie des faisceaux sur l'espace-point, n'est autre que la catégorie des ensembles.

Si G est un groupe, la catégorie BG des ensembles sur lesquel G opère est un topos.

Le topos étale d'une variété algébrique X est la catégorie des faisceaux sur le site étale de X. Chaque topos donne lieu à une théorie de cohomologie. Celle du topos étale, appelée *cohomologie étale* s'est avérée parfaitement adaptée à la géométrie algébrique et a constitué l'outil principal de démonstration des conjectures de Weil[8].

Des sites différents peuvent donner des topos équivalents. En revanche, le topos des faisceaux sur un espace topologique (sobre) détermine cet espace - nous verrons comment ci-dessous (5.4). C'est en ce sens qu'on peut dire que la notion de topos généralise celle d'espace topologique tout en englobant à la fois l'idée de surface de Riemann et celle de faisceau de Leray. Au bout de ce double mouvement, on a remplacé les espaces topologiques par les topos de faisceaux associés :

$$\text{Espace topologique} \quad (X, \mathfrak{O}) \rightsquigarrow \text{Site} \quad \mathfrak{O} \rightsquigarrow \text{Topos} \quad \mathcal{X} = \mathcal{F}aisc_X.$$

[7] dont les pionniers sont Cartan, Serre et Grothendieck.

[8] ces conjectures arithmético-géométriques qui datent de 1949 concernent le nombre de solutions modulo un nombre premier - ou plus généralement dans un corps fini - d'un système d'équations polynômiales à coefficients entiers. Elles étaient l'horizon des recherches de Grothendieck, et ont finalement été démontrées par lui-même et puis par Deligne (1973).

Ce faisant, on n'a rien perdu, puisqu'on peut reconstruire l'espace topologique[9] *à partir du topos associé, et on a gagné une structure beaucoup plus souple, puisque les topos permettent essentiellement toutes les opérations familières dans la catégorie des ensembles. En mettant l'accent sur les conditions de recollement, on a ainsi extrait les propriétés intrinsèques de localisation de X en «oubliant» ses points.*

Comme l'écrit Grothendieck [5, 56-57] : «Cette notion [de topos] constitue une extension insoupçonnée, pour mieux dire, *une métamorphose de la notion d'espace.* [...] Elle possède les deux caractères complémentaires essentiels pour toute généralisation fertile, que voici.

Primo, la nouvelle notion n'est pas trop vaste, en ce sens que dans les nouveaux «espaces», les intuitions et les constructions «géométriques» les plus essentielles, familières pour les bons vieux espaces d'antan, peuvent se transposer de façon plus ou moins évidente. [...]

Et secundo, la nouvelle notion est en même temps assez vaste pour englober une foule de situations qui jusque là, n'étaient pas considérées comme donnant lieu à des intuitions de nature «topologico-géométrique» - aux intuitions, justement, qu'on avait reservées par le passé aux seuls espaces topologiques ordinaires. »

5 Interlude : catégories, foncteurs, adjonction.

5.1 Catégories.

Les catégories ont fait leur apparition discrète à plusieurs reprises dans ces exposés. La notion de foncteur vient même d'être évoquée. Il est temps de faire halte pour préciser ces notions fondamentales.

Une *catégorie* $\mathcal{C}$ consiste d'une part en une collection d'objets A, et d'autre part en la donnée, pour tout couple d'objets (A, B), d'un ensemble $\mathcal{C}(A, B)$ dont les éléments sont appelés morphismes (ou flèches) de A vers B.

On requiert que les morphismes se composent lorsque cela fait sens (*i.e.* le composé gf de $f \in \mathcal{C}(A, B)$ et de $g \in \mathcal{C}(B, C)$ est un élément de $\mathcal{C}(A, C)$), la composition étant associative. On requiert aussi qu'il y ait un morphisme identité 1_A de A vers lui-même, qui composé avec tout morphisme de source ou de but A, ne le modifie pas.

L'exemple de base est la catégorie *Ens* des ensembles (les morphismes entre deux ensembles étant les applications quelconques entre ces ensembles). On en déduit d'autres catégories par addition de structure : la catégorie des espaces vectoriels (objets : espaces vectoriels, morphismes : applications linéaires), la catégorie des espaces topologiques (objets : espaces topologiques, morphismes : applications continues), la catégorie $\mathcal{F}aisc_X$ des faisceaux sur en espace topologique fixé X etc...

Le point de vue catégorique (par opposition au point de vue ensembliste) consiste à ne considérer et manipuler que les espaces et surtout les morphismes qui les relient, et non les points : *on occulte délibérément la structure interne des objets.*

Tout groupe peut être vu comme une catégorie à un seul objet, les morphismes étant les éléments du groupe.

[9]supposé sobre.

Tout ensemble ordonné $(X, \leq)$ (par exemple un treillis) peut être vu comme une catégorie (objets : les éléments x de X, morphismes de x vers y : un seul si $x \leq y$, aucun sinon).

L'*opposée* $\mathcal{C}^{op}$ d'une catégorie $\mathcal{C}$ s'obtient en prenant les mêmes objets et en renversant le sens des flèches : $\mathcal{C}^{op}(A, B) = \mathcal{C}(B, A)$.

5.2 Foncteurs.

De même que les ensembles sont reliés par des applications, les catégories sont reliées par des foncteurs.

Un *foncteur* (covariant) $\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ associe à chaque objet A de $\mathcal{C}$ un objet $\phi(A)$ de $\mathcal{D}$ et à chaque morphisme $f \in \mathcal{C}(A, B)$ un morphisme $\phi(f) \in \mathcal{D}(\phi(A), \phi(B))$. On requiert que ϕ préserve les identités et la composition.

Un *foncteur contravariant* ψ de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ est un foncteur $\psi : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$.

Donnons deux types d'exemples, d'allure banale, mais très utiles en pratique :

- si $\mathcal{C}$ est une catégorie d'ensembles enrichis d'une structure (espaces vectoriels, espaces topologiques etc...), on dispose d'un foncteur d'oubli $\mathcal{C} \to Ens$: ensemble sous-jacent.

- Tout objet A de $\mathcal{C}$ donne lieu à un foncteur contravariant de $\mathcal{C}$ vers Ens : $\mathcal{C}(?, A)$ (où ? désigne un objet variable). Par le lemme de Yoneda, ce foncteur détermine l'objet A. Un foncteur contravariant de cette forme est dit *représentable*.

Dans un topos, le foncteur contravariant qui à tout objet U associe l'ensemble de ses sous-objets est représentable par un objet Ω appelé classifiant. Pour le topos ponctuel, Ω est l'ensemble à deux éléments.

Les foncteurs eux-mêmes (de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$) peuvent être vus comme objets d'une nouvelle catégorie, dont on laisse au lecteur deviner la définition des morphismes[10].

5.3 Foncteurs adjoints.

Soit $(\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D},\ \psi : \mathcal{D} \to \mathcal{C})$ un couple de foncteurs allant en sens opposés.

Ces foncteurs sont dits *adjoints* si pour tout objet A de $\mathcal{C}$ et tout objet B de $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}(A, \psi(B))$ s'identifie[11] à $\mathcal{D}(\phi(A), B)$. Noter que la notion n'est pas symétrique ; on dit que ϕ est adjoint à gauche de ψ, et ϕ adjoint à droite de ψ.

Il s'agit là d'un concept aussi fondamental que difficile à comprendre[12].

Bien des foncteurs d'oubli $\psi : \mathcal{D} \to Ens$ admettent un adjoint à gauche ϕ, $\phi(A)$ correspondant à l'objet «libre» de base A (c'est par exemple le cas lorsque $\mathcal{D}$ est la catégorie des espaces vectoriels : $\phi(A)$ est l'espace vectoriel de base A).

[10] Les morphismes de foncteurs s'appellent aussi *transformations naturelles*. Pour éviter des paradoxes ensemblistes, il convient à ce niveau de supposer que les objets de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ forment des ensembles ; mais peu nous chaut ici...

[11] fonctoriellement en A et B bien entendu. Noter par ailleurs l'analogie formelle avec la définition des opérateurs adjoints ϕ et ψ sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, au chapitre précédent : pour tout couple de vecteurs x, y de $\mathcal{H}$, $\langle x, \psi(y) \rangle = \langle \phi(x), y \rangle$.

[12] c'est semble-t-il un cas extrême d'hysteresis entre compréhension littérale et compréhension réelle. On prendra garde à ne surtout pas confondre cette notion avec celle d'inverse : il n'y a que ici d'inversion que le sens des foncteurs.

Bien des foncteurs d'inclusion admettent un adjoint à gauche. Exemples : l'abélianisation (adjoint à gauche de l'inclusion de la catégorie des groupes abéliens (= commutatifs) dans celle de tous les groupes), la faisceautisation (adjoint de l'inclusion de la catégorie des faisceaux dans celle des préfaisceaux), la «cure de désintoxication» (adjoint de l'inclusion de la catégorie des espaces topologiques sobres dans celle de tous les espaces topologiques).

Bien des foncteurs diagonaux $\mathcal{D} \to \mathcal{D}^I$ admettent à la fois un adjoint à gauche (appelé limite inductive et notée $\varinjlim_I$) et un adjoint à droite (appelé limite projective et notée $\varprojlim_I$).

5.4 Application : morphismes de topos et points d'un topos.

Soit $f : X \to Y$ une application continue. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur X, on définit un faisceau $f_*\mathcal{F}$ sur Y par $f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$. Si $\mathcal{G}$ est un faisceau sur Y, on définit un faisceau $f^*\mathcal{G}$ sur X par $f^*\mathcal{G}(U) = \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{G}(V)$; en particulier, si f est l'inclusion d'un point $y \in Y$, l'ensemble $f^*\mathcal{G}(\{y\})$ est la *fibre de $\mathcal{G}$ en y*.

On obtient ainsi un couple de foncteurs adjoints

$$(f^* : \mathcal{F}aisc_Y \to \mathcal{F}aisc_X,\ f_* : \mathcal{F}aisc_X \to \mathcal{F}aisc_Y) :$$

$$\mathcal{F}aisc_Y(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}) = \mathcal{F}aisc_X(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}).$$

On peut maintenant préciser comment on récupère un espace topologique (sobre) X à partir du topos $\mathcal{X} = \mathcal{F}aisc_X$ de ses faisceaux : l'idée est d'identifier un point $x \in X$ au foncteur «fibre en x» : $\mathcal{X} \to Ens$.

Plus généralement, Grothendieck définit la notion de morphisme de topos $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ comme la donnée d'un couple de foncteurs adjoints $f = (f^* : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}, f_* : \mathcal{X} \to \mathcal{Y})$, f^* commutant aux limites projectives finies[13].

Prenant pour $\mathcal{X}$ le topos ponctuel, on obtient la notion de *point* du topos $\mathcal{Y}$. La définition est raisonnable car dans le cas du topos $\mathcal{Y} = \mathcal{F}aisc_Y$ des faisceaux sur un espace topologique (sobre) Y, on retrouve bien les points de Y.

Mais il existe des topos exotiques sans aucun point !

6 Topos et logique intuitionniste.

6.1 Les topos entre géométrie et logique.

La transition est excellemment présentée par P. Cartier [4, 23] :

«[Grothendieck] avait remarqué que les faisceaux sur un espace donné formaient une une catégorie qui avait, en gros, toutes les propriétés de «la» catégorie des ensembles. Or, après les résultats d'indécidabilité de Gödel et de Cohen en théorie des ensembles, il y a

[13] c'est-à-dire des $\varprojlim_I$ avec I fini.

non pas *une* théorie des ensembles, mais *divers modèles* non équivalents de la théorie des ensembles (au sens logique de «modèle»). Il était donc naturel d'explorer les relations entre topos et modèles de la théorie des ensembles. [...]

Il appartint à d'autres (surtout Bénabou, Lawvere et Tierney) de résoudre l'énigme : les topos sont exactement les modèles de la théorie des ensembles, mais dans une logique particulière, qu'on appelle «intuitionniste», et où le prinicipe du tiers exclu n'est pas valable. Il est très remarquable que cette logique ait été inventée par un fameux topologue, Brouwer, et qu'avec un peu de recul, elle s'impose naturellement en vertu du fait que l'intérieur de l'adhérence d'un ensemble ouvert ne lui est pas égal.

Mais l'invention des topos donne une liberté inouïe au jeu mathématique, et permet de briser le carcan de «la» théorie des ensembles. Rejouer une pièce mathématique bien connue dans le décor nouveau d'un topos exotique peut amener des surprises, et faire découvrir des accents nouveaux dans des vers ressassés ; parfois, cette nouvelle représentation révèle des trésors mathématiques. D'un point de vue plus général, un topos porte en lui sa propre logique, et définit donc une espèce de logique modale, ou plutôt une logique du *hic* et du *nunc*, une logique spatio-temporelle où la valeur de vérité d'une assertion peut dépendre du lieu et du temps.»

6.2 Règles du calcul propositionnel : formulaire.

Je me limiterai à logique des propositions, pour simplifier au maximum. Mais ce qui suit s'étend à la logique des prédicats[14] et même à la logique plus sophistiquée des «types».

Commençons par rappeler le formulaire des règles de déduction en logique des propositions. Si p et q sont des propositions (ou formules logiques), notons $\neg p$ la négation de p, $p \wedge q$ la conjonction de p et q, $p \vee q$ leur disjonction, $p \Rightarrow q$ la proposition «p implique q», et $\rightsquigarrow$ l'inférence : de p on infère q.

Les axiomes et règles de déduction sont les suivantes (en notant F le faux et V le vrai) :

$$F \rightsquigarrow p, \;\; p \rightsquigarrow V, \;\; p \rightsquigarrow p,$$

$$\neg p \rightsquigarrow (p \Rightarrow F), \;\; (p \Rightarrow F) \rightsquigarrow \neg p,$$

$$\frac{p \rightsquigarrow q, \, q \rightsquigarrow r}{p \rightsquigarrow r}, \;\; \frac{p \rightsquigarrow q \wedge r}{p \rightsquigarrow q}, \;\; \frac{p \rightsquigarrow q \wedge r}{p \rightsquigarrow r}, \;\; \frac{p \rightsquigarrow q, \, p \rightsquigarrow r}{p \rightsquigarrow q \wedge r},$$

$$\frac{p \vee q \rightsquigarrow r}{p \rightsquigarrow r}, \;\; \frac{p \vee q \rightsquigarrow r}{q \rightsquigarrow r}, \;\; \frac{p \rightsquigarrow r, \, q \rightsquigarrow r}{p \vee q \rightsquigarrow r},$$

$$\frac{p \wedge q \rightsquigarrow r}{p \rightsquigarrow (q \Rightarrow r)}, \;\; \frac{p \rightsquigarrow (q \Rightarrow r)}{p \wedge q \rightsquigarrow r}.$$

(par la notation «fractionnaire», on entend que le dénominateur se déduit du numérateur).

On a alors $\neg\neg\neg p \rightsquigarrow \neg p$, mais l'inférence $\neg\neg p \rightsquigarrow p$ ne se déduit pas des règles précédentes et n'est pas valide en logique intuitionniste. Cette inférence est l'axiome supplémentaire (tiers exclu) qu'impose la logique classique.

[14]la logique des prédicats fait intervenir les quantificateurs universel $\forall$ et existentiel $\exists$, qui du reste peuvent s'interpréter comme adjoints à gauche et à droite respectivement d'un même foncteur.

6.3 Logique intuitionniste et algèbres de Heyting.

Si l'inférence $\leadsto$ est interprétée comme une relation d'ordre $\leq$, le calcul des propositions forme une *algèbre de Heyting*, c'est-à-dire un treillis avec plus petit élément F et plus grand élément V, ayant la propriété que le foncteur $? \wedge y$ (du treillis dans lui-même) admet un adjoint à droite (c'est $? \Rightarrow y$).

Plus précisément, une proposition p est valide en logique intuitionniste si et seulement son interprétation dans toute algèbre de Heyting l'est.

Le treillis des ouverts $\mathfrak{O}$ d'un espace topologique X est une algèbre de Heyting. Dans cette algèbre, l'inférence $\leadsto$ s'interprète comme l'inclusion $\subset$ (des ouverts les uns dans les autres), la conjonction $\wedge$ s'interprète comme l'intersection $\cap$, $\vee$ comme la réunion $\cup$, et la *négation* $\neg$ *comme l'intérieur du complémentaire*[15] :

$$\neg U = (X \setminus U)^{\circ}.$$

Plus généralement, dans tout topos $\mathcal{X}$, le treillis des sous-objets d'un objet A de $\mathcal{X}$ (treillis dont l'ensemble sous-jacent est $\mathcal{X}(A, \Omega)$ par définition du classifiant Ω), est une algèbre de Heyting.

La logique intuitionniste s'interprète donc dans tout topos de Grothendieck. Le classifiant apparaît comme *«faisceau» de valeurs de vérités.* Dans le topos ponctuel, cette logique devient classique : $\Omega = \{V, F\}$.

Ce qu'on vient d'esquisser n'est que le début de la logique toposique[16], qui a précédé la logique des interactions évoquée dans l'exposé précédent - tout en lui demeurant complémentaire.

****

Bien que cela dépasse largement notre cadre, je ne peux omettre, en terminant, de signaler que la logique toposique forme le substrat mathématique de la logique de l'apparaître dans la philosophie d'A. Badiou et irrigue la construction des principaux concepts de son livre Logiques des Mondes.

Ni de signaler que les topos jouent un rôle fondamental dans la théorie mathématique de la musique de G. Mazzola [8], où ils permettent notamment d'effectuer le passage du local au global dans le contexte «discret» des compositions musicales.

****

[15] cette interprétation topologique de la logique intuitionniste fait ressortir la non-validité du tiers-exclu : par exemple si X est la droite, et U la droite privée d'un point, $\neg U = \emptyset$, et $\neg\neg U = X$ qui n'est pas contenu dans U, de sorte que $\neg\neg U \leadsto U$ n'est pas valide.

[16] pour les besoin de la logique, la notion de topos que Lawvere et Tierney et leurs successeurs utilisent est un peu plus générale que celle de Grothendieck.

Bibliographie

[1] - A. Badiou, Logiques des Mondes, Seuil 2006

[2] - N. Bourbaki, Topologie générale, Hermann 1971

[3] - P. Cartier, «Catégories, logique et faisceaux ; modèles de la théorie des ensembles», Séminaire Bourbaki, exposé 513, 1978

[4] - P. Cartier, «Grothendieck et les motifs», Prépublication IHES (2000)

[5] - A. Grothendieck, Récoltes et Semailles, notes miméographiées (désormais accessibles sur la Toile comme fichier pdf)

[6] - L. Illusie, «What is a topos ?», Notices of the AMS 51, 9 (2004), 1060-106

[7] - S. Mac Lane, I. Moerdijk, Sheaves in geometry and logic. A first introduction to topos theory. Universitext. Springer-Verlag, New York, 1994

[8] - C. Mac Larty, The uses and abuses of the history of Topos Theory,The British Journal for the Philosophy of Science, 2003

[9] - G. Mazzola, The topos of Music, Birkhäuser 2002

[10] - J. Roubaud, Mathématique : (récit), Seuil 1997

[11] - R. Thom, «Aristote topologue», Revue de Synthèse (1999), 39-48

[12] - H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche, 1913

Troisième séance
samedi 12 mai 2007

Idées galoisiennes
(symétries et invariants)

«Il existe pour ces sortes d'équations
un certain ordre de considérations métaphysiques
qui planent sur les calculs
et qui souvent les rendent inutiles.»

«Sauter à pieds joints sur les calculs,
grouper les opérations, les classer
suivant leur difficulté et non suivant leur forme,
telle est selon moi la mission des géomètres futurs.»

É. Galois.

****

Évariste Galois : révolutionnaire - en politique et en mathématique - mort en 1832 dans sa vingtième année.

Éduqué par sa mère à Bourg-la-Reine (dont son père est le maire), puis élève au lycée Louis-le Grand où il se passionne pour les mathématiques suite à la lecture, à quinze ans, des Éléments de Géométrie de Legendre, Galois commence à lire les mémoires des grands mathématiciens contemporains (Lagrange, Gauss, Jacobi), et obtient le premier prix du concours général dans cette discipline. Il échoue néanmoins au concours d'entrée à l'École Polytechnique, quelques jours après le suicide de son père suite à une cabale du curé du village. Il obtient, dès dix-huit ans, des résultats mathématiques d'une portée incomparable («théorie de l'ambiguïté», théorie des intégrales abéliennes) qu'on a pu qualifier d'acte de naissance des mathématiques contemporaines.

Pendant la révolution de juillet 1830, Galois est élève à l'École Préparatoire (future École Normale Supérieure), et consigné comme ses condisciples[1]. Suite à la publication de deux lettres de lui (brocardant le directeur, et la misère de l'enseignement scientifique), il est renvoyé, et, sans ressource, ouvre un cours privé d'algèbre supérieure chez un libraire du quartier latin.

Il s'engage alors très activement dans la lutte politique, au sein de la Société des Amis du Peuple présidée par Raspail. Toast régicide puis manifestation en tenue illégale de garde républicain lui valent de passer l'essentiel de la dernière année de sa vie en prison. C'est en partie là qu'il rédige ses mémoires les plus importants, dont la plupart ont été perdus (par Cauchy et par Fourier) ou rejetés (par Poisson). Il meurt fin mai 1832, à vingt ans et demi, le lendemain d'un duel dont les circonstances restent obscures

[1] du côté musical, rappelons que 1830 est l'année de la Symphonie Fantastique de Berlioz.

(«pour une infâme coquette», écrit-il). La nuit précédant le duel, il a écrit une splendide lettre-testament qui sera évoquée ci-dessous.

Épilogue : en 1843, Liouville exhume un mémoire de Galois et expose la «théorie de l'ambiguïté» à l'Académie des Sciences. Depuis, l'influence de ces idées n'a cessé de croître.

En suivre certaines lignes de force jusque dans les mathématiques les plus contemporaines, tel est l'objet de cet exposé dont le thème central est celui de *groupe de symétries* et d'*invariant*.

Plan

****

1 Théorie de Galois des équations algébriques.

1.1 Résolubilité par radicaux.

«Mon cher Ami, j'ai fait en analyse plusieurs choses nouvelles. Les unes concernent la théorie des équations, les autres les fonctions intégrales. Dans la théorie des équations, j'ai recherché lesquelles étaient résolubles par radicaux...» Ainsi débute la lettre-testament de Galois.

Une équations algébrique de degré n est une équation de la forme

$$(*) \quad x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

où les coefficients a_i sont des constantes (par exemple des nombres rationnels), et x est l'inconnue (appelée racine de l'équation).

La recherche de «formules» pour les racines x d'une telle équation est un problème très ancien, qui, au XVI^e siècle avait été résolu jusqu'au degré $n = 4$ au moyen de techniques de changement de variables et substitutions (Tartaglia, Cardano[2], del Ferro, Ferrari). Ces formules se présentent sous la forme d'expressions faisant intervenir des radicaux $\sqrt[m]{\ }$, pour $m \leq n$.

[2] Ars Magna, 1545.

Par exemple, la formule donnant une solution de l'équation du troisième degré

$$x^3 + a_1x + a_0 = 0$$

est

$$x = \sqrt[3]{-\frac{a_0}{2} + \sqrt{(\frac{a_0}{2})^2 + (\frac{a_1}{3})^3}} + \sqrt[3]{-\frac{a_0}{2} - \sqrt{(\frac{a_0}{2})^2 + (\frac{a_1}{3})^3}}.$$

On notera toutefois que de telles formules présentent des ambiguïtés techniques (dans la prise des radicaux), liées à une ambiguïté de fond : comment briser l'indiscernabilité a priori des racines de l'équation ?

Autre souci : ces formules peuvent faire intervenir des racines carrées de nombres négatifs (exclus jusqu'au XVI^e siècle), même lorsque la solution x est rationnelle : par exemple la formule précédente exprime la racine $x = 4$ de l'équation $x^3 - 15x - 4$ sous la forme alambiquée

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Ces problèmes étaient néanmoins à peu près circonscrits (sinon réglés) après les travaux de Bombelli. À la fin du XVI^e, Viète systématisa l'usage des lettres pour noter coefficients et inconnues, et découvrit la relation entre coefficients de $(*)$ et fonctions symétriques des racines. Malgré tout l'intérêt du bouleversement conceptuel qui accompagna l'assimilation progressive des racines imaginaires et la clarification de la notion-même de racine[3], je n'en dirai pas plus, considérant que cela appartient à la préhistoire de notre sujet.

Il fallut plus de deux siècles avant de pouvoir aller au-delà du degré $n = 4$ dans la question de la résolution «par radicaux» des équations. Les travaux de Lagrange sur la technique des résolvantes à la fin du XVIII^e siècle mirent en lumière le rôle crucial joué par les permutations des racines, sans toutefois résoudre le problème.

Mais c'est N. Abel, précurseur de Galois mort à 26 ans en 1829, qui le premier démontra rigoureusement l'impossibilité de résoudre l'équation générale du 5^e degré par radicaux.

Peu après, Galois s'empara du problème de la résolubilité par radicaux et le résolut complètement en donnant une condition nécessaire et suffisante portant sur un certain groupe de symétries des racines de l'équation,

1.2 Le groupe de Galois.

Voici comment Galois l'introduit lui-même, sous forme d'un

« *Théorème.* Soit une équation donnée, dont $a, b, c \ldots$ sont les racines. Il y aura toujours un groupe de permutations des lettres $a, b, c \ldots$ qui jouira de la propriété suivante :

1. que toute fonction des racines, invariable par les substitutions de ce groupe, soit rationnellement connue,[4]

[3]dans le cas des équations dont les coefficients sont des nombres, on peut considérer que la question a été complètement élucidée par le classique «théorème fondamental de l'algèbre» (énoncé par Girard, «justifié» par D'Alembert, puis démontré rigoureusement par Gauss) : toute équation $(*)$ de degré non nul, à coefficients a_i dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

[4]ce qui signifie : exprimable à partir des coefficients de l'équation *rationnellement*, c'est-à-dire en ne faisant intervenir que l'addition, la soustraction, la multiplication, la division.

2. réciproquement, que toute fonction des racines, déterminable rationnellement, soit invariable par ces substitutions. »

C'est sans doute là l'une des toutes premières apparitions de la notion mathématique de groupe. En fait, Galois ne considère pas de «groupes abstraits»[5], mais seulement des groupes de substitutions, c'est-à-dire des ensembles de permutations de $a, b, c \ldots$ qui sont stables par composition et par passage à l'inverse. Mais, comme on va voir, c'est bien la structure de ces groupes qui l'intéresse, et non le calcul des permutations des $a, b, c \ldots$ elles-mêmes (comme chez Lagrange).

Mon but n'étant pas de nature historique, c'est non pas avec les mots-mêmes de Galois, mais sous la forme moderne et compacte que lui ont donnée au tournant du XX^e siècle Kronecker, Weber, et (définitivement) Artin, que je vais exposer, brièvement, les notions et résultats de la théorie.

On part d'un corps de base k qui contient les coefficients a_i de l'équation (par exemple le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels). Sans perte de généralité, on peut supposer, et nous supposerons toujours, que l'équation $(*)$ est *irréductible* sur k, c'est-à-dire que le polynôme $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ n'est pas produit de polynômes à coefficients dans k de degrés moindres.

Alors $(*)$ a exactement n racines complexes. On aimerait bien les appeler $x_1, \ldots, x_n$, mais comment les distinguer a priori les unes des autres pour les numéroter ?

C'est précisément sur cette ambiguïté, sur les substitutions indétectables de racines, - plus précisément : - sur les symétries intrinsèques de l'équation, que va jouer Galois pour fonder sa théorie, qu'il baptise «théorie de l'ambiguïté»[6].

Notons K le corps engendré sur k par ces racines, c'est-à-dire le corps qu'on obtient en formant toutes les expressions bâties à partir des éléments de k et des racines par addition, soustraction, multiplication, division. Une extension (= sur-corps) du type K/k est dite *normale*.

Le *groupe de Galois* de l'équation algébrique $(*)$ est le groupe des automorphismes du corps K qui fixent k[7] : c'est le groupe des «symétries» de l'extension K/k.

Il est noté $Gal(K/k)$ en l'honneur de son inventeur. Il vérifie les deux propriétés énoncées par Galois :

1. toute expression rationnelle en les racines (c'est-à-dire tout élément de K) qui est invariant par $Gal(K/k)$ est en fait dans k,

[5] C'est semble-t-il Cayley qui donna en 1854 une première définition générale de groupe abstrait (en indiquant d'ailleurs que tout groupe abstrait peut être vu comme groupe de permutations de ses éléments, de sorte que la considération des seuls groupes de substitutions n'est pas limitative) ; mais la condition d'associativité n'est clairement mise en avant que plus tard (Huntington, Moore, 1902). La définition d'un groupe (abstrait) s'est alors stabilisée : un *groupe* est un ensemble G muni d'une loi de composition interne $(x, y) \mapsto x \cdot y$ qui est associative ($x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$), admet un élément neutre 1 ($1 \cdot x = x \cdot 1 = x$), et telle que tout élément x admet un inverse x^{-1} ($x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$). Exemples : le groupe des permutations d'un ensemble d'objets, le groupe des déplacements dans l'espace, le groupe des transformations canoniques du sujet d'une fugue, etc... Les groupes abstraits (non donnés comme groupes de transformations concrètes, comme dans les exemples précédents) sont souvent définis par générateurs et relations.

Un groupe G est dit *commutatif* ou *abélien* si on a toujours $x \cdot y = y \cdot x$. Exemples : l'addition des vecteurs dans un espace vectoriel, le groupe des transpositions d'un mode musical, etc...

[6] et que l'on a appelée après lui «théorie de Galois».

[7] ce sont les opérateurs du k-espace vectoriel K qui respectent la multiplication.

2. réciproquement, tout élément de k est invariant par $Gal(K/k)$.

Les éléments de $Gal(K/k)$ sont entièrement déterminés par les valeurs qu'ils prennent sur les racines de $(*)$, valeurs qui sont encore des racines de $(*)$. Ainsi $Gal(K/k)$ s'identifie à un sous-groupe du groupe $\mathfrak{S}_n$ des permutations des n racines. On montre que c'est un groupe d'ordre égal à la dimension[8] du k-espace vectoriel K.

1.3 La correspondance de Galois.

Le cœur de la théorie de Galois est une correspondance bijective entre extensions ℓ de k contenues dans l'extension normale K, et sous-groupes H du groupe de Galois $Gal(K/k)$. Elle est définie ainsi :

1. à l'extension ℓ, on associe le sous-groupe H formé des éléments qui fixent ℓ (autrement dit, le groupe de symétries de l'extension K/ℓ),

2. réciproquement, au sous-groupe H, on associe l'extension ℓ formés des éléments de K invariants par H.

Cette *correspondance entre extensions (de corps) et groupes (de symétries)* renverse le sens des inclusions.

Par ailleurs, Galois dégage la notion de sous-groupe *normal* H d'un groupe G. C'est un sous-groupe tel que pour tout $g \in G$, la conjugation par g :

$$h \mapsto g \cdot h \cdot g^{-1}$$

envoie H dans lui-même ; on peut alors former le groupe quotient G/H. Dans la correspondance de Galois, les sous-groupe normaux de $Gal(K/k)$ correspondent aux extensions normales ℓ/k.

Galois introduit aussi la notion de groupe *résoluble*. C'est un groupe qui se «dévisse en groupes abéliens». Plus précisément, un groupe G est dit résoluble s'il existe une chaîne finie de sous-groupes inclus les uns dans les autres, commençant à $\{1\}$ et finissant à G, chacun étant normal dans le suivant avec un quotient abélien. Galois démontre que l'équation $(*)$ est résoluble si et seulement si son groupe de Galois est résoluble. Il démontre en outre que le groupe $\mathfrak{S}_n$ n'est pas résoluble dès que $n \geq 5$, et en déduit qu'il y a des équations de tout degré $n \geq 5$ qui ne sont pas résolubles par radicaux.

Il a par ailleurs utilisé sa correspondance pour classifier tous les corps finis[9].

2 Portée et enjeux de la «théorie de l'ambiguïté».

Galois était pleinement conscient du caractère révolutionnaire, à divers titres, de ses conceptions, et du fait qu'elles dépassaient largement le cadre spécifique des équations algébriques.

[8] qui est comprise entre n et $n! = 1.2\ldots n$.

[9] on ne connaissait guère avant lui que l'exemple des corps finis obtenus par réduction des entiers modulo un nombre premier p.

2.1 Émergence d'un corps de concepts d'un type nouveau.

L'usage d'une structure algébrique - celle de groupe en l'occurence, suivie par celle d'extension de corps que la théorie «appelle» - comme outil fondamental, et de notions abstraites comme celles de sous-groupes normaux, de groupes résolubles, a modifié l'idée qu'on se faisait de la nature des objets mathématiques.

En mettant l'accent sur les concepts d'opération («abstraite de son résultat») et d'invariant, la démarche galoisienne ouvre un champ conceptuel nouveau aux mathématiques qui marque la naissance de l'algèbre moderne, *cf.* [14].

2.2 Fécondité du principe de correspondance galoisienne.

Selon S. Lie, premier grand continuateur (avec F. Klein) de l'œuvre de Galois, «la grande portée de l'œuvre de Galois tient au fait que sa théorie originale des équations algébriques est une application systématique des deux notions fondamentales de *groupe* et d'*invariant*, notions qui tendent à dominer la science mathématique[10].»

L'idée galoisienne de correspondance entre symétries d'une structure mathématique et treillis de ses sous-structures a essaimé dans d'autres domaines des mathématiques. L'un des premiers et plus célèbres avatars est le programme d'Erlangen de Klein, qui jette un pont entre géométrie et théorie des groupes : il s'agit de classifier les géométries de l'espace à n dimensions où le «mouvement d'une figure invariable est possible» - et, en toile de fond, de comprendre de manière unifiée les géométries classiques de l'époque (géométries euclidienne, affine, projective, sphérique, elliptique, hyperbolique, conforme). Klein montre qu'elles correspondent à certains groupes G de «déplacements» : la géométrie correspondant à G est définie par les propriétés des figures (parties de l'espace) telles que G soit exactement le groupe de déplacements qui conservent ces propriétés, ou par les classes invariantes par G de figures (on peut alors chercher à classifier ces figures pour l'action de G, c'est-à-dire déterminer les orbites). Par exemple, pour le groupe affine G, les coniques forment une classe invariante, et se répartissent en trois orbites : ellipses, paraboles, hyperboles.

Comme l'écrit G. Bachelard dans sa polémique contre E. Meyerson sur le principe d'identité [3, p. 83], «des êtres géométriques qui sont *invariants* dans les opérations d'un sous-groupe G' du groupe général G de la géométrie euclidienne peuvent cesser d'être invariants pour des opérations qui, comprises dans G, ne figurent pas dans G'. Leur «identité» est donc simplement relative au groupe qui définit le système rationnel qui sert de base à l'examen de leurs propriétés. [...] Qu'une sphère et un ellipsoïde soient des surfaces identiques du point de vue de l'Analysis Situs, voilà un fait qui nous libère d'une *identité en soi*. [...]

Dès qu'on aborde les géométries très spécialisées, le principe d'identité pose un discernement très travaillé. [...] Les géométries ont besoin chacune d'un protocole d'identification. [...] Si l'on suivait en détail ces *applications* de la pensée algébrique à la géométrie, on s'apercevrait que fonctionne toujours - plus ou moins tacitement - une fonction d'adverbe à côté de l'adjectif *identique*. [...] On devrait donc, si l'on veut se cantonner dans la géométrie usuelle, parler de figures *euclidiennement* identiques.»

[10] de l'époque, tout au moins !

Le point de vue que promeut Klein est que c'est le groupe sous-jacent qui fonde une géométrie, car c'est lui qui permet la définition même de l'identité des figures. Qu'il apparaisse encore - en second lieu - comme groupe de symétries des figures est le reflet du principe de correspondance galoisienne.

Nous verrons d'autres avatars plus récents de correspondances galoisiennes dans la suite.

2.3 Thématisation des obstructions.

Avec Galois, la notion vague, à connotation esthétique, de symétrie devient un concept mathématique précis et opératoire.

Les ambiguïtés constituent-elles une *nuisance* ? Non, répond Galois en substance, elles constituent un *groupe* !

Loin d'être un simple zeugma, c'est là un geste de pensée étonnant : geste inaugural de la théorie de l'obstruction (mentionnée dans l'exposé précédent) dont l'objet est de réaliser les obstructions à effectuer telle ou telle opération mathématique comme éléments d'un nouvel objet mathématique (souvent un groupe) ; l'étude de ce nouvel objet *per se* livre la clé du problème. Sur un plan philosophique beaucoup plus général, ce geste inaugure un

2.4 Changement de paradigme dans la conception des problèmes mathématiques.

Ce point a été bien cerné par G. Deleuze [6, p. 233] :

«On se rappelle, en effet, le cercle dans lequel tourne la théorie des problèmes : un problème n'est résoluble que dans la mesure où il est «vrai», mais nous avons toujours tendance à fonder le caractère extrinsèque de la résolubilité dans le caractère intérieur du problème (Idée), nous faisons dépendre le caractère interne du simple critère extérieur. Or, si un tel cercle a été brisé, c'est d'abord par le mathématicien Abel ; c'est lui qui élabore toute une méthode d'après laquelle la résolubilité doit découler de la forme du problème. Au lieu de chercher comme au hasard si une équation est résoluble en général, il faut déterminer des conditions de problèmes qui spécifient progressivement des champs de résolubilité, de telle manière que «l'énoncé contienne le germe de la solution». Il y a là un renversement radical dans le rapport solution-problème [...]

Le même jugement se confirme, appliqué aux travaux de Galois : à partir d'un «corps» de base, les adjonctions successives à ce corps permettent une distinction de plus en plus précise des racines d'une équation, par limitation progressive des substitutions possibles. Il y a donc une cascade de «résolvantes partielles» ou un emboîtement de «groupes», qui font découler la solution des conditions mêmes du problème : qu'une équation ne soit pas résoluble algébriquement, par exemple, cela n'est plus découvert à l'issue d'une recherche empirique ou d'un tâtonnement, mais d'après les caractères des groupes et des résolvantes qui constituent la synthèse du problème et de ses conditions. [...]

Le groupe de l'équation caractérise à un moment, non pas ce que nous savons des racines, mais l'objectivité de ce que nous n'en savons pas. Inversement, ce non-savoir n'est plus un négatif, une insuffisance, mais une règle, un *apprendre* auquel correspond une dimension fondamentale de l'objet.»

3 Revêtements, groupes fondamentaux, dessins d'enfants.

3.1 La «montée vers l'absolu». Le groupe $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

La correspondance galoisienne concerne les extensions intermédiaires $k \subset \ell \subset K$, l'extension normale K/k étant fixée. On peut aussi ne fixer que le corps de base k, disons $k = \mathbb{Q}$, et faire varier l'extension normale $K/\mathbb{Q}$: lorsque K grossit (c'est-à-dire lorsqu'on adjoint de plus en plus de nombres algébriques), on obtient ainsi un système «projectif» de groupes finis s'envoyant les uns sur les autres :

$$\cdots \to Gal(K/\mathbb{Q}) \to \cdots \to Gal(\mathbb{Q}/\mathbb{Q}) = \{1\}.$$

La limite $\varprojlim_K Gal(K/\mathbb{Q})$ de ce système est le groupe infini[11]

$$Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$$

des automorphismes du corps $\bar{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques[12].

C'est cette démarche qu'A. Lautman appelle la «montée vers l'absolu» [10, III] : un seul objet mathématique, le groupe de Galois absolu, code les propriétés de toutes les équations algébriques à coefficients rationnels à la fois.

Ce *groupe de Galois absolu* $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, objet central de la théorie des nombres, reste largement un mystère après un siècle et demi d'efforts intenses pour en comprendre la structure.

3.2 Théorie de Galois des revêtements.

Il s'agit d'une «jumelle» géométrique de la théorie de Galois des nombres algébriques. En voici un aperçu dans le cadre des revêtements de surfaces de Riemann évoqués dans l'exposé précédent.

L'histoire commence en 1877 lorsque Klein remarque que le groupe des isométries laissant invariant l'icosaèdre est isomorphe au groupe de Galois d'une équation quintique à coefficients dans le corps de fonctions rationnelles d'une variable auxiliaire. On a maintenant deux variables, et les solutions complexes de l'équation quintique forment une surface de Riemann, qui est un revêtement du plan complexe.

Plus généralement, on a la notion de revêtement[13] fini normal $Y \to X$ de surfaces de Riemann. C'est l'avatar géométrique d'une équation $(*)$: ce qui joue le rôle de racines de l'équation est l'ensemble $\{y_1, \ldots, y_n\}$ des points de Y qui s'envoient sur un point x arbitraire fixé de X. Le groupe de Galois $Gal(Y/X)$ est un sous-groupe du groupe $\mathfrak{S}_n$ des permutations de $\{y_1, \ldots, y_n\}$[14]. Il peut se calculer comme suit : traçons sur X un lacet γ pointé en x, et choisissons un point y_i de Y au-dessus de x. Un tel γ se «relève»

[11] il est naturellement muni d'une structure de groupe topologique compact.

[12] nombres vérifiant une équation algébrique à coefficients rationnels.

[13] qu'on suppose non ramifié pour simplifier.

[14] dans le cas de la quintique de Klein, le groupe de Galois est le groupe de l'icosaèdre, auquel Klein a consacré un ouvrage classique.

alors en un chemin sur Y partant de y_i, qui en général aboutira à un autre point y_j, d'où une permutation $y_i \mapsto y_j$ de l'ensemble des points au-dessus de x, qui ne dépend en fait du lacet γ qu'à homotopie (= déformation) près. C'est ainsi que s'obtiennent les éléments de $Gal(Y/X)$.

Dans ce contexte, on peut encore effectuer une «montée vers l'absolu». Ce qui correspond au corps $\bar{\mathbb{Q}}$ est maintenant le *revêtement universel* de X, et son groupe d'automorphismes n'est autre que le *groupe fondamental* de Poincaré $\pi_1(X)$: c'est groupe des lacets tracés sur X à homotopie près, partant et aboutissant à un point x fixé.

On peut algébriser la construction en remplaçant $\pi_1(X)$ par la limite projective $\hat{\pi}_1(X)$ des groupes $Gal(Y/X)$, lorsque le revêtement Y/X grossit. D'après Grothendieck, $\hat{\pi}_1(X)$ s'interprète comme groupe des automorphismes du foncteur fibre en x

$$Y \mapsto Y_x = \{y_1, \ldots, y_n\}$$

sur la catégorie des revêtements de (X, x) (à valeurs dans la catégorie des ensembles), ce qui permet d'unifier les théories de Galois arithmétique et géométrique dans un même moule.

3.3 Une vision géométrique, voire graphique, de $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Une approche indirecte fascinante de $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ consiste à le relier à la géométrie des surfaces de Riemann.

Pour fixer les idées, prenons pour X le plan complexe privé des points 0 et 1. Son groupe fondamental $\pi_1(X)$ est le groupe libre à deux générateurs, les lacets γ_0 et γ_1 autour de 0 et de 1 (qu'on ne peut «défaire» par déformation). Son complété $\hat{\pi}_1(X)$ s'obtient en permettant des «mots infinis» en γ_0 et γ_1 (et leurs inverses).

Suivant Grothendieck et Belyi, $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ opère sur les revêtements finis de X, donc sur $\hat{\pi}_1(X)$, et cette opération est *fidèle : le groupe de Galois absolu arithmétique* $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ *se plonge dans le groupe des automorphismes du groupe de Galois absolu géométrique* $\hat{\pi}_1(X)$.

De là, Grothendieck a alors proposé de décrire $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ au moyen de notions graphiques «si simples qu'un enfant peut les connaître en jouant». Considérons un revêtement $Y \to X$, en supposant pour simplifier que Y est le plan complexe privé de quelques points. L'image inverse dans Y du segment $]0, 1[$ de X est un objet combinatoire très simple que Grothendieck appelle «dessin d'enfant». Le défi est de comprendre en termes combinatoires l'opération fidèle de $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur ces dessins.

Pour ce faire, il faut disposer au préalable d'un codage combinatoire des éléments de $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ lui-même. C'est ce qui a été obtenu par Drinfeld autour de 1990 (en découvrant un lien insoupçonné entre $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et groupes quantiques) : il plonge $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ dans un groupe de nature combinatoire GT (le groupe de Grothendieck-Teichmüller, défini par générateurs et trois relations très simples), qui s'avère agir fidèlement sur les dessins d'enfants. On ignore à l'heure actuelle si GT est réellement «plus gros» que $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ (on le soupçonne).

4 Ambiguïtés galoisiennes en analyse.

Voici la fin de la lettre-testament de Galois : «Tu sais, mon cher Auguste, que ces sujets ne sont pas les seuls que j'ai explorés. Mes principales méditations depuis quelque temps étaient dirigées sur l'application à l'analyse transcendante de la théorie de l'ambiguîté. Il s'agissait de voir a priori dans une relation entre quantités ou fonctions transcendantes quels échanges on pouvait faire, quelles quantités on pouvait substituer aux quantités données sans que la relation pût cesser d'avoir lieu. Cela fait reconnaître tout de suite l'impossibilité de beaucoup d'expressions que l'on pouvait chercher. Mais je n'ai pas le temps et mes idées ne sont pas encore bien développées sur ce terrain qui est immense...»

Liouville est le premier à avoir poursuivi dans cette direction : au lieu de se demander quand une équation algébrique est résoluble par radicaux, il se demande quand une équation différentielle linéaire est résoluble à l'aide de fonctions élémentaire (des radicaux, des logarithmes, des exponentielles), et obtient un critère galoisien. Au début du XX^e siècle, Picard et Vessiot introduisent dans ce contexte le *groupe de Galois différentiel* : c'est le groupe formé des automorphismes de l'extension du corps des fonctions de base, obtenu en adjoignant les solutions et leurs dérivées, qui commutent à la dérivation. Du fait que les solutions d'une équations différentielle linéaire forment non plus un ensemble fini, mais un espace vectoriel de dimension finie, le groupe de Galois différentiel n'est plus un groupe fini en général, mais un groupe «continu» de matrices.

La théorie a mûri lentement, et la classification des ambiguïtés galoisiennes dans le cadre des équations différentielles linéaires analytiques au voisinage d'une singularité, due à J. P. Ramis, date seulement de la fin du XX^e siècle. Le résultat est qu'il y a trois types, et trois seulement, de telles ambiguïtés galoisiennes - qui prennent en fait la forme de matrices :

1) la *monodromie* : c'est l'ambiguïté qui résulte de ce que l'on ne retombe pas la valeur initiale lorsque l'on fait subir à une solution un tour autour de la singularité. On a déjà vu ce phénomène dans l'exposé précédent (2.1). Considérons l'équation différentielle

$$y' = \frac{1}{2x}y$$

au voisinage de la singularité 0 ; une solution est $y = \sqrt{x}$, et un tour autour de l'origine la transforme en $-y$. Le groupe de Galois différentiel de cette équation est le groupe à deux éléments engendré par la monodromie.

2) le *recalibrage des exponentielles* : considérons l'équation différentielle

$$xy' + y = 0$$

au voisinage de la singularité 0 ; une solution est $y = e^{1/x}$, et toute autre solution non nulle s'obtient en multipliant y par une constante non nulle. Le groupe de Galois différentiel de cette équation est le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^\times$ (des nombres complexes non nuls) engendré par ces recalibrages.

3) les *ambiguïtés de Stokes* : considérons l'équation différentielle

$$xy' + y = x$$

au voisinage de la singularité 0 ; une solution formelle est $\hat{y} = \sum(-1)^n n! x^{n+1}$, qui diverge en tout point $x \neq 0$. Toutefois, il y a moyen de «resommer» cette série divergente de manière canonique pour obtenir une vraie solution dans certains secteurs de sommet 0. Par exemple, dans un secteur bissecté par le demi-axe réel positif, une vraie solution, asymptotique à $\hat{y}$, est $y = \int_0^\infty \frac{e^{-t/x}}{1+t}dt$, mais les changements de secteurs introduisent des ambiguïtés dans ces vraies solutions resommées, les ambiguïtés de Stokes.

De manière générale, le groupe de Galois différentiel est engendré (au sens des groupes «continus») par ces trois types de matrices.

Ainsi la théorie de Galois s'étend, comme Galois l'avait pressenti, aux fonctions transcendantes solutions d'équations différentielles (*cf.* [13]).

5 Groupes de Galois motiviques et nombres transcendants.

Mais laissons là les équations différentielles et même les fonctions, pour revenir aux nombres. La théorie de Galois, initialement conçue dans le cadre des nombres algébriques, s'étend-elle aux nombres transcendants ?

Il s'avère que la réponse est oui, du moins conjecturalement, pour des nombres qui s'écrivent comme intégrales multiples

$$\int\int \cdots \int_\Delta \omega$$

où le domaine d'intégration Δ est limité par des équations polynômiales définies sur $\mathbb{Q}$ et l'intégrant ω est une algébrique et définie sur $\mathbb{Q}$. Par exemple, le nombre $\pi = \int_0^1 4\sqrt{1-t^2}dt$ est de ce type.

Pour ces nombres, la réponse conjecturale est donnée par la *théorie des motifs* (imaginée par Grothendieck), plus précisément par la théorie de Galois motivique qui est une vaste généralisation (partiellement conjecturale) de la théorie de Galois qui s'applique aux systèmes de plusieurs équations algébriques à plusieurs variables.

Dans le cas de π, la réponse est que le groupe de Galois associé est le groupe multiplicatif $\mathbb{Q}^\times$ des nombres rationnels non nuls.

6 Coda : un groupe de Galois «cosmique» ?

Depuis quelque temps, les idées galoisiennes ont fait irruption en physique quantique, plus précisément en théorie perturbative des champs quantiques.

À partir des travaux de Feynman et Schwinger, les physiciens ont mis au point des techniques sophistiquées pour éliminer les quantités infinies qui se présentent systématiquement, sous forme d'intégrales divergentes, dans la théorie. La plus simple et la plus utilisée de ces techniques est la renormalisation par régularisation dimensionnelle : on fait fluctuer la dimension de l'espace-temps en lui faisant prendre des valeurs complexes voisines de 4, et on développe les intégrales obtenues en séries indexées par des diagrammes de Feynman de complexité croissante. L'élimination des termes «divergents» de la série se fait suivant de subtiles règles combinatoires qui garantissent la cohérence du procédé.

La «mœlle» mathématique de cette technique a récemment été extraite par Connes et Kreimer, qui ont associé à toute théorie quantique des champs un certain groupe de symétries infini (mais résoluble) directement construit en termes de diagrammes de Feynman. En effectuant une «montée vers l'absolu», ils obtiennent, dans la situation universelle, un groupe de Galois absolu - le groupe de Galois «cosmique» (Cartier) - qui agit sur les constantes de toutes les théories quantiques des champs à la fois.

Ce groupe, d'une ubiquité stupéfiante, incarne à lui seul les divers avatars galoisiens évoqués ci-dessus :
- il s'interprète comme groupe de Galois différentiel
- il apparaît comme groupe de Galois motivique
- il est sensé être le groupe de Galois de certaines intégrales de Feynman[15]
- c'est une variante algébro-géométrique du groupe GT de Drinfeld.

En conclusion, on peut dire qu'en théorie quantique des champs, les divergences, loin d'être des nuisances, donnent naissance à des «ambiguïtés galoisiennes» formant le groupe de symétrie d'une riche structure qui apparaît dans des domaines mathématiques très éloignés les uns des autres.

****

Bibliographie

[1] - N. Abel, «Sur la résolution algébrique des équations», Oeuvres t. II.

[2] -Y. André, Une introduction aux motifs, Panoramas et Synthèses 17, SMF, 2004.

[3] - G. Bachelard, Le rationalisme appliqué, P. U. F. 1949.

[4] - P. Cartier, «La folle journée, de Grothendieck à Connes et Kontsevich», Festschrift des 40 ans de l'IHES.

[5] - A. Connes, «La pensée d'Evariste Galois et le formalisme moderne» (en pdf)

[6] - G. Deleuze, La différence et la répétition,

[7] - R. et A. Douady, Algèbre et théories galoisiennes II, Cedic, 1979

[8] - E. Galois, Oeuvres mathématiques, suivies d'une notice de G. Verriest, Gauthiers-Villars, 1951

[9] - A. Grothendieck, Esquisse d'un programme.

[10] - A. Lautman, Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques. Réédition Vrin 2006.

[11] - G. Mazzola, «Towards a Galois Theory of Concepts». In : Mazzola G., Th. Noll and E.-L. Puebla (eds.) : Perspectives in Mathematical and Computational Music Theory. EpOs Osnabrück, 2004 (en ligne en format html)

[15] nombres présumés transcendants qui généralisent les valeurs aux entiers de la fonction zêta de Riemann.

[12] - M. van der Put, M. Singer, Galois theory of linear differential equations, Springer Grundlehren der Math. Wiss. 328, 2003

[13] - I. Stewart, Galois theory, Chapman and Hall, 2. ed., 1989

[14] - J. Vuillemin, Philosophie de l'algèbre.

Quatrième séance
samedi 1er décembre 2007

Représentations linéaires

«Plus une méthode est nouvelle et féconde,
plus elle étend le champ de l'inconnu.»
J. Bertrand, *D'Alembert*, cité dans [2]

Hegel parlait de «l'apparence bariolée du sensible». Ici, c'est plutôt «l'apparence bariolée» de l'intelligible mathématique que nous voudrions rendre sensible. En espérant faire entrevoir que le développement des mathématiques ne repose pas sur le seul mouvement d'élévation conceptuelle, mais qu'au contraire la conquête de l'intelligible mathématique s'appuie sur une dynamique de va-et-vient entre avancées conceptuelles et retombées applicatives.

«Retombée» : n'y voyons surtout pas une chute d'Icare du ciel des Idées, mais ce mouvement essentiel par lequel les nouveaux concepts essaiment, se concrétisent, et fécondent d'autres territoires mathématiques.

Ce second exposé sur le thème général des symétries s'ouvre sur un long préambule présentant les idées fondamentales de linéarisation et de représentation en mathématique. Nous esquisserons ensuite la théorie des représentations linéaires des groupes, initiée par Frobenius à la fin du XIXème siècle (dans le cas des groupes finis). Un acteur majeur fut H. Weyl qui, en liaison avec ses travaux sur les fondements de la mécanique quantique, fit la jonction inattendue avec l'analyse de Fourier et créa l'analyse harmonique non commutative. La théorie s'est ensuite énormément développée et ramifiée sous la maîtrise d'œuvre de Gelfand.

Le rêve de Burnside de mettre à profit l'impressionnante effectivité de la théorie des représentations linéaires pour classifier tous les groupes finis simples s'est finalement réalisé au bout d'un siècle. Entre-temps, cette théorie avait permis à Killing et Cartan de classifier tous les groupes infinis «continus» simples. Nous terminerons en expliquant comment le problème général de classification des représentations linéaires mène à une trichotomie (fini, modéré, sauvage), et comment l'indécidabilité surgit au coeur de situations extrêmement concrètes et apparemment élémentaires.

Plan

1. Linéarité. Linéarisation.
2. Le concept mathématique de représentation.
3. Représentations linéaires des groupes.
4. Représentations linéaires et problèmes de classification.

****

1 Linéarité. Linéarisation.

1.1 Bref retour à l'algèbre linéaire.

Comme nous l'affirmions au début du premier exposé, l'algèbre linéaire est la partie la plus simple des mathématiques. Elle consiste, rappelons-le, en l'étude des espaces vectoriels (espaces où les points nommés vecteurs peuvent être additionnés entre eux et multipliés par des nombres) et des applications linéaires qui relient ces espaces - et tout particulièrement, de l'algèbre $\mathcal{L}(V)$ des applications linéaires F d'un espace vectoriel V dans lui-même (munie de l'addition et de la composition).

Supposons V de dimension finie. Dans une base donnée $e_1, \ldots, e_n$, les vecteurs sont repérés par leurs coordonnées. Un opérateur $F \in \mathcal{L}(V)$ étant donné, les coordonnées λ_j^i des vecteurs $F(e_j)$ forment une matrice Λ, c'est-à-dire un tableau carré de nombres (disons des nombres complexes).

La matrice Λ de F dépend de la base choisie. Qu'est-ce qui, de la matrice Λ, reste invariant par changement de base ?

L'invariant le plus simple est la *trace* de Λ, c'est-à-dire la somme de ses coefficients diagonaux λ_i^i :

$$tr\,\Lambda = \sum \lambda_i^i = tr\,F,$$

qui jouera un rôle important dans la suite. En fait, $tr\,F$ est la somme $\sum \mu_i(F)$ des *valeurs propres* de F, qui ne sont autres que les éléments du spectre de F comptés éventuellement plusieurs fois[1]. En outre, vis-à-vis de la composition des opérateurs, la trace vérifie l'identité

$$tr\,FG = tr\,GF.$$

En dimension infinie, c'est plus compliqué : pour pouvoir écrire des sommes infinies, on doit introduire un peu de topologie. La situation la plus commode est celle des espaces de Hilbert, mais n'anticipons pas (ou plutôt, ne revenons pas si tôt sur le thème du premier exposé)...

1.2 Linéarisation.

La *linéarité* est le caractère des situations ou problèmes mathématiques dans lesquels les multiplicités à l'œuvre forment des espaces vectoriels. Le rôle de l'algèbre linéaire est précisément d'aider à traiter les problèmes linéaires, c'est-à-dire ceux dont les solutions forment a priori un espace vectoriel : la somme de deux solutions est encore une solution, de même que la multiplication d'une solution par une constante arbitraire.

La *linéarisation*, certainement l'une des démarches les plus universelles en mathématiques, des plus abstraites aux plus appliquées, consiste à essayer de ramener des problèmes non-linéaires à des problèmes linéaires, toujours plus abordables grâce notamment à la technologie élémentaire de l'algèbre linéaire.

La linéarisation se retrouve aussi bien en analyse qu'en géométrie et en algèbre. En analyse, elle se présente sous la forme de l'*approximation au premier ordre.*

[1] comme on l'a vu au § 4.1 du premier exposé, ces éléments sont les nombres μ tels que $F - \mu I$ n'est pas inversible.

Exemple 1. Soit f une fonction lisse d'une variable x («lisse» évoque, intuitivement, quelque chose comme «agréable à caresser» ; formellement : «indéfiniment différentiable». Pourvoir les chaînons manquants dans l'évolution putative de la notion intuitive à la notion formelle est une gageure tant pour les sciences cognitives que pour l'histoire des mathématiques...)

Une telle fonction admet un développement en puissances[2] de la variable x

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

où les a_i sont des constantes. La linéarisée de f est $a_0 + a_1 x$ (cela revient si l'on veut à poser, quelque peu brutalement, $x^2 = 0$ dans le développement de f). Avantages quantitatifs et qualitatifs : bonne approximation numérique en pratique, et détection de la croissance (positivité de a_1).

Du point de vue géométrique, cela revient à remplacer le graphe de la fonction f par sa tangente au point d'abscisse 0. Noter qu'on reconstruit f en prenant l'enveloppe de ses tangentes (en tous les points du graphe). Plus généralement prendre l'*espace tangent* d'une variété en un point est une forme de linéarisation.

Exemple 2. Prenons par exemple un groupe «continu» G de transformations («groupe de Lie»), par exemple le groupe $GL(V)$ des applications linéaires inversibles de V dans V. L'espace tangent en l'identité est l'*algèbre de Lie* de G (celle de $GL(V)$ est $\mathcal{L}(V)$, l'espace des applications linéaires de V dans V). Elle est munie d'opération «crochet de Lie» $[\,,\,]$ que l'on obtient en «linéarisant» le commutateur

$$g_1, g_2 \mapsto g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$$

(en fait en regardant le terme d'ordre 2 car il n'y a pas de terme d'ordre 1). La structure d'algèbre de Lie[3] de G est une forme linéarisée de la structure de groupe de Lie.

Exemple 3. Les systèmes dynamiques, qui modélisent mathématiquement l'évolution de toutes sortes de systèmes physiques, biologiques, économiques etc..., sont souvent non-linéaires. Considérons par exemple un système du type

$$dy/dt = F(y, t),$$

où t désigne la variable temporelle et $y = (y_1, \dots, y_n)$ un ensemble de quantités dépendant du temps. Au voisinage d'un point d'équilibre y_0, on peut linéariser le système, ce qui donne

$$dy/dt = DF(y_0, t)(y - y_0),$$

où $DF(y_0, t)$ est maintenant une matrice. De nombreux théorèmes de la théorie des systèmes dynamiques ont pour objet de prédire le comportement du système en fonction du spectre de la matrice $DF(y_0, t)$ (e.g. si le spectre est négatif, l'équilibre est stable...).

[2] en pratique, souvent, ce développement converge et f en est la somme ; on dit alors que f est analytique. La théorie des développements asymptotiques, qui a fait une apparition-éclair à la fin du § 4 de l'exposé précédent, permet de donner sens à ces développements même dans le cas divergent.

[3] espace vectoriel muni d'une opération «crochet de Lie» vérifiant des axiomes convenables.

2 Le concept mathématique de représentation.

Nous le ferons émerger de trois doublets successifs : objets généraux/objets particuliers, mode intrinsèque/mode extrinsèque, présentation/représentation.

2.1 Objets généraux/objets particuliers.

Il s'agit là d'une distinction[4] imprécise et presque triviale, mais omniprésente dans le champ mathématique et pourtant peu soulignée.

Appelons *objets généraux* ces objets indifférenciés dans leur type d'être mathématique, ceux qu'accompagne, plus ou moins tacitement, l'adjectif «quelconque» - comme dans les expressions canoniques «soit ABC un triangle quelconque», «considérons un groupe G» etc...

Souvent, les objets généraux que l'on considère sont tout simplement les objets d'une catégorie donnée (groupes, espaces vectoriels, espaces topologiques, etc...). Un point de vue structuraliste outrancier voudrait que ce soit toujours le cas ; autrement dit, qu'un objet mathématique général ne soit rien d'autre qu'une espèce de structure.

Or ce n'est pas toujours le cas, tant s'en faut : par exemple, les systèmes dynamiques évoqués ci-dessus sont les objets généraux d'un immense chapitre des mathématiques, qui ne se laissent pas enfermer dans une saisie catégorique - si ce n'est fort artificiellement.

Soit dit en passant, il importe d'être conscient des limites de l'approche catégorique, et surtout de ne pas confondre à cet égard trois «ordres d'universalité» : la notion mathématique d'«universalité» que la théorie des catégories thématise, l'«universalité» théorique d'application de ses concepts formels (liée au fait que par nature, cette théorie occulte la structure interne des objets), et l'«universalité» - ou plutôt la généralité - relativement limitée, voire précaire, de son importance pratique dans le champ mathématique tout entier.

Les *objets particuliers*, quant à eux, sont des sortes de «personnages» mathématiques qui ont un nom propre. Ils interagissent les uns avec les autres, et avec les objets généraux. Nous en avons déjà rencontré quelques specimens remarquables au cours de ces exposés :

- le facteur moyennable de type II_1 dans la théorie de von Neumann (et plus récemment héros de la logique des interactions de Girard),
- la logique classique (parmi toutes les logiques intuitionnistes),
- le groupe de Galois absolu $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ (objet central de la théorie des nombres),
- le groupe de Galois cosmique (qui agit sur les constantes de toutes les théories quantiques des champs),

Ces objets particuliers sont d'autant plus fascinants qu'ils sont plus protéiformes et ubiquitaires, c'est-à-dire qu'ils admettent de nombreuses descriptions différentes et interviennent de façon différente dans plusieurs théories mathématiques. Cette *combinaison de singularité et d'ubiquité* enchante bien des mathématiciens, qui considèrent de tels objets particuliers remarquables comme les joyaux de leur discipline. Leur apparition inopinée dans une théorie mathématique qui les ignorait est le présage de développements exaltants, l'un des catalyseurs de l'unité des mathématiques en acte. L'explication de

[4]cette terminologie n'est guère satisfaisante. Nous l'employons par défaut, le doublet «générique/singulier» étant déjà fort employé en mathématique.

cette apparition passe souvent par le façonnage d'objets mathématiques généraux tout à fait nouveaux. L'exporation de ce nouvel inconnu peut alors mener, après un âpre travail, à une classification qui fait apparaître de nouveaux objets particuliers.

Cette dialectique entre objets généraux et objets particuliers, qui nous semble être l'un des moteurs de la recherche mathématique, ne semble pas avoir attiré l'attention des épistémologues.

2.2 Mode intrinsèque/mode extrinsèque.

La question qu'on se pose maintenant est celle du mode sous lequel tel ou tel objet mathématique *particulier* est constitué/envisagé.

Prenons, pour fixer les idées, le cas d'objets géométriques. Traditionnellement, c'est-à-dire depuis les Anciens jusqu'à Gauss, ils étaient envisagés par rapport à un *référent* géométrique : le plan ou bien l'espace euclidien de dimension trois ; l'étude portait donc sur l'*objet plongé*.

C'est Gauss qui, dans son étude fondamentale des surfaces, a mis l'accent sur les propriétés *intrinsèques*[5], c'est-à-dire indépendantes du plongement dans le référent. Cela suppose déjà une vision claire de l'identité (ou plus correctement, de l'«isomorphie») d'objets géométriques plongés différemment dans un référent. On peut y voir l'une des sources de l'importance prise peu à peu par la notion générale d'isomorphisme, puis de morphisme.

Toutefois, si c'est la notion intrinsèque qui importe en fin de compte, il ne s'agit pas pour autant de se débarrasser d'un référent, la donnée même d'un objet mathématique *particulier* se faisant très souvent de manière extrinsèque, e.g. via des équations. Le caractère intrinsèque des objets et propriétés considérés permet alors, selon un libre jeu de changements de repères, de choisir la description la plus commode selon les besoins.

Exemple. Reprenons le cas, évoqué au début de cet exposé, d'un opérateur linéaire $F \in \mathcal{L}(V)$. Bien souvent, ce qui est donné en pratique, ce n'est pas F lui-même, mais le tableau carré de nombres qu'est sa matrice Λ. L'opérateur F est l'objet abstrait intrinsèque défini par Λ dans une base donnée, c'est-à-dire une fois V identifié à $\mathbb{C}^n$.

Cette définition est donc de nature extrinsèque : elle dépend du choix d'une base. Lorsqu'on la change, Λ se change en une matrice du type $P\Lambda P^{-1}$, et on peut par exemple tirer profit de cette variation pour se ramener au cas commode d'une matrice triangulaire (*i.e.* n'ayant que des 0 au-dessous de la diagonale).

Nous allons maintenant discuter *deux modes extrinsèques de se donner un objet mathématique particulier : la présentation et la représentation.*

Ces deux modes sont de caractères opposés : la présentation est une description abstraite, formelle, symbolique de l'objet considéré, tandis que la représentation vise à une «concrétisation», une «réalisation», une «incarnation» de cet objet.

2.3 Présentations.

Présenter un objet mathématique, c'est l'exhiber en termes de générateurs et relations.

[5]comme me le rappelle F. Nicolas, la dialectique intrinsèque/extrinsèque a été bien thématisée par A. Lautman [6, II].

Pour fixer les idées, considérons le cas d'un groupe. Présenter un groupe G, c'est se donner G par générateurs g_i et relations r_j, de la manière suivante :

- les g_i sont des symboles (sans contenu sémantique spécifié), chacun étant accompagné d'un autre symbole g_i^{-1} (appelé inverse de g_i). On considère l'alphabet (fini ou infini) formé des g_i et des g_i^{-1},

- les $r_j = r_j(g_i, g_i^{-1})$ sont certains mots écrits dans cet alphabet,

- les éléments de G sont les mots qu'on peut écrire dans cet alphabet, *modulo les relations* r_j,

- la loi de composition de G est donnée par la concaténation des mots mis bout à bout. L'élément neutre est le mot vide (sans lettre), noté 1_G ou simplement 1.

L'expression «modulo les relations r_j» demande explication : on entend par là que deux mots m_1 et m_2 sont considérés comme définissant le même élément de G si on peut les obtenir tous deux à partir d'un troisième mot m en effaçant à l'intérieur de m certaines séquences du type r_j, ou $g_i g_i^{-1}$, ou $g_i^{-1} g_i$.

On dit que le groupe G est de *présentation finie* s'il peut être défini par un nombre fini de générateurs g_i et de relations r_j.

Exemple 1. Le groupe libre engendré par $g_1, \ldots, g_n$ est le groupe donné par les générateurs g_i et aucune relation. Si $n = 1$, on trouve le groupe des entiers $\mathbb{Z}$ (muni de l'addition). Si $n \geq 1$, ce groupe s'identifie au groupe fondamental du plan privé de n points $x_1, \ldots x_n$ (voir exposé 3) : les g_i symbolisent des chemins partant et aboutissant à un point-base fixé x, et tournant une fois autour du point manquant x_i dans le sens trigonométrique.

Du point de vue des présentations, les groupes libres jouent le rôle de référents. Dans ce mode extrinsèque de description, un groupe n'apparaît pas comme plongé dans un référent, mais, dualement, comme quotient du référent.

Exemple 2. Le groupe $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ des transpositions du système tempéré est donné par un générateur g et une relation $r = gggggggggggg$ (g peut représenter la classe de 1 ou de 5 ou de 7 ou encore de 11 dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, au choix). Une autre présentation de ce groupe consiste à prendre deux générateurs g_1, g_2 et trois relations $r_1 = g_1 g_1 g_1$, $r_2 = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$, $r_3 = g_2 g_2 g_2 g_2$ (g_1 peut représenter la classe de 4 et g_2 celle de 3 dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$; la relation r_2 assure la commutativité). On voit donc qu'un groupe donné admet plusieurs présentations, qu'elles sont extrinsèques, et contiennent pas mal d'arbitraire.

Tout élémentaire et formel que paraisse ce mode de définition d'un groupe, surtout dans le cas de présentation finie où tout se réduit à concaténer et simplifier des mots sur un alphabet fini, la présentation par générateurs et relations recèle en fait de redoutables difficultés, dont le fameux *problème des mots* de M. Dehn (1911) :

soit G le groupe donné par une présentation finie explicite (g_i, r_j). Donner un algorithme pour déterminer si deux mots m_1 et m_2 (sur l'alphabet formé des g_i et des g_i^{-1}) coïncident modulo les relations r_j, autrement dit, s'ils définissent le même élément de G.

Toute la difficulté réside en ce qu'on ne connaît pas de borne a priori pour la longueur du mot m dont dériveraient m_1 et m_2 par simplification, s'ils définissaient le même élément de G. La réponse au problème de Dehn a été apportée en 1955 par P. Novikov :

pour certains groupes G de présentation finie, le problème des mots est indécidable.

Ce résultat célèbre est sans doute la première manifestation d'indécidabilité (au sens usuel d'inexistence de machines de Turing capables de trancher algorithmiquement la question) en dehors du domaine de la logique et de la théorie des ensembles.

Plus tard, Boone et Higman ont caractérisé les groupes G de présentation finie pour lesquels le problème des mots est décidable : ce sont ceux qui se plongent dans un groupe simple qui lui-même se plonge dans un groupe de présentation finie. De là à savoir construire des groupes où le problème des mots est indécidable, il y a un grand pas... et une riche théorie. *Gardons-nous donc de confondre «indécidable»* (qui a un sens logico-mathématique bien précis) *et «inconnaissable»* (qui n'en a aucun), *et d'interpréter l'indécidabilité comme on ne sait quel retrait du «manteau» mathématique devant le «toucher de l'esprit».*

2.4 Représentations.

Représenter un objet mathématique, c'est le décrire en termes de son action sur d'autres objets X préalablement connus.

Pour fixer les idées, reprenons le cas d'un groupe. Représenter un groupe G, c'est se donner G comme groupe de symétries d'un ensemble structuré X. Dans une acception un peu plus générale, c'est se donner un morphisme[6]

$$G \to Aut\, X$$

du groupe G vers le groupe des automorphismes de X. On parle aussi d'*action* de G sur X, et on note $g \cdot x$ l'élément de X qui est le résultat de l'action de l'élément $g \in G$ sur l'élément $x \in X$.

Exemple 1. Tout groupe G agit sur lui-même (de plusieurs façons, en fait), par exemple par translations à gauche : $g \cdot x$ étant le produit de g et de x dans G. Ce faisant, G s'incarne comme un groupe de permutations particulières de ses éléments.

Exemple 2. Le programme d'Erlangen de Klein évoqué dans l'exposé précédent (§ 2.2) fournit de nombreux exemples d'actions de groupes de déplacements sur des figures géométriques. Ce programme est en fait une réflexion de fond sur la notion d'action en géométrie.

2.5 Représentations linéaires.

Une représentation est d'autant plus efficace que le substrat X de l'action est élémentaire ou bien connu. Le cas d'un espace vectoriel est à cet égard prometteur.

On parle de *représentation linéaire* lorsque X est un espace vectoriel, qu'on note plutôt V comme d'habitude ; le groupe des automorphismes de V n'est autre que $GL(V)$. Lorsque V est de dimension finie, on parle de *représentation linéaire de dimension finie.*

Une représentation linéaire d'un groupe G dans l'espace vectoriel V, c'est donc un morphisme de groupes[7]

$$\rho :\, G \to GL(V).$$

[6] c'est-à-dire une application qui respecte la composition.

[7] si G est muni d'une topologie, il est naturel de requérir que ce morphisme soit continu.

En dimension finie et sous l'hypothèse que ρ injectif[8], représenter linéairement un groupe abstrait G, c'est donc le représenter «concrètement» comme *groupe de matrices*[9]. Une représentation linéaire est dite *irréductible* si V n'a pas de sous-espace[10] stable sous l'action de G.

Le leitmotiv de la théorie des représentations linéaires des groupes est d'essayer de «comprendre» un groupe abstrait G à partir de la collection de ses représentations linéaires (irréductibles).

Exemple 1 (linéarisation 1). Partant d'une action d'un groupe G sur un ensemble structuré X quelconque, voici comment en déduire une représentation linéaire de G. On prend pour V l'espace vectoriel $F(X)$ formé des fonctions sur X à valeurs complexes[11], et on fait agir G sur $F(X)$ par la règle suivante qui définit l'action $g \cdot f$:

$$(g \cdot f) \cdot x = f(g^{-1} \cdot x)$$

(où x désigne un élément de X, f un élément de $F(X)$, g un élément de G).

Par exemple si G agit sur $X = G$ par translation, la représentation linéaire ainsi obtenue (dans l'espace $F(G)$ des fonctions sur G) s'appelle la *représentation régulière* de G et est notée ρ_{reg}.

Exemple 2 (linéarisation 2). Reprenons l'exemple 1 du numéro précédent, dans le cas particulier d'un groupe continu de transformations G (groupe de Lie). Par linéarisation, l'action de G sur lui-même induit une représentation linéaire de G sur son algèbre de Lie.

Exemple 3. Considérons une équation différentielle linéaire d'ordre n

$$p_n(x)\,\frac{d^n y}{dx^n} + \cdots + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_0(x) = 0,$$

les coefficients $p_i(x)$ étant des polynômes. Les singularités de cette équation sont les racines $x_1, \dots x_n$ du polynôme $p_n(x)$. Au voisinage de tout point x distinct des singularités, les solutions de cette équation différentielle linéaire d'ordre n forment un espace vectoriel V de dimension n. Mais quand on «suit» une solution y le long d'un chemin partant de x et aboutissant à x, mais entourant une ou plusieurs singularités, on retombe en général sur une *autre* solution de l'équation[12]. Ainsi, le groupe fondamental du plan privé de $x_1, \dots, x_n$ agit sur V : on obtient une représentation du groupe libre à n générateurs, dite *représentation de monodromie*.

Pour clore ce paragraphe, mentionnons brièvement deux opérations utiles sur les représentations linéaires :

- la somme de deux représentations $\rho \oplus \rho' : G \to GL(V \oplus V')$. L'espace sous-jacent consiste en les couples formés d'un vecteur de V et d'un vecteur de V'. L'action de $g \in G$ est donnée par la formule $g \cdot (v, v') = (g \cdot v, g \cdot v')$.

- le produit tensoriel[13] de deux représentations $\rho \otimes \rho' : G \to GL(V \otimes V')$. Si les e_i forment une base de V et les e'_j une base de V', une base de $V \otimes V'$ est formée des symboles $e_i \otimes e'_j$. L'action de $g \in G$ est donnée par la formule $g \cdot (e_i \otimes e'_j) = (g \cdot e_i) \otimes (g \cdot e'_j)$.

[8] c'est-à-dire faisant de G un sous-groupe de $GL(V)$.
[9] on renvoie au § 1.3 du premier exposé pour la définition de la composée de deux matrices.
[10] distinct de $\{0\}$ et de lui-même, bien entendu.
[11] variante utile en dimension infinie : on peut imposer diverses conditions sur ces fonctions.
[12] voir le § 4 de l'exposé précédent.
[13] dont l'intérêt apparaîtra plus bas, § 3.3.

3 Représentations linéaires des groupes.

3.1 Caractères : la théorie de Frobenius.

La théorie des représentations linéaires des groupes finis est née en 1896, grâce aux efforts de G. Frobenius pour répondre aux questions de R. Dedekind, qui se heurtait à des calculs inextricables en théorie de Galois des équations algébriques, dès que le degré dépassait 4. Le concept fondamental de sa théorie est celui de *caractère*.

Soit G un groupe à N éléments. On note $F_{cent}(G)$ le sous-espace de $F(G)$ formé des *fonctions centrales*, c'est-à-dire des fonctions f (à valeurs complexes) vérifiant $f(gg') = f(g'g)$ pour tout couple (g, g') d'éléments de G. Le produit scalaire

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} f_1(g) \bar{f}_2(g)$$

fait de $F_{cent}(G)$ un espace euclidien complexe (voir exposé 1, § 3.1).

Soit maintenant $\rho : G \to GL(V)$ une représentation de dimension finie de G. Son *caractère* χ_ρ est la fonction sur G à valeurs complexes définie par la trace :

$$\chi_\rho(g) = tr\, \rho(g).$$

Par la propriété fondamentale de la trace, c'est un élément de $F_{cent}(G)$.

Il s'avère qu'une représentation ρ est complètement déterminée par son caractère χ_ρ. En outre, cette *correspondance de Frobenius entre représentations et caractères* jouit des propriétés remarquables suivantes :

- ρ est irréductible $\Leftrightarrow$ χ_ρ est *unitaire* : $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = 1$,

- les caractères unitaires forment une base orthonormée de $F_{cent}(G)$; pour toute élément $f \in F_{cent}(G)$, on a donc la décomposition

$$f = \sum \langle f, \chi_n \rangle \chi_n$$

où χ_n parcourt les caractères unitaires,

- $\chi_{\rho \oplus \rho'} = \chi_\rho + \chi_{\rho'}$ et $\chi_{\rho \otimes \rho'} = \chi_\rho \cdot \chi_{\rho'}$,

- toute représentation ρ de dimension finie de G est somme directe de représentations irréductibles. La multiplicité avec laquelle la représentation irréductible de caractère χ_n apparaît dans ρ est $\langle \chi_\rho, \chi_n \rangle$. Cas particulier : la décomposition de la représentation régulière est : $\rho_{reg} = \oplus\, (\dim \rho_n)\, \rho_n$ où ρ_n parcourt toutes les représentations irréductibles.

La correspondance de Frobenius permet d'associer à tout groupe fini sa *table de caractères*, c'est-à-dire le tableau de nombres complexes dont les entrées sont les valeurs des caractères unitaires[14], et *cette table détermine le groupe*. Cette correspondance réalise ainsi l'exploit de *ramener en principe la structure du groupe fini abstrait G à de simples*

[14]comme les caractères sont des fonctions centrales, on peut se limiter à considérer leurs valeurs sur des représentations des classes de conjugaison de G, ce qui permet d'obtenir un tableau carré. Par ailleurs ces valeurs sont des nombres d'un type bien particulier : comme tout élément g de G vérifie $g^N = 1_G$, toute valeur propre μ de $\rho(g)$ vérifie $\mu^N = 1$, de sorte que les valeurs de caractères sont toujours des sommes de racines N-ièmes de l'unité.

données numériques. Conformément au leimotiv énoncé ci-dessus, des renseignements sur la table de caractères donnent des renseignements sur le groupe. Par exemple, on montre facilement qu'un groupe fini G est

- *simple*[15] si et seulement si pour tout $g \neq 1_G$ et pour tout caractère $\chi \neq 1$, $\chi(g) \neq \chi(1_G)$.
- *commutatif* si et seulement si pour tout caractère unitaire χ, $\chi(1_G) = 1$.

Bien entendu, pour exploiter à fond cette correspondance, encore faut-il la rendre explicite, c'est-à-dire savoir calculer la table des caractères. Il existe pour cela un algorithme simple dû à W. Burnside, l'un des fondateurs de la théorie (voir [4, § 2]).

3.2 Représentations linéaires des groupes compacts et analyse harmonique. L'apport de Weyl.

Comme nous l'avons rappelé lors du premier exposé (§ 3.2), on définit en analyse de Fourier le produit scalaire de deux fonctions périodiques $f_1(t)$ et $f_2(t)$ de période 2π par la formule

$$< f_1, f_2 >= \int_{-\pi}^{\pi} f_1 \bar{f}_2 \frac{dt}{2\pi}.$$

L'espace $L^2(U(1))$ des fonctions f pour lesquelles $< f, f >$ est bien défini est un espace de Hilbert[16]. Une base orthonormée est donnée par $e_n = e^{\sqrt{-1}nt}$ (où n est un entier quelconque), et tout $f \in L^2(U(1))$ s'écrit de manière unique

$$f = \sum < f, e_n > \, e_n.$$

C'est H. Weyl qui semble avoir remarqué le premier l'analogie (frappante !) entre ces formules et les formules ci-dessus. Ci-dessus, on avait affaire à un groupe fini G (non nécessairement commutatif), et à un espace euclidien de dimension finie dont le produit scalaire était défini par une somme finie. Ici, on a affaire au groupe topologique commutatif (infini) des rotations planes (qu'on peut identifier au cercle unité $U(1)$, chaque rotation étant épinglée par son angle $t \in]-\pi, \pi]$), et à un espace de Hilbert dont le produit scalaire est défini par une intégrale relative à la mesure de probabilité $\frac{dt}{2\pi}$ sur $U(1)$; les e_n sont les caractères unitaires de $U(1)$.

En mathématique, toute analogie est une aubaine : le chercheur n'a de cesse de la creuser jusqu'à sa disparition/absorption dans une théorie qui englobe les théories jumelles. C'est ce qu'a fait Weyl : il a étendu la théorie de Frobenius aux représentations linéaires de dimension finie des *groupes (topologiques) compacts* non nécessairement commutatifs, et créé l'analyse harmonique non commutative.

Le prototype d'un groupe compact est le groupe $U(n)$ des opérateurs unitaires d'un espace euclidien de dimension n, voir exposé 1, § 3.1.

L'analogue pour un groupe compact G de la décomposition de la représentation régulière d'un groupe fini, c'est le théorème de Peter-Weyl : $L^2_{cent}(G)$ se décompose selon les représentations irréductibles de G (il y en a une infinité), chacune intervenant avec une multiplicité égale à sa dimension (voir par exemple [4]).

[15] c'est-à-dire n'admet pas de quotient non trivial ; mais, attention, il peut admettre des sous-groupes non-triviaux, qui ne seront pas normaux.

[16] c'est-à-dire un espace euclidien complet de dimension infinie.

3.3 Problème de Tannaka.

Étant donné un groupe compact G, on dispose de la catégorie $Rep\, G$ des représentations linéaires de dimension finie de G[17].

Le leitmotiv général de la théorie des représentations linéaires formulé ci-dessus (§ 2.5) incite à poser le problème suivant (problème de Tannaka) :

Peut-on reconstituer G à partir de $Rep\, G$?

La réponse est «non... mais presque». Rappelons (ibidem) que $Rep\, G$ est munie d'une opération interne «produit tensoriel» $\otimes$. Le théorème de Tannaka dit qu'on peut bel et bien reconstruire G à partir de la catégorie $Rep\, G$ munie de $\otimes$.

C'est par le biais d'une vaste généralisation de ce résultat que Grothendieck est parvenu à l'idée de *groupe de Galois motivique*, qui a fait une apparition furtive dans l'exposé précédent (§ 5).

3.4 Représentations linéaires et mécanique quantique.

Le produit tensoriel, conçu en algèbre et pour l'algèbre, a fait fortune en mécanique quantique : l'état de n particules est décrit non par la somme, mais par le produit tensoriel de n espaces de Hilbert $\mathcal{H}$. Du principe d'indiscernabilité des particules identiques, on déduit une action du groupe $\mathfrak{S}_n$ des permutations sur n objets sur $\mathcal{H}^{\otimes n}$. Dès les années 1926-27, E. Wigner étudiait cette représentation linéaire. À la même époque, Weyl s'intéressait aux représentations unitaires de dimension infinie du groupe additif des réels $\mathbb{R}$ qui apparaissent en mécanique quantique sous la forme $t \mapsto e^{\sqrt{-1}tH}$ où H est un opérateur hamiltonien (voir exposé 1, § 5.3). La synthèse [9] qu'il a écrite sur la théorie des représentations et la mécanique quantique, parue en 1928 (soit fort peu après les travaux fondateurs de Heisenberg et Schrödinger), a eu une influence considérable.

Les théories de jauge, dont les origines remontent d'ailleurs aussi à Weyl, ont par la suite contribué à renforcer l'importance de la théorie des représentations en physique des particules. Selon ces théories, c'est grosso modo $U(1)$ qui gouverne l'électro-magnétisme, $U(2)$ les forces électro-faibles, $U(3)$ les interactions fortes (les quarks qui, avec les leptons, constituent la matière, furent introduits dans la théorie par Gell-Man et Neeman en 1964 sur la base de considérations sur les représentations de $U(3)$).

3.5 Représentations linéaires en dimension infinie. La théorie de von Neumann et l'école de Gelfand.

Les travaux de Weyl ont ouvert une nouvelle ère dans la théorie des représentations : celle de l'étude des représentations de dimension infinie (mais de préférence unitaires) des groupes topologiques G.

Deux théories, ou deux écoles, en sont nées : la théorie des algèbres d'opérateurs de von Neumann évoquée dans le premier exposé, et l'école de Gelfand.

Le lien entre représentations linéaires et algèbres d'opérateurs est le suivant. Soit $\rho : G \to U(\mathcal{H})$ une représentation unitaire d'un groupe topologique G dans un espace

[17] un morphisme de représentations n'étant autre qu'une application linéaire compatible aux actions de G.

de Hilbert $\mathcal{H}$. Alors le commutant de $\rho(G)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est une algèbre de von Neumann (voir exposé 1, § 5.1).

I. Gelfand (à qui l'on attribue le slogan «tout problème mathématique est un problème de représentation») et son école se sont principalement occupés de construire et classer des représentations. La théorie est extrêmement ramifiée, mais il en émerge un principe directeur (*principe de Kirillov*) : les représentations irréductibles de dimension infinie d'un groupe de Lie correspondent à certaines orbites pour l'action de ce groupe sur (le dual de) son algèbre de Lie (orbites soumises à une certaine condition de «quantification», dans l'esprit de la mécanique quantique). Ce principe permet de se ramener à des problèmes de dimension finie.

4 Représentations linéaires et problèmes de classification.

«Tout ce qui peut se ranger lui plaisait.»
G. Cuvier, *Eloge de Werner*, cité dans [2]

Nous avons déjà dit quelques mots sur le rôle de la classification en mathématique au § 5.4 du premier exposé. Ce rôle étant moins connu que dans d'autres sciences, les classifications paraissent davantage préservée, dans le domaine mathématique, du discrédit culturel actuel qui bannit presque du champ de la pensée ces avatars scientifiques de la philatélie, la patience illimitée qu'exige leur exercice étant perçue comme l'antithèse de l'éclair de génie.

On sait pourtant comment les grands travaux systématiques botaniques et zoologiques, de Linné à Lamark et Cuvier, ont forgé, lors de l'élaboration de schèmes classificatoires «naturels», la compréhension progressive de la structure visible et de l'organisation des êtres vivants ; comment la problématique de la classification des éléments simples, culminant avec la combinatoire du tableau périodique de Mendeleieff des 92, a contribué à façonner la rationalité chimique (*cf.* [2, ch. III]), etc...

De même, en mathématique, certaines classifications ont eu une importance conceptuelle qui dépasse de bien loin les problèmes de rangement[18] ; c'est certainement le cas de celles que nous allons évoquer ci-dessous.

Les classifications portent sur des objets généraux (au sens du § 2.1), mais font parfois apparaître en fin de compte des objets particuliers tout à fait imprévus ; un tel passage ne s'obtient pas par une simple méditation dialectique sur les objets généraux considérés.

4.1 Classification des groupes finis simples.

Un exemple emblématique de classification mathématique est celui de la classification des groupes finis simples. Rappelons encore une fois qu'un groupe fini est dit simple s'il

[18]il y aurait certes bien des distinctions à faire parmi entre classifications, mais c'est à un philosophe des sciences qu'il revient d'en parler. Remarquons seulement qu'il ne s'agit dans ce chapitre que du cas où la classification aboutit à des listes dénombrables. Bien d'autres problèmes de classification mettent en jeu à la fois des invariants discrets et des modules continus qui forment parfois des objets de même nature générale que ceux que l'on classifie.

n'a pas de quotient non trivial, ou ce qui revient au même, s'il n'a pas de sous-groupe normal non trivial (voir l'exposé 3, § 1.3)[19]. Tout groupe fini se «dévisse» en groupes finis simples, qui sont, eux, «indévissables».

Le rêve de Burnside de classifier, en s'appuyant sur la théorie des représentations, les groupes finis simples a finalement abouti, au bout d'un siècle de travail monumental. On a la liste complète : trois séries infinies mais élémentaires

- groupes cycliques d'ordre premier,
- groupes alternés[20],
- groupes simples de type de Lie[21],

plus *26 groupes sporadiques*[22], dont le plus gros, appelé «Monstre», a

$$808017424794512875886459904961710757005754368000000000$$

éléments (il est construit par «repésentation», comme groupe de symétries d'une certaine structure remarquable de dimension 196883).

Les 5 premiers groupes sporadiques ont été découverts par Mathieu en 1860. Il a fallu plus d'un siècle pour qu'un 6ème n'apparaisse, au cours du travail de classification. La fin de ce travail avait été annoncée en 1983, mais un «trou» a été repéré dans une démonstration, trou qui a été «bouché» grâce à un article-rustine de 1300 pages !

La classification est désormais réputée achevée et les experts sont en train de rédiger une preuve «de seconde génération», plus compacte (environ 5000 pages si tout va bien !) et plus conceptuelle.

Qu'en est-il de la classification des représentations linéaires des groupes finis simples ? Autrement dit, que sait-on de leurs tables de caractères ?

Pour les groupes cycliques ou alternés, elles étaient déjà connues de Frobenius. Pour les groupes sporadiques, on possède des atlas de tables de caractères. La question des tables de caractères des groupes finis de type de Lie est en revanche ouverte, c'est même l'objet d'un champ d'investigation vaste et très actif sous la maîtrise d'œuvre de G. Luzstig. Celui-ci a proposé une étonnante conjecture reliant les représentations des groupes finis simples de type de Lie aux représentations des groupes quantiques.

4.2 Classification des groupes de Lie simples.

Entre-temps, Cartan et Killing avaient classifié les groupes de Lie réels et complexes simples G. La classification se ramène à celle des algèbres de Lie simples $Lie\, G$. Un peu comme dans la théorie de Frobenius pour les groupes finis, mais de manière beaucoup plus sophistiquée, apparaît de la géométrie euclidienne.

En fait, à toute algèbre de Lie complexe simple[23] (ou somme directe de telles) est associée un petit bijou de géométrie euclidienne réelle appelé *système de racines*, qui

[19] la notion, sinon le qualificatif, est due à Galois.

[20] c'est-à-dire groupes de permutations de n lettres composés d'un nombre impair d'échanges de deux lettres. C'est Galois qui a montré que ce sont des groupes simples dès que $n \geq 5$

[21] ce sont, grosso modo, des groupes de matrices à coefficients dans un corps fini.

[22] ce qualificatif est dû à Burnside.

[23] sic ! Complexe veut dire ici à coeffients dans le corps des nombres complexes, simple veut dire sans quotient non-trivial.

consiste en un ensemble fini Φ de vecteurs qui engendrent l'espace et qui vérifient les 3 propriétés suivantes :

- pour tout $\alpha \in \Phi$, les seuls éléments de Φ proportionnels à α sont α et $-\alpha$,

- pour tout $\alpha \in \Phi$, Φ est stable par réflexion s_α par rapport à l'hyperplan perpendiculaire à α,

- pour tous $\alpha, \beta \in \Phi$, la projection orthogonale de β sur la droite menée par α est un multiple demi-entier de α.

Le groupe de Weyl est le groupe fini de symétries de Φ engendré par les réflexions s_α.

Il reste à classifier les systèmes de racines : c'est affaire de combinatoire et de géométrie euclidienne élémentaire, quoique subtile. Ceux qui sont indécomposables (ce sont ceux qui correspondent effectivement à des algèbres de Lie simples) se laissent épingler, chacun, par un *diagramme de Dynkin*, dont voici la liste (on a pu dire que ces diagrammes de Dynkin sont des sortes de «lutins qui infestent les mathématiques»)[24] :

$$A_n : \ \circ - \circ - \cdots - \circ - \circ$$

$$B_n : \ \circ - \circ - \cdots - \circ \Rightarrow \circ$$

$$C_n : \ \circ - \circ - \cdots - \circ \Leftarrow \circ$$

$$D_n : \ \circ - \circ - \cdots - \circ < {\circ \atop \circ}$$

$$E_6 : \begin{array}{ccccc} & & \circ & & \\ & & | & & \\ \circ - & \circ - & \circ & - \circ & - \circ \end{array}$$

$$E_7 : \begin{array}{cccccc} & & \circ & & & \\ & & | & & & \\ \circ - & \circ - & \circ & - \circ & - \circ & - \circ \end{array}$$

$$E_8 : \begin{array}{ccccccc} & & \circ & & & & \\ & & | & & & & \\ \circ - & \circ - & \circ & - \circ & - \circ & - \circ & - \circ \end{array}$$

$$F_4 : \ \circ - \circ \Rightarrow \circ - \circ$$

$$G_2 : \ \circ \equiv \circ.$$

En conclusion, il y a 4 familles infinies (A_n, B_n, C_n, D_n) d'algèbres de Lie complexes simples[25], plus 5 exceptionnelles $(E_6, E_7, E_8, F_4, G_2)$.

Le problème de la classification des représentations des groupes de Lie simples a été résolu par Weyl pour l'essentiel, qui a donné une formule fondamentale pour les caractères. Il y a une relation entre les représentations de chacun de ces groupes continus et les représentations du groupe de Weyl (fini) correspondant.

[24]leur signification est en gros la suivante : les sommets - ou petits cercles - figurent les racines simples, desquelles toutes les racines se déduisent par combinaison linéaire à coefficients tous positifs ou tous négatifs ; les arêtes figurent l'angle entre deux racines simples non perpendiculaires - simple arête si l'angle est de 120° etc...

[25]les groupes associés sont issus de la géométrie euclidienne réelle ou complexe, ou de la géométrie symplectique.

4.3 Classification des représentations linéaires et indécidabilité.

Reprenons la notion de représentation linéaire dans son acception générale. On s'est attaché ci-dessus au cas des groupes (abstraits ou topologiques), mais on peut représenter linéairement d'autres structures. La situation la plus générale, semble-t-il, est celle des carquois.

Les *carquois* sont des graphes (en général finis) dont les arêtes (qui peuvent être multiples) sont orientées. Signalons en passant leur intervention récente dans la théorie des gestes musicaux de M. Andreatta et G. Mazzola [1].

Une *représentation linéaire* d'un carquois Q, c'est la donnée, pour tout sommet x de Q, d'un espace vectoriel V_x (disons de dimension finie pour fixer les idées), et pour toute arête a liant les sommets x et y d'une application linéaire F_a de V_x dans V_y.

Comme pour les représentations de groupes, il y a une notion naturelle de somme, et une représentation est dite indécomposable si elle ne se laisse pas décomposer (non trivialement) en somme.

La question de la classification des représentations linéaires des carquois mène alors à une trichotomie résumée dans le merveilleux théorème de Gabriel, Nazarova *et al.* (voir [3, 4.4]) où resurgissent, tels Scarbo, les diagrammes de Dynkin :

THEOREME : *Soit Q un carquois. On a la trichotomie suivante :*

1) Q n'a qu'un nombre fini de représentations indécomposables si et seulement si c'est un diagramme de Dynkin.

2) Q a une infinité de représentations indécomposables classifiables algébriquement (en un sens précis que nous n'éluciderons pas ici) si et seulement si c'est un diagramme de Dynkin étendu[26].

3) En dehors de ces deux cas, la «théorie» des représentations de Q est indécidable.

En fait, la démonstration de l'indécidabilité dans le cas 3) se fait en codant le problème des mots de Dehn dans la théorie des représentations de Q !

Exemple (Gelfand-Ponomarev). Soit Q_n le carquois ayant n sommets $x_1, \ldots, x_n$ liés par une arête orientée vers un sommet central x_0. La théorie des représentations de Q_n équivaut à celle des systèmes de n sous-espaces $V_1, \ldots V_n$ d'un espace vectoriel V_0, considéré à isomorphisms près. Il s'avère que Q_n est de type 1) (fini) pour $n \leq 3$, de type 2) (modéré) pour $n = 4$, de type 3) (sauvage) pour $n > 4$: il est donc impossible de classifier, à isomorphisme près, les systèmes de 5 sous-espaces d'un espace vectoriel.

****

[26] obtenu par adjonction d'un sommet à un diagramme de Dynkin selon une règle simple que nous ne préciserons pas ici.

Bibliographie

[1] - M. Andreatta, G. Mazzola, Formulas, Diagrams, and Gestures in Music, Journal of Mathematics and Music, 2007.

[2] - G. Bachelard, Le matérialisme rationnel, P. U. F. 1953.

[3] - D. Benson, Representations and cohomology I : basic representation theory of finite groups and associative algebras, Cambridge studies in advanced mathematics 30 (1995).

[4] - T. Coquand, B. Spitters, A constructive proof of the Peter-Weyl theorem, Math. Log. Quart. 0 (2004), 1-12.

[5] - A. Kirillov, Éléments de la Théorie des Représentations, (traduction française du russe) Éditions MIR, Moscou (1974).

[6] - A. Lautman, Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques. Réédition Vrin 2006.

[7] - G. Mackey, The scope and history of commutative and noncommutative harmonic analysis, History of mathematics, vol. 5, A. M. S., L. M. S. (1992).

[8] - J. P. Serre, Représentations des groupes finis, 5ème éd., Hermann (1998).

[9] - H. Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik (1928), transl. by H. P. Robertson, The Theory of Groups and Quantum Mechanics, 1931, rept. 1950 Dover.

[10] - H. Weyl, Classical Groups : Their Invariants And Representations, Princeton (1939).