

Le problème de l'orientation dans la pensée mathématique et l'art des conjectures.

Yves André

Le titre de cet article¹ fait écho à la célèbre question de Kant :

Qu'est-ce que s'orienter dans la pensée ?

Au-delà du strict champ philosophique où Kant la posait, cette question paraît centrale dans tout type d'intellectualité, et c'est dans le cadre de l'intellectualité mathématique que je vais l'aborder.

Vue de l'extérieur, la mathématique avance en produisant sans relâche théories et théorèmes. Mais d'où viennent-ils ? Où vont-ils ? Comment le mathématicien s'oriente-t-il dans son chemin de pensée ?

Ce n'est ni en philosophe (que je ne suis pas), ni comme mathématicien au travail, que je vais m'exprimer sur ces questions, mais avec le « léger surplomb »² que peut avoir un mathématicien sur son activité prise dans sa globalité.

Je précise d'emblée que dans ce texte, « mathématicien » désigne « quelqu'un qui démontre des théorèmes » (sous-entendu : nouveaux). Ceci appelle deux remarques :

1) cette acception est très restrictive : par mathématicien, j'entends donc ici exclusivement le « compositeur de mathématiques » - l'usage n'ayant pas retenu, hélas, cette expression précise qui rappelle la musique ;

2) toutefois, je ne veux pas dire que faire des mathématiques se réduise à démontrer des théorèmes nouveaux - pas plus que faire de la musique ne se réduit à en composer. Les mathématiques constituent d'ailleurs un domaine d'activité quelque peu anachronique où la division du travail est beaucoup moins avancée qu'en musique ou ailleurs. Ainsi, le mathématicien n'est pas seulement compositeur, mais bien souvent aussi, à lui seul, interprète, musicologue, critique, copiste, éditeur de partitions, organisateur de festivals, enfin tout sauf ce qui concerne l'histoire ancienne de sa discipline et l'enseignement des éléments de son solfège (dont s'occupent des professions voisines).

Au reste, même en me limitant aux mathématiques dites pures - donc en laissant de côté, comme je ferai, tout ce qui touche aux applications - je ne pourrai qu'effleurer le problème. Je vais surtout m'attacher à mettre en lumière un aspect remarquable, peut-être propre aux mathématiques, du problème de l'orientation dans la pensée : à savoir, le rôle qu'y joue l'art des conjectures. Cet aspect, qui ne semble pas avoir retenu jusqu'ici l'attention des épistémologues, a pourtant de quoi

¹compte rendu légèrement remanié de l'exposé du 10 Décembre 2005 au Séminaire MaMuPhi de l'ENS Paris. Je remercie Charles Alunni, Moreno Andreatta et François Nicolas de m'avoir donné l'occasion de m'y exprimer et pour leurs commentaires, et je tiens aussi à les féliciter pour l'initiative de ce dialogue original entre musiciens, philosophes et mathématiciens.

²pour reprendre la belle formule que F. Nicolas emploie à propos de l'intellectualité musicale.

intriguer : hétérogènes à l'appareil déductif du discours mathématique, les conjectures ont un statut transitoire et semblent suspendues à leur mystérieux pouvoir d'énonciation.

Avant d'aborder mon thème proprement dit, il va me falloir déblayer un peu le terrain. En effet, les nombreuses conversations que j'ai pu avoir sur les mathématiques avec des philosophes, littéraires et autres artistes, me font penser que l'image des mathématiques dans le public cultivé est gravement défigurée. C'est pourquoi, pour commencer, je vais tenter de récuser deux des préjugés les plus tenaces.

I. L'arbuste.

Le premier préjugé que j'ai en vue a trait à l'*architecture* des mathématiques. Je l'épinglerai par l'image de « l'arbuste des mathématiques ». En référence, bien sûr, à la célèbre image cartésienne de l'arbre de la connaissance. Rappelons-nous : l'arbre dont les racines sont la métaphysique ; le tronc, la physique ; les branches : la morale, la médecine, la mécanique, chacune ayant ses fruits. Et les mathématiques, dans cette image cartésienne ? Elles sont la sève de l'arbre.

L'arbuste des mathématiques, lui, aurait pour racines la logique, pour tronc la théorie des ensembles, et pour branches l'algèbre, l'analyse, la géométrie.

Je voudrais soulever quatre objections contre cette image.

1ère objection : cette image rend compte de manière totalement faussée de l'état des lieux, en paraissant donner un rôle central et nourricier à la logique et à la théorie des ensembles. En réalité,

- i) ces deux disciplines occupent une place à la fois marginale et relativement exigüe dans le paysage mathématique (ce qui n'ôte rien à leur intérêt propre) ;
- ii) loin d'entretenir un rapport nourricier avec la « grande composante connexe » des mathématiques (algèbre, théorie des nombres, géométrie algébrique et différentielle, topologie algébrique et différentielle, les grands domaines de l'analyse linéaire et non-linéaire, etc...), elles en sont presque déconnectées.

2ème objection (plus sévère) contre le *réductionnisme* qui accompagne cette image. Ce réductionnisme, qui opère en deux mouvements, est surtout le fait d'un certain courant d'épistémologie bien implanté ; j'appellerai ses adeptes les « épistémologues courants » (en empruntant le mot à A. Badiou).

Le premier mouvement de réduction est l'*élagage de l'arbuste* : ces « épistémologues courants », tout préoccupés de fondements, se figurent que pour penser les mathématiques, il suffit, si celles-ci reposent sur la logique et la théorie des ensembles, de ne retenir que ces dernières en ignorant tout le reste. Ce « reste » ne serait qu'épiphénomènes laissés aux techniciens.

Une fois ce sciage de branches effectué, ils sont alors aussi bien placés pour parler des fondements des mathématiques que le serait un sourd n'ayant jamais ouvert une partition, mais possédant un peu de solfège, pour parler des fondements de la musique !

Mais voici, après l'élagage, le second mouvement de réduction, le *rabougrissement de l'arbuste* : pour « améliorer » encore leur point de vue, nos « épistémologues courants » se sont avisés qu'on ne comprend jamais si bien un domaine de la pensée qu'à travers ses crises. Dès lors, ils focalisent toute leur attention sur la petite trentaine d'années dite de « la crise des fondements », au début du siècle dernier.

À les lire, on a souvent l'impression que les mathématiques furent pendant une génération entière comme frappées de tétraplégie, jusqu'à ce que l'organe central, la logique, eût enfin réparé les ravages causés par le traumatisme des paradoxes. Il est à peine besoin de mentionner à quel point cette vision est fausse, absurde, ridicule : le début du XX^e fut en réalité une époque extraordinairement fertile, qui vit la naissance de l'algèbre abstraite, de l'analyse abstraite, de la topologie générale et algébrique, etc...

3^{ème} objection contre le *caractère de fondement de la logique*. A. Lautman avait soutenu dès 1937 - je cite³ -

cette idée que la véritable logique n'est pas *a priori* par rapport aux mathématiques mais qu'il faut à la logique une mathématique pour exister.

Cette idée trouve dans les travaux contemporains très influents de J.-Y. Girard, créateur de la logique linéaire, une confirmation éloquente. Outre ses objections vigoureuses contre le piètre fondement que constitue la traditionnelle régression à l'infini des méta-, méta-méta-théories logiques, se soutenant l'une l'autre en gigogne, je mentionnerai son programme actuel qui, renversant l'image traditionnelle, vise à fonder la logique sur les mathématiques, et les mathématiques parmi les plus avancées : la géométrie non commutative.

Il y a un autre aspect de l'évolution de la logique mathématique qui conduit à lui dénier tout statut d'exception, c'est le rôle récent et de plus en plus important qu'elle joue en informatique théorique, rôle qui n'est pas du tout celui d'un fondement, mais celui d'un outil au service de l'invention de nouveaux langages de programmation ou d'algorithmes...

A mon sens, c'est une émancipation : enfin des rôles créatifs et non plus de soutienement ! Le logicien Atlas est libéré, sans que la voûte des mathématiques ne s'effondre dans le Tartare !

4^{ème} objection (plus large) *contre l'illusion de la recherche « essentialiste » de fondements immuables*. Pendant qu'Atlas s'en est allé cueillir les pommes de silicium au jardin de l'informatique, il n'est nul besoin qu'un Hercule le remplace...

Je ne développerai pas ce point, qui m'entraînerait trop loin, et me contenterai de remarquer que la critique la plus radicale à cet égard est celle d'Alain Badiou, pour qui il ne saurait être question de fondements ontologiques sur lesquels s'appuieraient les mathématiques : en effet, la thèse inaugurale de son livre « L'être et l'évènement » - d'une radicalité stupéfiante pour un mathématicien - est justement l'identité : mathématiques = ontologie, ou plus précisément :

³Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques, fin du ch. 1.

les mathématiques sont l'historicité du discours sur l'être-en-tant-qu'être.

Si on le suit, les « épistémologues courants » sont au mieux des chroniqueurs de l'ontologie, desquels on est en droit d'exiger une connaissance des mathématiques vivantes⁴.

Voilà pour les objections contre l'image de l'arbuste.

II. Le tricotin.

Venons-en au second préjugé, qui touche non plus à l'architecture des mathématiques vivantes, mais à sa *nature* même. J'épinglerai ce préjugé par l'« image du tricotin », ce jouet de bois jadis populaire, portant quatre épingles, à l'aide duquel on tricotait indéfiniment une tresse de laine, la seule variation possible étant celle des couleurs des fils enroulés autour des épingles.

Ce que je vise ici, c'est une certaine forme vulgaire de logicisme, et cette image des mathématiques qu'elle véhicule : des axiomes enroulés ad libitum autour de quatre épingles, tricotés indéfiniment en une tresse ininterrompue de vérités qui s'en déduisent, *modus ponens*, *modus tollens*, maille à l'endroit, maille à l'envers !...

Je voudrais de nouveau soulever quatre objections contre cette image.

1ère objection. Certes, le discours mathématique est un discours déductif, qui soumet ses énoncés à un ordre rigoureux. Mais l'image du tricotin omet un point évident (déjà chez Euclide) : à savoir qu'un texte mathématique n'est pas un enchaînement uniforme d'implications, mais apparaît polarisé entre « énoncés » d'un côté, et « démonstrations » de l'autre ; en outre, le côté « énoncé » est lui-même stratifié suivant une hiérarchie d'importance et de profondeur, en lemmes, propositions, théorèmes, corollaires. Ni cette polarisation, ni cette hiérarchie, ne résultent d'une loi formelle, mais de choix délicats du mathématicien qui vont bien au-delà de simples choix rédactionnels ou stylistiques ; ces choix symptomatiques pointent des *situations*.

2ème objection. Elle porte contre le *réductionnisme* du logicisme vulgaire, qui consiste à réduire les mathématiques à la suite de symboles dont est tricoté le texte mathématique, et aux règles élémentaires du tricotage.

⁴sous peine de devenir les xylophonistes fossiles d'un Carnaval de Non-Sens !

Je suis conscient qu'il peut paraître paradoxal de terminer mon réquisitoire contre l'image de l'arbuste en invoquant Badiou comme témoin à charge, lui qui de bout en bout de son livre emploie le mot « mathématique » pour ne parler que de théorie des ensembles. Mais : 1) il n'occulte pas ce point mais s'en explique très judicieusement dans son introduction (§5), se confrontant aux critiques du « mathématicien qui soupçonne toujours le philosophe de n'en pas savoir assez pour avoir droit à la parole », 2) il n'y a pas trace du réductionnisme que je stigmatisais, 3) il n'est pas philosophe des mathématiques mais philosophe « tout court », puisant dans la théorie des ensembles non pas tant des objets d'étude que des figures de pensée, et surtout : 4) ce qu'il dit est, à mon sens, d'une tout autre profondeur que ce qu'on trouve chez les « épistémologues courants ».

Si la mathématique s'est, parmi les sciences, dotée d'une écriture propre, elle ne se réduit pas pour autant à son écriture. Rien n'empêche, certes, d'étudier de manière purement formelle un certain discours mathématique idéalisé, comme le fait notamment la théorie de la démonstration ; pourvu qu'on ne prétende pas représenter ainsi la pensée mathématique, ni même les démonstrations réelles des mathématiciens, - mais seulement leur trace formelle.

Une des aberrations les plus visibles de ce réductionnisme grossier est de faire table rase de toute heuristique, à commencer par l'opposition, si fondamentale dans la pensée du mathématicien, entre le trivial et le profond.

3ème objection : la démonstration, celle pratiquée par le mathématicien au travail, n'est pas un processus formel, elle ne tient pas de la bureaucratie des formules et des procès-verbaux. Démonstration n'est pas identique à vérification. Certaines vérifications peuvent être automatisées. Mais la démonstration présuppose une idée - ce que les mathématiciens appellent une idée de démonstration - , même si elle se réduit à un calcul.

Pour la plupart des mathématiciens au travail, il y a *primat de la compréhension sur la vérification*. Ils savent bien qu'à cet égard, il y a des démonstrations de qualités bien différentes (indépendamment des questions de rigueur), et ils passent beaucoup de temps à reprouver des théorèmes connus pour les comprendre mieux et différemment. Les démonstrations les plus frustes - et frustrantes - sont celles qui se réduisent à un calcul : elles emportent conviction, certes, mais il reste à comprendre le calcul lui-même - *pourquoi* cela marche. À l'opposé, il y a des démonstrations qui illuminent, qui ouvrent des horizons, qui sont conceptuellement si nouvelles et fortes qu'elles finissent par faire presque oublier, ou par rendre dérisoire, le résultat prouvé.

4ème objection : contre l'arbitraire des axiomes. Que sont les axiomes, en fait ? Des parties constitutives de la définition d'un concept, ou plus largement d'un cadre conceptuel mathématique. Or les mathématiciens sont généralement de grands adeptes du rasoir d'Ockham, et détestent la multiplication gratuite des concepts (et donc des axiomes) ; ils travaillent assidûment à la recherche du « bon cadre conceptuel », qui fait l'objet de débats passionnés entre spécialistes, et est tout sauf arbitraire. Les changements de systèmes d'axiomes correspondent à des changements de cadre conceptuel, à des mutations de point de vue, hautement significatifs pour l'histoire de la discipline. Si, comme disait Cantor, l'essence des mathématiques, c'est la liberté, la liberté du mathématicien ne consiste certainement pas dans l'arbitraire et le gratuit.

On rejoint ici notre problème de l'orientation dans la pensée mathématique... ces lieux où, comme disait G. Châtelet,

l'orientation ne s'obtient pas à titre gracieux et où le vrai ne se laisse pas saisir comme le vérifiable.

En terminant ces objections contre l'image du tricotin, il me faut avouer que les mathématiciens ont leur part de responsabilité dans la diffusion de cette image purement ludique, irresponsable, de leur activité : interrogés par un public curieux

de leurs motivations, ils se réfugient bien souvent - soit qu'ils répugnent à prendre quelque surplomb sur leur travail technique, soit qu'ils n'aient pas les mots pour l'exprimer - dans cette réponse un peu courte : « parce que ça m'amuse ».

Comme si les mathématiques n'avaient pas d'autres enjeux ! Rappelons l'avertissement de H. Weyl⁵ :

Si les mathématiques, au nom de la sécurité, se retiraient sérieusement sur cette ligne de défense du simple jeu, elles se retrancheraient totalement de l'histoire universelle de l'esprit.

III. Objets généraux et objets particuliers.

Ayant déblayé le terrain, il me faut le préparer encore un peu par quelques considérations sur les objets mathématiques. J'écarterai d'emblée, comme hors-sujet, la question générale de leur nature. Du reste, d'après G. Châtelet,

une philosophie offensive ne saurait se contenter de ratiociner indéfiniment sur le « statut » des objets scientifiques et doit se situer résolument aux avant-postes de l'obscur.

Le conseil vaut *a fortiori* pour le mathématicien !

Je distinguerai deux types d'objets mathématiques, que j'appellerai *généraux* et *particuliers* respectivement (on pourrait aussi dire *génériques* et *singuliers*, si ces deux termes n'étaient déjà bien employés en mathématiques).

Les objets généraux sont les mieux connus : ce sont ceux sur lesquels portent les discours traditionnels sur le statut des objets mathématiques. Exemple : les groupes continus. Ils forment souvent des catégories, et c'est probablement le langage des catégories qui permet de rendre le mieux compte de la généralité en mathématique.

Les objets particuliers sont peu connus des non-mathématiciens ; je vais donc m'y attarder un peu. Ce sont des sortes de « personnages » qui ont un *nom propre*, et qui interagissent les uns avec les autres, et avec les objets généraux. Chaque communauté de mathématiciens, voire chaque mathématicien, a ses objets particuliers familiers, plus ou moins apprivoisés. Ceux-ci sont à la fois des objets d'étude *per se* - voire des objets de dévotion ! - , mais aussi, et de manière essentielle, les éléments du viatique d'exemples de chaque mathématicien, dont il n'hésite pas à se servir même pour ses crash-tests !

Certains objets particuliers sont si universels (sic) et si interactifs qu'ils sont familiers à de nombreuses communautés de mathématiciens, sous un nom unique mais sous des traits et caractères très différents, et avec des histoires différentes.

Je prends un exemple un peu au hasard : $SL_2(\mathbb{R})$, le groupe continu des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à coefficients réels a, b, c, d vérifiant $ad - bc = 1$. Personnage unique, familier à la plupart des mathématiciens, héros polymorphe de longues sagas très diverses.

⁵Le Continu, et autres écrits.

Le géomètre différentiel verra $SL_2(\mathbb{R})$ comme groupe de symétries de l'espace hyperbolique le plus simple : le disque ⁶. Ses quotients par des sous-groupes discrets forment des « tambours » dont les fréquences propres sont encore très mystérieuses (conjecture de Selberg...).

Le théoricien des nombres verra $SL_2(\mathbb{R})$ et ses sous-groupes discrets sous des traits similaires, mais à travers la longue histoire des formes modulaires.

Le géomètre algébriste complexe connaît bien $SL_2(\mathbb{R})$, entre autres, par son rôle dans la théorie des limites de périodes.

L'algébriste le côtoie comme objet basique en théorie des invariants et en théorie des représentations. etc...

Les rapports dialectiques que ces objets particuliers entretiennent avec les objets généraux sont très divers. Commençons par le plus trivial : la généralisation : la notion de groupe continu est une structure qui généralise l'une des propriétés de $SL_2(\mathbb{R})$ (qui est un prototype de groupe continu).

Mais il arrive souvent que dans le but d'étudier tel ou tel objet particulier ω , le mathématicien ait à introduire des objets généraux λ qui ne sont pas des généralisations de ω , dont la fonction est d'interagir avec lui pour « le faire parler ».

Voici d'autres rapports plus subtils et moins connus. L'étude des objets généraux diffère beaucoup de celle des objets particuliers : on y rencontre notamment des problèmes de classification. La situation idéale est celle où le classifiant est un objet ayant même structure que ceux qu'il classe. Mais c'est un objet particulier. La connaissance de cet objet particulier subsume celle des objets généraux qu'il classe et va en fait au-delà, mais c'est une longue histoire...

Une autre instance importante où le général produit du particulier est celle des dégénérescences, de la déformation vers les cas limites. Ces objets-limites sont souvent plus simples que les objets généraux dont ils proviennent et fournissent des informations précieuses à leur sujet. Toutefois, la complexité ne s'évanouit pas, elle change de niveau, et se loge dans le processus même de déformation, dont la compréhension requiert l'élaboration d'un nouveau cadre conceptuel et de nouveaux objets généraux, et ainsi de suite.

IV. Brouillards et analogies.

Nous sommes maintenant prêts à aller au coeur du sujet de cet exposé. J'irai vite, pour arriver enfin aux conjectures ; qu'on me pardonne de commencer un peu comme un catéchisme !

Qu'est-ce qui meut le mathématicien dans sa pensée ?

Le désir.

Quel désir ?

⁶pour une introduction à cette histoire - et à la suivante - voir par exemple B. Mazur : « Plus symétrique que la sphère », *Pour la science*, Oct/Dec (2003) 78-85. Pour d'autres histoires de $SL_2(\mathbb{R})$, en liaison avec le programme d'Erlangen de F. Klein, voir V. Kisil : "Starting with $SL_2(\mathbb{R})$ ", ArXiv :math.GM/0607387.

Le désir de comprendre.

Comprendre quoi ?

Certaines choses concernant les objets mathématiques, généraux ou particuliers, et surtout les mystères de leurs rapports mutuels.

Et ce qui excite ce désir ?

Le mystère-même ; le mystère qui enflamme l'imagination, qui elle-même fait surgir les idées nouvelles, qui déchireront le voile.

La plupart du temps, il est vrai, cette pêche au mystère, cette recherche des problèmes, n'est qu'un cabotage le long des côtes bien familières des théories constituées. Souvent aussi, il s'agit de la recherche d'un isthme entre deux terres connues mais jusque-là séparées. Quelquefois, il s'agit vraiment de pêche en eaux profondes.

De ce qui s'y joue, aucun mathématicien n'a mieux parlé qu'André Weil dans un célèbre article « De la métaphysique aux mathématiques »⁷ :

Rien n'est plus fécond, tous les mathématiciens le savent, que ces obscures analogies, ces troubles reflets d'une théorie à l'autre, ces furtives caresses, ces brouilleries inexplicables ; rien aussi ne donne plus de plaisir au chercheur. Un jour vient où l'illusion se dissipe ; le pressentiment se change en certitude ; les théories jumelles révèlent leur source commune avant de disparaître ; comme l'enseigne la *Gītā*, on atteint à la connaissance et à l'indifférence en même temps. La métaphysique est devenue mathématique, prête à former la matière d'un traité dont la beauté froide ne saurait plus nous émouvoir. [...] Heureusement pour les chercheurs, à mesure que les brouillards se dissipent sur un point, c'est pour se reformer sur un autre.

Ainsi, ces « obscures analogies » conditionnent-elles, orientent-elles à la façon d'une boussole - mais encore dans le trouble - le cheminement de la pensée mathématique.

V. Points de vue féconds.

C'est là, dans le passage mystérieux des troubles reflets initiaux à la découverte de questions, notions, théorèmes nouveaux, que se pose la question de l'orientation de la pensée mathématique. Le jour « où l'illusion se dissipe » n'advient qu'après la longue patience de ce travail d'orientation. A. Grothendieck a admirablement décrit le rôle qu'y joue *la recherche de points de vue féconds*. Je le cite⁸ :

[...] ces innombrables questions, notions, énoncés [...] ne prennent [...] un sens qu'à la lumière d'un tel « point de vue » - ou pour mieux dire, ils en naissent spontanément, avec la force de l'évidence. [...] Le point de vue fécond est celui qui nous révèle,

⁷texte de 1960, reproduit dans ses Oeuvres, vol. II, p. 408-412, Springer.

⁸Récoltes et semailles, §2.6.

comme autant de parties vivantes d'un même Tout qui les englobe et leur donne un sens, ces questions brûlantes que nul ne sentait, et (comme en réponse peut-être à ces questions) ces notions tellement naturelles que personne n'avait songé à dégager, et ces énoncés enfin qui semblent couler de source, et que personne ne risquait de poser, aussi longtemps que les questions qui les ont suscités, et les notions qui permettent de les formuler, n'étaient pas apparues encore. Plus encore que ce qu'on appelle les théorèmes-clé en mathématique, *ce sont les points de vue féconds qui sont, dans notre art, les plus puissants outils de découverte - ou plutôt, ce ne sont pas des outils, mais ce sont les yeux même du chercheur qui, passionnément, veut connaître la nature des choses mathématiques.*

VI. Conjectures.

L'idée que je voudrais développer est que dans cette traversée « de la métaphysique aux mathématiques », comme disait Weil, dans ce long cheminement labyrinthique allant des brouillards vers la clarté du théorème, ce qui oriente la pensée non plus à la manière d'une boussole, mais *comme un phare éclairant de loin la petite porte cachée qui ouvre sur la clarté*, c'est la conjecture. Aux avant-postes de ces points de vue dont parle Grothendieck, les conjectures marquent et éclairent un but... mais pas du tout le chemin pour l'atteindre.

« Conjecture » a un sens bien précis en mathématiques. Il s'agit d'un *énoncé destiné à devenir un théorème*. Ce qui manque encore, c'est la démonstration.

La conjecture fait donc partie du domaine heuristique. Son existence, en tant que conjecture, est en principe transitoire. Elle n'a aucune place dans l'image logiciste des mathématiques.

Une fois la conjecture formulée, la question de l'orientation de la pensée dans cette aventure mathématique devient celle de la recherche de stratégies de démonstration (ou de réfutation, éventuellement !). Après maint tâtonnement, on a fini par mettre un doigt sur le noeud du mystère, on en a un condensé formulé, un précipité ; et l'aventure se poursuit sur un mode plus concret et souvent plus technique.

Cela peut même se traduire par un relai des compétences : l'énoncé d'une conjecture marque souvent ce moment où les « theory-makers » (les bâtisseurs de théorie) passent le relais aux « problem-solvers » (ceux qui résolvent les problèmes). Mais le cycle se referme : la résolution des grandes conjectures s'accompagne souvent d'idées tout à fait nouvelles, dont l'approfondissement est alors l'occasion d'un passage de relai dans l'autre sens.

Critères. Pour être acceptée comme telle, une conjecture doit satisfaire à certains critères (qui naturellement sont bien différents des critères de vérité, de preuve rigoureuse, exigés pour un théorème). J'en distinguerai quatre :

1) puisqu'elle est censée devenir, telle quelle, un théorème, son énonciation doit satisfaire aux *mêmes critères formels que ceux d'un théorème* : précision, absence

d'ambiguïté, unité interne. Une conjecture n'est pas une simple question. Notons incidemment que tout comme un théorème, elle peut porter tant sur les objets généraux que sur les objets particuliers.

2) À défaut de preuve, elle doit être accompagnée de ce qu'on appelle en anglais « *some evidence* » (ce qui n'est pas de l'évidence, mais ce qu'on pourrait traduire par « témoignage en faveur de » ou « bien-fondé heuristique »). Cette « *evidence* » peut être de nature diverse et hétérogène : il peut s'agir d'expérimentations (numériques ou non), de la démonstration de cas particuliers, ou encore d'analogies précises avec des énoncés qui sont déjà des théorèmes.

3) La conjecture doit être *en situation*, se rapporter à un problème identifié. On doit pouvoir lui attribuer une portée non nulle. Cela exclut les simples devinettes.

4) En formulant une conjecture, l'auteur de la conjecture s'engage, *prend parti*. C'est une sorte de pari. La réputation de l'auteur, comme expert et comme visionnaire, joue un rôle certain dans l'obtention de l'assentiment de la communauté. Ce dernier critère doit toutefois être nuancé. Notamment lorsqu'il s'agit de conjectures anciennes - parfois présentées par leurs auteurs comme des questions intéressantes « qui les entraîneraient trop loin » ; c'est la postérité qui en a fait des conjectures.

Gestes. J'ai parlé, à propos de conjecture, de condensation, de prédiction, d'engagement, de pari. La conjecture, par nature transitoire, est suspendue au mystérieux pouvoir de son énonciation. G. Châtelet écrivait ceci

les vérités mathématiques sont bien éternelles, mais leur conquête,
en vue de leur stratification dans un savoir, présuppose des gestes
qui les font ressortir pour les arracher au tissu de l'Être.

Ainsi sont ces gestes qui posent les conjectures architectoniques, gestes qui captent et qui pointent. Et qu'il ne faut pas confondre avec ces événements capitaux, ces grands catalyseurs de la pensée mathématique, que sont les irrptions d'idées nouvelles ; autres gestes : déchirure, coup d'aile.

Typologie. En tant que « phares », les conjectures sont de portée très variable. Les plus puissantes sont celles que j'appellerai, en suivant le mathématicien Barry Mazur, *architectoniques* : elles façonnent le paysage conjectural d'un domaine.

Parfois, elles engendrent de véritables programmes de travail mettant en jeu de nombreux mathématiciens, ce qu'on a pu ironiquement appeler les *plans quinquénaux* des mathématiques.

Par ailleurs, il arrive dans certains domaines mathématiques que les conjectures ne soient pas isolées, mais nombreuses et liées les unes aux autres par des liens logiques ou heuristiques très forts ; c'est typiquement le cas dans la théorie des « motifs », créée par Grothendieck, où les conjectures forment comme l'armature idéale dans laquelle s'échafaude la théorie.

VII. Exemples.

Ce sont deux des plus célèbres conjectures architectoniques des mathématiques que je vais rapidement présenter et commenter, l'une concernant les *nombre*s (Riemann), l'autre les *formes* (Poincaré/ Thurston).

*La conjecture, ou « hypothèse », de Riemann.*⁹ Elle concerne les nombres premiers $p = 2, 3, 5, 7, 11, \dots$, ces « particules élémentaires de l'arithmétique ». Euclide savait deux choses à leur propos :

- 1) tout nombre entier > 1 est produit de nombres premiers (avec répétitions, mais de manière unique) ; exemple : $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$.
- 2) il existe une infinité de nombres premiers.

Pour prouver 2), il ne s'agit pas de faire des listes, aussi longues soient-elles, il faut une idée ! Deux millénaires et demi plus tard, la preuve d'Euclide n'a rien perdu de sa fulgurance : soient $p_1, p_2, \dots, p_m$ des nombres premiers. Formons leur produit et ajoutons un ; notons n le nombre ainsi formé : $n = \prod p_i + 1$. Ce nombre est > 1 donc il admet un diviseur premier p . Si p était l'un des p_i , il diviserait à la fois n et $n - 1 = \prod p_i$, donc aussi 1, ce qui est impossible. Donc p est un « nouveau » nombre premier distinct des p_i ¹⁰.

Jusqu'au XVII^e siècle (Fermat), on en est à peu près resté là. Au XVIII^e, en pleines mathématiques baroques, L. Euler¹¹ a eu l'idée de « traduire » le point 1) ci-dessus en termes de séries - c'est-à-dire de sommes indéfinies -, de la façon suivante : si l'on multiplie les séries $1 + p + p^2 + p^3 + \dots = \frac{1}{1-p}$ entre elles, pour tous les nombres premiers p , on trouve

$$(1+2+2^2+\dots) \times (1+3+3^2+\dots) \times (1+5+5^2+\dots) \times \dots = 1+2+3+4+5+\dots$$

soit, en notation compacte :

$$\prod \frac{1}{1-p} = \sum n.$$

Par le même argument, on a formellement, pour tout entier s (positif ou négatif),

$$\prod \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum n^{-s},$$

ce qui suggère un lien entre la distribution des nombres premiers et le comportement des séries du type $\sum n^{-s}$. Euler a entrepris de calculer la somme de ces séries pour certains s , et y est parvenu pour tout entier pair positif, par exemple (1735) :

$$\sum n^{-2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Bien sûr, pour $s = -1$, la série $\sum n = 1 + 2 + 3 + \dots$ diverge : sa somme est infinie ; mais Euler, l'un des plus grands virtuoses es séries de l'Histoire (avec

⁹Pour plus de détail, dans un style informel et très accessible, on peut consulter : M. du Sautoy, "The Music of the Primes : Searching to Solve the Greatest Mystery in Mathematics", HarperCollins (2003). On peut aussi consulter la présentation plus formelle de E. Bombieri sur www.claymath.org/millennium.

¹⁰pour les puristes, signalons que l'énoncé précis d'Euclide est le suivant (Eléments, IX-20) : « les nombres premiers sont plus nombreux que toute multiplicité donnée de nombres premiers », et que la preuve n'y est faite que dans le cas particulier de $m = 3$ nombres premiers.

¹¹qui, soit dit en passant, a aussi écrit des volumes sur la théorie de la musique, sévèrement critiqués au siècle suivant par un autre Riemann...

Jacobi et Ramanujan), voyait beaucoup plus loin, et affirmait qu'en un certain sens, tout se passait comme si

$$\sum n = -\frac{1}{12},$$

un nombre négatif ! En fait, il affirmait qu'il y avait lieu de surmonter la divergence et d'attribuer une valeur finie à $\sum n^{2k-1}$, directement liée à $\sum n^{-2k}$.

Cent-vingt ans s'écoulèrent avant que cette prédiction géniale soit rigoureusement justifiée, lorsque le grand mathématicien romantique B. Riemann introduisit la célèbre *fonction*

$$\zeta(s) = \sum_{n>0} n^{-s}$$

où la variable s n'est plus nécessairement un entier, mais un nombre complexe. C'est là un point capital : quand s se déplace sur l'axe réel vers la gauche, $\zeta(s)$ est bien définie jusqu'au point 1 et devient infinie en 1. Mais dans le plan complexe, on peut *contourner* l'obstacle 1, et obtenir en fait une fonction définie partout, sauf en 1. C'est là une instance du principe du prolongement analytique, l'un des outils les plus puissants en mathématiques pour passer du local au global¹². Dans son article visionnaire (1859)¹³, Riemann prouve, pour tout nombre complexe s , la symétrie suggérée par Euler entre $\zeta(s)$ et $\zeta(1-s)$, et il explique le lien, basé sur la formule $\zeta(s) = \prod \frac{1}{1-p^{-s}}$, entre la distribution des nombres premiers et la position des *zéros* de ζ (c'est-à-dire des valeurs de s pour lesquelles $\zeta(s)$ s'annule). C'est en suivant ces arguments que J. Hadamard et C. de la Vallée-Poussin ont démontré qu'entre 1 et n , il y a environ $\frac{n}{\log n}$ nombres premiers (1896).

La conjecture de Riemann¹⁴, qui préciserait de manière essentielle et optimale ce résultat, dit que *les zéros non triviaux*¹⁵ de ζ se trouvent tous sur l'axe de symétrie, c'est-à-dire la droite verticale d'abscisse $1/2$.

Commentaire. Notons en premier lieu que cette conjecture porte sur un objet *particulier*, la fonction ζ de Riemann. Elle n'en est pas moins une conjecture architectonique de la théorie des nombres. Elle domine toute la théorie des nombres premiers, et sa portée est en fait beaucoup plus grande (surtout sous sa

¹²rappelons à ce propos le mot célèbre d'Hadamard : « le plus court chemin entre des vérités dans le domaine réel passe par le domaine complexe ».

¹³«Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse», Monatsberichte der Berliner Akademie.

¹⁴Riemann l'énonce avec une discrétion remarquable : «Man findet nun in der That etwa so viel reelle Wurzeln innerhalb dieser Grenzen, und es ist sehr wahrscheinlich, dass alle Wurzeln reell sind. Hiervon wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen; ich habe indess die Aufsuchung desselben nach einigen flüchtigen vergeblichen Versuchen vorläufig bei Seite gelassen, da er für den nächsten Zweck meiner Untersuchung entbehrlich schien.» La conjecture de Riemann est reprise par Hilbert comme l'un de ses 23 problèmes.

¹⁵la fonction ζ s'annule aux entiers pairs strictement négatifs, qu'on appelle « zéros triviaux ».

forme généralisée aux cousines de la fonction ζ que sont les fonctions L de Dirichlet). Selon Alain Connes (je traduis), « l'hypothèse de Riemann est probablement le problème le plus basique des mathématiques, au sens où il s'agit de l'entrelacement de l'addition et de la multiplication. C'est un trou béant dans notre compréhension... »¹⁶.

De quelle « evidence » dispose-t-on en faveur de cette conjecture ?

Les premiers tests numériques sont dus à Riemann lui-même¹⁷. Aujourd'hui, des calculs parallèles sur un réseau (zetagrid) de plus de 10000 machines ont calculé les 250 milliards de zéros non triviaux les plus proches de $1/2$, qui tous semblent se trouver sur l'axe de symétrie de ζ . Mais ce n'est pas, tant s'en faut, la justification la plus convaincante. Incidemment, en 1897, Mertens avançait une conjecture « un peu plus forte » que celle de Riemann. Elle fut réfutée 88 ans plus tard par Odlyzko et te Riele, en suivant une voie très indirecte ; ces experts estiment par ailleurs que la conjecture de Mertens est probablement vraie jusqu'à des valeurs de l'ordre de 10^{20} ; de sorte qu'en attendant les ordinateurs quantiques, les calculs numériques ne pourraient que confirmer la conjecture fausse !

L'argument heuristique le plus convaincant vient sans doute de l'analogie entre corps de nombres et courbes algébriques sur un corps fini : E. Artin avait montré dans sa thèse que l'hypothèse de Riemann avait un analogue dans ce contexte, et Weil a *démontré* cet analogue.

Weil a en outre généralisé la formule explicite qu'avait donnée Riemann pour le nombre de nombres premiers inférieurs à une quantité donnée. La formule de Weil présente quelque analogie troublante avec les formules de points fixes en topologie (ou dans la théorie des systèmes dynamiques). Pour quel espace sous-jacent ? L'une des analogies possibles serait un « sphéroïde » de dimension 3.¹⁸

A propos de ζ , c'est donc un « texte » à trois colonnes qui se dévoile, dont seule la colonne « courbes algébriques sur un corps fini » est, pour le moment, bien comprise.

Combien de temps faudra-t-il encore pour que notre pierre de Rosette, à nous autres arithméticiens, rencontre son Champollion ?
(Weil, *ibid.*)

Passons à notre second exemple, qui concerne les formes.

*Les conjectures de Poincaré et de Thurston.*¹⁹ Il s'agit de la classification, en topologie différentielle, des variétés de *dimension* 3 (en termes informels, il s'agit

¹⁶ cité dans K. Sabbagh, *Dr. Riemann's Zeros* (Atlantic, 2002), p.208.

¹⁷ retrouvés dans le Nachlass de Riemann par C.L. Siegel.

¹⁸ l'analogie entre corps de nombres et espaces (éventuellement pincés) de dimension 3 est plus récente que celle entre corps de nombres et courbes algébriques sur les corps finis ; l'une des premières pierres du gué étant que la dimension cohomologique étale des corps de nombres est 3.

¹⁹ Pour plus de détail, dans un style informel et très accessible, on peut consulter le texte de la conférence de S. Lang : « Faire des maths : grands problèmes de géométrie et de l'espace », revue du Palais de la Découverte, vol. 12, n 114 (1984). On peut aussi consulter la présentation plus formelle de J. Milnor sur www.claymath.org/millennium.

de décrire les différentes formes possibles à trois dimensions en « géométrie du caoutchouc »). On se limite aux variétés *compactes* (pour éviter les « fuites » vers l'infini) et *orientables* (on ne se laisse pas désorienter par Möbius...).

La classification en dimension 1 est très simple : on ne trouve, à équivalence²⁰ près, que le cercle S^1 . Contrairement aux apparences, les noeuds sont bien équivalents au cercle : leur caractère « noué » tient au plongement choisi dans un espace ambiant, mais c'est d'une classification intrinsèque qu'il s'agit ici (une fourmi parcourant le noeud a-t-elle le moyen de « savoir » qu'il est noué ?).

En dimension 2, la classification est comprise depuis le XIX^e : on trouve les tores (ou « bouées ») à g trous. Celle sans trou ($g = 0$) est la sphère S^2 .

Par ailleurs, pour $g > 1$, le tore à g trous s'obtient en recollant g copies du tore à 1 trou (recollement le long d'un cercle quand on découpe un disque). La seule surface irréductible pour cette opération est le tore à 1 trou. Celui-ci peut d'ailleurs s'écrire comme quotient du plan euclidien R^2 par un groupe discret d'isométries (engendré par les translations entières horizontales et verticales).

L'étude bien plus ardue de la dimension 3 commence avec H. Poincaré. En 1904, il conjecture²¹ que *toute 3-variété (compacte orientable) sans trou est équivalente à la sphère S^3 de dimension 3*.

Comme en dimension 2, on peut « composer » les variétés de dimension 3, par recollement le long d'une sphère quand on découpe une boule ; les variétés irréductibles pour cette opération sont un peu comme les nombres premiers vis-à-vis de la multiplication.

Le programme de W. Thurston, qui date de la fin des années 70, vise à classer les variétés de dimension 3 irréductibles. Pour cela, il construit 8 « modèles canoniques » (S^3 , l'espace euclidien R^3 , l'espace hyperbolique H^3 , et cinq autres variétés métriques explicites, non compactes mais très « symétriques »), et il conjecture que *toute variété de dimension 3 irréductible admet une décomposition canonique en morceaux quotients de l'un des 8 modèles par un groupe discret d'isométries*. La conjecture de Poincaré en est un cas particulier.

Commentaire. Les conjectures de Poincaré et Thurston portent sur des objets *généraux*. La conjecture de Thurston est éminemment architectonique : elle prédit la classification complète des variétés de dimension 3. Son ancêtre, la conjecture de Poincaré, l'était aussi, pour avoir puissamment contribué à la naissance de la topologie différentielle.

Ces conjectures occupent actuellement le devant de la scène mathématique, car elles viennent probablement d'être démontrées. L'esquisse de démonstration, due

²⁰i. e. homéomorphie, ou même difféomorphie.

²¹voir ses Oeuvres, t. VI, pp. 486, 498. En fait, il ne la pose que comme question, en ajoutant « mais cette question nous entraînerait trop loin ».

On peut étendre, de manière évidente, la conjecture en toute dimension $n \geq 1$. Mais, ce qui peut paraître surprenant, la difficulté du problème n'augmente pas avec n , au contraire : l'énoncé en dimension $n = 5$ a été démontré en 1961 (Zeeman), $n = 6$ en 1962 (Stallings), $n \geq 7$ en 1961 (S. Smale, qui a étendu ultérieurement sa preuve aux cas $n = 5, 6$) ; $n = 4$, cas beaucoup plus difficile, en 1982 (M. Friedman) ; le cas $n = 3$ de la conjecture originale est le plus difficile.

à G. Perelman, est prise très au sérieux par les experts mais n'est pas complètement vérifiée à l'heure actuelle, et l'on est au *point d'oscillation entre conjecture et théorème*²². La méthode de Perelman est un tour de force, et l'aboutissement d'une approche très originale ouverte en 1982 par R. Hamilton, dans laquelle font irruption les méthodes d'un autre domaine (calcul des variations).

VIII Conclusion.

On sera peut-être surpris de n'avoir pas entendu, jusqu'à ce point, de tirade sur la beauté des mathématiques, comme aiment à les faire les mathématiciens. C'est que, s'il est aisé de chanter l'épithalame de la beauté et de la vérité en mathématiques, il semble bien difficile en revanche de *penser* leur union, ou même de marquer les modalités précises de rencontre entre elles.

En guise de conclusion, je voudrais hasarder que les conjectures architectoniques illustrent la modalité suivante :

Beauté, promesse de vérité.

Il ne s'agit que d'une « conjecture » ! Et la seule « evidence » que j'ai à verser au dossier, c'est que je ne connais pas d'exemple de conjecture architectonique qui se soit révélée fausse ! Ce qui était quelque peu le sentiment fréquent du mathématicien devant les grandes idées heuristiques : « c'est trop beau pour être faux » .

J'ajouterai ceci : même si cela arrivait, ce serait peut-être encore plus intéressant - que le bouleversement complet de nos conceptions dans le domaine qu'elle éclaire conduise à une nouvelle traversée du désert, ou bien qu'elle s'accompagne de la découverte d'une réalité mathématique insoupçonnée. Du reste, l'essentiel n'est peut-être pas d'atteindre le but marqué par la conjecture : il est plutôt dans les *idées nouvelles* qui surgissent dans l'effort déployé vers ce but, et dont la portée peut dépasser celle de la conjecture originaire au point de rendre celle-ci dérisoire.

Une des sources de la beauté en mathématique réside dans la cohérence et l'harmonie. Il en est ainsi dans ces constellations de conjectures que j'évoquais. Voici ce qu'en dit Alexandre Grothendieck²³, grand maître ès conjectures s'il en fut - je lui laisse le dernier mot :

Dix choses soupçonnées seulement, dont aucune [...] n'entraîne conviction, mais qui mutuellement s'éclairent et se complètent et semblent concourir à une même harmonie encore mystérieuse, *acquièrent dans cette harmonie force de vision*. Alors même que toutes les dix finiraient par se révéler fausses, le travail qui a abouti à cette vision provisoire n'a pas été fait en vain.

²²J'écrivais ceci fin 2005. A présent, bien que les détails de la démonstration de la conjecture de Thurston ne soient encore pas complètement écrits, les experts n'ont plus de doute semble-t-il.

²³Récoltes et semailles, p. 211.