Séminaire MaMuX
Mathématiques, Musiques et Relations avec d'autres disciplines

Produits tensoriels de pavages et Caractérisation des canons de Vuza

Franck Jedrzejewski

Franck. Jedrzejewski@Cea.fr

Types de pavages

Pavages de la ligne: somme "usuelle"

Pavages du cercle : somme modulo *n*

La tuile $R = 11$ pave la ligne $\mathbb{Z}_4$ $\quad R = \{0,1\}$ $\quad S = \{0,2\}$

	0	1	2	3
R	1	1	0	0
R+2	0	0	1	1

$R \oplus S$	0	1
0	0	1
2	2	3

La tuile $R = 1001$ pave $\mathbb{Z}_4$ sur $\mathbb{Z}$ (mais pas sur $\mathbb{N}$).

$R = \{0,3\}$ $\quad S = \{0,2\}$

	0	1	2	3	0	1
R	1	0	0	1		
R+2			1	0	0	1

	0	1	2	3
R	1	0	0	1
R+2	0	1	1	0

Construction des pavages de la ligne

Décomposition de n en nombre premiers $n = p_1 ... p_r$

$$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_{p_1} \oplus p_1\mathbb{Z}_{p_2} \oplus ... \oplus (p_1 ... p_r)\mathbb{Z}_{p_r}$$

Exemple : Pour $n = 12$, on obtient 8 canons

n	R
1×12	$\mathbb{Z}_1 \oplus \mathbb{Z}_{12}$
2×6	$\mathbb{Z}_2 \oplus 2\mathbb{Z}_6$
3×4	$\mathbb{Z}_3 \oplus 3\mathbb{Z}_4$
4×3	$\mathbb{Z}_4 \oplus 4\mathbb{Z}_3$
6×2	$\mathbb{Z}_6 \oplus 6\mathbb{Z}_2$
$2 \times 2 \times 3$	$\mathbb{Z}_2 \oplus 2\mathbb{Z}_2 \oplus 4\mathbb{Z}_3$
$2 \times 3 \times 2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus 2\mathbb{Z}_3 \oplus 6\mathbb{Z}_2$
$3 \times 2 \times 2$	$\mathbb{Z}_3 \oplus 3\mathbb{Z}_2 \oplus 6\mathbb{Z}_2$

Algèbre tensorielle

Eléments générateurs horizontaux

$$H_p = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \hline\end{array}$$

Eléments générateurs verticaux

$$V_q = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & 1 \\ \hline\end{array}$$

Propriétés :

$$\begin{aligned} H_p \otimes H_q &= H_q \otimes H_p = H_{pq} \\ V_p \otimes V_q &= V_q \otimes V_p = V_{pq} \\ (H_p \otimes V_q)^* &= V_p \otimes H_q \end{aligned}$$

Exemple

$$T = H_2 \otimes V_3 \otimes V_2 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline\end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline\end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline\end{array}$$

$$T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline\end{array} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline\end{array} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline\end{array} \\ \hline\end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline\end{array}$$

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline\end{array}$$

$$T = \{0,1\} \oplus \{0,2,4,6,8,10\} = \mathbb{Z}_2 \oplus 2\mathbb{Z}_6$$

Pavages de la ligne pour $n = 12$

Il existe huit canons

n	R	T
1×12	$\mathbb{Z}_1 \oplus \mathbb{Z}_{12}$	H_{12}
2×6	$\mathbb{Z}_2 \oplus 2\mathbb{Z}_6$	$H_2 \otimes V_6$
3×4	$\mathbb{Z}_3 \oplus 3\mathbb{Z}_4$	$H_3 \otimes V_4$
4×3	$\mathbb{Z}_4 \oplus 4\mathbb{Z}_3$	$H_4 \otimes V_3$
6×2	$\mathbb{Z}_6 \oplus 6\mathbb{Z}_2$	$H_6 \otimes V_2$
$2 \times 2 \times 3$	$\mathbb{Z}_2 \oplus 2\mathbb{Z}_2 \oplus 4\mathbb{Z}_3$	$V_2 \otimes H_3 \otimes V_2$
$2 \times 3 \times 2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus 2\mathbb{Z}_3 \oplus 6\mathbb{Z}_2$	$H_2 \otimes V_2 \otimes H_3$
$3 \times 2 \times 2$	$\mathbb{Z}_3 \oplus 3\mathbb{Z}_2 \oplus 6\mathbb{Z}_2$	$H_3 \otimes V_2 \otimes H_2$

Pavages du cercle

Existe-t-il un produit tensoriel tordu sur le cercle ?

Exemple : Considérons le canon : $5\mathbb{Z}_6 \oplus 6\mathbb{Z}_2$

1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1

On déplace la première colonne en fin de tableau et on décale sur une ligne

1	0	1	0	1	0						
0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0
						0	1	0	1	0	1

Dénombrement des canons

n	$\mathbb{N}_n$	$\mathbb{Z}_n$	$Total$
2	1	0	1
3	1	0	1
4	2	0	2
5	1	0	1
6	3	0	3
7	1	0	1
8	4	2	6

9	2	2	4
10	3	3	6
11	1	0	1
12	8	15	23
13	1	0	1
14	3	10	13
15	3	22	25
16	8	41	49

Pavages à plusieurs tuiles

Pavages à p tuiles $\mathbf{A_p}$ de $\mathbb{Z}_{n_1} \ldots \mathbb{Z}_{n_p}$ par plongement dans $\mathbb{Z}_{\mathrm{gcd}(n_1, n_2, \ldots, n_p)}$

Exemple :Pavage à deux tuiles $A = \{0, 1\}$ dans $\mathbb{Z}_6$ et $B = \{0, 2\}$ dans $\mathbb{Z}_6$

	0	1	2	3	4	5
A	1	1	0	0	0	0
A+2	0	0	1	1	0	0
A+4	0	0	0	0	1	1

B	0	1	2	3	4	5
B	1	0	1	0	1	0
B+1	0	1	0	1	0	1

Plongés dans $\mathbb{Z}_{12}$ ces deux tuiles $\tilde{A} = \{0, 2\}$ et $\tilde{B} = \{0, 4, 8\}$ conduisent au pavage $\tilde{A} \oplus \{0, 4, 8\} \cup \tilde{B} \oplus \{1, 3\}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\tilde{A}$	1		1									
$\tilde{A}$+4					1		1					
$\tilde{A}$+8									1		1	
$\tilde{B}+1$		1				1				1		
$\tilde{B}+3$				1				1				1

Pavages d'accord

Exemple : A chaque pavage est associé un mot formé d'une numéro de ligne dans laquelle 1 apparaît

	0	1	2	3	4	5
ligne 1	1	1	0	0	0	0
ligne 2	0	0	1	1	0	0
ligne 3	0	0	0	0	1	1

$\Longleftrightarrow \quad w = 112233$

A partir du mot w, on construit toutes les pemutations possibles $\sigma_n(w)$ qui n'on aucun chiffre commun par colonnes

$$\begin{array}{ll} 112233 & w \\ 331122 & \sigma_2(w) \\ 223311 & \sigma_3(w) \end{array}$$

On obtient deux permutations : le motif pave donc un accord de trois notes (nombre de lignes) sur trois voix (nombre de peremutations).

Pavages d'accord (2)

Construction de pavages d'accord à partir de pavages à p tuiles

Exemple : A partir du pavage à deux tuiles $\tilde{A} \oplus \{0,4,8\} \cup \tilde{B} \oplus \{1,3\}$ on a $w = 114522453345$ qui se superpose à $\sigma_2(w)$, $\sigma_6(w)$ ou $\sigma_{10}(w)$ ce qui donne trois pavages d'un accord de cinq notes sur deux voix. Par exemple pour $\sigma_2(w)$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	2								
				1	1	2	2				
								1	1	2	2
2		1		2		1		2		1	
	2		1		2		1		2		1

On peut aussi superposer w à $\sigma_3(w)$, $\sigma_5(w)$ et $\sigma_{10}(w)$

1	1	4	5	2	2	4	5	3	3	4	5	w
3	4	5	1	1	4	5	2	2	4	5	3	$\sigma_3(w)$
5	3	3	4	5	1	1	4	5	2	2	4	$\sigma_5(w)$
4	5	2	2	4	5	3	3	4	5	1	1	$\sigma_{10}(w)$

ce qui donne un pavage de 5 notes sur quatre voix

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1		2	2	3	3				4	4
		4	4	1	1		2	2	3	3	
2	3	3				4	4	1	1		2
4	2	1	3	4	2	1	3	4	2	1	3
3	4	2	1	3	4	2	1	3	4	2	1

On peut aussi superposer w à $\sigma_2(w)$, $\sigma_7(w)$ et $\sigma_9(w)$ ou à $\sigma_3(w)$, $\sigma_6(w)$ et $\sigma_9(w)$.

Les métacanons de Larry Polansky

http://music.dartmouth.edu/~larry

N-Voice canons ou méta-canons
construits sur des permutations de N éléments

CBAD	BCAD	BACD	BADC
BDAC	DBAC	DABC	DACB
DCAB	CDAB	CADB	CABD
ACBD	ABCD	ADCB	ACDB
BCDA	BDCA	DBCA	DCBA
ABDC	ADBC	CDBA	CBDA

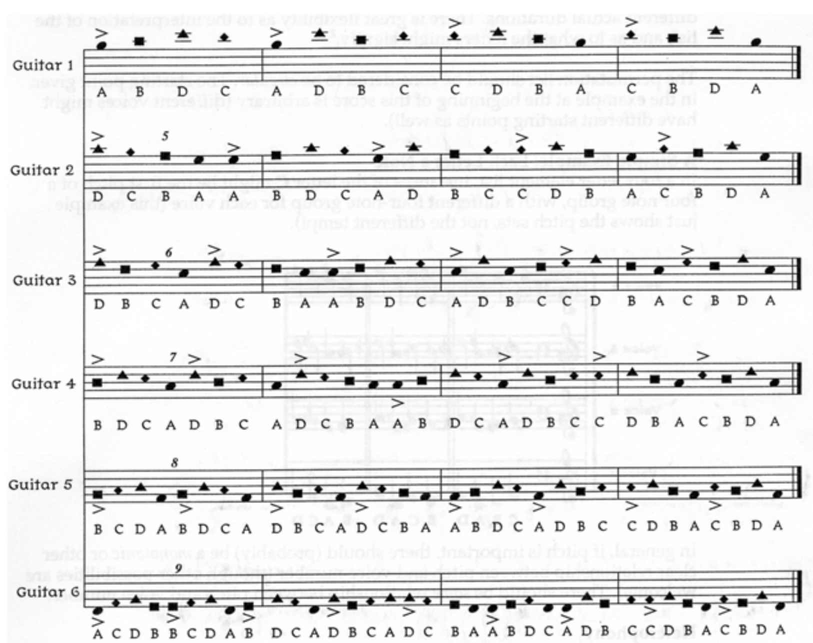
Compression temporelle des voix

A la nue accablante tu

Basse de basalte et de laves

A même les échos esclaves

Par une trompe sans vertu



Les métacanons de Larry Polansky

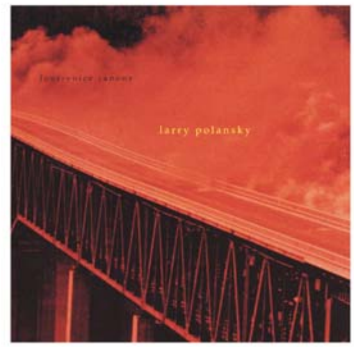
Frog Peak Music

http://www.frogpeak.org/

Cold Blue Music

http://www.coldbluemusic.com

Four-voice canons



Extraits

Plage 5 : # 14 (2002) Kid Canon (1'37")

Plage 6 : # 16 (2002) Canon in One Octave for Arthur Farwell (2'01")

Plage 15 : # 18 (2002) Trio Canon for Christian Wolff (5'05")

Un canon de Vuza

Théorème. Soit $\mathbb{Z}_n$ un groupe non-Hajos avec $n = p_1.p_2.n_1.n_2.n_3$.

Soient A et B les ensembles

$$\begin{aligned} A &= n_2 n_3 (\mathbb{Z}_{p_2} \oplus p_2 n_1 \mathbb{Z}_{p_1}) \\ B &= n_1 n_3 (\mathbb{Z}_{p_1} \oplus p_1 n_2 \mathbb{Z}_{p_2}) \end{aligned}$$

Soit $T_j(B) = \{j\} \oplus B$ la translation de longueur j. Alors le couple (R, S)

$$\begin{aligned} S &= n_3 (p_2 n_2 \mathbb{Z}_{n_1} \oplus p_1 n_1 \mathbb{Z}_{n_2}) \\ R &= A \cup T_1(B) \cup \ldots \cup T_{n_3 - 1}(B) \end{aligned}$$

est un canon de Vuza.

Preuve

Lemme

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_a \oplus a\mathbb{Z}_b &= \mathbb{Z}_{ab} \\ c\mathbb{Z}_a \oplus a\mathbb{Z}_{bc} &= \mathbb{Z}_{abc} \qquad \bmod abc \quad \gcd(a,c)=1 \end{aligned}$$

Calcul.

$$\begin{aligned} S \oplus A &= p_2n_2n_3\mathbb{Z}_{n_1} \oplus p_1n_1n_3\mathbb{Z}_{n_2} \oplus n_2n_3\mathbb{Z}_{p_2} \oplus p_2n_1n_2n_3\mathbb{Z}_{p_1} \\ &= n_2n_3(p_2\mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{p_2}) \oplus n_1n_3(p_1\mathbb{Z}_{n_2} \oplus p_2n_2\mathbb{Z}_{p_1}) \\ &= n_2n_3(\mathbb{Z}_{n_1p_2}) \oplus n_1n_3(p_1\mathbb{Z}_{n_2} \oplus p_2n_2\mathbb{Z}_{p_1}) \\ &= n_2n_3(\mathbb{Z}_{n_1p_2} \oplus p_2n_1\mathbb{Z}_{p_1}) \oplus n_1n_3p_1\mathbb{Z}_{n_2} \\ &= n_2n_3\mathbb{Z}_{p_1p_2n_1} \oplus n_1n_3p_1\mathbb{Z}_{n_2} \\ &= n_3(n_1p_1\mathbb{Z}_{n_2} \oplus n_2\mathbb{Z}_{p_1p_2n_1}) \\ &= n_3\mathbb{Z}_{p_1p_2n_1n_2} \end{aligned}$$

Preuve (Suite)

$$\begin{aligned} S \oplus B &= p_2n_2n_3\mathbb{Z}_{n_1} \oplus p_1n_1n_3\mathbb{Z}_{n_2} \oplus n_1n_3\mathbb{Z}_{p_1} \oplus p_1n_1n_2n_3\mathbb{Z}_{p_2} \\ &= p_1n_1n_3(\mathbb{Z}_{n_2} \oplus n_2\mathbb{Z}_{p_2}) \oplus n_3(p_2n_2\mathbb{Z}_{n_1} \oplus n_1\mathbb{Z}_{p_1}) \\ &= n_1n_3(\mathbb{Z}_{p_1} \oplus p_1\mathbb{Z}_{n_2p_2}) \oplus n_2n_3p_2\mathbb{Z}_{n_1} \\ &= n_3(n_1\mathbb{Z}_{p_1p_2n_2} \oplus p_2n_2\mathbb{Z}_{n_1}) \\ &= n_3\mathbb{Z}_{p_1p_2n_1n_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S \oplus R &= n_3\mathbb{Z}_{p_1p_2n_1n_2} \cup \{1\} \oplus n_3\mathbb{Z}_{p_1p_2n_1n_2} \cup \dots\dots \cup \{n_3-1\} \oplus n_3\mathbb{Z}_{p_1p_2n_1n_2} \\ &= \mathbb{Z}_{p_1p_2n_1n_2n_3} \\ &= \mathbb{Z}_n \end{aligned}$$

Exemple

Pour $n = 72$, on a $p_1 = n_1 = n_3 = 2$ et $p_2 = n_2 = 3$

$$\begin{aligned} A &= 6\mathbb{Z}_3 \oplus 36\mathbb{Z}_2 = \{0, 6, 12, 36, 42, 48\} \\ B &= 4\mathbb{Z}_2 \oplus 24\mathbb{Z}_3 = \{0, 4, 24, 28, 48, 52\} \end{aligned}$$

Le couple (R, S)

$$\begin{aligned} S &= 18\mathbb{Z}_2 \oplus 8\mathbb{Z}_3 = \{0, 8, 16, 18, 26, 34\} \\ R &= A \cup T_1(B) = \{0, 1, 5, 6, 12, 25, 29, 36, 42, 48, 49, 53\} \end{aligned}$$

est un canon de Vuza.

Hypothèse

Tous les canons de Vuza sont engendrés par des transformations simples de A, B, S.

En d'autres termes

Il existe des applications u_j, v_j telles que tous les canons de Vuza s'écrivent

$$\begin{aligned} S &= (p_2 n_2 n_3).u_0(\mathbb{Z}_{n_1}) \oplus (p_1 n_{1n} n_3).u_1(\mathbb{Z}_{n_2}) \\ R &= v_0(A) \cup v_1(B) \cup \ldots \cup v_{n_3-1}(B) \end{aligned}$$

Cas $n = 72$

Il existe au moins 3 solutions S

$$S = 18\mathbb{Z}_2 \oplus 2^{k+3}\mathbb{Z}_3 \quad avec \quad k = 0, 1, 2$$

Dont les écarts valent

k	ΔS	~
0	[8,8,2,8,8,38]	S_1
1	[16,2,14,2,16,22]	$7S_1$
2	[10,8,14,18,14,8]	$5S_1$

Il existe au moins 3 solutions R

$$R = A \cup T_{2\ell+1}(B) \quad avec \quad \ell = 0, 1, 2$$

Dont les écarts valent

ℓ	ΔR
0	[3,3,6,11,4,9,6,5,1,3,20,1]
1	[1,4,1,6,13,4,7,6,6,1,4,19]
2	[3,3,1,5,15,4,5,6,6,3,4,17]

Cas $n = 108$

Pour $n = 108$, on a $p_1 = n_1 = 2$ et $p_2 = n_2 = n_3 = 3$

$$\begin{aligned} A &= 9\mathbb{Z}_3 \oplus 54\mathbb{Z}_2 = \{0, 9, 18, 54, 63, 72\} \\ B &= 6\mathbb{Z}_2 \oplus 36\mathbb{Z}_3 = \{0, 6, 36, 42, 72, 78\} \end{aligned}$$

Il existe au moins 3 solutions S

$$S = 27\mathbb{Z}_2 \oplus 3.2^{k+3}\mathbb{Z}_3 \quad avec \quad k = 0, 1, 2$$

Dont les écarts valent

k	ΔS
0	[3, 12, 12, 57, 12, 12]
1	[24, 3, 21, 3, 24, 33]
2	[15, 12, 21, 27, 21, 12]

Les solutions sont isomorphes à $S, 5S, 7S$.

Cas $n = 108$

Il existe au moins 42 solutions R de la forme : $R_{i,j} = A \cup T_i(B) \cup T_j(B)$

(i,j)	$\Delta R_{i,j}$
1, 2	[1, 1, 5, 1, 1, 9, 19, 1, 5, 1, 10, 9, 9, 1, 1, 5, 1, 28]
1, 5	[1, 4, 2, 2, 2, 7, 19, 4, 2, 4, 7, 9, 9, 1, 4, 2, 4, 25]
1, 8	[1, 6, 1, 1, 5, 4, 19, 6, 1, 6, 4, 9, 9, 1, 6, 1, 6, 22]
1, 11	[1, 6, 2, 2, 6, 1, 19, 6, 4, 6, 1, 9, 9, 1, 6, 4, 6, 19]
1, 14	[1, 6, 2, 5, 4, 2, 17, 6, 7, 4, 2, 7, 9, 1, 6, 7, 6, 16]
1, 17	[1, 6, 2, 8, 1, 5, 14, 6, 10, 1, 5, 4, 9, 1, 6, 10, 6, 13]
1, 20	[1, 6, 2, 9, 2, 6, 11, 6, 11, 2, 6, 1, 9, 1, 6, 13, 6, 10]
1, 23	[1, 6, 2, 9, 5, 6, 8, 6, 11, 5, 4, 2, 7, 1, 6, 16, 6, 7]
1, 26	[1, 6, 2, 9, 8, 6, 5, 6, 11, 8, 1, 5, 4, 1, 6, 19, 6, 4]
1, 29	[1, 6, 2, 9, 11, 6, 2, 6, 11, 9, 2, 6, 1, 1, 6, 22, 6, 1]
1, 32	[1, 1, 5, 2, 9, 14, 5, 1, 5, 11, 9, 5, 4, 1, 1, 5, 25, 4]
1, 35	[1, 4, 2, 2, 9, 17, 2, 4, 2, 11, 9, 8, 1, 1, 4, 2, 28, 1]

(i,j)	$\Delta R_{i,j}$
2, 4	[2, 2, 4, 1, 1, 8, 20, 2, 4, 2, 8, 9, 9, 2, 2, 4, 2, 26]
2, 7	[2, 5, 1, 1, 4, 5, 20, 5, 1, 5, 5, 9, 9, 2, 5, 1, 5, 23]
2, 10	[2, 6, 1, 1, 6, 2, 20, 6, 2, 6, 2, 9, 9, 2, 6, 2, 6, 20]
2, 13	[2, 6, 1, 4, 5, 1, 19, 6, 5, 5, 1, 8, 9, 2, 6, 5, 6, 17]
2, 16	[2, 6, 1, 7, 2, 4, 16, 6, 8, 2, 4, 5, 9, 2, 6, 8, 6, 14]
2, 22	[2, 6, 1, 9, 4, 6, 10, 6, 10, 4, 5, 1, 8, 2, 6, 14, 6, 8]
2, 25	[2, 6, 1, 9, 7, 6, 7, 6, 10, 7, 2, 4, 5, 2, 6, 17, 6, 5]
2, 28	[2, 6, 1, 9, 10, 6, 4, 6, 10, 9, 1, 6, 2, 2, 6, 20, 6, 2]
2, 31	[1, 1, 6, 1, 9, 13, 6, 1, 6, 10, 9, 4, 5, 1, 1, 6, 23, 5]
2, 34	[2, 2, 4, 1, 9, 16, 4, 2, 4, 10, 9, 7, 2, 2, 2, 4, 26, 2]
4, 5	[4, 1, 4, 1, 1, 7, 22, 1, 5, 1, 7, 9, 9, 4, 1, 5, 1, 25]
4, 8	[4, 4, 1, 1, 4, 4, 22, 4, 2, 4, 4, 9, 9, 4, 4, 2, 4, 22]
4, 14	[4, 5, 1, 4, 4, 2, 20, 6, 4, 4, 2, 7, 9, 4, 6, 4, 6, 16]
4, 17	[4, 5, 1, 7, 1, 5, 17, 6, 7, 1, 5, 4, 9, 4, 6, 7, 6, 13]
4, 23	[4, 5, 1, 8, 5, 6, 11, 6, 8, 5, 4, 2, 7, 4, 6, 13, 6, 7]

(i,j)	$\Delta R_{i,j}$
4, 26	[4, 5, 1, 8, 8, 6, 8, 6, 8, 8, 1, 5, 4, 4, 6, 16, 6, 4]
4, 32	[2, 2, 5, 1, 8, 14, 6, 2, 6, 8, 9, 5, 4, 2, 2, 6, 22, 4]
4, 35	[4, 1, 4, 1, 8, 17, 5, 1, 5, 8, 9, 8, 1, 4, 1, 5, 25, 1]
5, 7	[5, 2, 2, 2, 2, 5, 23, 2, 4, 2, 5, 9, 9, 5, 2, 4, 2, 23]
5, 13	[5, 4, 2, 2, 5, 1, 22, 6, 2, 5, 1, 8, 9, 5, 6, 2, 6, 17]
5, 16	[5, 4, 2, 5, 2, 4, 19, 6, 5, 2, 4, 5, 9, 5, 6, 5, 6, 14]
5, 25	[5, 4, 2, 7, 7, 6, 10, 6, 7, 7, 2, 4, 5, 5, 6, 14, 6, 5]
5, 31	[1, 4, 4, 2, 7, 13, 6, 4, 6, 7, 9, 4, 5, 1, 4, 6, 20, 5]
5, 34	[4, 1, 4, 2, 7, 16, 6, 1, 6, 7, 9, 7, 2, 4, 1, 6, 23, 2]
13, 14	[9, 4, 1, 4, 1, 1, 29, 1, 4, 1, 1, 7, 9, 13, 1, 5, 1, 16]
13, 17	[9, 4, 4, 1, 1, 4, 26, 4, 1, 1, 4, 4, 9, 13, 4, 2, 4, 13]
13, 32	[2, 7, 4, 5, 1, 13, 6, 11, 5, 1, 8, 5, 4, 2, 11, 6, 13, 4]
13, 35	[5, 4, 4, 5, 1, 16, 6, 8, 5, 1, 8, 8, 1, 5, 8, 6, 16, 1]
14, 16	[9, 5, 2, 2, 2, 2, 28, 2, 2, 2, 2, 5, 9, 14, 2, 4, 2, 14]
14, 34	[4, 5, 5, 4, 2, 14, 6, 10, 4, 2, 7, 7, 2, 4, 10, 6, 14, 2]

Cas $n = 120 = 2.5.2.3.2$

Pour $n = 120$, on a $p_1 = n_1 = n_3 = 2$ et $p_2 = 5$ et $n_2 = 3$.

$$\begin{aligned} A &= 6\mathbb{Z}_5 \oplus 60\mathbb{Z}_2 = \{0, 6, 12, 18, 24, 60, 66, 72, 78, 84\} \\ B &= 4\mathbb{Z}_2 \oplus 24\mathbb{Z}_5 = \{0, 4, 24, 28, 48, 52, 72, 76, 96, 100\} \end{aligned}$$

Il existe au moins 6 solutions S

$$S = 30\mathbb{Z}_2 \oplus 2^{k+3} h(\mathbb{Z}_3)$$

Dont les écarts valent

$h(\mathbb{Z}_3)$	k	ΔS
{0,1,2}	0	[8, 8, 14, 8, 8, 74]
{0,1,2}	1	[16, 14, 2, 14, 16, 58]
{0,1,2}	2	[30, 2, 30, 2, 30, 26]
{0,1,2}	3	[8, 22, 8, 26, 30, 26]
{0,1,5}	0	[8, 22, 8, 2, 30, 50]
{0,1,5}	1	[16, 14, 16, 34, 30, 10]

Cas $n = 120 = 2.5.2.3.2$

Il existe au moins 9 solutions R

$$R = h(A) \cup (\{2\ell + 3\} \oplus 11B)$$

avec $h(A) = A$ et $k = 0, .., 5$ et $h(A) = A' = 6\{0, 2, 3, 4, 6\} \oplus 60\mathbb{Z}_2$.

$h(A)$	ℓ	ΔR
A	0	[3, 3, 6, 6, 5, 1, 3, 20, 4, 9, 6, 5, 1, 3, 3, 6, 11, 4, 20, 1]
A	1	[1, 4, 1, 6, 6, 6, 1, 4, 20, 4, 7, 6, 6, 1, 4, 1, 6, 13, 4, 19]
A	2	[3, 3, 1, 5, 6, 6, 3, 4, 20, 4, 5, 6, 6, 3, 3, 1, 5, 15, 4, 17]
A	3	[5, 1, 3, 3, 6, 6, 5, 4, 20, 4, 3, 6, 6, 5, 1, 3, 3, 17, 4, 15]
A	4	[6, 1, 4, 1, 6, 6, 7, 4, 20, 4, 1, 6, 6, 6, 1, 4, 1, 19, 4, 13]
A	5	[6, 3, 3, 1, 5, 6, 9, 4, 20, 3, 1, 5, 6, 6, 3, 3, 1, 20, 4, 11]
A'	0	[3, 9, 6, 5, 1, 3, 9, 11, 4, 9, 11, 1, 3, 3, 6, 11, 1, 3, 20, 1]
A'	1	[1, 4, 7, 6, 6, 1, 4, 7, 13, 4, 7, 12, 1, 4, 1, 6, 12, 1, 4, 19]
A'	2	[3, 4, 5, 6, 6, 3, 4, 5, 15, 4, 5, 12, 3, 3, 1, 5, 12, 3, 4, 17]

Cas $n = 120 = 2.3.2.5.2$

Il existe au moins 12 solutions S

$$S = 30\mathbb{Z}_2 \oplus 2^{k+3} h_k(\mathbb{Z}_5)$$

$h(\mathbb{Z}_5)$	k	ΔS
{0,1,2,3,4}	0	[6, 2, 6, 8, 8, 8, 58, 8, 8, 8]
	1	[16, 14, 2, 14, 2, 14, 2, 14, 16, 26]
	2	[6, 2, 22, 2, 6, 24, 2, 30, 2, 24]
	3	[8, 8, 14, 8, 8, 18, 8, 22, 8, 18]
{0,2,3,4,6}	0	[16, 8, 6, 2, 14, 2, 6, 8, 16, 42]
	1	[6, 24, 2, 16, 14, 2, 14, 16, 2, 24]
	2	[6, 2, 22, 8, 26, 8, 22, 2, 6, 18]
	3	[8, 8, 8, 6, 8, 8, 8, 18, 30, 18]
{0,3,4,6,7}	0	[24, 6, 2, 16, 6, 2, 6, 16, 8, 34]
	1	[6, 16, 8, 18, 16, 14, 16, 2, 16, 8]
{0,2,3,6,9}	0	[2, 6, 18, 6, 24, 18, 16, 8, 6, 16]
{0,1,2,4,8}	0	[8, 8, 14, 2, 6, 8, 16, 2, 30, 26]

Cas $n = 120 = 2.3.2.5.2$

Il existe au moins 10 solutions R de la forme : $R = A \cup h(B)$.

On a $A = 10\mathbb{Z}_3 \oplus 60\mathbb{Z}_2$ et $B = 4\mathbb{Z}_2 \oplus 40\mathbb{Z}_3$. $h(B) = B_1 = B \oplus \{2\ell - 1\}$ ou $h(B) = B_2 = 7B \oplus \{2\ell - 3\}$ avec $\ell = 0, .., 4$.

$h(B)$	ℓ	ΔR
B_1	0	[3, 7, 10, 19, 4, 17, 10, 9, 1, 3, 36, 1]
B_1	1	[1, 4, 5, 10, 21, 4, 15, 10, 10, 1, 4, 35]
B_1	2	[3, 4, 3, 10, 23, 4, 13, 10, 10, 3, 4, 33]
B_1	3	[5, 4, 1, 10, 25, 4, 11, 10, 10, 5, 4, 31]
B_1	4	[7, 3, 1, 9, 27, 4, 9, 10, 10, 7, 4, 29]
B_2	0	[10, 10, 5, 12, 23, 5, 5, 7, 3, 25, 12, 3]
B_2	1	[10, 10, 7, 12, 21, 7, 3, 9, 1, 27, 12, 1]
B_2	2	[1, 9, 10, 9, 12, 19, 9, 1, 10, 1, 28, 11]
B_2	3	[3, 7, 10, 11, 12, 17, 10, 1, 9, 3, 28, 9]
B_2	4	[5, 5, 10, 13, 12, 15, 10, 3, 7, 5, 28, 7]

Conclusions et Perspectives

Problèmes ouverts concernant les canons

1 - Existe - t - il un produit tensoriel tordu permettant de construire les canons du cercle

2 - Existe - t - il une formule donnant le dénombrement des canons non-isomorphes

3 - Existe - t - il une formule donnant le dénombrement des pavages d'accord

4 - Tous les canons de Vuza sont-ils engendrés par des transformations de A, B et S.

5 - Existe - t - il un algorithme donnant tous les Vuza canons

6 - Dénombrer les canons de Vuza