1+X+3X

Set omometrici e Z-correlazione

Daniele Ghisi

MMI 2008 Pisa, 25 ottobre 2008



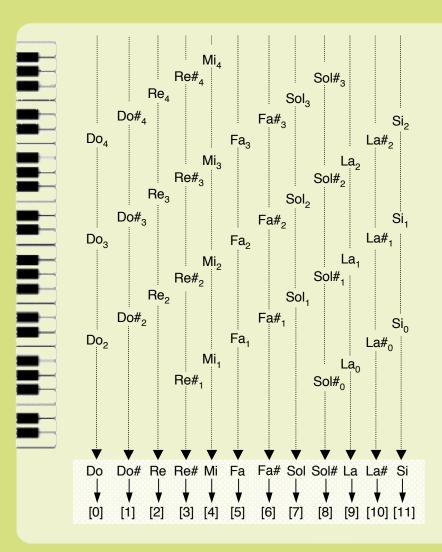
1+X+3X

Parte I Introduzione

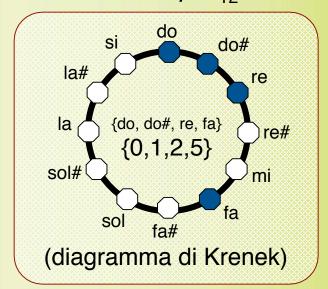


Rappresentazione dei set di note



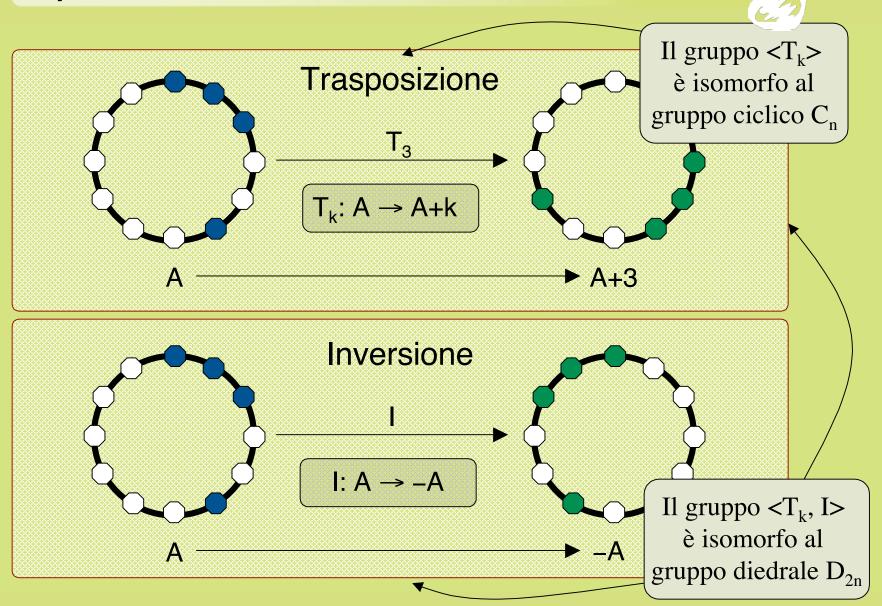


- Note come classi di equivalenza modulo 12
- → Set di note A μ Z₁₂=Z/12Z



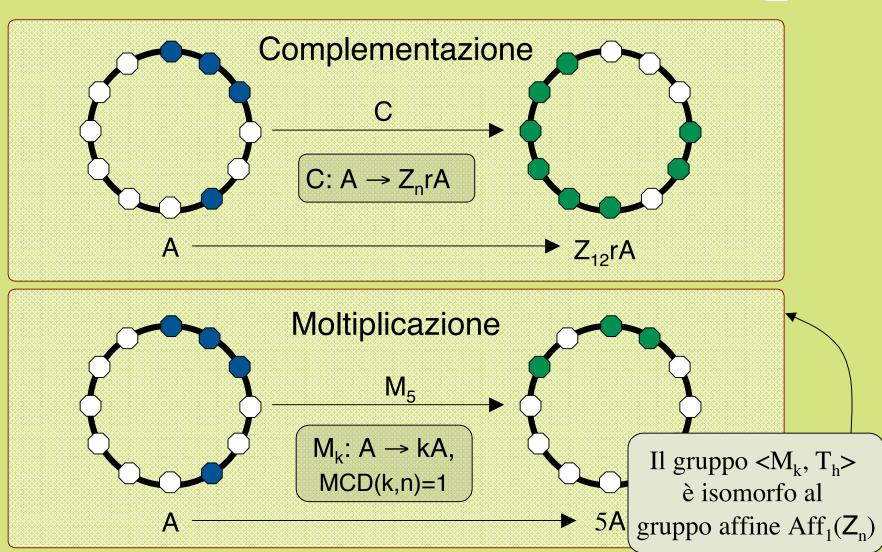
 In generale, in un sistema nmicrotonale, A μ Z_n.

Operazioni elementari sui set di note



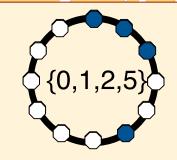
Operazioni elementari sui set di note





Rappresentazioni algebriche

- Rappresentazioni equivalenti di un set:
 - → Group ring Q[Z_n] (distribuzione finita su Z_n)
 - + Polinomiale
- I set di note sono un caso particolare di distribuzioni di Q[Z_n], distribuzioni (o polinomi) 0-1, scriveremo {0,1}[Z_n].
- → Un polinomio 0-1 viene detto
 - → simmetrico se esiste un k2N t.c. $A(x^{-1})=x^kA(x)$.
 - → semisimmetrico se esistono k2N e c2C
 di norma 1 t.c. A(x-1)=cxkA(x).



$$\pm_{[0]}$$
+ $\pm_{[1]}$ + $\pm_{[2]}$ + $\pm_{[5]}$
(masse di Dirac)

$$1+x+x^2+x^5$$

$$2\{0,1\}[Z_{12}]$$

$$1+x+x^3+x^5+x^7+x^8$$

$$1-x+x^3-x^5+x^7-x^8$$

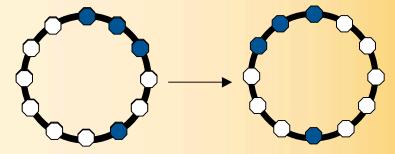
Riflessione e inversione



→ In K[G] possiamo anche definire la **riflessione** D' di una distribuzione $D=\sum_{g2G} a_g \pm_g$ come

$$D' = \sum_{g \in G} \overline{a}_g \delta_{-g}$$

→ Ad esempio, in Q[Z₁₂]
la riflessione di 1+x+x²+x⁵ è
1+x¹¹+x¹⁰+x⁷.



- → Questo corrisponde all'inversione del set di note.
- + Polinomialmente, la riflessione manda

$$D(x) \longrightarrow D'(x) = D\left(\frac{1}{x}\right)$$

Polinomi 0-1

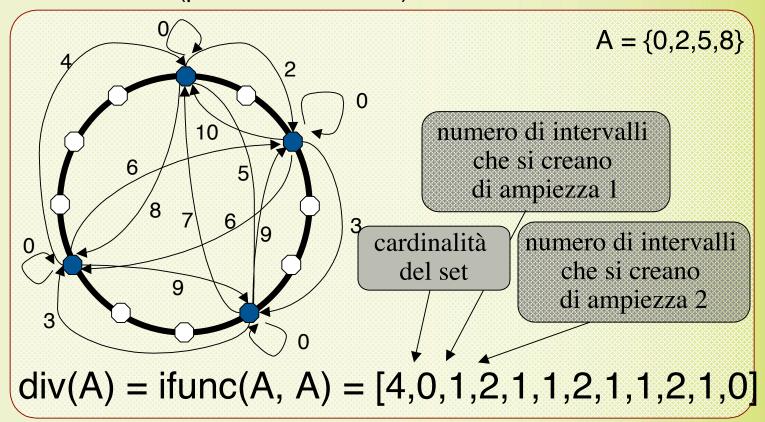


- I polinomi 0-1 hanno alcune proprietà essenziali:
 - → Un polinomio 0-1 simmetrico non è divisibile per alcun polinomio non simmetrico
 - + Questo non è vero in generale: $x^6+x^5+x^4+3x^3+x^2+x+1=(x^3+x+1)(x^3+x^2+1)$
 - → Se P(x) è un polinomio 0-1 irriducibile e non simmetrico con termine noto 1, allora per ogni k2N, P(xk) è irriducibile.
 - → Anche questo è falso in generale:
 x²+4 è irriducibile, ma x⁴+4=(x²+2x+2)(x²-2x+2)
 - → Se F(x) è un polinomio non reciproco a coefficienti interi che divide un polinomio 0-1, allora F(x)² non divide alcun polinomio 0-1.
 - → Se F(x)G(x) è un polinomio 0-1, allora lo è anche F(x)G(1/x)
 - •Borwein, Erdélyi, *Questions About Polynomials With {0,1,-1} Coefficients* (1997)
 - •Filaseta, Meade, Irreducibility Testing of Lacunary 0,1-polynomials (2001)
 - Filaseta, Finch, Nicol, On Three Questions Concerning 0,1-polynomials (2006)

Il vettore intervallare diretto (ifunc)



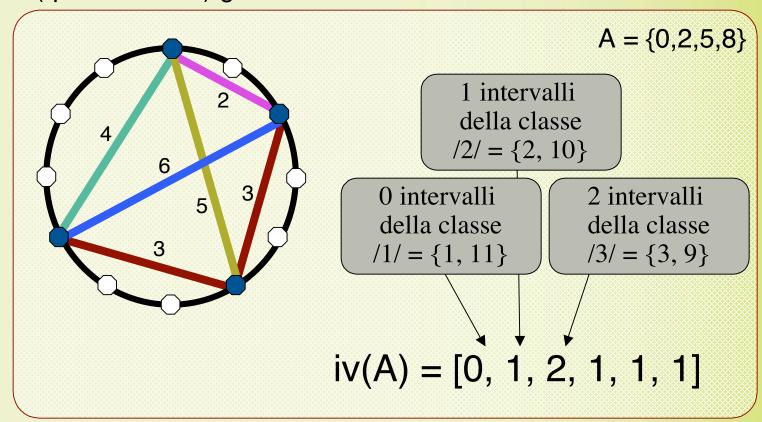
 Conta quanti intervalli e di quale ampiezza si formano tra le note del set (prese a due a due).



Il vettore intervallare



 Non considera l'ordine tra le note, accomunando (quozientando) gli intervalli in classi intervallari.

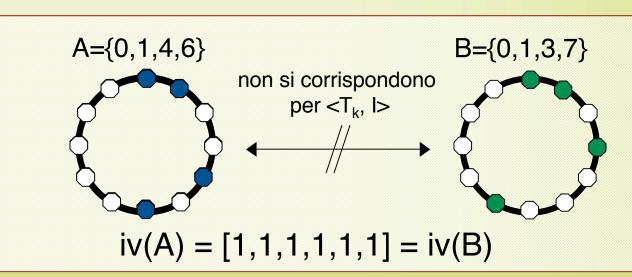


Z-correlazione



Due set A e B si dicono **Z-correlati** se iv(A) = iv(B)

- → Trasposizioni e inversioni conservano il vettore intervallare.
- Ogni coppia di set che si corrispondono per <T_k, l> sono Z-correlati, ma banalmente.
- Ma ne esistono altri, non banali!



Proprietà della Z-correlazione

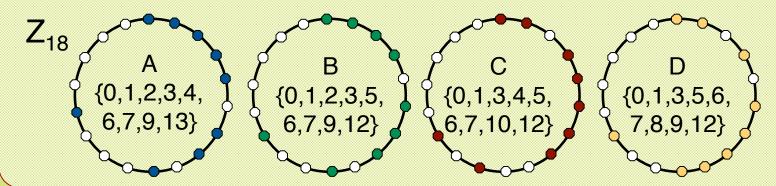


Se due set A, B sono Z-correlati, allora lo sono anche i complementari C(A), C(B).

Generalized Hexachord Theorem:

In Z_{2n} , ogni set di cardinalità n è Z-correlato al suo complementare.

Non esistono solo Z-coppie, ma esistono t-uple di set Z-correlati per ogni t a piacere.

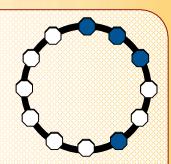


La funzione di Patterson



- Data una distribuzione D di K[G], la funzione di Patterson è la convoluzione D€D'.
- → In forma polinomiale, la funzione di Patterson è D(x)D(x-1)

$$D = \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_5$$
$$D(x) = 1 + x + x^2 + x^5$$



Funzione (o autocorrelazione) di Patterson:

$$\begin{split} D(x)D(x^{-1}) &= \\ &= (1+x+x^2+x^5)(1+x^{11}+x^{10}+x^7) \\ &= 1+x+x^2+x^5+x^7+x^8+x^9+x^{10}+2x^{11}+3x^{12}+x^{13}+x^{15}+x^{16} \\ &= 4+2x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^7+x^8+x^9+x^{10}+2x^{11} \end{split}$$

Omometria



La funzione di Patterson svolge il ruolo del vettore intervallare!!

$$D(x) = 1 + x + x^{2} + x^{5}$$

$$D(x)D(x^{-1}) =$$

$$= 4 + 2x + x^{2} + x^{3} + x^{4} + x^{5} + x^{7} + x^{8} + x^{9} + x^{10} + 2x^{11}$$

$$div(D) = [4,2,1,1,1,1,0,1,1,1,1,2]$$

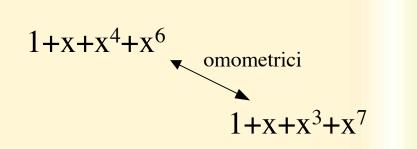
$$iv(D) = [2,1,1,1,1,0]$$

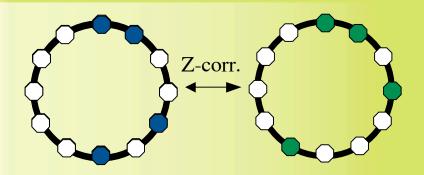
Due distribuzioni D e E si dicono **omometriche** se $D \in D' = E \in E'$.

(Due set sono omometrici se associati a distr. omometriche.)

Omometria e Z-correlazione







in Z_n

Z-correlazione Omometria in $\{0,1\}[Z_n]$

Possiamo usare gli strumenti algebrici dello studio dell'omometria e applicarli allo studio della Z-correlazione

- → Scegliamo Z_{2n} , e sia ©(x)=1+x+x²+...+x²ⁿ⁻¹=(x²ⁿ-1)/(x-1)
- → Sia A un set cui corrisponde in forma polinomiale, A(x).
- + Al set C(A) corrisponde il polinomio $\mathbb{C}(x)$ -A(x).
- → Se IAI=n, allora A e C(A) sono omometrici, vale a dire

$$A(x)A(x^{-1}) ' (©(x)-A(x)) (©(x^{-1})-A(x^{-1})) \mod x^{2n}-1$$

 $@(x)@(x^{-1}) ' @(x)A(x^{-1}) + @(x^{-1})A(x) \mod x^{2n}-1$

→ Ma $\mathbb{O}(x^{-1})=\mathbb{O}(x)$, e dunque

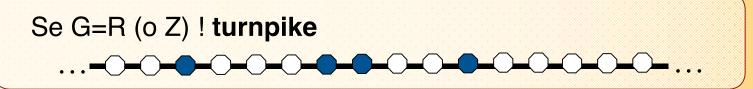
©
$$(x)$$
(© $(x) - A(x^{-1}) - A(x)$) ´ 0 mod x^{2n} -1
© (x) (© $(x) - A(x^{-1}) - A(x)$) = $k(x^{2n}$ -1) = k © (x) (x -1)
© $(x) - A(x^{-1}) - A(x)$ = $k(x$ -1)

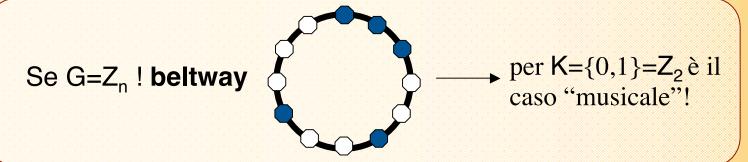
→ Questo è vero, perché chiamando $P(x) = O(x) - A(x^{-1}) - A(x)$

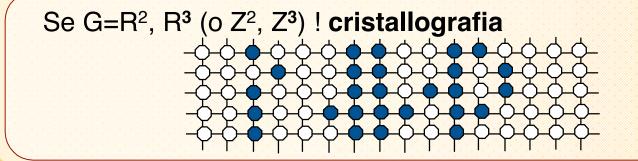
$$P(1) = O(1) - A(1) - A(1) = 2n - n - n = 0$$
) (x-1) | $P(x)$

Qualche caso particolare

Ma l'omometria è più generale, applicabile a K[G]!







Omometria

Z-correlazione

✓ Ha origine dalla cristallografia ai raggi X degli anni '30 (Patterson).

- ✓ Si costruisce la teoria per qualsiasi multiset di un gruppo abeliano G o distribuzione su G.
- ✓ Dalle nozioni di convoluzione e di riflessione si definisce la funzione di Patterson D € D'.
- ✓ Due distribuzioni sono omometriche se hanno uguale funzione di Patterson

- ✓ Ha origine dagli studi di Forte negli anni '70, ma fu già introdotta da Hanson negli anni '60 con il nome di isomeric relation.
- ✓ Si considerano sottoinsiemi dello spazio Z_n=Z/nZ, (spazio delle pitch-class). Si privilegiano le scelte n=12, 24, (36).
- ✓ Dalla nozione di intervallo si arriva alla definizione del vettore intervallare iv(A).
- ✓ Due set sono Z-correlati se hanno lo stesso vettore intervallare.

Omometria

Z-correlazione

Prime proprietà

- ✓ Se D è una distribuzione, essa è omometrica alla riflessa D' e alla "traslata" $\pm_{\alpha} \in D$.
- ✓ Non esistono set omometrici con cardinalità minore di 4.
- ✓ Due set A, B sono omometrici se e solo se lo sono C(A) e C(B).
- ✓ Se card(A)=n/2, allora A e C(A) sono omometrici in Z_{2n} .

- ✓ Se A è un set, esso è banalmente Z-correlato all'inversione I(A) e alla trasposizione T_k(A). ✓ Non esistono Z-set di cardinalità minore di 4.
- ✓ A, B sono Z-correlati se e solo se lo sono C(A) e C(B)
- ✓ Se card(A)=n/2 (n pari) allora A
 e C(A) sono Z-correlati. (GHT)

Strumenti per l'analisi

- ✓ Algebra combinatoria, algebra dei gruppi, algebra dei group rings
- ✓ Diagrammi di Patterson

- ✓ Musical Set Theory
- ✓ Diagrammi di Krenek

1+X+3X

Parte II

Il problema di phase retrieval



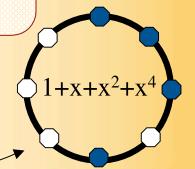
Il problema di phase retrieval

- → Dalla funzione di Patterson è possibile risalire univocamente alla distribuzione di K[G]?
 - → NO, ad esempio "traslando" si preserva la funzione di Patterson.
- ★ E a meno di un qualche isomorfismo?
 - → Dipende dal dominio a fattorizzazione unica K, dipende dal gruppo abeliano G, dipende dall'isomorfismo.

Problema di **phase** retrieval

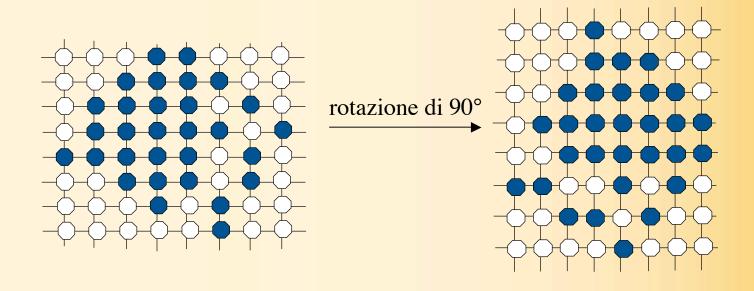
dalla funzione di Patterson ricavare la distribuzione a meno di un certo isomorfismo

$$Z[Z_8]$$
: Patterson = $4+2x+2x^2+x^3+2x^4+x^5+2x^6+2x^7$



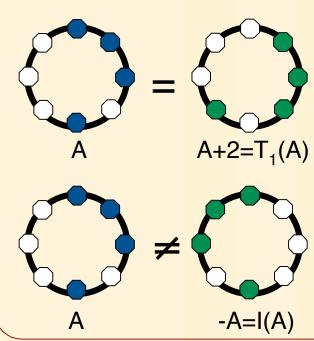
Che isomorfismo scegliamo? Quali set/distribuzioni consideriamo "sostanzialmente uguali"?

Se parliamo di insiemi, in Rⁿ o in Zⁿ, il più naturale isomorfismo è considerare equivalenti insiemi **congruenti**.



Se passiamo al caso Z_n, abbiamo diverse possibilità. Considerare uguali insiemi corrispondentisi per:

Trasposizioni (gruppo ciclico C_n)

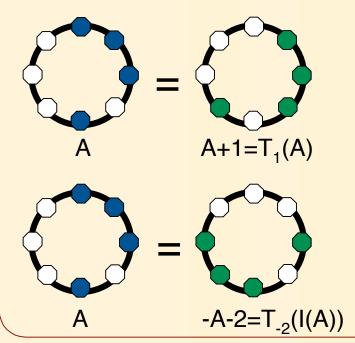


collana indossata: si
equivalgono le disposizioni
l'una "rotazione"
(trasposizione) dell'altra, ma
non le inversioni

Nel quoziente si conserva la funzione di Patterson (il vettore intervallare)

Se passiamo al caso Z_n, abbiamo diverse possibilità. Considerare uguali insiemi corrispondentisi per:

Trasposizioni/Inversioni (gr. diedrale D_{2n})

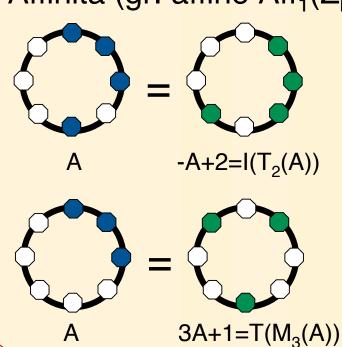


Elementi come perline di una collana su un tavolo: si equivalgono le disposizioni l'una "rotazione" (trasposizione) e/o "inversione" dell'altra (ribaltamento della collana sul tavolo)

Nel quoziente si conserva la funzione di Patterson (il vettore intervallare)

→ Se passiamo al caso Z_n, abbiamo diverse possibilità. Considerare uguali insiemi corrispondentisi per:

Affinità (gr. affine $Aff_1(Z_n)$)

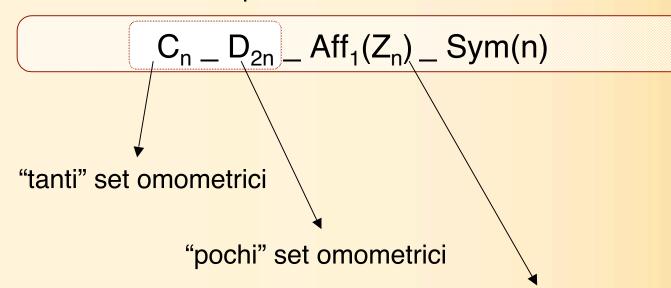


Si equivalgono le disposizioni l'una "moltiplicazione" e/o "rotazione" dell'altra.

Solo le moltiplicazioni M_k per k primo con n conservano in generale le cardinalità

Nel passaggio al quoziente NON si conserva la funzione di Patterson!

 La funzione di Patterson non dipende da alcun isomorfismo, dunque

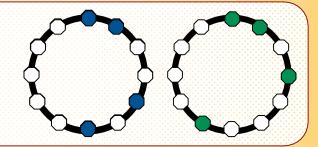


non ha più senso parlare
di omometria tra classi
(non si conserva la funzione di Patterson,
dunque nemmeno il vettore intervallare, ma si
ha una permutazione tra le classi resto)

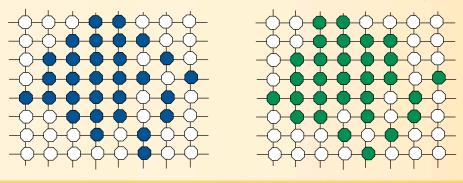
Come caratterizzare i set omometrici?

→ Se G=R (o Z) ! turnpike problem

- → Se G=Z_n! beltway problem
 - → Gli Z-set in Z_n sono set omometrici con K[G]={0,1}[Z_n].



★ Se G=R², R³ (o Z², Z³) ! problema cristallografico



La trasformata astratta di Fourier



- Uno strumento indispensabile per l'analisi è la trasformata astratta di Fourier.
- + Sia $\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C}:\|z\|=1\}$ gruppo moltiplicativo dei vettori unitari di C, e sia

$$\Gamma = \{ \gamma \colon G \to \mathbb{T} \text{ omomorfismi} \}$$

$$D = \sum_{g \in G} d_g \delta_g \xrightarrow{\text{trasf. astratta}} \hat{D}(\gamma) = \sum_{g \in G} d_g \overline{\gamma(g)} \ \, \forall \gamma \in \Gamma$$

→ Se G=Z_n (beltway), ¡ è l'insieme dei caratteri di Z_n, isomorfo a Z_n stesso.

Proprietà della trasformata di Fourier

 La trasformata astratta di Fourier gode delle stesse proprietà della trasformata di Fourier ordinaria.

$$+ \widehat{D'}(\gamma) = \overline{\hat{D}(\gamma)}$$

$$+\widehat{D*E}(\gamma) = \hat{D}(\gamma)\hat{E}(\gamma)$$

$$\begin{array}{l} *D*D' = E*E' \Rightarrow \widehat{D*D'} = \widehat{E*E'} \Rightarrow \\ \widehat{D}\widehat{D}' = \widehat{E}\widehat{E}' \Rightarrow \widehat{D}\widehat{D} = \widehat{E}\widehat{E} \Rightarrow \\ \Rightarrow \|\widehat{D}(\gamma)\| = \|\widehat{E}(\gamma)\| \ \forall \gamma \in \Gamma \end{array}$$

Condizioni equivalenti di omometrici tà

Due distribuzioni *D* ed *E* sono **omometriche** se, equivalentemente:

$$1.D*D' = E*E'$$

$$2.\widehat{D*D'} = \widehat{E*E'}$$

$$\|\hat{D}(\gamma)\| = \|\hat{E}(\gamma)\| \ \forall \gamma \in \Gamma$$

4.
$$D(x)D'(x) = E(x)E'(x)$$

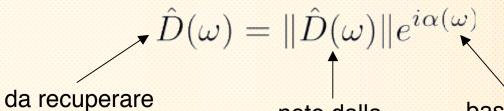
nella rappresentazione polinomiale di *D* ed *E*.

Il problema di phase retrieval

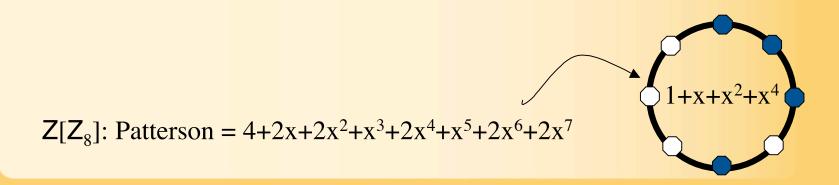


Perché "phase retrieval"?

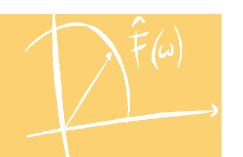
Per recuperare D basta recuperare D



noto dalla funzione di Patterson basta trovare la fase ®(!)

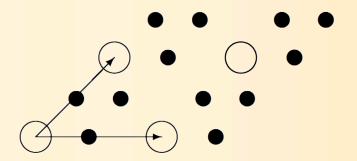


Omometria e cristallografia



I set omometrici nascono dalla **cristallografia**: la misura dell'ampiezza totale $\hat{D}(\omega)$ dell'onda di scattering è impossibile per via diretta, mentre i processi di misurazione rendono noto il suo modulo $\|\hat{D}(\omega)\|$.

$$\hat{D}(\omega) = \|\hat{D}(\omega)\|e^{i\alpha(\omega)}$$



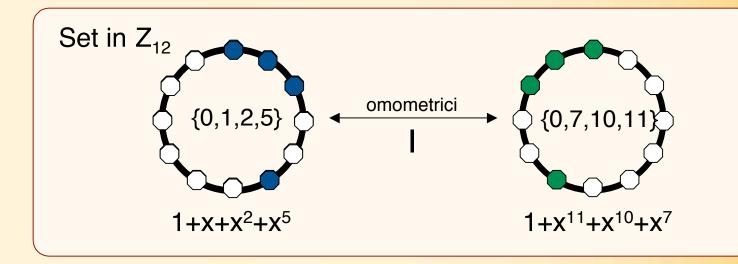
 Per risalire all'ampiezza totale, ecco che bisogna allora recuperare la fase.

Generare distribuzioni omometriche

- Osserviamo che:
 - → ogni distribuzione D è omometrica alla sua riflessione D'

$$\|\hat{D}(\gamma)\| = \|\overline{\hat{D}}(\gamma)\|$$

In
$$Z[Z_{12}]$$
: 1-x+7x³ \leftarrow omometrici 1-x¹¹+7x⁹

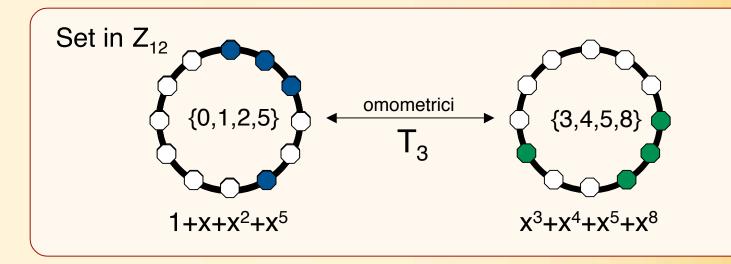


Generare distribuzioni omometriche

- Osserviamo che:
 - → ogni distribuzione D è omometrica a ±_g € D ("traslazione")

$$\|\hat{D}(\gamma)\| = \|\overline{\gamma}(g)\hat{D}(\gamma)\|$$

In
$$Z[Z_{12}]$$
: 1-x+7x³ \leftarrow omometrici \rightarrow x⁵(1-x+7x³)



Generare distribuzioni omometriche

- Osserviamo che:

$$\begin{split} \|\widehat{D*E}(\gamma)\| &= \|\widehat{D}(\gamma)\widehat{E}(\gamma)\| = \|\rho e^{i\theta} r e^{is}\| = \rho r \\ \|\widehat{D*E'}(\gamma)\| &= \|\widehat{D}(\gamma)\widehat{\widehat{E}(\gamma)}\| = \|\rho e^{i\theta} r e^{-is}\| = \rho r \end{split}$$

In
$$Z[Z_{12}]$$
: $(1-x+7x^3)(1+x+x^4) \stackrel{\text{omometrici}}{\longleftarrow} (1-x+7x^3)(1+x^{11}+x^8)$

Set in
$$Z_{18}$$

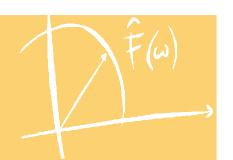
$$\{0,1,3,4,5, \\
7,9,10,12\}$$

$$(1+x+x^3)(1+x^4+x^9) = \\
1+x+x^3+x^4+x^5+x^7+x^9+x^{10}+x^{12}$$

$$(1+x+x^3)(1+x^{14}+x^9) = \\
1+x+x^3+x^4+x^5+x^7+x^9+x^{10}+x^{12}$$

$$(1+x+x^3)(1+x^{14}+x^9) = \\
1+x+x^3+x^4+x^5+x^7+x^9+x^{10}+x^{12}$$

Generare set omometrici



Data l'associazione tra set e distribuzioni

$$A \longrightarrow 1_A := \sum_{a \in A} \delta_a$$

due set A e B sono omometrici se e solo se 1_A è omometrica a 1_B.

Dati A e B possiamo calcolare D= 1_A € 1_B e E= 1_A € 1_B, che corrisponderanno (se A e B sono "ben dispersi") a due

$$A = \{0, 1, 3\} \quad B = \{0, 4, 9\}$$

$$A+B = \{0,1,3,5,7,9,10,12\} \quad A-B = \{0,-4,-9,1,-3,-8,3,-1,-6\}$$

→ Se A e B non sono "ben dispersi", A+B o A-B possono risultare dei multiset.

Il caso del turnpike problem

- Dati due set A, B, abbiamo visto che A+B e A-B sono banalmente omometrici (come set o come multiset).
- Domanda: tutti i set omometrici nascono in questo modo?

Problema di **fattorizzazione** della funzione di Patterson A(x)A(1/x)=B(x)B(1/x)



[•]Lemke, Skiena, Smith, Reconstructing Sets From Interpoint Distances (2002)

Hosemann, Bachi, On Homometric Sets (1954)

Teorema di fattorizzazione

Due set, in forma polinomiale, A(x) e B(x) 2 K[R] sono omometrici se e solo se esistono due polinomi P(x) e Q(x) 2 K[R] e c 2 K, di norma 1, t.c.

$$A(x) = P(x)Q(x)$$
$$B(x) = cP(x)Q(x^{-1})$$

(Rosenblatt)

$$A_{1}(x) = 1 + x + x^{5} + x^{7} + x^{8} + x^{10} + x^{12}$$

$$A_{2}(x) = 1 + x + x^{2} + x^{5} + x^{7} + x^{9} + x^{12}$$

$$P(x) = x^{5/2}(1 + x + x^{2} + x^{3} + x^{4} + x^{5} + x^{7})$$

$$Q(x) = x^{-5/2}(1 - x^{3} + x^{5})$$

$$c = 1$$

$$A_1(x) = P(x)Q(x) \xrightarrow{\text{omometrici}} A_2(x) = P(x)Q(x^{-1})$$

Teorema di fattorizzazione

Per liberarci degli esponenti frazionari, possiamo rienunciare:

Due set, in forma polinomiale, A(x) e B(x) 2 K[Z] sono omometrici se e solo se esistono due polinomi P(x) e Q(x) 2 K[Z] e c 2 K, di norma 1, e \hat{C} , o 2K, t.c.

$$A(x) = x^{\eta} P(x) Q(x)$$

$$B(x) = c x^{\nu} P(x) Q(x^{-1})$$
 (Rosenblatt)

$$A_{1}(x) = 1 + x + x^{5} + x^{7} + x^{8} + x^{10} + x^{12}$$

$$A_{2}(x) = 1 + x + x^{2} + x^{5} + x^{7} + x^{9} + x^{12}$$

$$P(x)$$

$$Q(x)$$

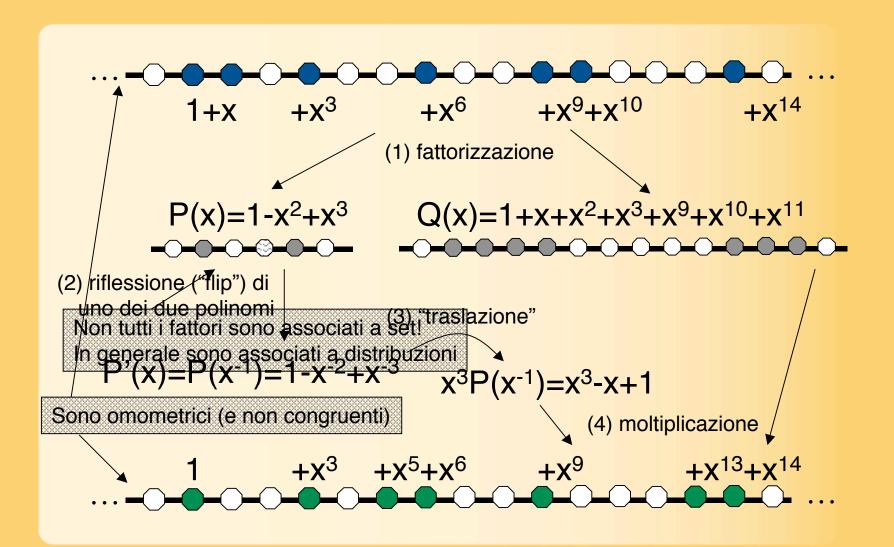
$$A_{1}(x) = (1 + x + x^{2} + x^{3} + x^{4} + x^{5} + x^{7})(1 - x^{3} + x^{5})$$

$$A_{2}(x) = x^{5}(1 + x + x^{2} + x^{3} + x^{4} + x^{5} + x^{7})(1 - x^{-3} + x^{-5})$$

$$P(x)$$

$$Q(x^{-1})$$

Omometria e "flip" dei fattori



Omometria e "flip" dei fattori

- Nel caso del turnpike problem trovare set omometrici è molto facile: basta usare la fattorizzazione dei polinomi generatori.
- → Dato che A(x) è banalmente omometrico a x^kA(x) e a x^kA(x⁻¹), viene naturale chiamare ricostruibile un polinomio che sia omometrico solamente a questi traslati e inversi ("congruenti").

A(x) è ricostruibile se e solo se ha al massimo un fattore primo (contato con l'opportuna molteplicità) che non è semisimmetrico.

- → Il numero di set omometrici dipende da quanti "flip" possiamo fare ai fattori del polinomio generatore, qui dipende dal numero di fattori "asimmetrici" del polinomio generatore.
- In particolare tale quantità sarà sempre una potenza di 2.

Omometria e "flip" dei fattori

A={0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 35, 36, 38, 39, 40, 41, 43, 44, 47, 48, 49, 50, 52, 53, 54,

55, 56, 57, 59, 60, 62, 63, 64, 65, 67, 68}

fattore simmetrico

fattori non semisimmetrici

$$A(x) = \underbrace{(1+x)(1+x^2+x^5)(1+x^7+x^{15})(1+x^{23}+x^{47})}_{S(x)} \underbrace{(1+x^2+x^5)(1+x^7+x^{15})(1+x^{23}+x^{47})}_{Q(x)}$$

$$A_{1}(x) = \underbrace{(1+x)(1+x^{2}+x^{5})(1+x^{7}+x^{15})(1+x^{24}+x^{47})}_{S(x)}$$

$$P(x)$$

$$Q(x)$$

$$R'(x)$$

$$A_{2}(x) = \underbrace{(1+x)(1+x^{2}+x^{5})}_{S(x)}\underbrace{(1+x^{8}+x^{15})(1+x^{23}+x^{47})}_{Q(x)}$$

$$A_3(x) = \underbrace{(1+x)(1+x^2+x^5)}_{S(x)}\underbrace{(1+x^8+x^{15})(1+x^{24}+x^{47})}_{Q(x)}$$

8 possibili "flip" dei fattori non simmetrici

- PQR
 PQR'
 4 = 2² flip
- PQ'R non banali
- PQ'R'
- P'QR=(PQ'R')'
- P'QR'=(PQ'R)'
- P'Q'R=(PQR')'
- P'Q'R'=(PQR)'

4 = 2² set contemporamente omometrici

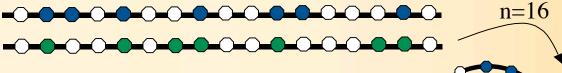
Importanza del turnpike per il beltway

→ Ogni coppia (quadrupletta, ottupletta...) di set omometrici per il turnpike, sono omometrici anche per tutti i beltway ottenuti mediante quoziente (con n sufficientemente grande, di modo che anche il quoziente sia un set).

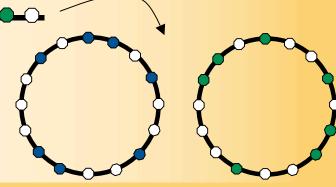
+ Infatti
$$A(x)A(1/x) = B(x)B(1/x) \Longrightarrow$$

$$A(x)A(1/x) = B(x)B(1/x) \mod x^n - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

→ Si tratta di "avvolgere" la stringa a mo' di cintura



 → Per n sufficientemente grande, i due lacci sono anche non congruenti (quindi omometrici non trivialmente)



Metodi per generare set Z-correlati

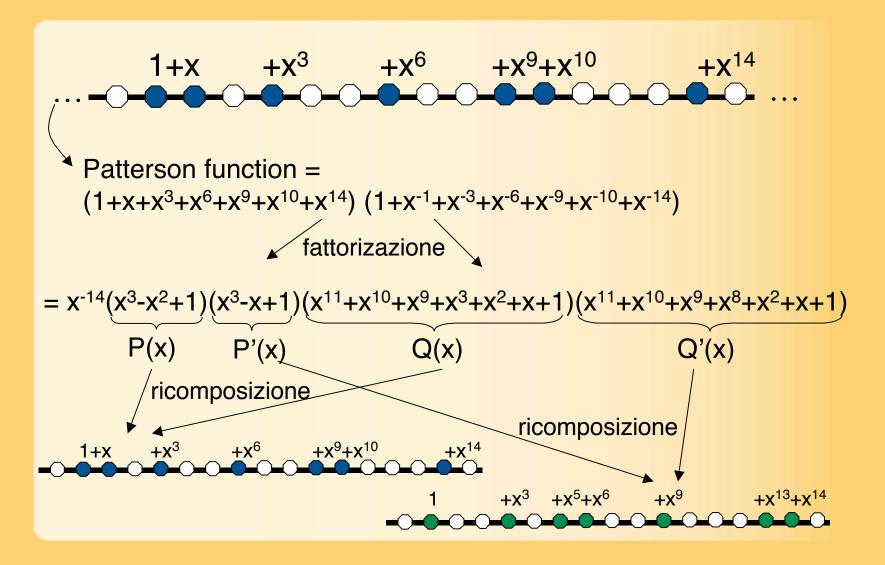


- Che metodi abbiamo visto per costruirci set Z-correlati?
 - **→ GHT**: in Z_{2n} basta prendere il complementare di un set per averne uno Z-correlato (non banalmente con probabilità p → 1 per n → 1)
 - → Il turnpike e il "flip dei fattori": costruiamo così set Z-correlati in Z e poi li "avvolgiamo" in Z_n (non banalmente per n grande).
- → Abbiamo in realtà altri metodi (su cui non ci focalizziamo).
 - → Le moltiplicazioni M_k su set il cui contenuto intervallare è
 ortogonale rispetto alla permutazione indotta sulle classi resto.
 - → La "dual inversion" di Soderberg, o metodi affini di Bullough.
 - → I "difference sets" di Singer per costruire all-intervals Z-set.
- Questi metodi però non esauriscono le possibilità. A differenza del turnpike, la caratterizzazione della Z-correlazione (cioè del beltway) risulta assai più complicata.

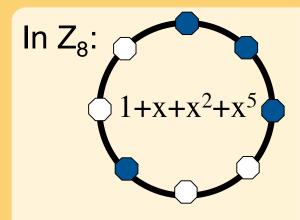
Il caso del beltway problem

- → La fattorizazione del turnpike funziona non solo per K[R], o per K[Z], ma per K[R¹] e per K[Z¹], (polinomi n-variati).
- → Più difficile è il caso del beltway problem, dal momento che i polinomi generatori sono associati all'algebra K[Z_n], e dunque sono polinomi modulo xⁿ-1.
- → Ma K[x]/(xⁿ-1) se ne guarda bene dall'essere un dominio!
 E, soprattutto, se ne guarda bene anche dall'essere a fattorizzazione unica!!
 - ★ La funzione di Patterson P(x)P(1/x) funge da vettore intervallare
 - → Due set sono omometrici se hanno funzioni di Patterson uguali (modulo xⁿ-1), ma non siamo più in grado di fattorizzarle!

Un esempio per il turnpike



Un esempio per il beltway



Patterson function =

 $= (1+x+x^2+x^5) (1+x^{-1}+x^{-2}+x^{-5})$

 $= (1+x+x^2+x^5) (1+x^7+x^6+x^3)$

 $=4+2x+x^2+2x^3+2x^4+2x^5+x^6+2x^7$

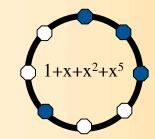
fattorizazione

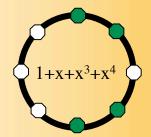
??????????

 $(x+1)^2(x^4-x^3+x^2+1)(x^6+x^2-x+1)$?

 $(x+1)^3(x^2-x-1)(x^6-x^5+2x^4-x^3+x^2-x+1)$?

non ho più modo di risalire ai set





Caratterizzazione per il beltway



D, E 2 $K[Z_n]$ sono omometriche se e solo se

$$D = {}_{-1} \pm_g \in A \in B, \qquad E = {}_{-2} \pm_h \in A \in B'$$
 per qualche ${}_{-1}$, ${}_{-2} 2 \{1, -1\}$, $g, h 2 Z_n$, $A, B 2 K[Z_n]$. (Rosenblatt)

- Problema: a differenza dell'analogo caso del turnpike, stavolta questa caratterizzazione non è costruttiva:
 - non ci dà un modo per costruire set omometrici a un dato set;
 - → non ci dà modo di determinare se un dato set è omometrico a qualche cosa, oppure no.
- → Questo è ancora una volta dovuto all'impossibilità di fattorizzare univocamente in K[x]/(xⁿ-1).

→ Una distribuzione U 2 K[G] è detta unità spettrale se

$$U \in U' = \pm_0$$

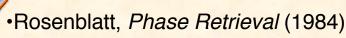
Un'unità spettrale dunque non è nient'altro che una distribuzione omometrica alla distribuzione banale ± :

$$U \in U' = \pm_0 = \pm_0 \in \pm_0'$$

D, E 2 K[G] sono omometriche se e solo se esiste un'unità spettrale U t.c.

$$E = U \in D$$

(Rosenblatt)



•Jaming, The Phase Retrieval Problem For Cyclotomic Crystals (2007)

 Vista nell'isomorfismo polinomiale, un'unità spettrale dev'essere tale che

$$U(x)U(x^{-1})=1$$

Ad esempio, ecco l'unità spettrale U(x) che lega i set omometrici

$$U(x) = \frac{1}{4} (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 - 3x^5 + x^6 + x^7)$$

$$U(x)U(x^{-1}) = \frac{1}{4} (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 - 3x^5 + x^6 + x^7)$$

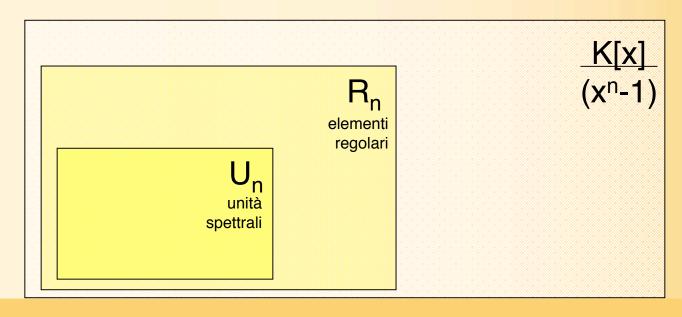
$$U(x)U(x^{-1}) = \frac{1}{4} (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 - 3x^5 + x^6 + x^7) \frac{1}{4} (1 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 - 3x^3 + x^2 + x)$$

$$= \frac{1}{16} (x^{14} + 2x^{13} - x^{12} - 3x^{10} - 2x^9 + 15x^8 - x^6 - 2x^5 + x^4 + 3x^2 + 2x + 1) = \frac{1}{16} \cdot 16 = 1$$

$$U(x)D(x) = \frac{1}{4} (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 - 3x^5 + x^6 + x^7)(1 + x + x^2 + x^3) = (1 + x + x^3 + x^4) = E(x)$$

- Alcuni fatti interessanti riguardo all'analisi delle unità spettrali:
 - → L'omometria tra due set nel caso del beltway è legata all'esistenza di queste particolari unità spettrali U(x).
 - → Nessuna unità spettrale sarà un set (perché non esistono set omometrici al set banale {0}).
 - → Possiamo trovare esplicitamente le unità spettrali che legano due set omometrici, sostanzialmente risolvendo sistemi lineari.
 - → Dunque anche la Z-correlazione è legata a proprietà algebriche dei polinomi generatori, più che a principi musicali. L'esistenza di Z-set è una proprietà algebrica.

- Altre considerazioni interessanti (se K è campo):
 - → Se D, E sono omometrici, o sono entrambi divisori dello zero, o non lo è nessuno dei due.
 - → Le unità spettrali non sono mai divisori dello zero.
 - → L'insieme U_n delle unità spettrali di K[Z_n] ' K[x]/(xⁿ-1) ha la struttura algebrica di gruppo.



Un sottoinsieme di un gruppo abeliano G è univocamente determinato dalla sua funzione di Patterson?

Un set di note in Z_n è univocamente determinato dal suo vettore intervallare?

In generale no: ogni "traslazione" e ogni "riflessione" ha uguale funzione di Patterson (set omometrici triviali)

In generale no: ogni trasposizione e inversione preserva il vettore intervallare (Z-set triviali)

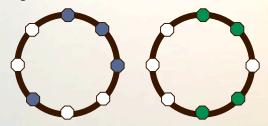
E a meno di traslazioni e inversioni?

E a meno di trasposizioni/inversioni?

Esistono set omometrici non triviali



Per n₃8 esistono Z-set non triviali



R o Z (turnpike) Se G=

Rn o Zn (cristallografia)

 $Z_n = Z/nZ$ (beltway)

Caratterizzazione completa mediante fattorizzazione. Facile phase retrieval.

Caratterizzazione mediante unità spettrali, ma non è costruttiva! Difficile phase retrieval.

1+X+3X

Parte III

Invarianti di ordine superiore



Come si può recuperare la fase?

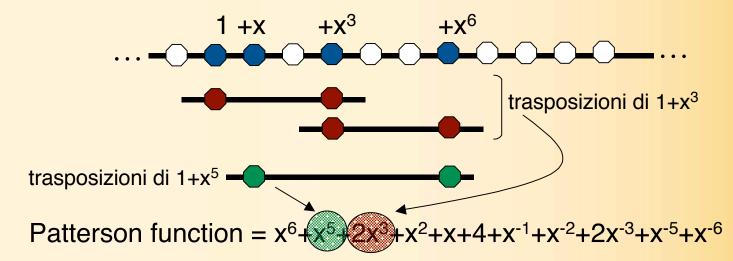
- → Il phase retrieval ha mostrato che il recupero della configurazione originaria a partire dalla funzione di Patterson, a meno di isomorfismi (per facile o difficile che sia, a seconda del gruppo G), in generale non è univoco.
- Cerchiamo quindi altre quantità a partire dalle quali poter risalire alle configurazioni originali.

invarianti di ordine superiore (higher order invariants)

- •Radcliffe, Scott, Reconstructing Subsets of Z_n (1998)
- •Radcliffe, Scott, Reconstructing Subsets of Reals (1999)
- •Jaming, Kolountzakis, Reconstruction of Functions from Their Triple Correlation (2003)
- •Keleti, Kolountzakis, On The Determination of Sets by Their Triple Correlation in Finite Cyclic Groups (2006)

Come si può recuperare la fases

- Si tratta di un problema combinatorio, che ha applicazioni nella cristallografia, nella fisica, nella musica, nella computer grafica.
- L'informazione della funzione di Patterson è il multiset dei sottoinsiemi di cardinalità 2.



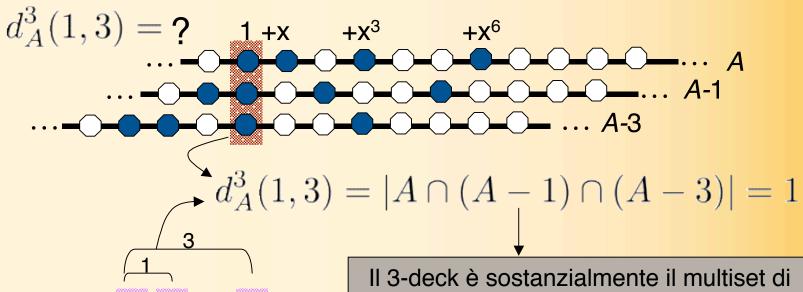
 Idea: provare a ricostruire a partire dal multiset dei sottoinsiemi di cardinalità k, 2.

II k-deck



Definizione:

+ II k-deck di A è la funzione $d_A^k\colon G^{k-1}\to \mathbb{N}$ $d_A^k(x_1,\dots,x_{k-1})=|A\cap (A-x_1)\cap\dots\cap (A-x_k)|$



Il 3-deck è sostanzialmente il multiset di tutti i sottoinsiemi di cardinalità 3, a meno di trasposizioni

Il k-deck



- Estensione della definizione alle sequenze:
 - ullet II k-deck di una qualsiasi sequenza $f=(\ldots,f_i,f_{i+1},\ldots)$ è $d_f^k(x_1,\ldots,x_{k-1})=\sum_i f_i f_{i+x_1} f_{i+x_2}\ldots f_{i+x_{k-1}}$
 - → In particular per sequenze n-periodiche $f = (f_1, \dots, f_n)$

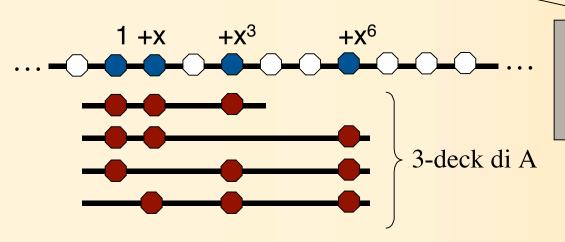
$$d_f^k(x_1, \dots, x_{k-1}) = \sum_{i=1}^n f_i f_{i+x_1} f_{i+x_2} \dots f_{i+x_{k-1}}$$

→ Per $f = \chi_A$: $f_i = (\chi_A)_i = \begin{cases} 1 \text{ se } i \in A \\ 0 \text{ se } i \notin A \end{cases}$ ritroviamo la definizione precedente:

II k-deck



- Estensione per isomorfismi qualsiasi:
 - → Il k-deck di A è il multiset dei sottoinsiemi di A di cardinalità k (a meno di un fissato isomorfismo)

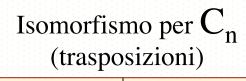


Bisogna fissare l'isomorfismo! Come al solito, tipicamente sarà l'azione di C_n o D_{2n}

→ II k-deck di A è una funzione $d_k^A : \{S \subseteq G, |S| = k\} \to \mathbb{N}$ che associa a ogni sottoinsieme S il numero di copie isomorfe di S contenute (*embedded*) in A.

k-deck o k-Deck?

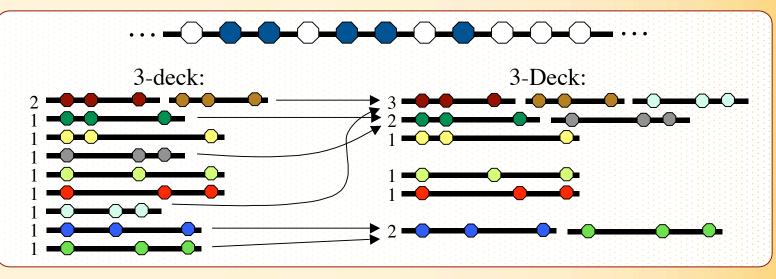




k-deck d_A^k

 $\begin{array}{c} \text{Isomorfismo per } D_{2n} \\ \text{(trasposizioni/inversioni)} \end{array}$

k-Deck D_A^k

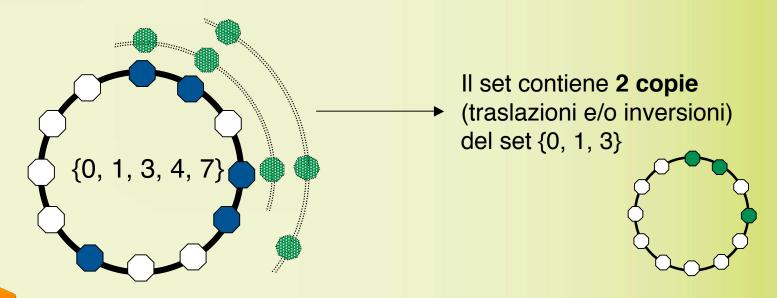


$$D_A^k(S) = d_A^k(S) + d_A^k(-S)$$

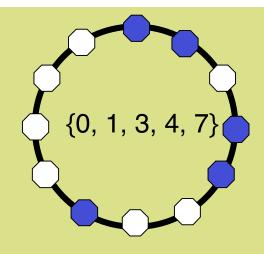
Gli M-vettori



→ Analogamente l'M-vettore rende conto di quante copie di un certo set di cardinalità M sono contenute nel set originario.



- •Lewin, Generalized Musical Intervals and Transformations (1987)
- •Collins, Uniqueness of Pitch Class Spaces, Minimal Bases and Z Partners (1999)
- •Ghisi, Vettori intervallari, non degenerazione e Z-relation (2006)
- •Ghisi, On The Extended Z-relation, a Linear-Algebraic Generalization of the GHT (2007)
- •Tsao, Abstract Musical Intervals (2007)



Forme primarie di cardinalità 3:

{0, 1, 2}! 0 copie

{0, 1, 3}! 2 copie

{0, 1, 4}! 3 copie

{0, 1, 5}! 0 copie

{0, 1, 6}! 1 copia

{0, 2, 4}! 0 copie

{0, 2, 5}! 0 copie

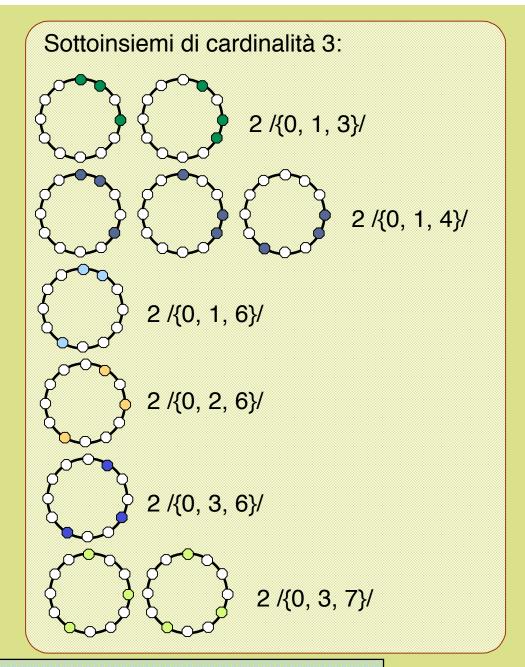
{0, 2, 6}! 1 copia

{0, 2, 7}! 0 copie

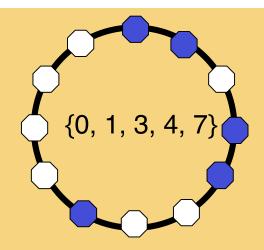
{0, 3, 6}! 1 copia

{0, 3, 7}! 2 copie

{0, 4, 8} ! 0 copie



 $mv^{3}({0,1,3,4,7})=[0, 2, 3, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 2, 0]$



Forme primarie di cardinalità 3:

{0, 1, 2} ! 0 copie

{0, 1, 3}! 2 copie

{0, 1, 4}! 3 copie

{0, 1, 5}! 0 copie

{0, 1, 6}! 1 copia

{0, 2, 4}! 0 copie

{0, 2, 5}! 0 copie

{0, 2, 6}! 1 copia

{0, 2, 7}! 0 copie

{0, 3, 6}! 1 copia

{0, 3, 7}! 2 copie

{0, 4, 8}! 0 copie

Considerato come set di Z₁₂, il 3-Deck (a meno di T/I) è analogo:

$$D_A^3(\{0,1,2\}) = 0$$

$$D_A^3(\{0,1,3\}) = 2$$

$$D_A^3(\{0,1,4\}) = 3$$

$$D_A^3(\{0,1,5\}) = 0$$

$$D_A^3(\{0,1,6\}) = 1$$

$$D_A^3(\{0,2,4\}) = 0$$

$$D_A^3(\{0,2,5\}) = 0$$

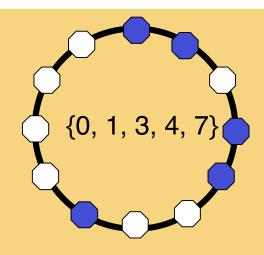
$$D_A^3(\{0,2,6\}) = 1$$

$$D_A^3(\{0,2,7\}) = 0$$

$$D_A^3(\{0,3,6\}) = 1$$

$$D_A^3(\{0,3,7\}) = 2$$

$$D_A^3(\{0,4,8\}) = 0$$



Forme primarie di cardinalità 3:

{0, 1, 2}! 0 copie

{0, 1, 3}! 1 copia

{0, 1, 4}! 2 copie

{0, 1, 5}! 0 copie

{0, 1, 6} ! 0 copie

{0, 1, 7}! 1 copia

{0, 1, 8} ! 0 copie

{0, 1, 9}! 1 copia

{0, 1, 10}! 1 copia

{0, 2, 4}! 0 copie

{0, 2, 5}! 0 copie

{0, 2, 6}! 1 copia

{0, 2, 7}! 0 copie

{0, 2, 8}! 0 copie

{0, 2, 9}! 0 copie

{0, 3, 6}! 1 copia

{0, 3, 7}! 1 copia

{0, 3, 8}! 1 copia

{0, 4, 8}! 0 copie

A meno delle sole trasposizioni (gruppo C_n), le entrate significative nel 3-deck sono di più:

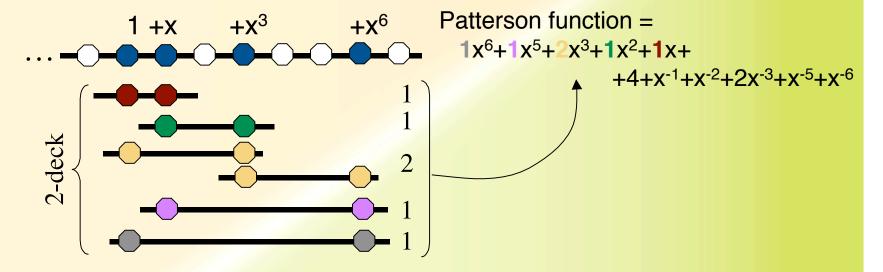
$$\begin{split} d_A^3(\{0,1,2\}) &= 0 & d_A^3(\{0,2,4\}) &= 0 \\ d_A^3(\{0,1,3\}) &= 1 & d_A^3(\{0,2,5\}) &= 0 \\ d_A^3(\{0,1,4\}) &= 2 & d_A^3(\{0,2,6\}) &= 1 \\ d_A^3(\{0,1,5\}) &= 0 & d_A^3(\{0,2,7\}) &= 0 \\ d_A^3(\{0,1,6\}) &= 0 & d_A^3(\{0,2,8\}) &= 0 \\ d_A^3(\{0,1,7\}) &= 1 & d_A^3(\{0,2,9\}) &= 0 \\ d_A^3(\{0,1,8\}) &= 0 & d_A^3(\{0,3,6\}) &= 1 \\ d_A^3(\{0,1,9\}) &= 1 & d_A^3(\{0,3,7\}) &= 1 \\ d_A^3(\{0,1,10\}) &= 1 & d_A^3(\{0,3,8\}) &= 1 \\ d_A^3(\{0,4,8\}) &= 0 \end{split}$$

19 entrate significative anziché 12

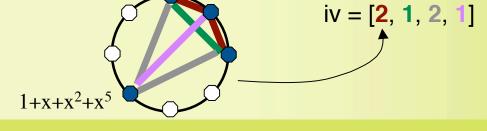
k-deck e k-Deck sono due entità diverse

Il 2-deck, il 2-vettore

→ L'informazione del 2-deck è quella della funzione di Patterson.

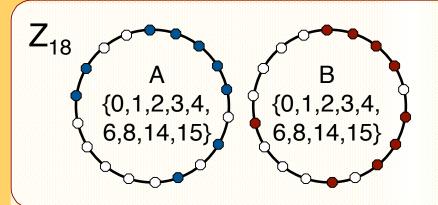


 L'informazione data dal 2-vettore è la stessa data dal vettore intervallare



k-omometria, k-Omometria, Z^M-correlazione





non si corrispondonno per T/I, mv³(A)= mv³(B)= [35535456254434221222124124

$$D_A^3 = D_B^3$$
 ovvero (Collins)

- (C_n)
- Due distribuzioni (o set) si dicono k-omometrici se hanno uguale k-deck.
- + Si dicono k-Omometrici se
 - ▼ hanno uguale k-Deck
- (D_{2n})
- Distribuzioni 2-omometriche sono anche 2-Omometriche, e si dicono semplicemente distribuzioni omometriche.
- → Due set si dicono Z^M correlati se hanno uguale M vettore
- vettore
 Due set Z²-correlati sono
 semplicemente set Z-correlati



Proprietà della Z^M-correlazione



Se due set A, B sono Z-correlati, allora lo sono anche i complementari C(A), C(B).

Cessa di valere il GHT, ma si può trovare una sua estensione:

Generalized GHT:

In Z_{2n}, ogni set A di cardinalità n verifica

$$mv^{M}(A) - mv^{M}(C(A)) 2 Ker(E_{2n,2,M})$$

dove $E_{2n,2,M}$ è la matrice che ha per colonne i 2-vettori (cioè i vettori intervallari) delle forme primarie di cardinalità M in Z_{2n} .

(2006)

Diversi lemmi, uguale annidamento



Lemma di Kelly

Dal k-deck si può risalire al (k-1)-deck, e quindi iterativamente a ogni h-deck con h<k. Idem per il k-Deck.

Ne segue che se due set sono k-omometrici, sono anche h omometrici per ogni h<k, in particolare sono anche semplicemente omometrici. (Idem per i k-Omometrici)

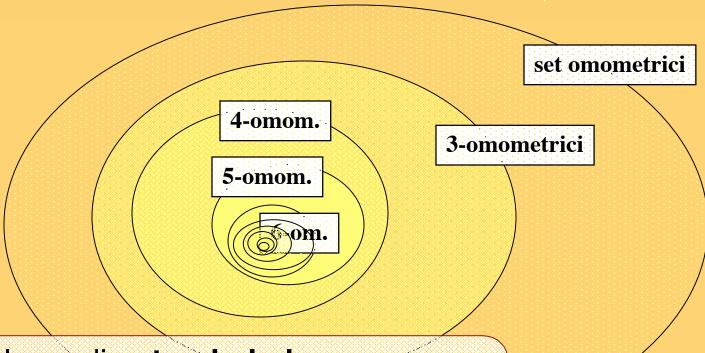
Lemma di Lewin

Dall'M-vettore si può risalire all'(M-1)-vettore, e quindi iterativamente a ogni N-vettore con N<M.

Ne segue che due set Z^M-correlati, sono anche Z^N-correlati per ogni N<M, in particolare sono anche Z-correlati.

Set k-omometrici e Z^M-set sono **annidati**

Annidamento dei set k-omometrici

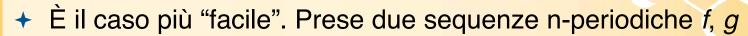


Problema di **extended phase** retrieval:

Dove diventa triviale l'annidamento? Per quale k non esistono più set k-omometrici

se non quelli isomorfi?
Con l'informazione di un tale k-deck,
avremmo il recupero della fase!

Il caso del k-deck (Cn)



$$d_f^k \equiv d_g^k$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n f_i f_{i+x_1} \cdots f_{i+x_{k-1}} = \sum_{i=1}^n g_i g_{i+x_1} \cdots g_{i+x_{k-1}}$$

$$\Leftrightarrow d^k = d^k$$

$$\Leftrightarrow \hat{f}(\omega_1)\cdots\hat{f}(\omega_{k-1})\hat{f}(-\omega_1-\ldots-\omega_{k-1}) = \\ = \hat{g}(\omega_1)\cdots\hat{g}(\omega_{k-1})\hat{g}(-\omega_1-\ldots-\omega_{k-1})$$

- •Jaming, Kolountzakis, *Reconstruction of Functions by Their Triple Correlation* (2003)
- •Keleti, Kolountzakis, On The Determination of Sets by Their Triple Correlation in Finite Cyclic Groups (2006)
- •Jaming, The Phase Retrieval Problem For Cyclotomic Crystals (2007)
- •Radcliffe, Scott, Reconstructing subsets of Z_n (1998)
- •Radcliffe, Scott, Reconstructing subsets of reals (1999)

Il caso del k-deck (Cn)



$$\xi(\omega) = \frac{\hat{g}(\omega)}{\hat{f}(\omega)}$$

risulta essere un carattere di Z_n .

→ Ma sappiamo come sono fatti i caratteri di Z_n, per cui

$$\xi(\omega) = e^{\frac{2\pi i}{n}k_0\omega}$$

per qualche k₀.

→ Dal teorema dello shift deduciamo allora che f e g si corrispondono per uno shift (k-omometria banale).

$$f_k = g_{k+k_0}$$

Il caso del k-deck (Cn)

- Ma può capitare che le trasformate si annullino!
 - Solo in questo caso possono esistere k-omometrie non banali!
- Se le trasformate si annullano, la tecnica per mostrare la non esistenza di k-omometrie non banali è cercare di estendere

$$\xi(\omega) = \frac{\hat{g}(\omega)}{\hat{f}(\omega)}$$

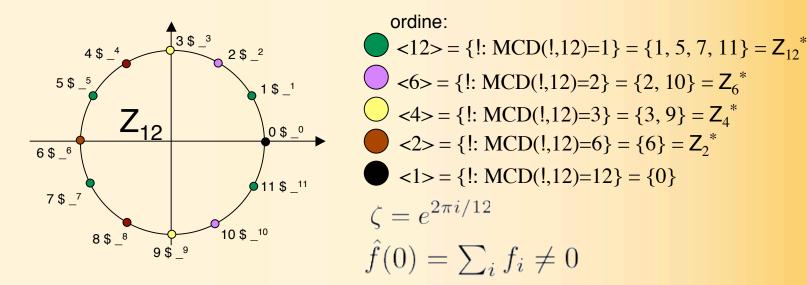
a un carattere su tutto Z_n (f e g sarebbero una shift dell'altra)

→ È cruciale sapere dove si annullano le trasformate di f e g (che sono, come f e g, ancora funzioni definite su Z_n)

Fatto: $se\hat{f}$ si annulla su un certo $!_0$, allora si annulla anche su tutti i ! "dello stesso ordine".

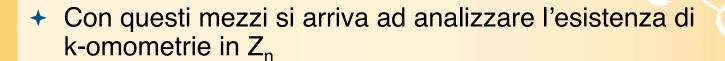
Il caso del k-deck (Cn)

- Idea: pensare a Z_n come gruppo delle radici n-esime dell'unità
- ♣ !₁ e !₂ sono "dello stesso ordine" se MCD(!₁,n)=MCD(!₂,n).



Fatto: sef si annulla su un certo $!_0$, allora si annulla anche su tutti i ! "dello stesso ordine".

Il caso del k-deck (Cn)



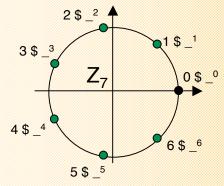
Se p è primo, non esistono set 3-omometrici in Z_p

(Radcliffe, Scott) (dim. di Jaming, Kolountzakis)

Se p è primo ci sono solo due classi:

e quindi solo due possibilità:

	<1>	<	
$ \hat{f}, \hat{g} \\ = 0? $	no	no	nessun problema, \hat{f}/\hat{g} è un carattere
	no	sì	$ olimits f=\mathbb{Z}_p$, caso banal
	$\hat{f}($	$0) = \sum_{i=1}^{n}$	$\int_{a} f_i \neq 0$



- <7> = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
- $<1> = \{0\}$

$$\zeta = e^{2\pi i/7}$$

Il caso del k-deck (Cn)

Non esistono set 3-omometrici in Z_{p^n} per p primo. (Radcliffe, Scott)

Non esistono set 3-omometrici in Z_{pq} per p, q primi. (Radcliffe, Scott)

Non esistono set 4-omometrici in Z_n per ogni n 2 N. (Rosenblatt)

- Se \hat{f} , $\hat{g} \neq 0$ su <1> = Z_n^* , allora \hat{f}/\hat{g} si può estendere a tutto Z_n^* .
- Altrimenti possiamo stilare una lista di <t $> = Z_t^*$ su cui $f, \hat{g} \neq 0$
- Mediante il Teorema Cinese del Resto si mostra che i caratteri definiti su ciascuno Z_t* si estendono a un carattere su tutto Z_n.
- Per far ciò abbiamo bisogno dell'ipotesi di 6-omometria tra f e g.
 Ma se f e g sono set, possiamo indebolire l'ipotesi a 4-omometria.

Il caso del k-Deck (D_{2n})

- È il caso più interessante musicalmente, (corrisponde agli M-vettori).
- Però è anche il problema più "difficile".
 Prese due sequenze n-periodiche f, g esse sono k-Omometriche se

$$D_f^k \equiv D_g^k$$

$$\Leftrightarrow d_f^k(x_1, \dots, x_{k-1}) + d_f^k(-x_1, \dots, -x_{k-1}) = d_f^k(x_1, \dots, x_{k-1}) + d_f^k(-x_1, \dots, -x_{k-1})$$

$$\Leftrightarrow \widehat{d_f^k} + \overline{\widehat{d_f^k}} \equiv \widehat{d_g^k} + \overline{\widehat{d_g^k}}$$

$$\Leftrightarrow \Re(\hat{f}(\omega_{1})\cdots\hat{f}(\omega_{k-1})\hat{f}(-\omega_{1}-\ldots-\omega_{k-1})) = \\ = \Re(\hat{g}(\omega_{1})\cdots\hat{g}(\omega_{k-1})\hat{g}(-\omega_{1}-\ldots-\omega_{k-1}))$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} f(\omega_1) \cdots \hat{f}(\omega_{k-1}) \hat{f}(-\omega_1 - \dots - \omega_{k-1}) = \hat{g}(\omega_1) \cdots \hat{g}(\omega_{k-1}) \hat{g}(-\omega_1 - \dots - \omega_{k-1}) & \textbf{(1)} \\ oppure \\ \hat{f}(\omega_1) \cdots \hat{f}(\omega_{k-1}) \hat{f}(-\omega_1 - \dots - \omega_{k-1}) = \hat{g}(-\omega_1) \cdots \hat{g}(-\omega_{k-1}) \hat{g}(\omega_1 + \dots + \omega_{k-1}) & \textbf{(2)} \end{bmatrix}$$

L'uguaglianza vale solo **tra le parti reali**. Questo complica le cose, poiché può darsi che le trasformate \hat{f} , \hat{g} verifichino la (1) per certi valori degli ! e la (2) per altri valori.

Il caso del k-Deck (D_{2n})



 $mv^4(A)=mv^4(B)=[4,7,7,3,2,1,3,4,3,5,6,7,7,7,8,8,4,4,7,6,1,5,3,3,4,4,7,5,7,8,7,10,9,8,10,8,$ 7,9,5,5,6,3,4,1,3,5,4,4,3,3,2,3,5,1,2,5,6,5,4,7,7,7,8,7,8,8,6,7,5,3,5,4,2,1,3,5,2,2,1,4,3,4, 0.2.6.4.5.5.7.8.6.7.7.6.6.6.5.4.3.4.4.0.2.2.0.3.3.1.2.0.2.2.3.3.2.6.4.3.6.3.4.6.2.3.3.1.2.0. 0,0,1,1,0,2,0,0,1,1,1,0,2,2,1,2,1,2,2,0,1,1,0,0,1,2,2,0,4,0,2,4,3,6,4,5,5,3,4,3,2,22,2,1,1,2 .4.3.4.1.3.4.4.5.3.6.5.3.6.3.2.4.1.1.3.6.3.5.3.5.4.4.3.4.4.3.4.2.1.1.3.4.3.5.1.4.6.3.4.2.4. 4,0,1,2,5,5,5,6,2,6,5,4,5,2,6,2,3,7,9,7,10,6,6,7,6,6,2,3,7,7,6,8,3,5,5,2,4,7,8,7,7,4,2,4,9,1 0,7,4,4,8,4,2,1,5,2,3,1,1,5,3,4,5,6,7,6,7,4,3,4,3,6,1,5,5,6,8,5,9,9,7,10,8,7,10,7,6,7,3,6,4, 1,5,3,4,0,1,1,1,0,1,2,3,2,1,4,3,2,4,2,3,4,1,2,1,1,1,0,1,0,1,4,1,5,0,1,5,3,5,4,6,8,5,5,6,5,4, 3,2,4,1,1,2,1,1,2,1,0,1,1,3,2,1,4,3,2,4,2,3,4,1,2,1,0,1,4,1,3,1,1,3,2,3,3,4,3,3,4,2,3,2,2,1, 2,4,3,6,1,4,6,4,6,4,5,6,3,4,4,2,2,1,4,3,3,1,3,3,2,3,1,4,3,1,4,1,2,7,4,7,4,5,8,6,5,5,6,5,2,3, 5,5,8,2,4,5,3,5,1,2,3,7,8,7,4,5,4,6,2,4,10,7,9,6,5,4,4,7,6,7,1,4,10,4,2,2,2,2,0,2,2,4,4,2,8, 6.4.4.2.1.4.1.0.5.3.3.4.5.5.4.4.5.5.3.4.4.4.1.1.5.0.2.4.6.1.5.6.5.8.5.7.8.5.8.7.4.7.6.4.4.1. 3.0.1.1.0.1.1.4.3.1.4.3.3.4.1.3.4.1.1.0.2.1.5.1.2.4.3.4.4.5.5.5.5.4.4.4.3.1.2.5.5.1.4.4.3.4.2. 5,5,1,4,4,1,5,6,6,4,4,6,4,4,4,6,4,4,3,4,5,8,3,5,8,5,6,5,5,3,2,4,5,1,4,3,3,5,0,4,7,9,8,5,7,5, 4,7,10,3,3,4,8,3,4,1,3,0,1,3,3,4,3,4,5,2,1,3,1,3,4,4,5,3,6,5,4,6,3,3,4,3,1,1,1,0,1,0,0,0,1,1 ,1,2,2,2,2,1,1,2,0,0,0,1,0,2,2,1,2,2,2,1,0,1,1,0,0,2,6,2,5,5,4,6,4,6,5,2,4,2,2,5,3,3,5,4,4,3, 4,3,1,2,5,2,3,4,3,3,1,1,2,5,2,3,4,4,2,3,7,4,5,2,3,6,2,1,3,1,4,6,4,6,5,6,4,0,0,0,0,1,1,0,2,2, 1,2,1,2,2,0,2,2,5,4,4,6,6,4,5,4,5,2,4,2,5,6,4,6,4,5,6,3,3,2,3,3,4,3,1,4,1,4,4,4,7,6,4,2, 3.1.4.3.1.3.6.2.2.0.0.0.0.0.0.0.0.1.2.1.2.2.2.1.1.1.0.0.2.1.1.2.0.2.1.0.2.1.3.4.1.1.0.0.3.4. 1,1,0 3,0,2,0,1 3,0,0,2,4,4,3 Esistono set \mathbb{Z}^4 -correlati (Ghisi 2008)

Gli indici di ricostruibilità



Con il linguaggio dell'omometria:

- → Il minimo k per cui in Z_n non esistono set k-omometrici, sarà detto l'indice di ricostruibilità di Z_n, e scriveremo r(n)=k.
- → Il minimo k per cui in Z_n non esistono set k-Omometrici sarà detto l'indice di Ricostruibilità di Z_n, e scriveremo R(n)=k.

Con il linguaggio della Z^M-correlazione:

→ Il minimo k per cui in Z_n non esistono set Z^k-correlati sarà detto l'indice di unicità di Z_n, e scriveremo U(n)=k.

$$U(n) = R(n)$$

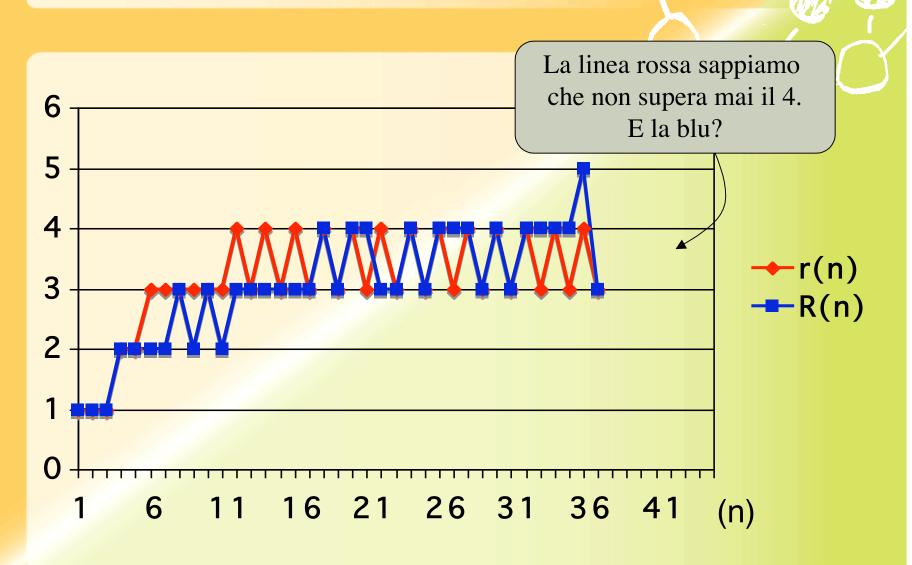
Gli indici di ricostruibilità

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
r (n)	1	1	1	2	3	3	3	3	3	3	3	4	3
R(n)	1	1	1	2	2	2	2	3	2	3	2	3	3

	n	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
r	(n)	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
R	(n)	3	3	3	3	4	3	4	4	3	3	4	3	4

n	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
r (n)	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3
R(n)	4	4	3	4	3	4	4	4	4	5	3	?	?

Gli indici di ricostruibilità



Omometria

Z-correlazione

Estensione agli ordini superiori

- ✓ Nasce dal tentativo di recuperare la fase, evitando di avere ambiguità di ricostruzione.
- ✓ Definizione di k-deck, fissato un isomorfismo
- ✓ Due set sono k-omometrici se hanno uguale k-deck.
- ✓ Due set A, B sono k-omometrici se e solo se lo sono C(A) e C(B).
- ✓ Lemma di Kelly sull'annidamento dei set omom.
- ✓ Indice di ricostruibilità

- ✓ Nasce dall'estensione del vettore intervallare, e dalla ricerca di set ancor più che Z-correlati
- ✓ Definizione di M-vettore, fissato l'isomorfismo dato da D_{2n}
- ✓ Due set sono Z^M-correlati se hanno uguale M-vettore
- ✓ A, B sono Z^M-correlati se e solo se lo sono C(A) e C(B)
- ✓ Lemma di Lewin sull'annidamento degli Z^M-set
- ✓ Indice di unicità (Collins)

Un sottoinsieme di un gruppo abeliano G è univocamente determinato dalla sua funzione di Patterson?

Un set di note in Z_n è univocamente determinato dal suo vettore intervallare?

In generale no: ogni "traslazione" e ogni "riflessione" ha uguale funzione di Patterson (set omometrici triviali)

In generale no: ogni trasposizione e inversione preserva il vettore intervallare (Z-set triviali)

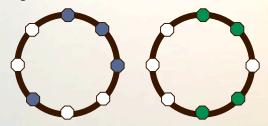
E a meno di traslazioni e inversioni?

E a meno di trasposizioni/inversioni?

Esistono set omometrici non triviali



Per n₃8 esistono Z-set non triviali



R o Z (turnpike) Se G=

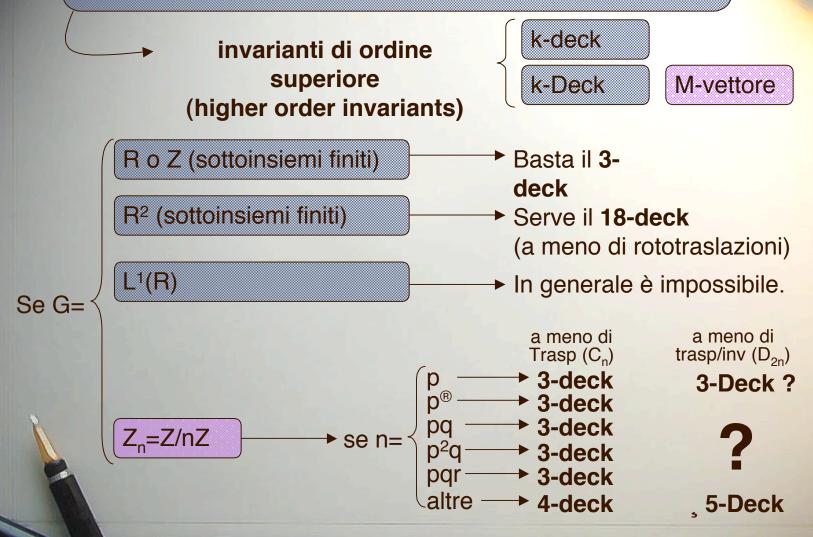
Rn o Zn (cristallografia)

 $Z_n = Z/nZ$ (beltway)

Caratterizzazione completa mediante fattorizzazione. Facile phase retrieval.

Caratterizzazione mediante unità spettrali, ma non è costruttiva! Difficile phase retrieval.

E se un sottoinsieme di un gruppo abeliano G non è determinato univocamente dalla sua funzione di Patterson, è determinato da qualcosa di più restrittivo?



Problemi aperti (beltway)

- → È vero che in Z_p, p primo, non esistono set Z³-correlati?

 Sembra di sì, ma non è immediato da verificare.
- ◆ Sappiamo che in Z₃₆ esistono set Z⁴-correlati. Esistono set Z^M-correlati per ogni M? Sembra verosimile che esista un limite.
 - → Nel caso C_n bastava il 4-deck a ricostruire
 - → Per il caso D_n probabilmente basterà il 6-Deck o il 7-Deck? Sicuramente non basta il 4-Deck.
- → È possibile rendere in qualche modo costruttiva la caratterizzazione dei set Z-correlati (cioè dell'omometria del beltway?)
 - → È possibile sapere se un set è ricostruibile?
 - Si possono determinare tutti i set a lui Z-correlati (omometrici)?



Grazie per l'attenzione

danieleghisi@gmail.com

