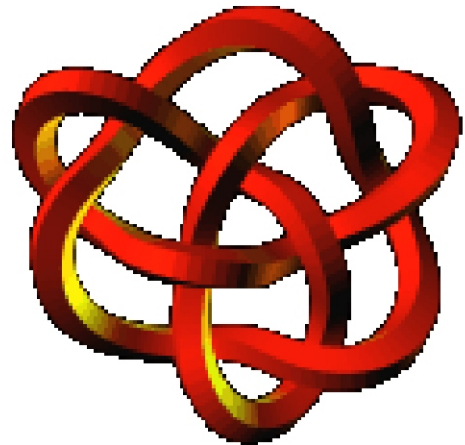
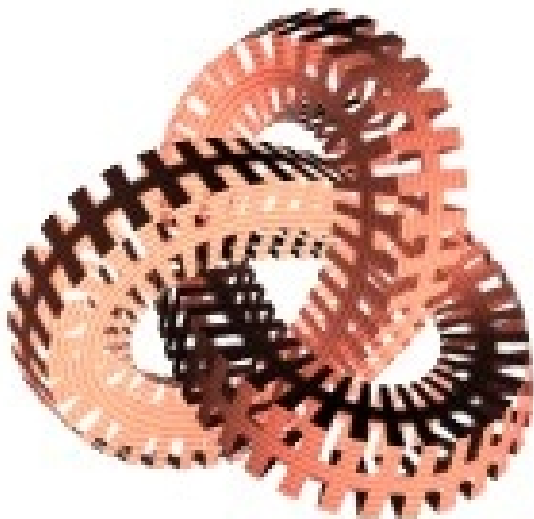


Franck Jedrzejewski

**Applications de la théorie des noeuds
au domaine musical**

- 1 - Présentation de la théorie des noeuds**
- 2 - Noeuds dodécaphoniques**
- 3 - Noeuds polychromes**
- 4 - Perspectives**



Franck Jedrzejewski
CEA Saclay INSTN
91191 GIF-SUR-YVETTE
FRANCE
Tél. 01 69 08 88 95
franck@arthaud.saclay.cea.fr



Historique



- 1848 J.B. Listing, élève de C.F. Gauss publie
Vorstudien zur Topologie
- 1877 P.G. Tait et C. Little publie la première
énumération de noeuds
- 1906 H. Tietze utilise le groupe fondamental dans la
preuve de la non-trivialité d'un noeud
- 1914 M. Dehn montre que le trèfle gauche et droit
sont deux noeuds différents
- 1928 J.W. Alexander associe un polynome
à chaque noeud
- 1932 K. Reidmeister publie Knotentheorie
- 1947 H. Schubert montre qu'un noeud se décompose
selon la somme connexe de deux noeuds premiers
- 1957 Lemme de Dehn (démontré par
C. Papakyriakopoulos)
- 1958 K. Murasagi montre que si on intervertit les
croisements d'un noeud, alors les coefficients
de son polynome d'Alexander alternent
- 1970 Le polynome de J.H. Conway vérifie les
relations de Skein
- 1984 Vaughan Jones introduit un nouvel invariant
- 1985 Polynome HOMFLY
- 1988 C.Mc.A Gordon et J. Luecke : les noeuds de
compléments équivalents sont équivalents
- 1989 Invariants de Vassiliev
- 1990 Vaughan Jones reçoit la médaille Fields
- 1998 Maxime Kontsevitch reçoit la médaille Fields

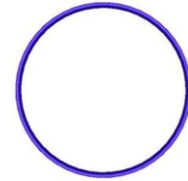
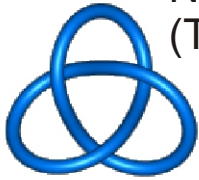


Noeuds, Entrelacs, Tresses



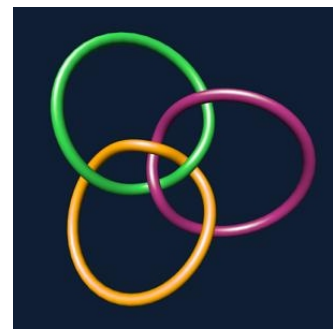
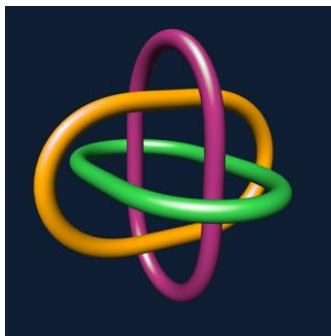
Noeud (Knot) = Une courbe simple polygonale fermée de R^3

Noeud de trèfle
(Trefoil knot)



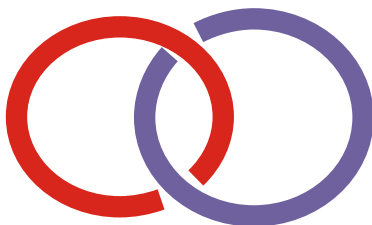
Noeud trivial (Unknot)

Entrelacs (Links) = Deux noeuds (ou plus) entrelacés

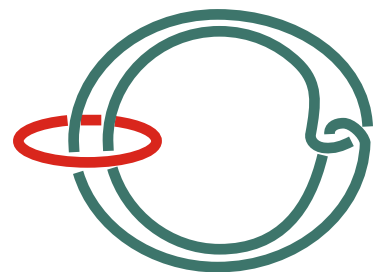


Noeuds boroméens

San Sigismondo
Cremona



Hopf link



Whitehead link

Tresses (Braids) et écheveaux (tangles)

= une tresse à n brins ($\rightarrow$ entrelacs)





Noeuds équivalents



Problème : déterminer si deux noeuds sont équivalents ?

Noeuds de trèfle



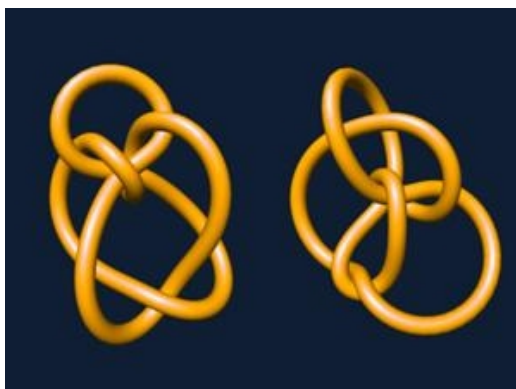
$$-1/t^4 + 1/t^3 + 1/t$$



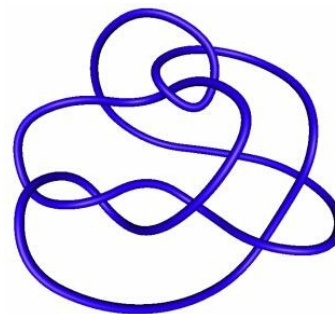
$$t + t^3 - t^4$$

Polynômes de Jones

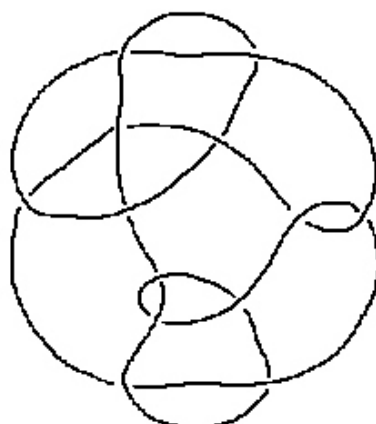
Paire de Perko



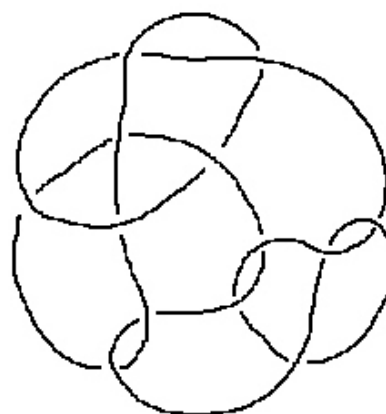
Noeud de Millett



Noeud de Kinoshita Terasaka



Kinoshita-Terasaka Knot



Conway Knot

Noeuds mutants
Plus petits noeuds ayant un
polynôme d'Alexander = 1



Noeuds particuliers



Noeud du tore (Torus knots)

(p,q) p = nb de points d'intersection avec la longitude
 q = nb de points d'intersection avec un méridien

Exemples : Noeud de trèfle = (2,3) ou (2,-3)

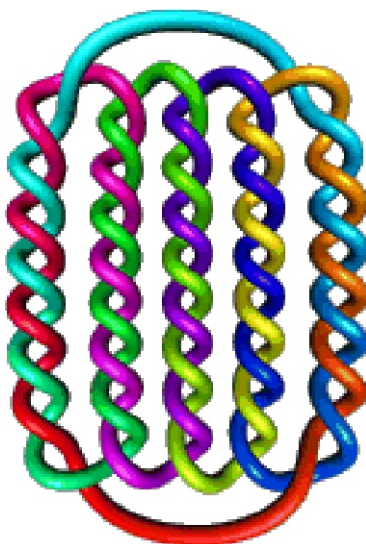


(4,3)-torus - Noeud non-alterné 8_19

$$\Delta(t) = t^6 - t^5 + t^3 - t + 1 \quad \Delta(t) = (1 - (t^{-2} + t^2) + (t^{-3} + t^3)) t^3$$

Polynome d'Alexander du (p,q)-torus
$$\Delta_K(t) = \frac{(1 - t^{|pq|})(1 - t)}{(1 - t^{|p|})(1 - t^{|q|})}$$

Pretzel Knots



$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots + \frac{1}{a_n}}}$$

Deux noeuds (2-bridge) sont équivalents
 ssi $p=p'$ et $p \mid q-q'$

$P(a_1, \dots, a_n)$ avec $a_j = \text{nb de croisements de chaque tresse}$

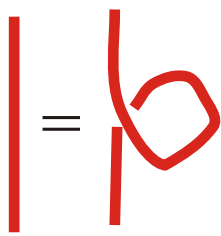


Caractérisations de noeuds

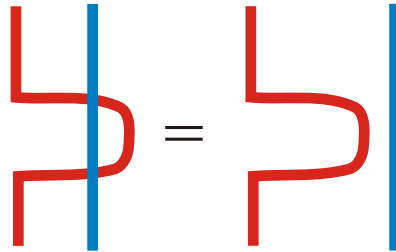


Mouvements de Reidmeister

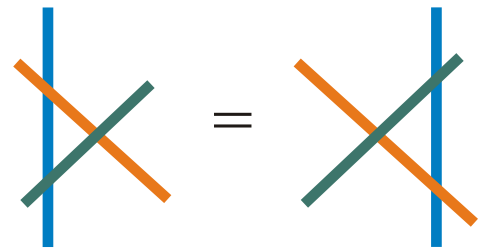
Deux entrelacs sont équivalents si leurs diagrammes se déduisent l'un de l'autre par une suite de mouvements de Reidmeister



Type I

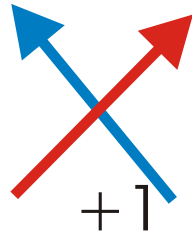
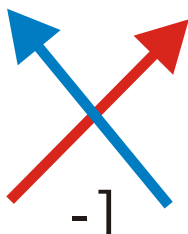


Type II



Type III

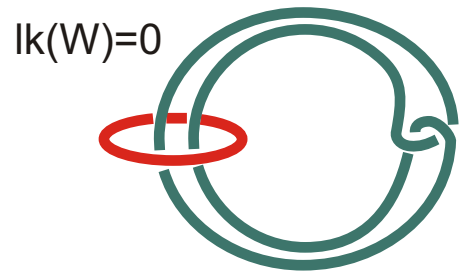
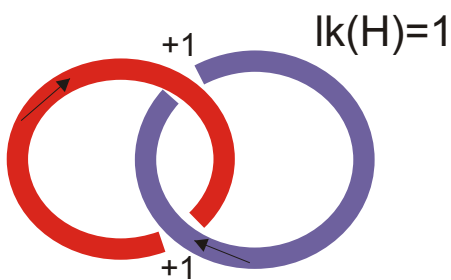
Indice d'entrelacement (Linking number)



K = entrelacs K_i = composantes de K

$$lk(K) = \frac{1}{2} \sum_i lk(K_i)$$

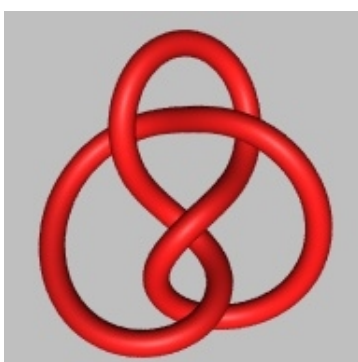
Les mouvements de Reidmeister II et III ne changent pas l'indice d'entrelacement



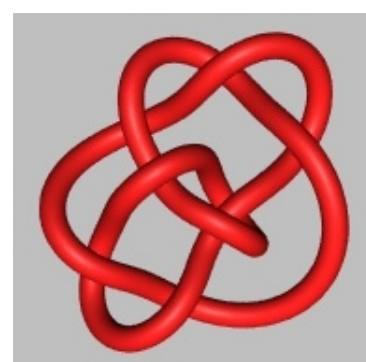
Indice de déseilacement (unknotting number)

Nombre minimal de changement qu'il faut faire (de dessus à dessous ou vice versa) pour que le noeud soit équivalent au noeud trivial.

$$U(4_1) = 1$$



$$U(8_10) = 1 \text{ ou } 2 ?$$





Noeuds premiers

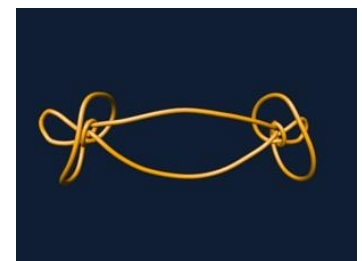
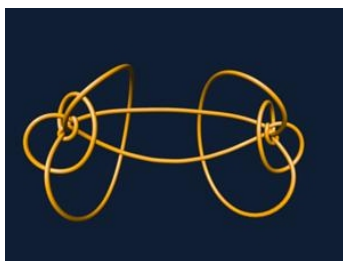


Somme de deux noeuds



Un noeud K est premier si K n'est pas le noeud trivial et si $K=K_1+K_2$ alors K_1 ou K_2 est le noeud trivial

Noeuds composés



Dénombrement des noeuds premiers

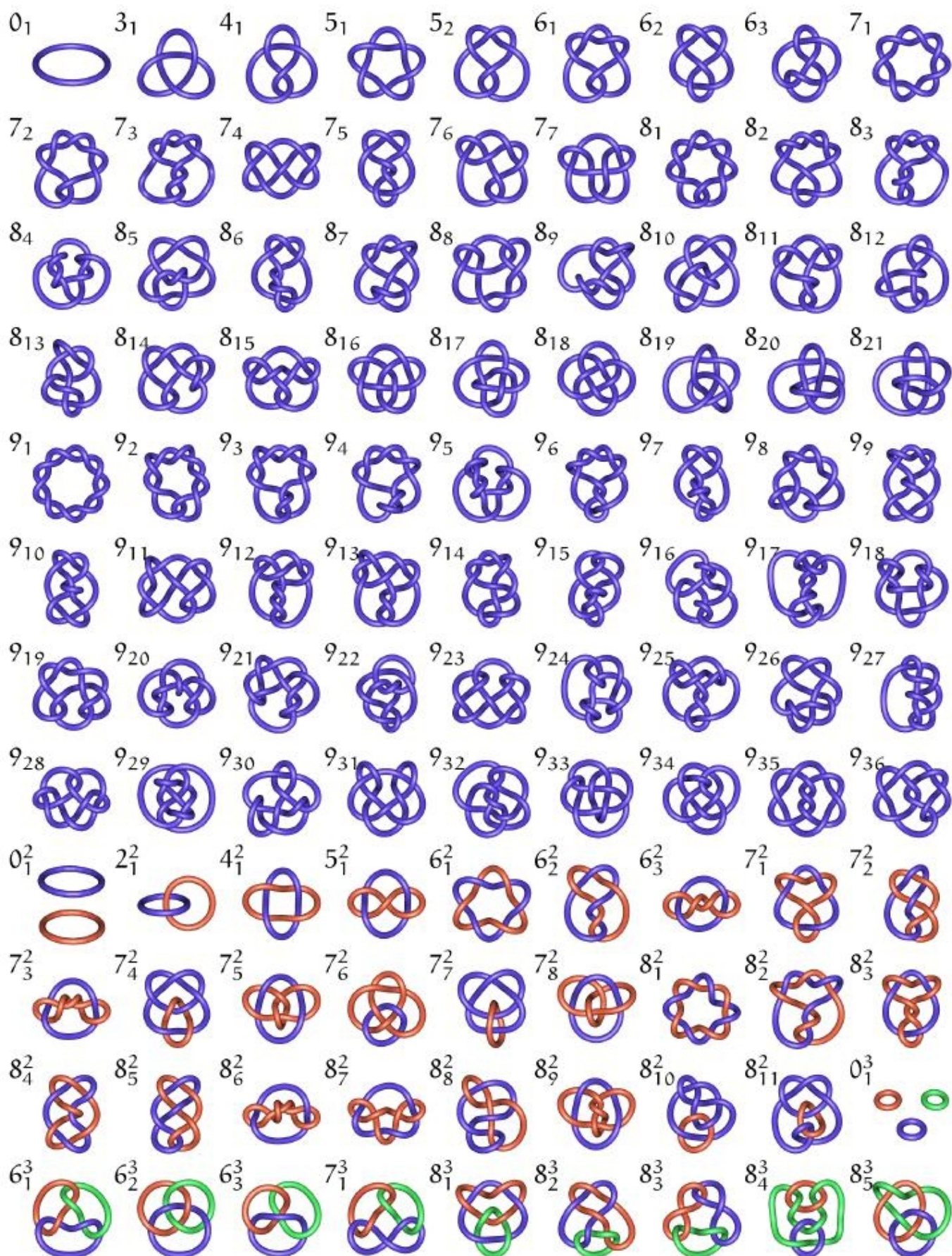
Nombre de noeuds en fonction du nombre de croisements déterminé par P.G. Tait et C.N. Little puis par J. Hoste Morven Thistlethwaite et J. Weeks

3	1
4	1
5	2
6	3
7	7
8	21
9	49

10	165
11	552
12	2176
13	9988
14	46972
15	253293
16	?



Table des noeuds premiers





Polynomes des noeuds



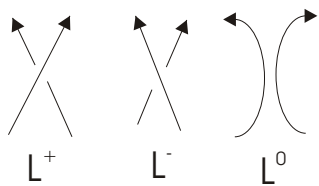
Polynôme d'Alexander

défini à un multiple près $\pm t^i$

Normalisation de Conway $\Delta_K(1) = 1$

$$\Delta_K(t) = \Delta_K(t^{-1})$$

$$\Delta_K(t) = a_0 + a_1(t^{-1} + t) + a_2(t^{-2} + t^2) + \dots \quad a_j \in \mathbb{Z}$$



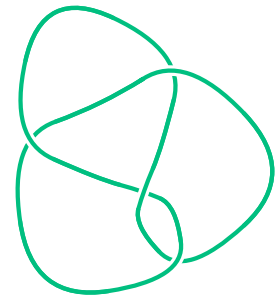
$$\Delta_{4_1}(t) = 3 - (t^{-1} + t)$$

Polynôme de Jones

$$V_O(t) = 1$$

$$t^{-1}V_{L+}(t) - tV_{L-}(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{L_0}(t)$$

$$V_{4_1}(t) = t^{-2} + t^{-1} + 1 - t + t^2$$



Polynôme HOMFLY

Hoste, Ocneanu, Millett, Freyd, Lickorish, Yetter

$$q^{N/2}P(\searrow \swarrow) - q^{-N/2}P(\swarrow \searrow) = (q^{1/2} - q^{-1/2})P(\bigcap) \bigcup$$

Noeud 4_1 :

$$P(v, z) = -(v^{-2} + 1 + v^2) + z^2$$

Alexander

$$\Delta_K(t) = P(i, i(t^{1/2} - t^{-1/2}))$$

Jones

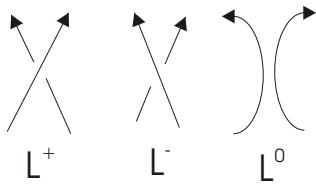
$$V_K(t) = P(it^{-1}, i(t^{-1/2} - t^{1/2}))$$

Polynôme de Kauffman

$$F_{4_1}(a, z) = -(a^{-2} + 1 + a^2) - (a^{-1} + a).z + (a^{-2} + 2 + a^2).z^2 + (a^{-1} + a).z^3$$



Calcul de polynômes



Crochet de Kauffman

$$\begin{aligned} \langle \bigcirc \rangle &= 1 \\ \langle \text{crossing} \rangle &= A \cdot \langle \text{smooth} \rangle + A^{-1} \langle \text{smooth} \rangle \\ \langle \text{crossing} \rangle &= A \cdot \langle \text{smooth} \rangle + A^{-1} \langle \text{smooth} \rangle \\ \langle D \cup O \rangle &= (-A^{-2} - A^2) \langle D \rangle \end{aligned}$$

Exemples

$$\begin{aligned} \langle 2_1^2 \rangle &= -(A^4 + A^{-4}) \\ \langle 3_1 \rangle &= -A^5 - A^3 + A^{-7} \\ \langle 4_1 \rangle &= A^8 - A^4 + 1 - A^{-4} + A^{-8} \end{aligned}$$

Polynôme de Jones

$$V_O(t) = 1$$

$$t^{-1}V_{L+}(t) - tV_{L-}(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{L_0}(t)$$

$$w(K) = \sum_{i=1}^{c(K)} lk(K, i)$$

$$L(K) = (-A^3)^{-w(K)} \langle K \rangle$$

$$V_K(t) = L(K)(t^{-1/4})$$

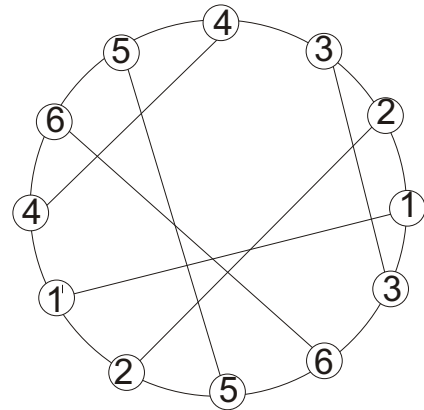
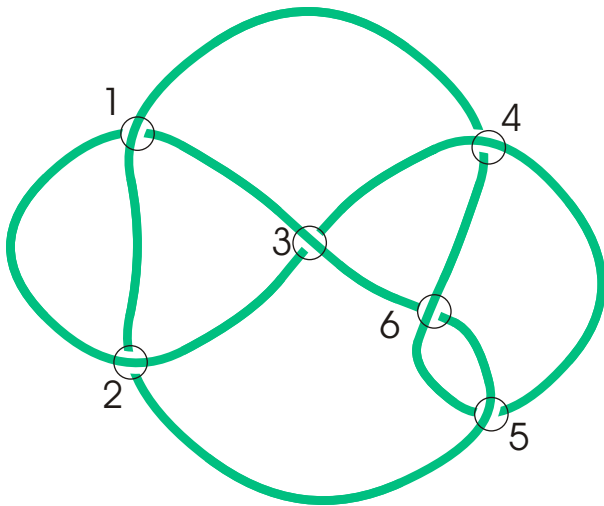
Pour le noeud 4_1 , comme $w(K)=0$, en substituant A par $t^{1/4}$, on retrouve l'expression de Jones



Diagrammes de cordes



Construire un diagramme de cordes (à n segments)
à partir d'un noeud ayant n points doubles

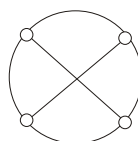
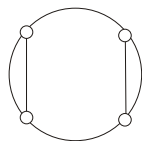


1 2 3 4 5 6 4 1 2 5 6 3

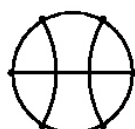
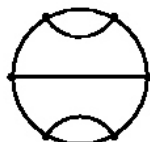
Un diagramme de cordes d'ordre n est un cercle
sur lequel on a placé n couples de points reliés
par des cordes

L'ensemble des diagrammes de cordes forment
une algèbre

D2 :



D3 :





Dénombrement



Si on fait agir le groupe cyclique C_{2n} sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, 2n\}$ on a

$$c_n = \frac{1}{2n} \sum_{i|2n} \varphi(i) \nu_n(i),$$

where $\varphi(i)$ is the Euler function and

$$\nu_n(i) = \begin{cases} i^{n/i} (2n/i - 1)!! & i \text{ odd}, \\ \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor} \binom{2n/i}{2k} i^k (2k - 1)!! & i \text{ even} \end{cases}$$

for $i \mid 2n$.

Si on fait agir le groupe diédral D_{2n} sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, 2n\}$ on a

$$d_n = \frac{1}{2} (c_n + \frac{1}{2} (\kappa_{n-1} + \kappa_n))$$

$$\kappa_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!}{k! (n - 2k)!}.$$

Bilan du dénombrement

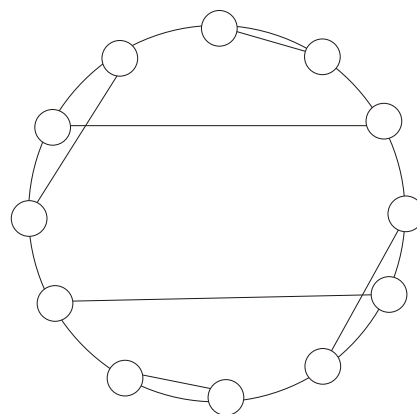
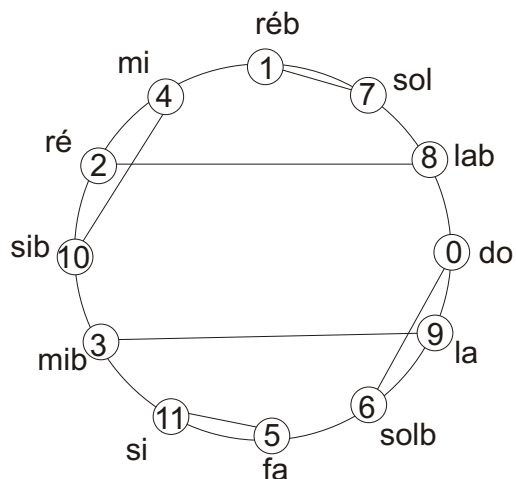
n	c_n	d_n	
3	5	5	
4	18	17	
5	105	79	10-tet
6	902	554	
7	9749	5283	14-tet
8	127072	65346	
9	1915951	966156	1/3 de ton
10	32743182	16411700	
11	625002933	312702217	



Noeuds dodécaphoniques



Jean Barraqué : Au-delà du hasard

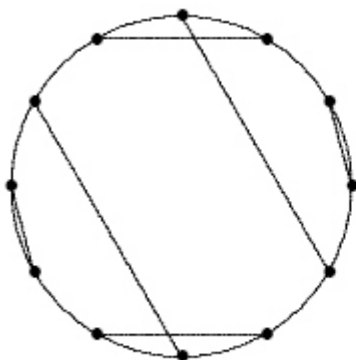
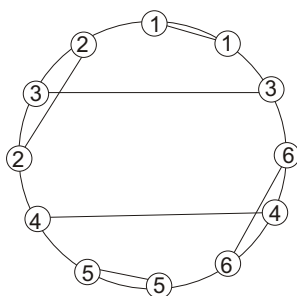


D₁₁₁

Série de base : do, lab, sol, réb, mi, ré, sib, mib, si, fa, solb, la

Renversement : do, mi, fa, si, lab, sib, ré, la, réb, sol, solb, mib

Mots de Gauss



D_{111} $X = abd^{-1}dab$

Mot de Gauss 112324556463

Vecteur de structure 220200

Permutation

(0 1) (2 4) (3 11) (5 9) (6 7) (8 10)

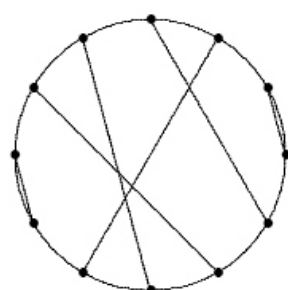


Classification des noeuds



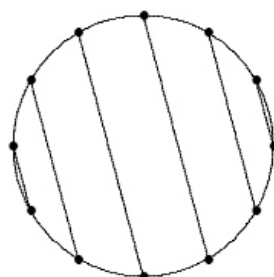
D_1 $X = a^6$
 Mot de Gauss 112233445566
 Vecteur de structure 600000
 Permutation
 (0 1) (2 3) (4 5) (6 7) (8 9) (10 11)

B.A. Zimmermann, Die Soldaten Acte I, intro (Acte III, sc. 5)



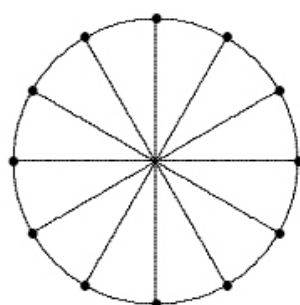
D_{349} $X = afd^{-1}e^2a$
 Mot de Gauss 112345662453
 Vecteur de structure 200121
 Permutation
 (0 1) (2 8) (3 11) (4 9) (5 10) (6 7)

Karel Goeyvaerts, Sonate pour deux pianos



D_{358} $X = ac^{-1}e^{-1}eca$
 Mot de Gauss 112345665432
 Vecteur de structure 202020
 Permutation
 (0 1) (2 11) (3 10) (4 9) (5 8) (6 7)

A. Webern, Symphonie de Chambre op. 21
 K. Stockhausen, Klavierstück IX



D_{554} $X = f^6$
 Mot de Gauss 123456123456
 Vecteur de structure 000006
 Permutation
 (0 6) (1 7) (2 8) (3 9) (4 10) (5 11)

B.A. Zimmermann, Interludes



Séries homogènes



Une série est homogène si elle formée des 11 intervalles distincts

Exemples

A. Berg Suite lyrique (D_358)

5, 4, 0, 9, 7, 2, 8, 1, 3, 6, 10, 11

Luigi Nono, Canto Sospeso (D_358)

9, 10, 8, 11, 7, 0, 6, 1, 5, 2, 4, 3

E. Krenek, Studies in Counterpoint (D_138)

3, 6, 1, 7, 0, 2, 11, 10, 8, 4, 5, 9

Milton Babbitt, Three Compositions pour piano (D_353)

10, 3, 5, 2, 0, 1, 7, 11, 6, 9, 8, 4

Remarques

Le diagramme de cordes a 2 (et 2 seulement) segment de type a

La première et la dernière note forment un triton

Tous les types de segments ne sont pas forcément représentés

e.g; D_14 X= a2bc2b il manque d, e, f

Herbert Eimert, Grundlagen der musikalischen Reihentechnik, UE, 1964.

André Riotte, Programme Fortran, 1969.

Dénombrement

Le dénombrement des séries a été fait par H. Eimert en 1964.

Il y a 1928 séries homogènes

Sur 554 diagrammes de cordes , les séries homogènes appartiennent à 63 diagrammes (11 %)

Nb de noeuds	Nb de séries associées
7	8
21	16
1 (D_252)	24
16	32
3	40
9	48
1 (D_50)	56
2	64
1 (D_20)	80
1 (D_358)	88
1 (D_131)	96
Total = 63	Total (1 x 2) = 1928



Classification de Costère Parzysz



Bernard Parzysz

Edmond Costère

Soit T l'ensemble des séries transposables

= Séries à transpositions directes limitées

$$s \in T \Leftrightarrow \exists i \quad \tau_i(A) = B$$

Soit R l'ensemble des séries renversables

= Séries à renversements directs limités

$$s \in R \Leftrightarrow \exists i \quad \tau_i(-A) = B$$

Soit T' l'ensemble des séries semi-transposables

= Séries à transpositions récurrentes limitées

$$s \in T' \Leftrightarrow \exists i \neq 0, \quad \tau_i(A) = A$$

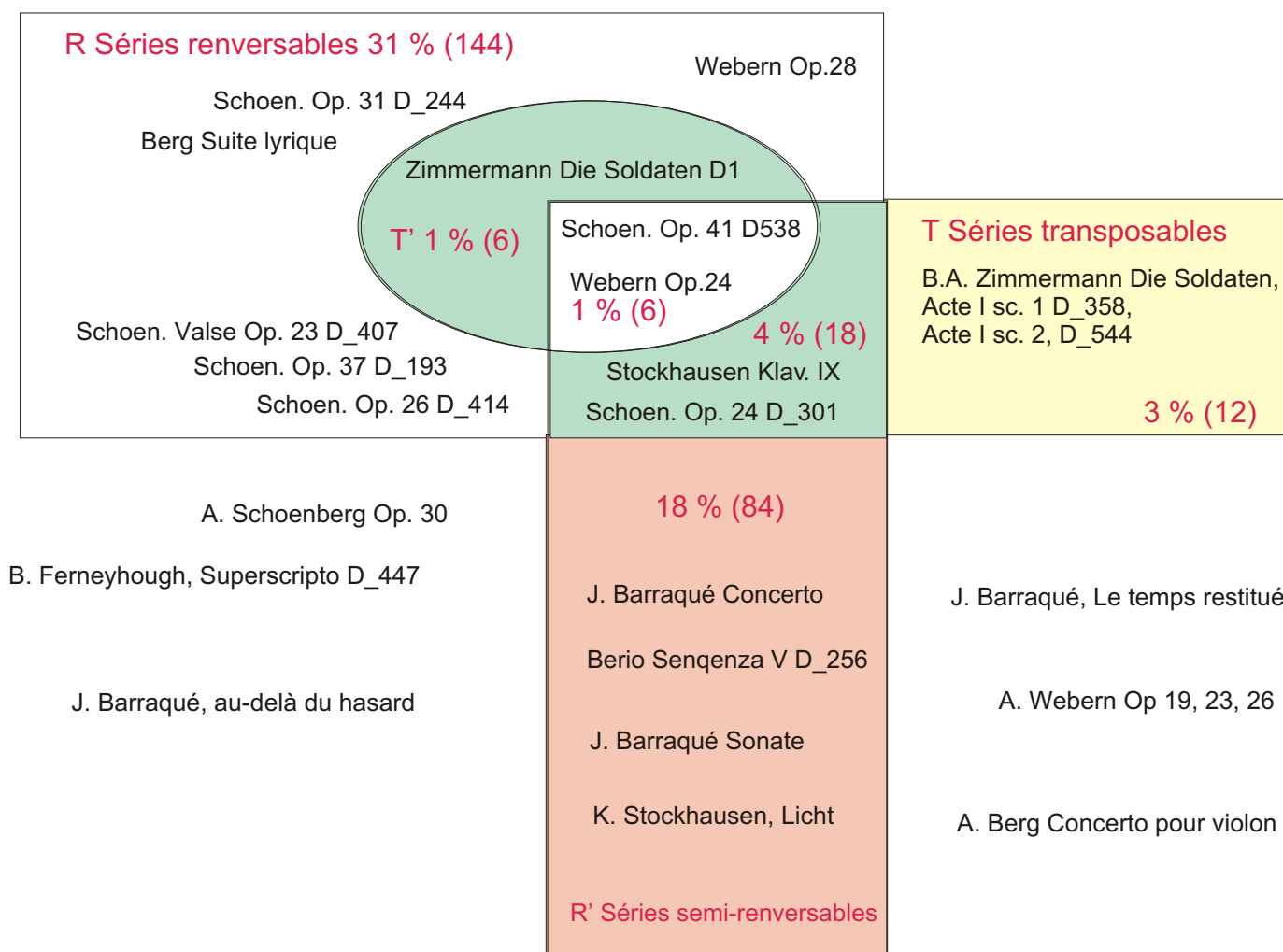
Soit R' l'ensemble des séries semi-renversables

= Séries à renversements récurrents limités

$$s \in R' \Leftrightarrow \exists i \neq 0, \quad \tau_i(-A) = A$$

Choix de A : Nb de combinaisons de 5 parmi 11 = 462

#T=36 #T'=12 #R=174 #R'=108 #Autres=192





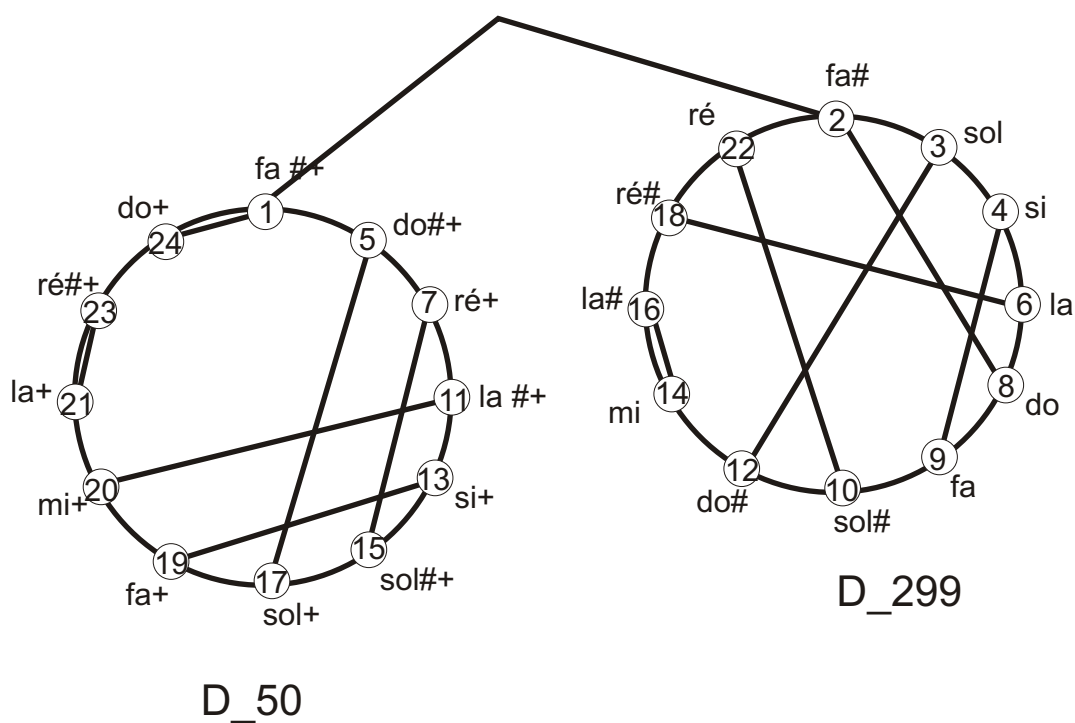
Univers micro-tonals



Univers des quarts de ton

Jean Etienne Marie, Ecce Ancilla Domini

fa #+, fa #, sol, si, do #+, la, ré +, do, fa, sol#, la #+, do #
si +, mi, sol #+, la #, sol +, ré #, fa +, mi +, la +, ré, ré #+, do +





Tresses et Tempéraments

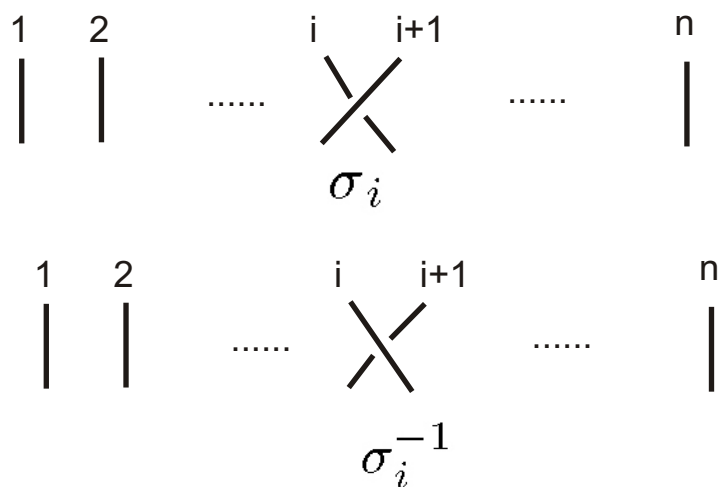


Groupe des tresses de Artin

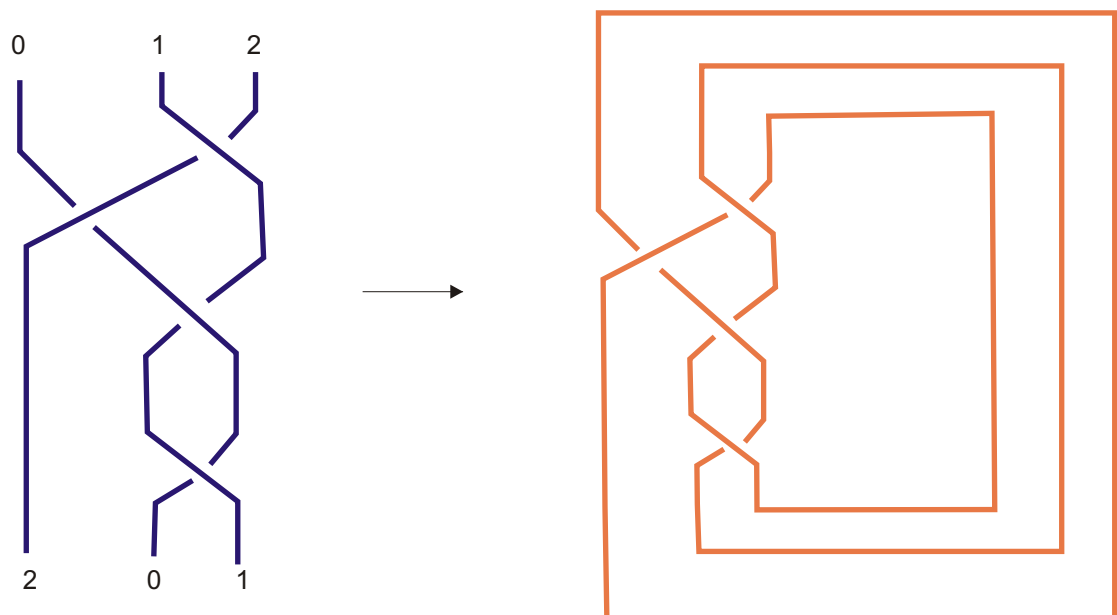
$$B_n = \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n; \text{relations} \rangle$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad |i - j| \geq 2$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad i = 1, 2, \dots, n-2$$



Un entrelacs L a plusieurs représentations en tresses



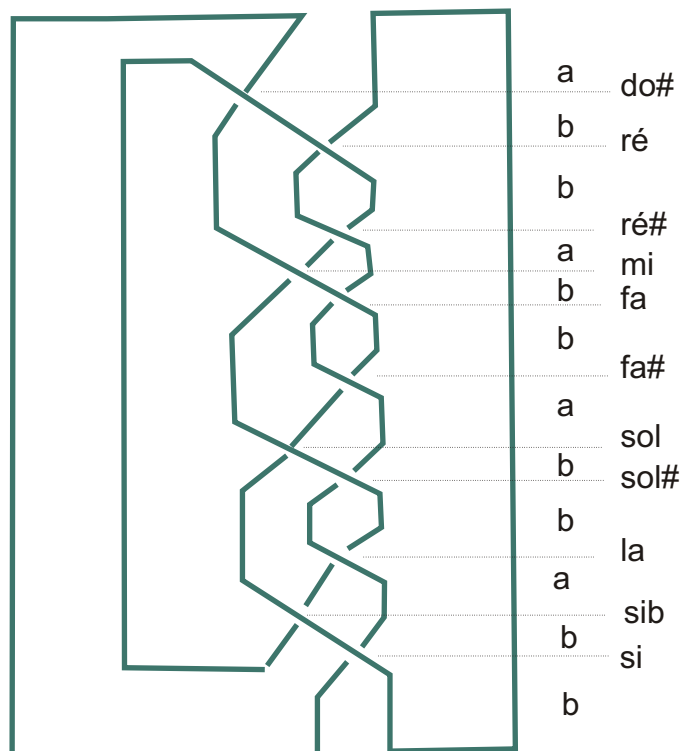
Fermeture de la tresse



Tresses et Tempéraments



Tempérament de Marpurg H



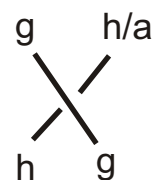
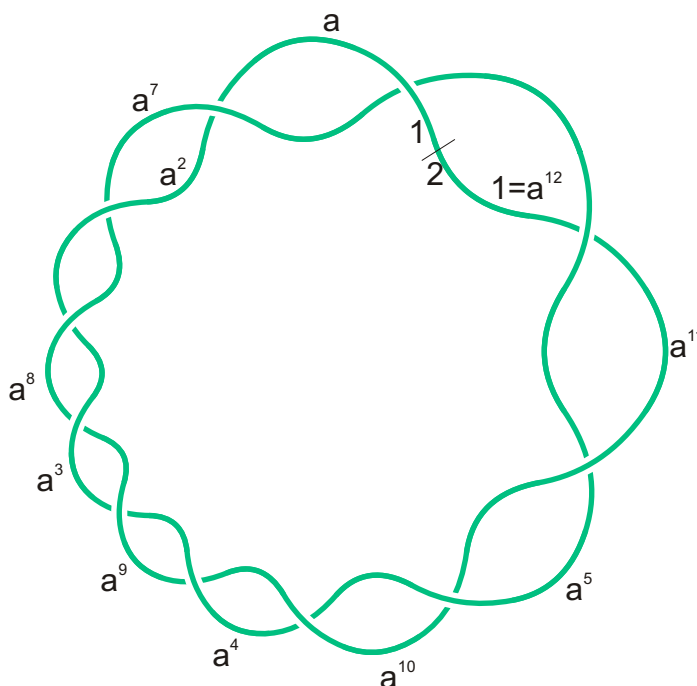
$$X = (ab^2)^4$$

$$a = \frac{8}{9}2^{1/4} = 96 \text{ cents}$$

$$b = \frac{3}{4}\sqrt{2} = 102 \text{ cents}$$

$$\sigma_1\sigma_2\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_2$$

Système tempéré





Noeuds polychromes

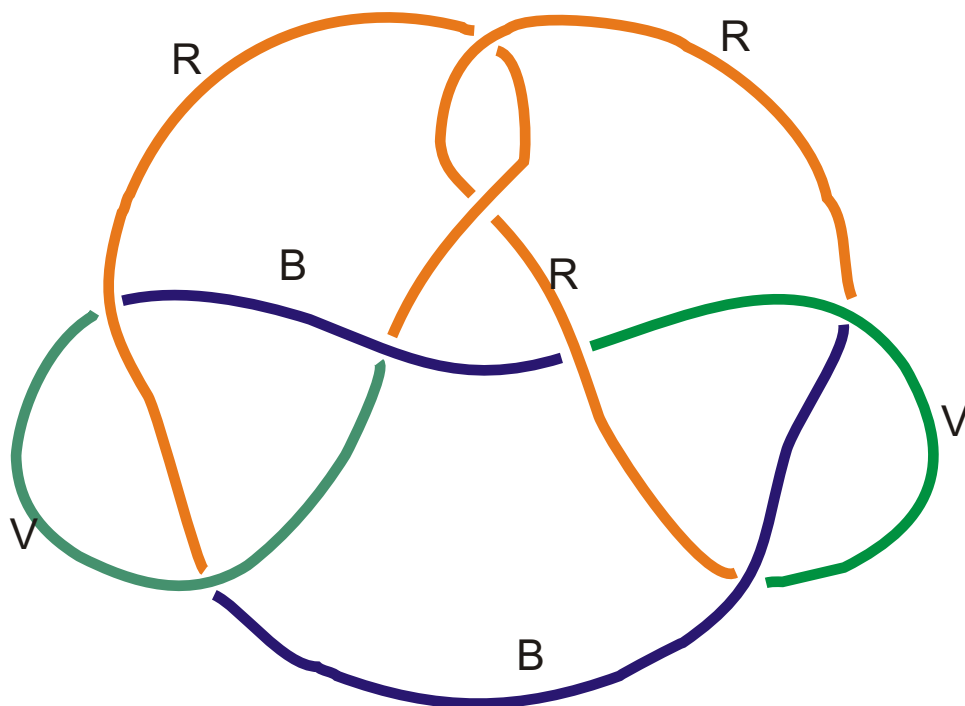


Coloration de noeuds

Un noeud est polychrome si on peut colorier un diagramme par une des trois couleurs RVB tel que

- (1) on utilise au moins deux couleurs
- (2) A chaque intersection pour laquelle deux couleurs apparaissent, la troisième apparaît.

Le noeud trivial n'est pas polychrome.





Groupe d'un noeud



Soit L un entrelacs

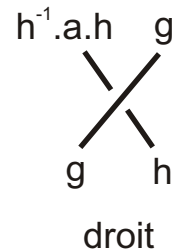
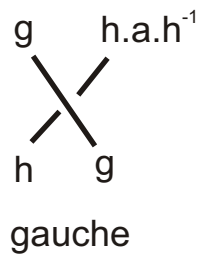
$$L : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (\text{ou } S^3)$$

Le groupe de L , G_L est le groupe fondamental de la variété complémentaire

$$\begin{aligned} G_L &= \pi_1(S^3 \setminus L) \\ &= \langle g_1, g_2, \dots, g_n; r_1, r_2, \dots, r_n \rangle \end{aligned}$$

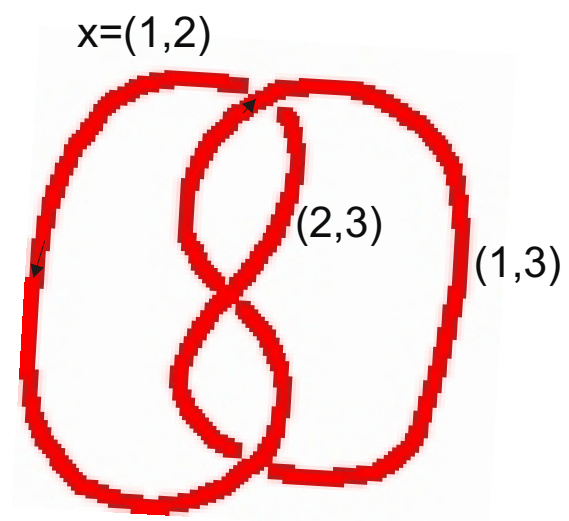
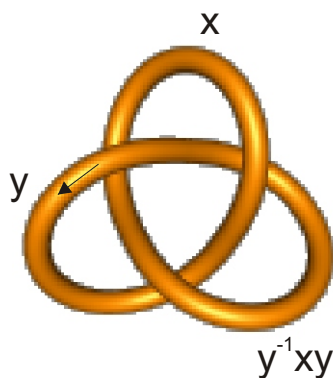
G_L est le quotient du groupe libre de générateurs $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ par le plus petit sous-groupe normal contenant les relations $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$

Présentation de Wirtinger



Exemple

$$G = \langle x, y; y^{-1}x^{-1}y^{-1}xyx \rangle$$



$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & & \\ 3 & 2 & 1 \\ \downarrow & & \\ 2 & 3 & 1 \\ \downarrow & & \\ 2 & 1 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} (1,3)^{-1} \\ (2,3) \\ (1,3) \end{array}$$

$$x = (1,3)^{-1}(2,3)(1,3)$$



Dérivée de Fox



La dérivée de Fox est définie par

$$\frac{\partial(x)}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial(y)}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial(1)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x} = \frac{\partial(u)}{\partial x} + u \cdot \frac{\partial(v)}{\partial x}$$

Pour le noeud de trèfle 3_1

$$r = y^{-1}x^{-1}y^{-1}xyx$$

et

$$\frac{\partial(r)}{\partial x} = y - yxyx^{-1} - yxyx^{-1}y^{-1}x^{-1}$$

Par abélianisation $x = y = t$

$$\frac{\partial(r)}{\partial x} = t - t^2 - 1$$

-- > on retrouve le polynôme d'Alexander



Tempérament mésotonique



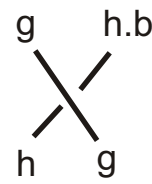
Tempérament mésotonique au nième de comma

$$C_s = \frac{1 \text{ tierce pythagoricienne}}{1 \text{ tierce naturelle}} = \frac{3^4}{2^{4.5}} = \frac{81}{80} = \alpha$$

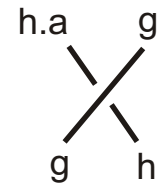
On diminue d'une fraction n toutes les quintes $-nC_s$
La quinte portant sol# emporte la différence

$$X = (abbab)ab(abbab)$$

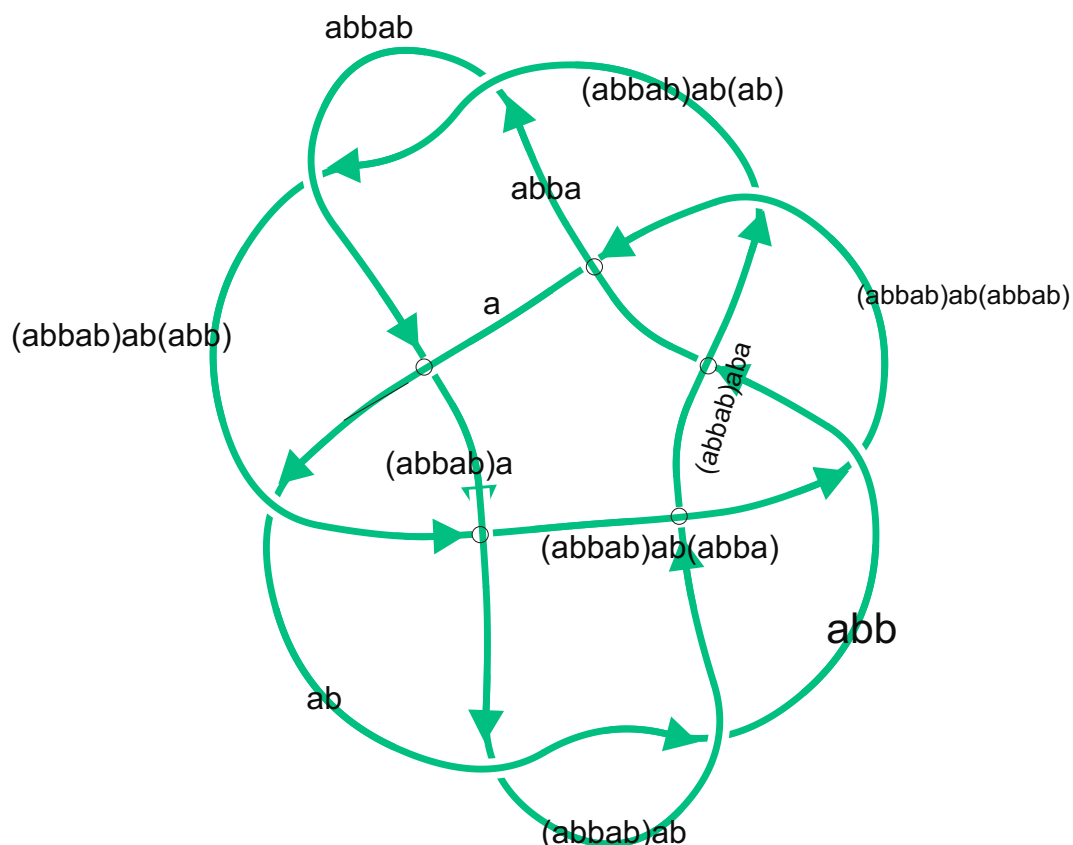
$$a = \frac{3^7}{2^{11}} \alpha^{-7n} \quad b = \frac{2^8}{3^5} \alpha^{5n}$$



gauche



droit



Tempérament anacratique de Romieu ($n=3/17$)

$$\frac{\Delta Q_M}{\Delta T_M} = \frac{nC_s}{(4n-1)C_s} = \frac{-3}{5}$$

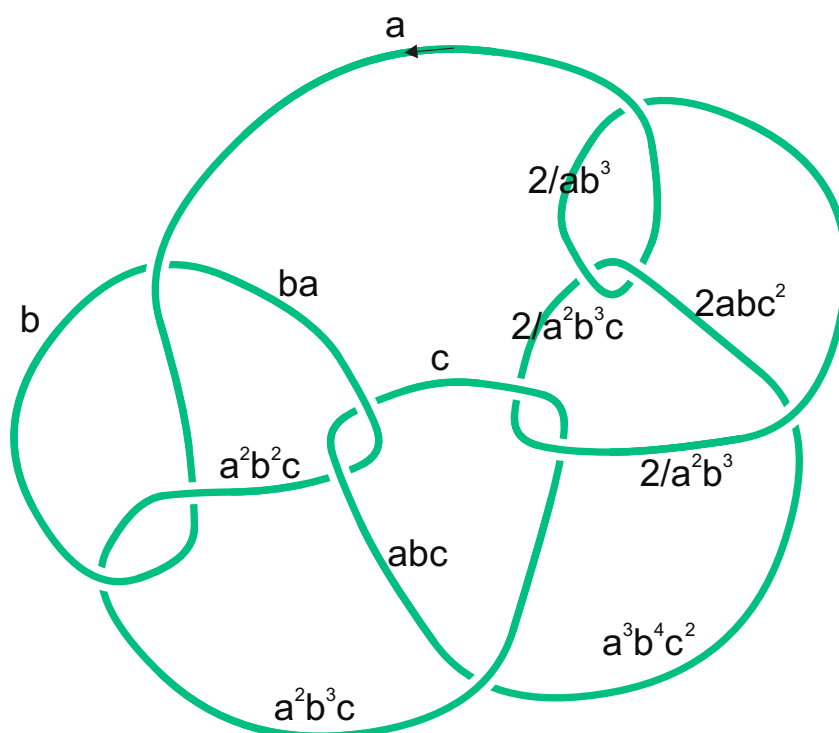
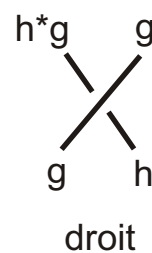
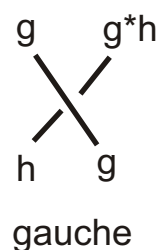


Construction de tempéraments

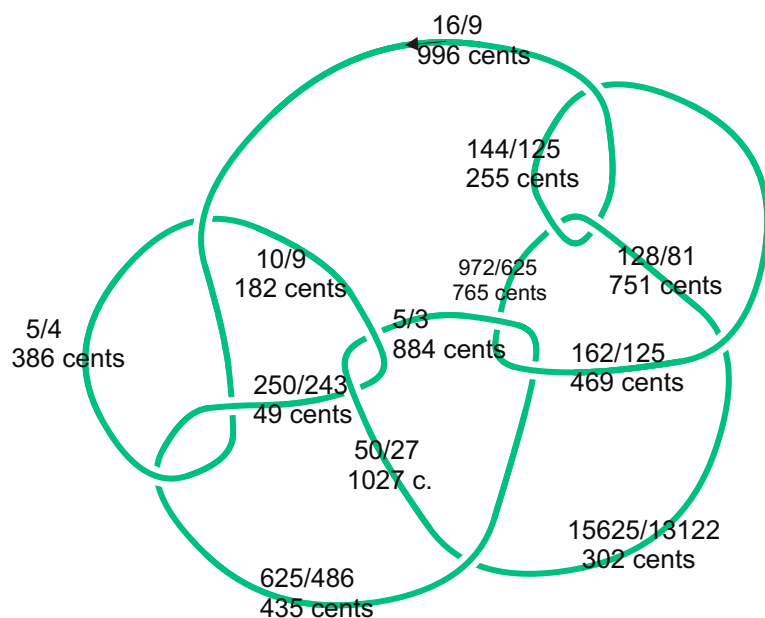


Pour le noeud non alterné 12_1

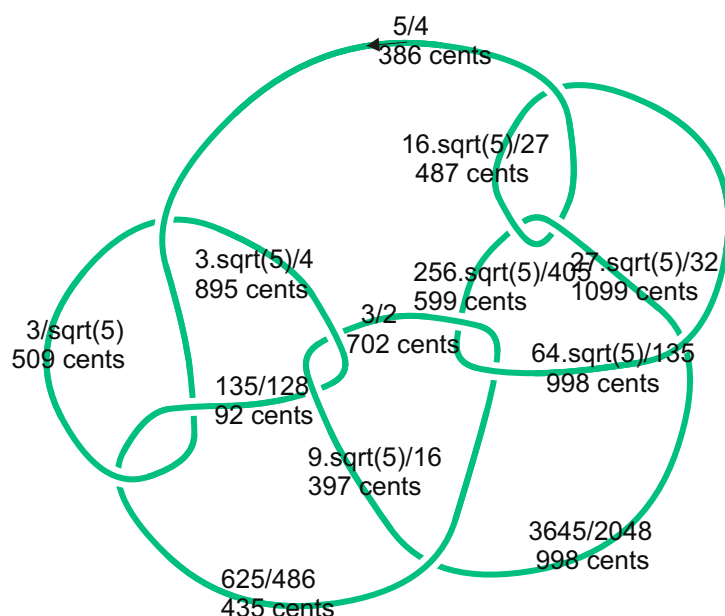
On doit avoir $4c^2 = ab^2$



Pour $a=16/9$, $b=5/4$, $c=5/3$



Pour $a=5/4$, $b=3/\sqrt{5}$, $c=3/2$





Perspectives et conclusions



1 - Il existe des structures musicales en relation avec la théorie des noeuds qui ont une topologie compliquée, qui ne peuvent être catégorisées simplement à cause de leur combinatoire (élevée).



2 - Les séries dodécaphoniques se classent en 554 diagrammes de cordes. Les séries homogènes représentent 63 diagrammes.

3 - Les tempéraments se modélisent par des tresses. On peut aussi associer des rythmes et des motifs à des noeuds selon d'autres lois de croisement.

4 - Les invariants des noeuds se transposent au domaine musical, mais leur interprétation est difficile. Ils permettent de construire de nouvelles catégorisations musicales et peut-être d'établir des liens avec des catégories esthétiques.

