Outils diophantiens pour la définition
d'une topologie harmonique

Yves HELLEGOUARCH
(Université de Caen)

---

1. Introduction. Remarques sur les propriétés "musicales" de $\mathbb{Q}_+^*$.

2. Accords arpégés considérés comme points projectifs. Puissance $n^{\text{ième}}$ d'un accord dans une échelle "usuelle".

3. Résumé de la théorie de la hauteur dans $\mathbb{P}_r(\mathbb{A})$ où $\mathbb{A}$ est la fermeture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

4. Algorithme pour calculer la hauteur logarithmique d'un accord dans une échelle "usuelle".

5. Comparaison de deux candidats à la définition de la dissonance abstraite d'un accord.

1 Introduction.

Jusque vers 1750 la musique était considérée comme l'art de l'harmonie (modèles mathématiques). Le Romantisme la transforme en art des sons. Depuis 1950 : art des bruits ou art de la combinatoire ? Nous reprenons la première conception : elle existe et elle est structurante, c'est déjà ça ! Fréquence d'un son : grandeur mesurable si l'on fixe une unité (hertz, "la" 440). Le rapport de deux fréquences est un **invariant** (par rapport aux choix d'une unité). Intervalle = couple de deux fréquences au choix près de l'unité = point projectif de $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$:

$$(f_1, f_2) = (\lambda f_1, \lambda f_2), \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R}^* = \left(1, \frac{f_2}{f_1}\right).$$

Exemples : $(2,3) = \left(1, \frac{3}{2}\right)$ = quinte ascendante pure

$(3,2) = \left(1, \frac{2}{3}\right)$ = quinte descendante pure

$(2^{1/12}, 2^{2/3}) = (1, 2^{7/12})$ = quinte ascendante tempérée officielle.

2 Remarques sur les propriétés musicales de $\mathbb{Q}_+^*$.

On peut considérer que $\mathbb{Q}$ est plongé dans $\mathbb{R}$: mais les points de $\mathbb{Q}$ sont très rares dans $\mathbb{R}$, les **rationnels sont donc très précieux.** Le groupe qui me plait le plus est $\mathbb{Q}_+^* \subset \mathbb{R}_+^*$, c'est le groupe des intervalles naturels. Depuis Pythagore on sait que $2^{7/12} \notin \mathbb{Q}$, mais Werckmeister a mis $2^{7/12}$ à la mode. $x = 2^{7/12}$ est un **nombre algébrique réel** car :

$$x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad x^{12} - 2^7 = 0$$

L'ensemble $\mathbb{A}$ des nombres algébriques réels est un corps qui contient $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{A} \subset \mathbb{R}$$

$\mathbb{A}$ est infiniment plus grand que $\mathbb{Q}$, mais (plus qu') infiniment plus petit que $\mathbb{R}$, **les nombres algébriques sont donc très précieux** (mais moins précieux que les rationnels).

Remarque : $\mathbb{Q}$ est plus riche de propriétés musicales que $\mathbb{A}$, et surtout que $\mathbb{R}$. Une des manières de le voir est d'imaginer (comme j'aime le faire) qu'une corde de violon soit modélisée par $\mathbb{Q}_+^*$. Alors en tout point de cette corde on pourrait faire sortir une merveilleuse harmonique naturelle ! $\mathbb{A}$, et surtout $\mathbb{Q}$, possèdent des propriétés spéciales qui les rendent “musicaux” : on se restreint au cas de $\mathbb{Q}$ (voir (I) pour le cas de $\mathbb{A}$).

Une **valeur absolue triangulaire** sur $\mathbb{Q}$ est une application $|\ \ |$:

$$\mathbb{Q} \xrightarrow{|\ \ |} \mathbb{R}$$

telle que (pour tout x et tout $y \in \mathbb{Q}$) : i) $|x| \geq 0$ et $\{|x| = 0 \Rightarrow x = 0\}$

ii) $|x + y| \leq |x| + |y|$

iii) $|xy| = |x|\ |y|$ (à équivalence topologique près, toute v.a. est une v.a.triangulaire, voir (II)).

Remarque : Comme $1 \neq 0$, on a $|1| \neq 0$ et d'après iii) $|1| = |1.1| = |1|\,|1|$, donc $|1| = 1$.

De même $|-1||-1| = |(-1)^2| = |1| = 1$ d'où $|1| = |-1|$ et $|x| = |-x|$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$. Il suffit donc de connaître une v.a. sur $\mathbb{Q}_+^*$ pour la connaître partout.

Exemples de valeurs absolues.

1. L'application identique :

$$\mathbb{Q}_+^* \hookrightarrow \mathbb{R} x \longmapsto x$$

2. On la note $| \ |_\infty$ et on l'appelle la valeur absolue ordinaire, à l'infini, archimédienne ou "mélodique" (ceci m'est personnel).

3. Valeur absolue p-adique (pour un premier p). Si $x = \frac{n}{d} = p^r \frac{n_1}{d_1}$, avec $\frac{n_1}{d_1}$ irréductible et p ne divisant pas $n_1 d_1$, on pose :

$$|x|_p = \frac{1}{p^r}$$

et $| \ |_p$ est appelée la **valeur absolue p-adique normalisée** ($| \ |_p^2$ est une autre valeur absolue p-adique, mais elle n'est pas "normalisée"). Si p et q sont deux nombres premiers distincts les topologies associées à $| \ |_p$ et $| \ |_q$ ne sont pas comparables (voir (II)).

4. Il n'y a pas d'autres valeurs absolues triangulaires normalisées sur $\mathbb{Q}$ (voir (II)).

Exemples :

$$\left|\frac{3}{2}\right|_2 = 2, \qquad \left|\frac{2}{3}\right|_2 = \frac{1}{2}$$

$$\left|\frac{3}{2}\right|_3 = \frac{1}{3}, \qquad \left|\frac{2}{3}\right|_3 = 3$$

Formule du produit. *Soit* $\mathcal{N}$ *l'ensemble des v.a. précédentes, pour tout* $x \in \mathbb{Q}^*$, *on a :*

$$\prod_{|\ |_i \in \mathcal{N}} |x|_i = 1$$

Morale : L'aspect "mélodique" est une sorte de résultante de tous les aspects p-adiques (résonance d'une harmonique de rang p^h, avec h variable).
Exemple : Si $p \notin \{\infty, 2, 3\}$, on a $|\frac{3}{2}|_p = 1$. Donc

$$\prod_{|\ |_i \in \mathcal{N}} |\frac{3}{2}|_i = |\frac{3}{2}|_\infty . |\frac{3}{2}|_2 . |\frac{3}{2}|_3 = \frac{3}{2} . 2 . \frac{1}{3} = 1.$$

Distance harmonique sur $\mathbb{Q}_+^*$.

$\mathbb{Q}_+^*$ est le groupe (multiplicatif) des intervalles entre les notes, lorsque ces intervalles sont **rationnels**. Tous les musiciens savent que la "topologie mélodique" d'un passage n'est pas l'alpha et l'oméga de l'interprétation. Voici ce que Sandy Bailey dit de Jacqueline du Pré : "There is a place in the Dvořák concerto when the music goes wistfully back from the minor into the major. Jackie spent a lot of time getting me to slide from an F natural to an F sharp and to vibrate the note at the same time. I wasn't succeeding in doing what she wanted, and at a certain point I stopped and said, "But there isn't enough room to slide, it's only a semitone". Jackie replied with astonishment, "But those two notes are a million miles from each other". It made me realise that it was the intensity of the emotion which conditioned her idea of sliding, never the geographical distance" (voir (III)).

Problème de topologies !

On a dit qu'un intervalle rationnel est un point de $\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})$, c'est :

$$x = (f_0, f_1) = (\lambda f_0, \lambda f_1)$$

on peut choisir $\lambda \in \mathbb{Q}_+^*$ pour que λf_0 et λf_1 soient des entiers premiers entre eux d et n, on a :

$$(f_0, f_1) = (d, n) = (1, \frac{n}{d}).$$

Définition : *Soit* $\frac{n}{d} \in \mathbb{Q}_+^*$, *une fraction irréductible, on pose :*

$$h(x) = \sup(n, d)$$

et on dit que x *et* $y \in \mathbb{Q}_+^*$ *sont "harmoniquement éloignés" si* $h(\frac{x}{y})$ *est grand.*

Théorème : *La topologie ainsi définie sur* $\mathbb{Q}_+^*$ *est métrisable. Elle est associée à la distance* $d_b(x,y) = \log_b h(\frac{x}{y})$, *où* b *est un réel* > 1.

Dans (IV) j'ai désigné cette distance par le terme de "distance harmonique" sur $\mathbb{Q}_+^*$. La topologie sur $\mathbb{Q}_+^*$ qui lui est associée devrait donc être qualifiée d'"harmonique".

Exemple :

$$d_2(2,3) = d_2(1, \frac{3}{2}) = \log_2 h(\frac{3}{2}) = \log_2(3)$$

$$d_2(1, \frac{3}{2}) \leq d_2(1,2) + d_2(2, \frac{3}{2})$$

est ici :

$$\log_2(3) \leq \log_2(2) + \log_2(4) = 1 + 2 = 3$$

$$d_2(1, (\frac{3}{2})^n) = n \log_2(3) = n d_2(1, \frac{3}{2}).$$

Il existe une suite infinie de (λ_n, μ_n) tels que $\frac{3^{\mu_n}}{2^{\lambda_n}} \searrow 1$ lorsque $n \to \infty$. On a alors :

$$d_2(2^{\lambda_n}, 3^{\mu_n}) = \mu_n \log_2(3) \to \infty$$

bien que la distance mélodique de 1 à $\frac{3^{\mu_n}}{2^{\lambda_n}}$ tende vers zéro (exemple de Jacqueline du Pré).

3 Accord arp égés considérés comme points projectifs. Puissance $\mathbf{n}^{i\grave{e}me}$ d'un accord dans une échelle "usuelle".

Ce que je vais dire des accords concerne les accords arpégés, mais ce que je vais en dire ne concerne pas l'ordre que l'on confère à l'arpège !

Définition 1 : *Un accord arpégé est une suite de* $r+1$ *notes de fréquences* $(f_0, \ldots, f_r)$ *par rapport à une unité de fréquence donnée a priori. On lui associe le point projectif de coordonnées homogènes* $f_0, \ldots, f_r$ *dans l'espace projectif* $\mathbb{P}_r(\mathbb{R})$. **Définition 2 :** *La puissance* $n^{i\grave{e}me}$ *de l'accord* $(f_0, \ldots, f_r)$ *est le*

point projectif $(f_0^n, \ldots, f_r^n)$.

Rappel : Dans (IV) j'ai désigné sous le nom d'**échelle musicale** tout sous-groupe de type fini de $\mathbb{R}_+^*$.

Exemples : 1) échelle de Pythagore : $< 2, 3 >$

2) échelle de Zarlino : $< 2, 3, 5 >$
3) échelle tempérée officielle : $< 2^{1/12} >$
4) échelle tempérée de S. Cordier : $< (3/2)^{1/7} >$
5) échelle mésotonique classique : $< 2, 5^{1/4} >$

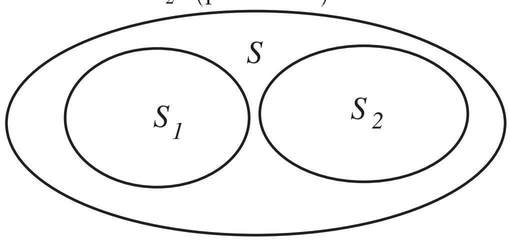
Définition 3 : *Une échelle musicale sera dite* **"usuelle"** *si elle est engendrée par des nombres rationnels ou des racines de nombres rationnels.*

Remarque : Si on n'aime pas ce qualificatif, on peut aussi la qualifier de **"radicielle"**.

Exemples : Les échelles ci-dessus et presque toutes les échelles du livre de Jedrzejewski (V) sont "usuelles".

Propriété : *Tout accord* x *appartenant à une échelle usuelle possède une puissance rationnelle.*

Remarque : La possibilité de définir un accord arpégé de manière "ad libitum" offre une occasion d'introduire la flèche du temps dans notre analyse. Par exemple si l'accord S est la réunion disjointe d'un accord S_1 (antérieur) et d'un accord S_2 (postérieur) :



on peut s'intéresser à la comparaison des propriétés de S_1, S_2 et S.

4 Résumé de la théorie de la hauteur dans $\mathbb{P}_r(\mathbb{A})$.

Rappelons que je désigne par $\mathbb{A}$ le corps des nombres algébriques contenus dans $\mathbb{R}$ et par $\mathbb{A}_+^*$ le sous-groupe (multiplicatif) de ses éléments positifs. Pour une démonstration du Th. voir (I).

Théorème fondamental : *Il existe une fonction* $\mathbb{P}_r(A) \xrightarrow{h} \mathbb{R}_+$ *qui possède les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout* $x \in \mathbb{P}_r(A)$, $h(x) \geq 1$ *et* $h(x) = 1$ *entraîne que* $x = (1, \ldots, 1)$ *lorsque les coordonnées de* x *"sont" (peuvent être choisies) dans* $\mathbb{A}_+^*$.
2. *Il n'existe qu'un nombre fini de* x *tels que* $h(x)$ *soit inférieur à un nombre donné lorsque* x *appartient à* $\mathbb{P}_r(E)$ *où* E *est une échelle musicale donnée contenue dans* $\mathbb{A}_+^*$.
3. *Si* x *et* y *donnent le même accord plaqué* $h(x) = h(y)$.
4. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $h(x^n) = [h(x)]^n$.
5. *Si* $x \in \mathbb{P}_r(\mathbb{Q})$ *et si* $x_0, \ldots, x_n$ *sont entiers et premiers entre eux dans leur ensemble*
$$h(x) = \sup(|x_0|_\infty, \ldots, |x_n|_\infty).$$

5 Algorithme pour calculer la hauteur d'un accord dans une échelle usuelle.

5.1 Cas d'une échelle rationnelle

On utilise le dernier point du théorème car tout point de $\mathbb{P}_r(\mathbb{Q})$ *peut être représenté par un* $(r+1)$*-uple d'entiers premiers entre eux.*

Exemples :

1. *Pythagore et* $x = (do_1, mi, sol, do_2)$
$$\begin{aligned} &= (1, \frac{3^4}{2^6}, \frac{3}{2}, 2) \\ &= (2^6, 3^4, 2^5.3, 2^7) \text{ donc } h(x) = 2^7. \end{aligned}$$

2. *Zarlino et* $x = (do_1, mi, sol, do_2)$
$$= (1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, 2)$$
$$= (2^2, 5, 2.3, 2^3) \text{ donc } h(x) = 2^3.$$

Conclusion : *L'accord donné serait plus consonant en Zarlino.*

5.2 Cas d'une échelle usuelle.

On utilise le point 4 du théorème fondamental pour se ramener au cas précédent (i.e. 4,1)).

Exemples :

1. *Echelle tempérée officielle :* $x = (do_1, mi, sol, do_2) = (1, 2^{1/3}, 2^{7/12}, 2)$, $x^{12} = (1, 2^4, 2^7, 2^{12}) \in \mathbb{P}_3(\mathbb{Q})$ *et* $h(x^{12}) = 2^{12} = [h(x)]^{12}$, *d'où* $h(x) = 2$.

2. *Echelle tempérée de S. Cordier :* $x = (do_1, mi, sol, do_2) = (1, (3/2)^{4/7}, 3/2, (3/2)^{12/7})$,

   $x^7 = (1, (3/2)^4, (3/2)^7, (3/2)^{12})$
   $= (2^{12}, 2^8.3^4, 2^5.3^7, 3^{12}) \in \mathbb{P}_3(\mathbb{Q})$

   et $h(x^7) = 3^{12} = [h(x)]^7$, *d'où* $h(x) = 3^{12/7}$.

3. *Echelle mésotonique classique : le même type de calculs donne* $h(x^4) = 2^{12} = [h(x)]^4$ *d'où* $h(x) = 2^3$.

6 Examen de deux candidats pour la définition de la dissonance théorique d'un accord.

Les plus hautes instances de l'Harmonie des Sphères nous envoient deux candidats "canoniques" pour définir la dissonance d'un accord. Bien entendu les

pauvres adeptes de la musique pratique, que nous sommes, savent bien que la sensation de dissonance d'un accord, ici bas, dépend d'une infinité de paramètres sublunaires qui nous rendent la vie beaucoup plus compliquée...

6.1 Premier candidat :

logarithme en base $b > 1$ *de la hauteur d'un accord. On le note* d_b. *L'intervention de la base* b *revient à introduire une unité de mesure. Il est commode (mais non nécessaire) de prendre* $b = 2$.

Exemples : $x = (do_1, mi, sol, do_2)$

Pythagore : $d_2(x) = 7$, *Zarlino :* $d_2(x) = 3$, *tempérée officielle :* $d_2(x) = 1$, *tempérée S. Cordier :* $d_2(x) = \frac{12}{7}\log_2(3)$, *mésotonique classique :* $d_2(x) = 3$.

6.2 Deuxième candidat :

diamètre harmonique de l'ensemble des notes. On le note δ_b.

Exemples : $x = (do_1, mi, sol, do_2)$

Pythagore : $\delta_2(x) = 4\log_2(3) < d_2(x)$

Zarlino : $\delta_2(x) = \log_2(6) < d_2(x)$

tempérée officielle : $\delta_2(x) = 1 = d_2(x)$

tempérée S. Cordier : $\delta_2(x) = \frac{12}{7}\log_2(3) = d_2(x)$

mésotonique classique : $\delta_2(x) = 3 = d_2(x)$

6.3 Comparaison des candidats.

Le jury déclare (voir (I)).

Théorème :

1. *Le diamètre harmonique est toujours inférieur ou égal à la hauteur logarithmique d'un accord.*

2. *Lorsque l'échelle est tempérée, les candidats sont égaux et le résultat serait obtenu aussi bien à l'aide du logarithme en base* b *de la valeur absolue mélodique.*

Références :

I *Yves Hellegouarch "Un aspect de la théorie des hauteurs" Journées Arithmétique, Caen 1980* **II** *Yves Hellegouarch Invitation aux mathématiques de Fermat-WilesMasson, Paris 1997 et Dunod, Paris 2001* **III** *Elizabeth Wilson Jacqueline* *du PréWeidenfeld et Nicolson, London 1998* **IV** *Yves Hellegouarch "Gammes Naturelles" Gazette des Mathématiciens, juillet 99 n° 81 et octobre 99 n° 82 pp. 25-37 et 13-26. Société Mathématique de France* **V** *Frank Jedrzejewski-Mathématiques des systèmes acoustiques l'Harmattan, Paris, 2002*