

MATHÉMATIQUES DE TRADITION ORALE

Marc CHEMILLIER
chemilli@ircam.fr

12 décembre 2004

L'ethnomathématique s'est développée depuis quelques années, à travers des recherches spécialisées portant sur les propriétés mathématiques de certaines activités pratiquées dans les sociétés de tradition orale. Parmi ces activités, les arts visuels ont occupé une place de choix. Les riches traditions décoratives observées dans de nombreuses régions du monde ont fourni un matériau fascinant pour l'étude de certaines propriétés géométriques (symétrie de figures ornementales) ou topologiques (enchevêtrement de tracés linéaires). La musique est restée en retrait de ce mouvement, alors même qu'elle constitue un réservoir important de propriétés formelles pouvant être exprimées en langage mathématique et étudiées dans ce paradigme. Nous en montrerons deux exemples dans le présent article. Pour ces exemples, comme pour la plupart des travaux menés en ethnomathématique, le traitement mathématique est effectué *a posteriori*, en « laboratoire », à partir de données de terrain recueillies, le plus souvent, de façon indépendante de toute préoccupation mathématique. Il en résulte un fossé important entre la richesse des propriétés mises en évidence, et la pauvreté des liens établis entre celles-ci et les processus mentaux censés leur avoir donné naissance. Tout se passe comme si les indigènes des sociétés étudiées, à l'instar de Monsieur Jourdain faisant de la prose, faisait des mathématiques « sans le savoir ». Les exemples que nous présentons dans la première partie de cet article (dessins sur le sable, rythmes asymétriques africains, formules de harpe nzakara) témoignent de cette difficulté.

Dans la deuxième partie, nous présentons les premiers résultats d'une recherche sur les aspects algébriques de la divination à Madagascar¹. La particularité de cette recherche est précisément d'associer, de façon étroite, l'analyse mathématique et l'enquête de terrain. Les résultats rassemblés ici ne concernent que le versant mathématique de la question, dont nous nous efforçons de présenter une première synthèse. Le versant ethnographique et cognitif fait l'objet d'un autre article, publié indépendamment, dans lequel nous décrivons les méthodes employées sur le terrain pour accéder aux mécanismes mentaux qui « incarnent » ces différentes propriétés [Chemillier et al. 2004(b)]. Ces techniques de terrain comportent :

- l'observation participante et l'entretien semi-directif habituels en ethnographie,
- l'utilisation de la vidéo pour capter certains gestes explicatifs (images tournées par Victor Randrianary),
- les tests chronométriques (définis par les psychologues Denis Jacquet et Marc Zabalia) pour expliciter certaines opérations mentales des devins.

Dans l'exposé mathématique que nous présentons en deuxième partie, chaque propriété sera reliée à une opération, une procédure, ou un énoncé réellement observés chez les devins eux-mêmes. De cette manière, l'étude se rapprochera des objectifs implicitement contenus dans le terme « ethnomathématique », qui consistent à établir un pont entre certaines propriétés mathématiques et des modes de penser spécifiques à certaines sociétés de tradition orale.

¹ Financée par l'action concertée incitative « Cognitive » pour la période 2001-2004, cette recherche met en œuvre une approche pluridisciplinaire à la croisée de l'anthropologie, des mathématiques, de l'informatique, et de la psychologie cognitive, associant l'équipe d'intelligence artificielle du GREYC à Caen (CNRS UMR 6072), le laboratoire de psychologie cognitive de Caen (EA 1774) et le laboratoire CNRS UMR 8574 du Musée de l'Homme. Elle est poursuivie en 2004-2007 dans le cadre de l'action concertée incitative « Histoire des savoirs ».

1. ARTS VISUELS ET SONORES

1.1. DESSINS SUR LE SABLE

Les dessins sur le sable sont une tradition pratiquée dans plusieurs régions du monde, en particulier au Vanuatu et en Angola. Elle consiste à tracer un sillon sur le sable en respectant une règle, que nous appellerons la « règle de la ligne continue », et qui s'exprime comme une propriété mathématique : on ne doit pas lever le doigt, ni repasser sur un sillon déjà tracé. De tels tracés sont des chemins eulériens au sens de la théorie des graphes. L'étude de leurs propriétés a donné lieu à des travaux de référence en ethnomathématique, de Marcia Ascher [1998] pour le Vanuatu et de Paulus Gerdes [1995] pour l'Angola.

Ces dessins très stylisés ont souvent un caractère figuratif, évoquant un végétal ou un animal [Cabane 1997]. C'est le cas de la célèbre tortue Vanuatu représentée figure 1.

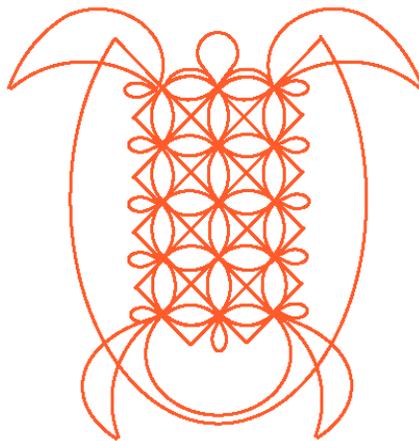


Figure 1. Tortue Vanuatu.

Mais leur forme tend en général vers l'abstraction avec des tracés parfois très complexes. La difficulté à concevoir de tels tracés invite à penser que les artistes ont développé des techniques spécifiques permettant d'y parvenir.

L'une de ces techniques pourrait consister à transformer un dessin donné, qui ne vérifie pas la règle de la ligne continue, pour le remplacer par un dessin la vérifiant. On rencontre cette situation dans une famille de dessins angolais étudiés par Paulus Gerdes, dans lesquels le tracé suit une variante de la règle appelée *monolinéarité* (les tracés peuvent se croiser, mais pas se toucher sans croisement). Le dessin de gauche de la figure 2 n'est pas attesté dans la tradition angolaise, car on remarque que le tracé ne peut recouvrir la totalité de la figure en respectant la règle. La possibilité de recouvrir toute la figure dépend des nombres de lignes et de colonnes (17 lignes et 14 colonnes dans le cas de la figure), et les dessins attestés dans la tradition angolaise sont ceux pour lesquels le tracé est possible.

En revanche, pour les nombres de lignes et de colonnes qui ne permettent pas le tracé complet, il semble que les artistes aient utilisés une transformation qui permet d'obtenir un nouveau dessin ayant la propriété d'être traçable en respectant la règle voulue. Ce nouveau dessin est représenté à droite figure 2, et la transformation consiste à remplacer tous les croisements à l'intérieur d'une colonne par des arcs de cercle. On voit que le résultat peut être tracé intégralement sans violer la règle. Paulus Gerdes présente cette transformation comme un « algorithme » [1995, p. 205].

Cet exemple soulève de nombreuses questions, à la fois sur le plan mathématique et sur le plan

cognitif. Sur le plan mathématique, les propriétés de la transformation géométrique passant d'un dessin à l'autre restent à explorer. Est-elle capable de fournir, quelques soient les nombres de lignes et de colonnes, un dessin ayant les bonnes propriétés de tracé ? ou bien seulement pour certaines valeurs de ces deux nombres ? Le choix de la colonne est-il déterminé par certaines conditions particulières ? Ou bien est-il libre, la transformation donnant le résultat voulu quelque soit ce choix ?

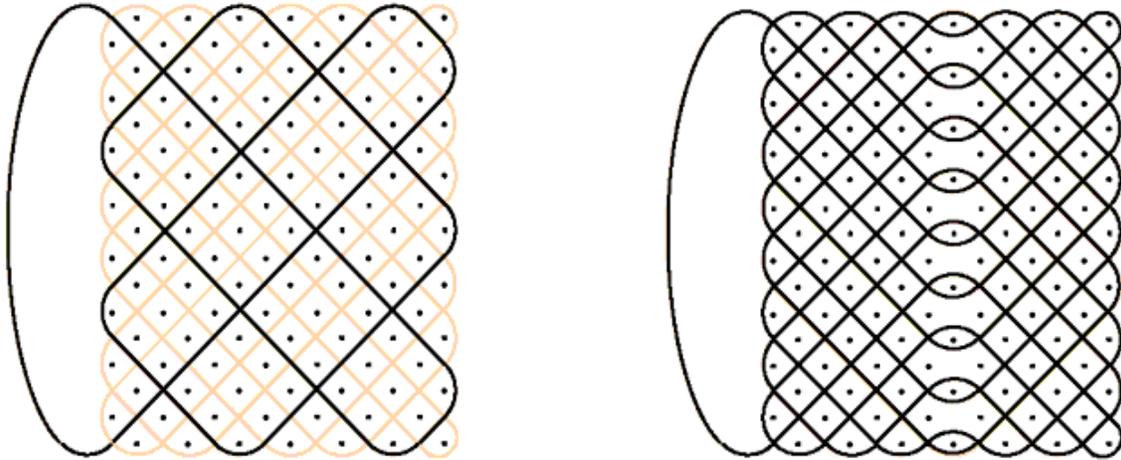


Figure 2. Transformation donnant un dessin monolinéaire (Angola).

De telles questions renvoient à des questions similaires sur le plan cognitif : dans quelle mesure la transformation est-elle bien identifiée comme telle par les artistes, c'est-à-dire comme une procédure générale ? si elle l'est, connaissent-ils les conditions d'application qui permettent d'obtenir un tracé conforme à la règle, en tenant compte, si nécessaire, du nombre de lignes et de colonnes, ou du choix de la colonne modifiée ?

1.2. RYTHMES ASYMÉTRIQUES AFRICAINS

Certains rythmes africains asymétriques, combinant des durées de 2 et 3 unités, ont une propriété particulière appelée « imparité rythmique », qui a été mise en évidence par Simha Arom [1985, p. 429], et qui s'exprime naturellement sous la forme d'un énoncé mathématique. La séquence rythmique représentée en cercle sur la figure 3, est un exemple de ce type. La propriété exprime le fait qu'on ne peut la couper en deux parties de mêmes durées, quelque soit le point choisi.

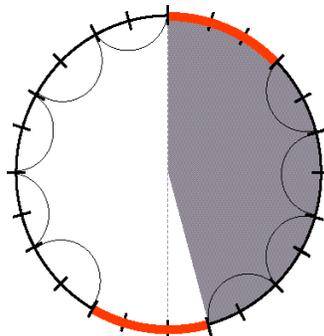


Figure 3. Rythme 32222322222 non divisible en deux parties de même durée.

Nous avons proposé une construction permettant d'obtenir toutes les séquences satisfaisant l'imparité rythmique [Chemillier & Truchet 2003(b)]. On considère l'ensemble des mots finis sur l'alphabet $A = \{2, 3\}$, noté A^* , et on définit une application h de A^* dans \mathbf{N} qui a un mot associé la

somme de ses symboles. Un mot w vérifie l'*imparité rythmique* si et seulement si $h(w)$ est pair et aucune de ses permutations circulaires ne se factorise en deux mots uv tels que $h(u) = h(v)$.

On introduit deux applications a et b de $A^* \times A^*$ dans lui-même, définies de la manière suivante :

$$\begin{aligned} a(u, v) &= (3u, 3v), \\ b(u, v) &= (v, 2u). \end{aligned}$$

Les mots vérifiant l'imparité rythmique s'obtiennent en appliquant au couple (e, e) où e désigne le mot vide, les applications composées de a et b . En effet, on montre qu'un mot w satisfait l'imparité rythmique si et seulement si :

(i) il existe un entier n et une application f appartenant à $\{a, b\}^n$ avec un nombre impair de b , telle que $w = uv$ où $(u, v) = f(e, e)$.

Prenons un exemple pour illustrer cette construction. La formule rythmique 332323332 est appelée *mokongo* par les pygmées Aka [Arom 1985, p. 436]. Elle s'obtient en utilisant l'application $f = aababb$, de la manière suivante :

$$\begin{aligned} f(e, e) &= aababb(e, e) \\ &= aabab(e, 2) \\ &= aaba(2, 2) \\ &= aab(32, 32) \\ &= aa(232, 32) \\ &= a(3232, 332) \\ &= (33232, 3332) \end{aligned}$$

d'où la séquence 332323332. Quand on effectue la construction de toutes les formules rythmiques possibles de petite longueur, on s'aperçoit que les solutions sont peu nombreuses, et qu'elles sont pratiquement toutes utilisées dans les répertoires de cette région. Cela conduit à penser qu'il y a des raisons d'ordre cognitif qui expliquent l'apparitions de ces formules rythmiques. Mais cette question reste difficile à trancher, en l'absence de discours réflexif des musiciens eux-mêmes sur leur pratique.

La notion d'imparité rythmique peut se généraliser à des séquences indivisibles non seulement en deux, mais aussi en un nombre quelconque de parties de mêmes durées. Simha Arom propose cette généralisation dans son livre sur les polyrythmies d'Afrique centrale [1985, p. 427]. Elle a été étudiée mathématiquement par Rachel Hall et Paul Klingsberg dans un formalisme différent de celui présenté plus haut [2004]. Leur approche élargit également le problème à des rythmes qui ne sont plus seulement composées de durées de 2 ou 3 unités, mais incluent des durées quelconques. Ils définissent les séquences rythmiques comme des applications de $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ dans $\{0, 1\}$, les séquences étant périodiques de longueur m , et les 0 et 1 désignant respectivement les silences et les attaques. Ainsi, la formule 332 s'écrit 10010010. Une formule rythmique f de longueur $2n$ vérifie l'imparité rythmique si et seulement si :

(1) $f(x) = 1$ implique $f(x + n) = 0$ pour tout x de $\mathbf{Z}/2n\mathbf{Z}$.

Plus généralement, une formule rythmique de longueur ln est dite *l-asymétrique* si et seulement si :

(2) $x \equiv y \pmod{n}$ implique $f(x) + f(y) \leq 1$ pour tous x, y distincts appartenant à $\mathbf{Z}/ln\mathbf{Z}$.

Leur article donne des formules explicites pour calculer les nombres suivants :

(a) nombre de rythmes de longueur $2n$ vérifiant l'imparité rythmique,

- (b) nombre de rythmes de longueur $2n$ vérifiant l'imparité rythmique avec r attaques,
- (c) nombre de rythmes de longueur ln qui sont l -asymétriques,
- (d) nombre de rythmes de longueur ln qui sont l -asymétriques avec r attaques.

Ils introduisent également la notion de rythmes *auto-complémentaires*, qui sont des applications f de $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ dans $\{0, 1\}$ telles que f et $1 - f$ sont identiques à permutation circulaire près, comme c'est le cas pour 11010010 et 00101101. On voit alors que les nombres de 0 et de 1 sont égaux, donc la longueur est paire $2n$, et ce nombre vaut la moitié n . Les rythmes avec des durées de 2 ou 3 unités ne peuvent être dans ce cas, sauf s'ils ne contiennent que des 2.

Enfin, ils étudient les rythmes qui sont *primitifs*, c'est-à-dire dont la longueur est égale à la plus courte période. Ils en déduisent les nouvelles formules de calcul suivantes :

- (e) nombre de rythmes de longueur ln qui sont l -asymétriques et primitifs avec r attaques,
- (f) nombre de rythmes de longueur $2n$ vérifiant l'imparité rythmique et primitifs avec des nombres n_2 et n_3 de 2 et de 3.

Malheureusement, leur approche ne débouche pas directement sur une méthode explicite de construction de ces différents rythmes. C'est pourtant une telle méthode qui permettrait de dresser la table des rythmes théoriquement possibles, et de la comparer à ceux effectivement utilisés, comme nous l'avons fait pour l'imparité rythmique [2003(b)].

1.3. FORMULES DE HARPE NZAKARA

Nous avons effectué des recherches sur les formules de harpe jouées par les poètes-musiciens nzakara de République centrafricaine, qui ont révélé certaines structures remarquables. Ces résultats ont été décrits dans plusieurs publications [1995, 1996, 1997, 1999, 2003], et le but de la présente section est de résumer les propriétés mathématiques obtenues.

La transcription de la figure 4 est un exemple d'une telle formule. Les cinq lignes horizontales correspondent aux cinq cordes de l'instrument. Les points indiquent quelles cordes sont pincées pendant le déroulement de la formule. Celle-ci est répétée en boucle pour accompagner une improvisation poétique chantée. Son rythme est régulier à pulsation ternaire, caractéristique de la catégorie *limanza* (d'autres formules, de la catégorie *ngbakia*, sont à pulsation binaire).

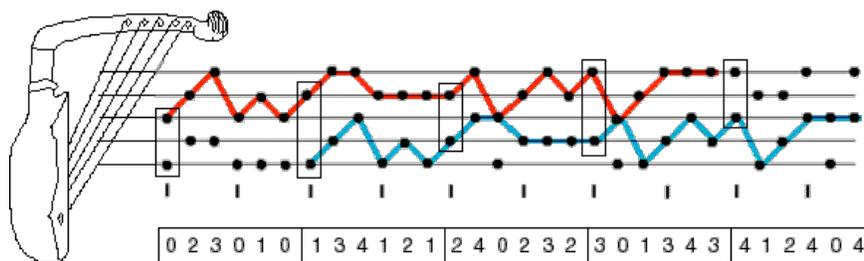


Figure 4. Formule de harpe nzakara en canon (*limanza*).

La première propriété remarquable de la formules est sa structure de canon. Les cordes pincées par couples forment deux lignes mélodiques superposées, l'une sur les trois cordes aiguës et l'autre sur les trois cordes graves, dont les profils mélodiques sont identiques, mais décalés dans le temps. Pour exprimer mathématiquement cette notion de canon, nous reprenons ici les idées et notations de [Chemillier 2003]. Les couples de cordes pincées simultanément apparaissant dans la formule sont au nombre de cinq, numérotés de 0 à 4 (voir figure 4).

On représente les formules de harpe comme des mots binifinis périodiques sur l'ensemble des

cinq couples de cordes, c'est-à-dire des applications de \mathbf{Z} dans $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Soit T l'application qui à un mot biinfini u associe le mot Tu défini par :

$$Tu(i) = (i + 1)$$

pour tout entier i de \mathbf{Z} . Un mot biinfini u est *périodique* de période m , si m est le plus petit entier positif tel que $T^m u = u$.

Pour définir un canon à distance p , on doit imposer une contrainte d'enchaînement entre les couples situés à distance p . On définit un graphe R sur l'ensemble de ces couples, en traçant une flèche de x vers y si la note inférieure de y est décalée de deux cordes vers le grave par rapport à la note supérieure de x . On obtient le graphe suivant :

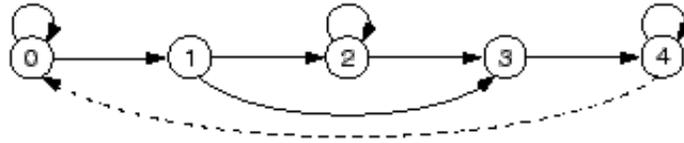


Figure 5. Graphe R d'enchaînement des couples de cordes pincées simultanément.

On constate que les couples encadrés sur la figure 4 qui sont à distance 6 (c'est-à-dire la distance du canon), sont enchaînés les uns aux autres en suivant les flèches du graphe, sauf lorsque 4 est suivi de 0. Dans ce cas, la structure de canon n'est pas respectée. On complète le graphe avec une flèche en pointillé de 4 vers 0. La contrainte imposée par la structure de canon est alors matérialisée par le graphe R , qui indique les enchaînements possibles.

Afin de caractériser les mots biinfinis ayant une structure de canon, on introduit l'application H_d qui à un mot biinfini u associe le sous-mot obtenu en extrayant un couple sur d parmi ceux de u :

$$H_d u(i) = u(di)$$

pour tout entier i de \mathbf{Z} . Dès lors, u est un canon de période m à distance p , si et seulement si :

(i) tous les sous-mots $H_d T^i u$ sont des cycles de longueur m / d dans le graphe R , pour tout $0 \leq i < d$ avec $d = \text{pgcd}(m, p)$.

La deuxième propriété intéressante de la formule est sa structure « en escalier ». Si l'on regarde la succession des couples figure 4, on constate que les six premiers 023010 sont ensuite décalés d'une unité 134121, et ainsi de suite, jusqu'à revenir à la succession initiale. On peut formaliser cette propriété en introduisant la notion de motif translaté. Soit σ une permutation de l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ qui est un cycle de longueur 5. Un mot biinfini u est un *motif translaté* de longueur d si

$$u(i + d) = \sigma(u(i))$$

pour tout entier i de \mathbf{Z} . Ainsi, le motif $u(0)u(1)...u(d-1)$ est translaté en $\sigma(u(0))\sigma(u(1))...\sigma(u(d-1))$.

Il existe une relation logique de dépendance entre les deux notions de canon et de motif translaté. Un cas particulier de motif translaté est celui où la permutation σ est définie par un cycle dans le graphe R . Dans ce cas, le cycle passe une fois et une seule par chaque sommet, et il peut s'agir soit du cycle de R lui-même $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 0$, soit de l'une de ses puissances. La caractérisation (i) ci-dessus montre alors que le motif translaté est un canon. La distance du canon dépend du cycle choisi. S'il s'agit du cycle de R , alors le canon est à distance d (la longueur du motif). S'il s'agit d'une puissance de ce cycle, alors la distance du canon est un multiple de d :

(1) si u est un motif translaté en suivant un cycle dans le graphe R , alors u est un canon.

Inversement, si un canon est tel que chacun des sous-mots $H_d T^i u$ correspond à un même cycle de R (en supposant que ce cycle ne soit pas trivial, c'est-à-dire réduit à un seul sommet), alors c'est un motif translaté de longueur d :

(2) si u est un canon dont tous les cycles $H_d T^i u$ sont identiques (et non triviaux), alors u est un motif translaté.

On voit que les notions de canon et de motif translaté sont équivalentes logiquement si on les restreint à un cas particulier : canon dont les cycles sont identiques d'un côté, ou motif translaté suivant un cycle du graphe R de l'autre. Or les formules nzakara sont précisément toutes dans ce cas particulier. Sur le plan logique, il n'y a donc pas de raison de préférer l'une plutôt que l'autre. Le problème est très différent, en revanche, si l'on se place sur le plan cognitif, c'est-à-dire lorsqu'on s'intéresse à la manière dont les Nzakara se représentent eux-mêmes leurs formules de harpe. Ignorent-ils les propriétés de ces formules ? Ou bien sont-ils conscients de la structure de canon, c'est-à-dire de l'identité des deux profils mélodiques ? Ou bien se représentent-ils ces formules comme les translations successives d'un motif initial ?

Dans un article de la revue *L'Homme*, nous avons exposé cette problématique, en soulignant les difficultés qu'il y avait à ancrer dans la réalité cognitive autochtone certaines analyses abstraites [2004]. Le formalisme permet des métamorphoses qui peuvent éloigner l'analyse de son point de départ, en l'entraînant dans un long cheminement logique, mais en lui faisant éventuellement perdre tout lien avec les processus mentaux dont elle rend compte. Nos travaux menés avec Éric de Dampierre, spécialiste de la société Nzakara, qui a séjourné sur le terrain pendant plus de trente ans, et dont les Nzakara disaient eux-mêmes qu'il était la personne au monde parlant le mieux leur langue (voir [Chemillier 1998]), nous ont conduit à privilégier l'analyse des formules de harpe comme canons. Nous avons rassemblé dans [2004] un faisceau d'indices, tirés des écrits de Dampierre, qui justifie cette préférence. Mais la question est controversée, et l'ethnomusicologue Klaus-Peter Brenner a publié un livre [2004], dans lequel il rejette l'hypothèse des canons, et développe l'idée que sur le plan cognitif, les formules nzakara ne peuvent être vues autrement que sous l'angle des motifs translattés. Il est probable que faute de pouvoir effectuer de nouvelles enquêtes de terrain sur ce répertoire tombé en complète décrépitude, la question restera ouverte à jamais.

La formule de harpe nzakara a une troisième propriété remarquable faisant intervenir les groupes de frise, qui a été mise en évidence par Dave Benson [2004]. Revenons à une numérotation des cordes elles-mêmes (et non plus des couples) de 0 à 4, en identifiant l'ensemble des cinq cordes à $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$. Soient E l'ensemble des paires de $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$, et $E^{\mathbf{Z}}$ l'ensemble des mots biinfinis sur E , c'est-à-dire des applications de \mathbf{Z} dans E . Si x est une paire, et t un élément de $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$, on note $x + t$ la paire obtenue en ajoutant t à chaque élément de x . Pour t et x dans $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$, p et q dans \mathbf{Z} , on définit trois bijections de $E^{\mathbf{Z}}$ dans lui-même :

- (i) translation $T_p, u(i) = u(i - p) + t$,
- (ii) inversion $V_x, u(i) = 2x - u(i)$,
- (iii) rétrogradation $R_q, u(i) = u(2q - i)$,

pour tout i dans \mathbf{Z} . Si l'on étudie les sous-groupes du groupe G des bijections de $E^{\mathbf{Z}}$ dans lui-même engendré par les T_p, V_x et R_q , on montre qu'il existe exactement sept types de sous-groupes possibles, selon qu'ils contiennent ou non des inversions, des rétrogradations, ou des symétries centrales (composition d'une inversion et d'une rétrogradation). Ces sept types correspondent aux sept groupes de frise (voir une présentation détaillée dans [Chemillier 1989]).

Parmi les sept groupes de frise, le premier, noté p111 dans le système des cristallographes, est engendré par une translation. Le second, noté p112, est engendré par une translation $T_{p,t}$ et une symétrie centrale $R_q V_x$. On montre alors qu'il contient une infinité de symétries centrales, dont les centres sont équidistants. Plus précisément :

$$R_q V_x T_{p,t} = R_q T_{p,0} V_x T_{0,t} = R_{q+p/2} V_{x-t/2},$$

car $R_q T_{p,0} u(i) = R_q u(i-p) = u(2q-i+p) = u(2(q+p/2)-i)$, et de même pour $V_x T_{0,t}$. Ainsi, les symétries centrales du groupe sont $R_q V_x, R_{q+p/2} V_{x-t/2}, R_{q+p} V_{x-t}, R_{q+3p/2} V_{x-3t/2}$, etc.

La propriété remarquable de la formule de harpe figure 4 est qu'elle est *invariante par une symétrie centrale*, c'est-à-dire que son groupe de symétrie est de type p112 (et non pas seulement p111). Pour placer le centre de symétrie en début de formule, décalons celle-ci de deux couples vers la droite (figure 6). Les centres de symétries sont alors matérialisés graphiquement, en indiquant les numéros des cordes sous la figure. La translation $T_{p,t}$ qui laisse la formule invariante correspond à $p=6, t=3$ (la séquence 100001 se translate en 433334). On a relié par des traits les deux lignes invariantes par symétrie centrale. Ces tracés zigzagants donnent une image bien différente de la formule que ceux utilisés figure 4 pour la mise en évidence du canon.

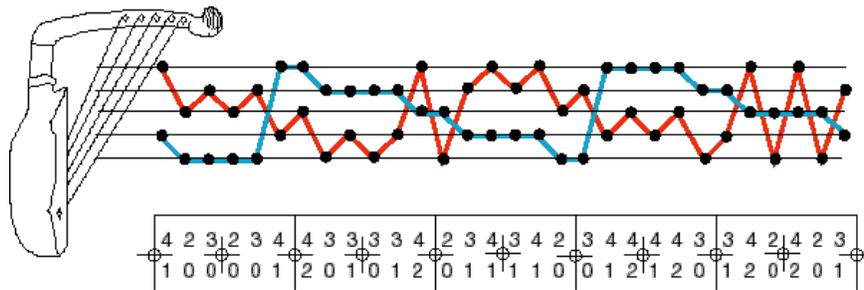


Figure 6. Symétries centrales de la formule de *limanza*.

Pour vérifier la symétrie, on prend la première paire $\{1, 4\}$ et la dernière $\{1, 3\}$. Leurs éléments peuvent être groupés par deux de telle sorte que la somme soit constante : $1 + 1 = 3 + 4 = 2$. De même, lorsqu'on prend les autres paires, on trouve toujours la même somme constante égale à 2 quand on les associe à la paire en même position à partir de la fin. Cette propriété de symétrie n'est pas vraie pour toutes les formules de harpe en canon du répertoire nzakara. Il existe un *ngbakia* en canon à dix pulsations binaires qui n'admet pas de symétrie centrale (cf. page 5 de notre disque *Musiques des anciennes cours Bandia* [1996]). Dans ces conditions, on peut se demander si la symétrie renvoie à des mécanismes cognitifs spécifiques chez les musiciens autochtones. D'un côté, il est remarquable qu'une formule admette ce type de propriété, mais de l'autre, elle apparaît comme un cas particulier isolé.

Sur le plan cognitif, la structure des formules de harpe nzakara pourrait s'expliquer par des contraintes d'ordre gestuel. Barbra Gregory a exploré cette voie, en étudiant la complexité des formules du point de vue des gestes nécessaires au musicien pour les produire [2004]. Si $u = u_1 u_2 \dots u_n$ et $v = v_1 v_2 \dots v_n$ sont deux séquences de couples de cordes de longueur n , on définit leur *distance* :

$$dist(u, v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |u_i - v_i|.$$

Notons que la numérotation des cordes de 0 à 4 (figure 4) est telle que $|u_i - v_i|$ correspond au

nombre de cordes que les doigts doivent sauter pour passer de u_i à v_i . On étend cette définition de la distance à deux séquences de longueurs différentes p et q , en posant $d = \text{pgcd}(p, q)$ avec $p = p'd$, $q = q'd$, et en définissant $\text{dist}(u, v) = \text{dist}(u', v')$.

La complexité $C(u)$ d'une séquence de couples de cordes est définie récursivement. On note $|u|$ la longueur d'une séquence de couples. Pour $|u| = 1$, on pose arbitrairement $C(u) = 1$. Pour $|u| = n > 1$, on suppose construit $C(v)$ pour tous les v de longueur plus petite, et on définit $C(u)$ en minimisant le produit $\text{dist}(u, v)C(v)$:

$$C(u) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\min\{\text{dist}(u, v)C(v), |v| = i\}}{5^{i-1}}.$$

Par exemple, la complexité de la séquence $u = 01$ s'écrit $C(u) = \min\{\text{dist}(u, v), |v| = 1\}$. La distance de u à $v = 0$ ou à $v = 1$ est 0,5, ce qui donne $C(u) = 0,5$.

Dans le tableau de valeurs calculées par Barbra Gregory, on constate que les séquences de longueur $n = 5$ qui sont des cycles dans le graphe de R ci-dessus (figure 5) ont la même complexité (1,35), et que cette complexité est identique pour une séquence de longueur $n = 10$ qui est un motif translaté de longueur 2 (au sens défini plus haut pour les modèles nzakara) :

| | |
|-------------------|----------------|
| $u = 01234,$ | $C(u) = 1,35$ |
| $u = 02413,$ | $C(u) = 1,35$ |
| $u = 0134124023,$ | $C(u) = 1,35$ |
| $u = 01231,$ | $C(u) = 0,91$ |
| $u = 02304,$ | $C(u) = 1,58$ |
| $u = 0112044021,$ | $C(u) = 1,24.$ |

Si l'on rompt le cycle en jouant 01231 au lieu de 01234, on réduit le mouvement des mains, ce qui a pour effet de diminuer la complexité (0,91). Par contre, si on accroît les mouvements des mains en revenant deux fois sur 0, on augmente la complexité (1,58). Enfin, dans une séquence contenant des répétitions de couples, la complexité est plus faible (1,24).

Il est probable que cette mesure pourrait être affinée, comme le suggère l'auteur, en tenant compte de facteurs musicaux plus précis (le doigté, par exemple). Ce travail ouvre une voie intéressante dans la recherche des causes de l'apparition des formules nzakara en canon. Si l'on parvenait à une mesure de la complexité faisant apparaître ces modèles comme des configurations remarquables (minimales, maximales, équilibrées, etc.), on obtiendrait une explication d'ordre gestuel des mécanismes cognitifs qui leur ont donné naissance.

2. DIVINATION *SIKIDY* À MADAGASCAR

2.1. TABLEAUX GEOMANTIQUES

C'est la lecture en juin 2000 d'un article de Marcia Ascher consacré à la divination malgache [1997] qui nous a décidé à entreprendre une recherche de terrain dans ce pays. Il existe principalement deux études sur les propriétés algébriques de la divination *sikidy*, respectivement de Marcia Ascher et Manelo Anona [2001] (mathématicien de l'université de Tananarive). Leur source ethnographique commune est le livre de Raymond Decary [1970], auquel il faut ajouter, dans le cas de Marcia Ascher, le travail de Jean-François Rabedimy, anthropologue de Majunga qui enseigne à l'université de Tuléar [1976]. Lors des cinq séjours que nous avons effectués à Madagascar, nous avons pu rencontrer ces deux chercheurs, Manelo Anona et Jean-François Rabedimy, que nous remercions pour leur accueil. En complément des références qui viennent d'être citées, il faut mentionner le travail de Robert Jaulin sur la géomancie arabe [1971, 1989] (dont dérive directement le *sikidy* malgache, voir [Hébert 1961]).

Les points sur lesquels notre enquête de terrain a apporté des éléments nouveaux, comme on le verra, sont principalement :

- l'utilisation effective de la structure algébrique de groupe (élément neutre, associativité, voir même sous-groupe dans le cas des figures paires),
- la définition d'une classe nouvelle de tableaux (*fohatse*),
- l'étude des conjonctions de propriétés logiques (*fohatse + tokan*, triple ou quadruple *tokan*),
- le rôle systématique de la transposition matricielle.

Nous avons en outre réalisé un programme informatique qui permet, grâce à la souplesse expressive du langage Lisp, de calculer la liste de tous les tableaux vérifiant une propriété donnée quelconque (de précédentes expériences de calculs informatiques sur le *sikidy*, avec des objectifs un peu différents, sont présentées dans [Anona 2001] et [Gardenier 1986]).

Dans la description qui suit, nous reprenons les notations de Manelo Anona [2001]. La divination malgache se pratique à l'aide de graines de tamarin, que l'on brasse en tas sur une natte, en prononçant diverses incantations. On prend une poignée de graines au hasard, puis on la pose sur le sol, en éliminant les graines par paires, jusqu'à ce qu'il n'en reste qu'une ou deux. Ce reste, produit d'un tirage aléatoire, manifeste la destinée du consultant.

Pour procéder à la divination, on place le reste obtenu (une ou deux graines) dans un tableau en forme de matrice carrée de dimension quatre, que l'on remplit en répétant seize fois le tirage :

$$\begin{array}{cccc} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{array}$$

Ainsi chaque élément a_{ij} du tableau vaut une ou deux graines.

Cette matrice est appelée *renin-sikidy*, c'est-à-dire *sikidy* mère. Elle définit huit positions, dans lesquelles on identifie des figures de *sikidy* intervenant dans la divination. Ces figures sont les quadruplets apparaissant dans les quatre colonnes et les quatre lignes de la matrice (lues de droite à gauche).

À partir de ces huit figures initiales, on construit huit figures secondaires (les filles), sous forme de huit colonnes placées sous la matrice mère les unes à côté des autres, et dérivées des figures initiales en respectant la règle de combinaison suivante :

- une graine et une graine donnent deux graines,
- deux graines et une graine donnent une graine,
- deux graines et deux graines donnent deux graines.

On reconnaît la loi de composition interne du groupe abélien $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Les deux graines correspondent à l'élément neutre $\hat{0}$, et la graine isolée correspond à $\hat{1}$. L'opération de combinaison des figures se fait dans le groupe produit $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^4$ des quadruplets de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

On note P_i , $i = 1, \dots, 16$ les seize positions ainsi obtenues, initiales et secondaires. Les huit premières P_1 à P_8 sont les colonnes et lignes de la matrice mère, partie supérieure du tableau. Les huit autres $P_9, P_{10}, \dots, P_{16}$ sont les colonnes secondaires, placées dans la partie inférieure du tableau, numérotées dans l'ordre de gauche à droite, et calculées par combinaison des précédentes selon la loi du groupe. Notons que les P_i sont des morphismes du groupe des matrices $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{16}$ dans celui des quadruplets $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^4$. Leur définition et leurs noms vernaculaires sont indiqués ci-après, pour une matrice mère donnée $M = [a_{ij}]_{i,j \leq 4}$.

Les quatre colonnes (numérotées de droite à gauche) :

$$\begin{aligned} P_1(M) &= (a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41}) \text{ tale,} \\ P_2(M) &= (a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42}) \text{ maly,} \\ P_3(M) &= (a_{13}, a_{23}, a_{33}, a_{43}) \text{ fahatelo,} \\ P_4(M) &= (a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{44}) \text{ bilady.} \end{aligned}$$

Les quatre lignes (de haut en bas, mais lues de droite à gauche) :

$$\begin{aligned} P_5(M) &= (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}) \text{ fianahana,} \\ P_6(M) &= (a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}) \text{ abily,} \\ P_7(M) &= (a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}) \text{ alisay,} \\ P_8(M) &= (a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}) \text{ fahavalo.} \end{aligned}$$

Les huit colonnes secondaires (dans l'ordre usuel de leur construction, différent de l'ordre des positions numérotées de 9 à 16) :

$$\begin{aligned} P_{15} &= P_1 + P_2 \text{ safary,} \\ P_{13} &= P_3 + P_4 \text{ asorita,} \\ P_{14} &= P_{13} + P_{15} \text{ saily,} \\ \\ P_{11} &= P_5 + P_6 \text{ haja,} \\ P_9 &= P_7 + P_8 \text{ fahasivy,} \\ P_{10} &= P_9 + P_{11} \text{ ombiasy,} \\ \\ P_{12} &= P_{10} + P_{14} \text{ haky,} \\ P_{16} &= P_{12} + P_{11} \text{ kiba.} \end{aligned}$$

Le nombre total de tableaux de *sikidy* possibles ne dépend que des valeurs données aux seize coefficients de la matrice mère. Il y en a donc $2^{16} = 65.526$.

Les figures de *sikidy* sont au nombre de $16 = 2^4$, et chacune a un nom dans la terminologie vernaculaire malgache. Ceux que nous utilisons ici correspondent à la terminologie Antandroy (les termes varient légèrement d'une ethnie à l'autre) :

$$(1, 1, 1, 1) = \text{tareky,}$$

$(1, 1, 1, 2) = karija,$
 $(1, 1, 2, 1) = alimizanda,$
 $(1, 1, 2, 2) = alasady,$
 $(1, 2, 1, 1) = alakarabo,$
 $(1, 2, 1, 2) = adalo,$
 $(1, 2, 2, 1) = alokola,$
 $(1, 2, 2, 2) = renilaza,$
 $(2, 1, 1, 1) = alakaosy,$
 $(2, 1, 1, 2) = alotsimay,$
 $(2, 1, 2, 1) = alohotsy,$
 $(2, 1, 2, 2) = alaimora,$
 $(2, 2, 1, 1) = adabara,$
 $(2, 2, 1, 2) = alibiavo,$
 $(2, 2, 2, 1) = alikisy,$
 $(2, 2, 2, 2) = asombola.$

Parmi ces figures, il y en a huit qui ont un nombre pair de graines, et que les devins appellent princes (*mpanjaka*). Les huit autres ont un nombre impair de graines, et sont appelées esclaves (*andevo*). La parité des figures est donnée par le morphisme s de $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^4$ dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ qui à un quadruplet associe la somme de ses éléments. L'ensemble des esclaves est $s^{-1}(\dot{1})$, et l'ensemble des princes est $s^{-1}(\dot{0})$. Ce dernier est aussi le noyau $\text{Ker}(s)$ du morphisme s , c'est-à-dire un sous-groupe de $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^4$. Les devins sont conscients que la combinaison de deux *mpanjaka* est encore *mpanjaka*. C'est une manière d'exprimer la propriété de stabilité caractéristique du sous-groupe. En allant plus loin dans ce sens, ils énoncent la règle complète de combinaison des princes et des esclaves :

$$\begin{aligned}
mpanjaka + mpanjaka &= mpanjaka, \\
mpanjaka + andevo &= andevo, \\
andevo + andevo &= mpanjaka
\end{aligned}$$

derrière laquelle on trouve la notion sous-jacente de « groupe quotient » $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^4/\text{Ker}(s)$.

Il y a quinze sous-groupes d'ordre 2 de $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^4$. L'élément neutre est $e = (2, 2, 2, 2)$. Tout élément est une involution, c'est-à-dire vérifie $a + a = e$. Cela revient à dire qu'il est son propre inverse pour la loi de groupe. Il en résulte que pour tout a différent du neutre, $\{a, e\}$ est un sous-groupe d'ordre 2 de $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^4$.

Il y a trente-cinq sous-groupes d'ordre 4 de $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^4$. On note que pour tout triplet a, b, c tel que $c = a + b$, on a $a + c = b$, et $b + c = a$. Ainsi, les sous-groupes d'ordre 4 de $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^4$ sont tous les ensembles de la forme $\{a, b, a + b, e\}$.

Enfin, les sous-groupes d'ordre 8 de $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^4$ sont au nombre de quinze. On remarque que si $c = a + b = a' + b'$, alors $c = (a + a') + (b + b')$. Les sous-groupes d'ordre 8 sont donc de la forme $\{c, a, b, a', b', a + a', b + b', e\}$. L'un de ces sous-groupes est l'ensemble des figures ayant un nombre pair de graines (noyau du morphisme s défini ci-dessus). Il contient trois couples d'éléments de somme $c = (1, 1, 1, 1)$, c'est-à-dire qui sont opposés l'un à l'autre (1 et 2 sont intervertis) :

$$\begin{aligned}
(1, 1, 2, 2) \text{ et } (2, 2, 1, 1), \\
(1, 2, 1, 2) \text{ et } (2, 1, 2, 1), \\
(1, 2, 2, 1) \text{ et } (2, 1, 1, 2).
\end{aligned}$$

Robert Jaulin a montré que dans la terminologie arabe (dont dérive celle utilisée à Madagascar), il existe une relation sémantique forte entre les figures paires qui sont opposées deux à deux. Par exemple, $(1, 1, 1, 1) = Et tariq$ (qui donne *tareky* en malgache) signifie la solitude, alors que $(2, 2, 2,$

2) = *El jamâ'a* signifie l'assemblée [1989, p. 193].

2.2. PROPRIETES DU TABLEAU

La notation adoptée pour les colonnes secondaires P_9 à P_{16} correspond à leur position de gauche à droite dans la partie inférieure du tableau. Mais cette notation ne correspond pas à l'ordre dans lequel elles sont construites. En effet, ces figures secondaires étant définies en plusieurs « générations », les unes dépendent directement de la matrice mère, alors que les autres dépendent de figures secondaires déjà construites. Aussi l'ordre de construction est-il généralement « alternant », comme on l'a vu plus haut : $P_{15}, P_{13}, P_{14}, P_{11}, P_9, P_{10}, P_{12}, P_{16}$.

Il arrive parfois que cet ordre de construction soit modifié pour se rapprocher d'un ordre linéaire (gauche-droite ou droite-gauche). C'est le cas dans le tableau 1, où l'on a indiqué les numéros des positions de 1 à 16. Dans cette situation, Njarike, devin Antandroy de Tulear, a construit la colonne P_{10} avant P_9 (alors que P_{10} résulte de $P_9 + P_{11}$), comme on le voit sur la photo figure 7. Mais ce cas s'explique simplement par le fait que l'élément neutre (2, 2, 2, 2) est apparu précédemment en P_{11} , et que pour cette raison, il peut prévoir que P_9 et P_{10} contiennent la même figure, et sont donc interchangeables. D'une certaine manière, cette interversion dans l'ordre de construction manifeste la conscience qu'a le devin du rôle d'élément neutre joué par la figure (2, 2, 2, 2).



Figure 7. Inversion dans l'ordre de construction (P_{10} placée avant P_9).

| | | | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|----|----|
| | | 4 | 3 | 2 | 1 | | |
| | | • | •• | • | • | 5 | |
| | | • | •• | • | • | 6 | |
| | | •• | •• | •• | • | 7 | |
| | | •• | • | •• | • | 8 | |
| | •• | •• | •• | • | • | • | •• |
| | •• | •• | •• | • | • | • | •• |
| | • | • | •• | •• | •• | • | • |
| | •• | •• | •• | •• | • | •• | • |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |

Tableau 1. Ordre des colonnes secondaires.

Dans un autre cas similaire, après avoir placé P_{11} , Njarike se trouve dans une situation où

l'élément neutre apparaît en P_9 (ce qu'il anticipe par un calcul mental). De ce fait, il sait que P_{11} et sa voisine $P_{10} = P_{11} + P_9$ vont être nécessairement identiques, et se sert de cette propriété pour placer P_{10} avant de placer l'élément neutre en P_9 .

Il est possible que les devins aient utilisé l'ordre de construction gauche-droite des figures secondaires de manière plus systématique. C'est ce qu'affirme Jean-François Rabedimy [1976, p. 78]. En utilisant l'associativité de l'opération de groupe, il montre qu'on peut calculer les figures secondaires de « seconde génération » P_{14}, P_{10}, P_{12} non plus à partir de celles de « première génération », mais en se référant directement à la matrice mère. Le calcul s'exprime simplement avec le morphisme s :

$$\begin{aligned} P_{14}(M) &= (s(P_5(M)), s(P_6(M)), s(P_7(M)), s(P_8(M))) \\ P_{10}(M) &= (s(P_1(M)), s(P_2(M)), s(P_3(M)), s(P_4(M))) \\ P_{12}(M) &= (s(P_1(M)) + s(P_5(M)), s(P_2(M)) + s(P_6(M)), s(P_3(M)) + s(P_7(M)), s(P_4(M)) + s(P_8(M))) \end{aligned}$$

Il devient alors possible de calculer intégralement les figures secondaires de gauche à droite, dans l'ordre où elles sont disposées : $P_9, P_{10}, P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{15}, P_{16}$.

D'autres propriétés résultant de la construction du tableau sont utilisées par les devins comme un moyen de vérification. Une propriété bien connue par eux est le fait que la figure en position P_{12} est nécessairement paire. Cela résulte du calcul suivant :

$$\begin{aligned} s(P_{12}(M)) &= s(P_1(M)) + s(P_2(M)) + s(P_3(M)) + s(P_4(M)) + s(P_5(M)) + s(P_6(M)) + s(P_7(M)) + s(P_8(M)) \\ &= 2 \sum_{i,j \leq 4} a_{ij} = \hat{0} \end{aligned}$$

On montre que chacune des huit figures paires peut apparaître en position P_{12} , et que pour chacune d'elle, il y a exactement 8.192 tableaux dans ce cas. Ce résultat est établi par Ramdane Sadi [1989, p. 41], qui a étudié les tableaux dans lesquels l'élément neutre (2, 2, 2, 2) apparaît en position P_{12} . Un cas particulier est celui des tableaux dont la matrice mère est symétrique par rapport à la deuxième diagonale. Plus généralement, les matrices mère des tableaux de ce type forment, par définition, le noyau $\text{Ker}(P_{12})$ du morphisme P_{12} . Or ce morphisme est surjectif de $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{16}$ dans le sous-groupe des figures paires. En effet, soit M la matrice ayant un seul coefficient a_{ij} égal à 1, les autres étant égaux à 2. L'expression de P_{12} donnée ci-dessus à l'aide du morphisme s montre que $P_{12}(M)$ a ses deux coefficients i et j égaux à 1, et les deux autres égaux à 2. Par combinaison, on peut ainsi fabriquer pour chaque figure paire, une matrice M telle que $P_{12}(M)$ soit égale à cette figure. Il en résulte que $\text{card}(\text{Im}(P_{12})) = 8$, donc $\text{card}(\text{Ker}(P_{12})) = 65.536 / 8 = 8.192$. Plus généralement, pour chaque figure paire, le nombre de tableaux ayant cette figure en position P_{12} est égal à 8.192.

En effectuant le même raisonnement pour les autres positions secondaires, on montre que chacune des seize figures peut apparaître dans ces positions, et que pour chacune d'elle, il y a exactement 4.096 tableaux dans ce cas. En effet, tous les morphismes associés sont surjectifs de $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{16}$ dans le groupe des seize figures. Pour les colonnes de première génération P_9, P_{11}, P_{13} et P_{15} , cela est évident car toute figure peut être obtenue comme combinaison, dans la matrice initiale, de cette figure et de l'élément neutre. Pour P_{10} et P_{14} , on peut obtenir une figure quelconque dans cette position, en plaçant la figure voulue dans l'une des lignes de la matrice mère (respectivement colonnes), et en plaçant l'élément neutre dans les trois autres. Pour P_{16} , il suffit de remarquer que si l'on place la figure voulue à la fois dans la colonne de droite P_1 et dans la première ligne, et que l'on complète la matrice avec des 2, alors celle-ci est symétrique par rapport à la deuxième diagonale, et

donne donc l'élément neutre en P_{12} . Dès lors, $P_{16} = P_{12} + P_1$ contient la même figure que P_1 . Ainsi, pour toutes les positions secondaires P_i , avec $9 \leq i \leq 16$ et $i \neq 12$, on a $\text{card}(\text{Im}(P_i)) = 16$, donc $\text{card}(\text{Ker}(P_i)) = 65.536 / 16 = 4.096$. On en déduit que pour chacune des seize figures, le nombre de tableaux ayant cette figure en position P_i pour $9 \leq i \leq 16$ et $i \neq 12$ est égal à 4.096.

Il serait vain d'essayer de relier ces énumérations aux représentations mentales des devins, mais il est plausible, en revanche, que leurs connaissances incluent le constat que toute figure paire peut apparaître en P_{12} , et qu'une figure quelconque peut apparaître dans toutes les autres positions secondaires.

Jean-François Rabedimy a mis en évidence d'autres règles de vérification des tableaux utilisées par les devins. L'une d'elle concerne les combinaisons de colonnes $P_i + P_j$. Si l'on énumère tous les couples (P_i, P_j) possibles, en exprimant pour chacun d'eux la somme $P_i + P_j$ en fonction des figures mère P_1 à P_8 , on obtient certaines égalités. Parmi elles, on trouve quinze égalités qui font intervenir deux couples de même somme (par exemple $P_1 + P_{13} = P_2 + P_{14}$). Mais il existe de surcroît deux séries remarquables d'égalités faisant intervenir trois couples de même somme :

$$\begin{aligned} P_{10} + P_{16} &= P_2 + P_{13} = P_1 + P_{14}, \\ P_{12} + P_{15} &= P_{10} + P_{13} = P_2 + P_{16}. \end{aligned}$$

La première série est mentionnée par Jean-François Rabedimy. D'après ses informations, les devins vérifieraient l'égalité de ces trois sommes, pour s'assurer que leur construction des tableaux de *sikidy* est correcte. Il appelle cette règle le *tsy misara-telo* (les « trois inséparables ») [1976, p. 81]. L'autre série de trois sommes égales est mentionnée par Marcia Ascher, mais elle ne semble pas utilisée par les devins [1997, p. 385].

2.3. TOKAN SIKIDY ET SIKIDY FOHATSE

Les devins étudient certains tableaux particuliers de *sikidy*, définis par des propriétés logiques. Une première catégorie de tableaux fait intervenir une répartition des seize figures selon les points cardinaux. Cela revient à définir une application γ de $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^4$ dans l'ensemble des points cardinaux $\{\text{nord}, \text{sud}, \text{est}, \text{ouest}\}$. Dans le système Antandroy, la répartition est la suivante :

$$\begin{aligned} \gamma^{-1}(\text{nord}) &= \{\text{renilaza}, \text{alibiavo}, \text{karija}, \text{adalo}\}, \\ \gamma^{-1}(\text{sud}) &= \{\text{alimizanda}, \text{alasad}, \text{tareky}, \text{asombola}\}, \\ \gamma^{-1}(\text{est}) &= \{\text{alaimora}, \text{adabara}, \text{alotsimay}\}, \\ \gamma^{-1}(\text{ouest}) &= \{\text{aliksily}, \text{alakarabo}, \text{alokola}, \text{alohotsy}, \text{alakaosy}\}. \end{aligned}$$

Cette application n'a pas de propriétés algébriques particulières, et sa définition varie d'une ethnie à l'autre (le système Antaimorona, par exemple, est différent du système Antandroy).

Les tableaux *tokan sikidy* sont ceux tels que l'un des points cardinaux n'apparaît qu'une seule fois parmi les seize positions du tableau. On peut les caractériser par la formule logique suivante :

$$\exists i \leq 16, \forall k \neq i, \gamma(P_k(M)) \neq \gamma(P_i(M)).$$

Le terme *sikidy into* est également utilisé pour désigner ces tableaux.

Un programme informatique tournant sur un ordinateur portable met quelques secondes pour parcourir l'ensemble des 65.536 tableaux de *sikidy* possibles. Nous avons fait un programme en Lisp qui permet d'énumérer les tableaux *tokan sikidy*, et plus généralement, d'extraire tout sous-ensemble de tableaux vérifiant une propriété particulière. On montre ainsi qu'il existe 15.125 *tokan*

sikidy dans le système Antandroy (et 12.496 dans le système Antaimorona, dont la répartition en points cardinaux est différente).

Il existe une autre catégorie de tableaux remarquables, qui est passée relativement inaperçue dans les études sur le *sikidy* (Decary est l'un des seuls à en donner quelques exemples, sous le nom de « *sikidy divers* » [1970, p. 38-41]), mais cette catégorie semble bien connue des devins. Les tableaux *sikidy fohatse* sont ceux dans lesquels une même figure est répétée un grand nombre de fois, c'est-à-dire concrètement, un nombre de fois supérieur à huit. Ils sont définis par la formule logique suivante :

$$\exists i_1, i_2, \dots, i_8 \leq 16, P_{i_1}(M) = P_{i_2}(M) \dots = P_{i_8}(M).$$

Notre programme informatique montre qu'à partir de huit occurrences d'une même figure, certaines impossibilités apparaissent. Il est impossible, en effet, d'obtenir exactement huit occurrences des figures suivantes : *alokola*, *alikisy*, *alaimora*, *renilaza*, *alibiavo*, *adalo*, *tareky* (bien qu'on puisse, pour certaines d'entre elles, obtenir plus de huit occurrences). En revanche, il est toujours possible de construire un tableau avec exactement sept occurrences d'une figure donnée, quelque soit cette figure.

Lorsque cela est possible, le nombre de manières d'obtenir plus de huit occurrences varie de un à trente environ. En fonction de la figure choisie, et du nombre d'occurrences voulues, il arrive que la solution soit unique. C'est le cas des configurations suivantes, qui sont connues des devins pour la plupart :

- 16 *asombola* (il est évident, par définition, que l'élément neutre est le seul qui puisse être répété dans toutes les positions),
- 11 *karija*, 11 *alimizanda*, 11 *alakarabo*,
- 10 *alakaosy*,
- 9 *tareky*, 9 *alimizanda*, 9 *adalo*, 9 *karija*, 9 *alokola*,
- 8 *alotsimay*, 8 *alohotsy*, 8 *alakaosy*.

Les devins s'intéressent également aux possibilités de combiner les propriétés logiques entre elles, par exemple en cherchant des tableaux qui soient à la fois *fohatse* pour une certaine figure, et *tokan* pour une autre, ou bien plusieurs fois *tokan*. Le tableau 2, qui nous a été donné par Njarike, est à la fois *fohatse* avec 8 *adabara*, et deux fois *tokan* (*alakarabo* à l'ouest en position *bilady*, et *renilaza* au nord en position *fahatelo*).

| | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| | | o | n | * | * | | |
| | | • | • | •• | •• | | * |
| | | •• | •• | •• | •• | | s |
| | | • | •• | • | • | | s |
| | | • | •• | • | • | | s |
| •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• |
| •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• |
| •• | • | • | •• | • | • | •• | • |
| •• | • | • | •• | • | • | •• | • |
| s | * | * | s | * | * | s | * |

Tableau 2. Tableau à la fois *fohatse* (8 *adabara*) et doublement *tokan*.

On a indiqué par des * les occurrences de la figure *adabara* (qui est à l'est), et par des lettres n, o, s les points cardinaux des autres figures.

2.4. RECHERCHE DE TOKAN SIKIDY

Les devins recherchent de manière systématique les possibilités d'obtenir une figure donnée *tokan* dans une position donnée, et ils notent ces *tokan* dans des carnets. La figure 8 montre une page d'un carnet appartenant à Jean-Bosco Randriampaniry, devin Antaimorona habitant le quartier Anosipatrana à Tananarive. Cette page correspond à un classement systématique des *tokan* de la figure *tareky* (1, 1, 1, 1) depuis la position P_7 (en haut à droite) jusqu'à la position P_{14} (en bas à droite). On remarque que la case P_{12} est vide, car le devin ne connaît pas de tableau dans lequel *tareky* est *tokan* dans cette position.

Il existe une transformation simple des matrices mère, qui correspond en algèbre linéaire à la transposition matricielle (au changement de diagonale près), et que les devins utilisent pour obtenir, dans certains cas, un nouveau *tokan* à partir d'un *tokan* donné. Si M est une matrice mère, on note tM sa transposée par rapport à la deuxième diagonale (obtenue en échangeant lignes et colonnes, la ligne du haut devenant la colonne

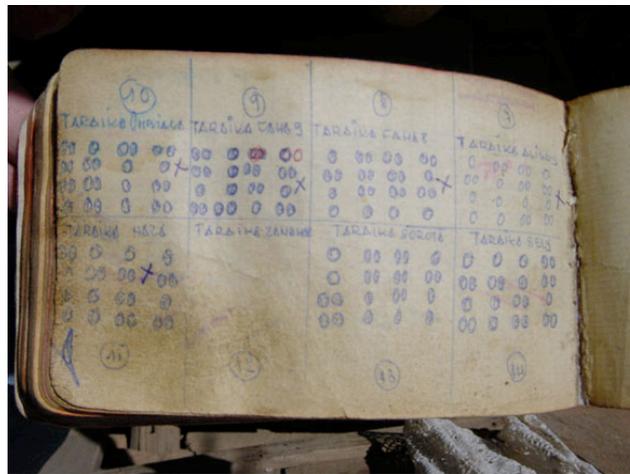


Figure 8. Classement systématique des *tokan*.

de droite). Le terme que les devins Antandroy utilisent pour désigner cette opération est *avaliky*, qui veut dire « inverser » dans le dialecte du sud. On a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} P_i({}^tM) &= P_{i+4}(M) \text{ pour } i = 1, 2, 3, 4, \\ P_i({}^tM) &= P_{i-4}(M) \text{ pour } i = 5, 6, 7, 8, \\ P_i({}^tM) &= P_{i+4}(M) \text{ pour } i = 9, 10, 11, \\ P_i({}^tM) &= P_{i-4}(M) \text{ pour } i = 13, 14, 15, \\ P_{12}({}^tM) &= P_{12}(M). \end{aligned}$$

Cela revient à dire qu'en transposant la matrice mère, on échange les colonnes P_{13}, P_{14}, P_{15} et P_9, P_{10}, P_{11} , en laissant P_{12} inchangée. Seule la colonne P_{16} est susceptible de faire apparaître une nouvelle figure, non présente dans le tableau initial. Notons qu'il existe des cas particuliers où cela ne peut pas se produire :

- dans le cas où la première ligne est égale à la colonne de droite,
- dans le cas où l'élément neutre apparaît en P_{12} .

De plus, si la matrice est symétrique par rapport à la deuxième diagonale, alors ces deux conditions sont simultanément remplies.

En calculant par ordinateur les différentes manières d'obtenir une figure donnée *tokan* dans une position donnée, on constate certaines impossibilités (le calcul est fait dans le système Antandroy). Elles ne concernent que les positions secondaires :

- (1) les huit figures impaires ne peuvent jamais être *tokan* en P_{12} (*haky*), ce qui n'est qu'une conséquence d'une propriété énoncée plus haut,
- (2) il existe trois figures du sud *tareky*, *asombola*, *alasy*, qui ne peuvent être *tokan* ni en P_{11} (*haja*), ni en P_{15} (*safary*),
- (3) il existe quatre figures de l'ouest *alakarabo*, *alokola*, *alohotsy*, *alakaosy*, qui ne peuvent être *tokan* ni en P_9 (*fahasivy*), ni en P_{13} (*asorita*),
- (4) la figure de l'ouest *alohotsy* ne peut pas être *tokan* en P_{10} (*ombiasy*), impossibilité déjà signalée dans l'article de Manelo Anona [2001].

On remarque que pour les deux séries d'impossibilités (2) et (3), les positions sont groupées par paires dans lesquelles elles s'échangent par transposition de la matrice mère, comme on l'a vu ci-dessus : P_{11} et P_{15} , P_9 et P_{13} . En revanche, la dernière impossibilité (4) est un cas où la transposition ne conserve pas la propriété d'être *tokan*. Le calcul par ordinateur montre, en effet, qu'il y a huit matrices mère donnant *alohotsy tokan* en P_{14} (*saily*), mais aucune d'entre elles ne se transpose en donnant *alohotsy tokan* en P_{10} (*ombiasy*). La plupart des impossibilités énumérées ici sont connues des devins, soit qu'ils les aient observées eux-mêmes, soit qu'elles leur aient été transmises par la tradition, et ils sont conscients du fait que dans les cas (2) et (3), elles associent des positions interchangeables par transposition de la matrice mère.

On a vu plus haut que les devins combinent les propriétés en recherchant des tableaux plusieurs fois *tokan*. Il était donc prévisible qu'ils essaient de construire un tableau trois fois *tokan*. Jean-François Rabedimy nous a montré un tel tableau, en nous précisant qu'il n'en existe qu'un seul exemplaire possible. Le calcul par ordinateur a confirmé qu'à une transposition près, on ne peut trouver qu'une seule matrice mère donnant un tableau trois fois *tokan* (ouest en *fahatelo* P_3 , est en *haky* P_{12} , nord en *kiba* P_{16}) :

| | | | | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|----|----|---|
| | | | s | o | s | s | | |
| | | | • | •• | • | • | | s |
| | | | • | •• | • | • | | s |
| | | | •• | •• | •• | •• | | s |
| | | | • | • | • | • | | s |
| | | | | | | | | |
| • | • | •• | •• | • | • | •• | • | |
| • | • | •• | •• | • | • | •• | • | |
| • | •• | • | •• | •• | •• | • | | |
| • | • | •• | • | •• | •• | •• | •• | |
| s | s | s | e | s | s | s | n | |

Tableau 3. L'unique triple *tokan* (à une transposition près).

Dans ce cas, il est évident que la transposition conserve la propriété de triple *tokan*, car la première ligne est égale à la colonne de droite. Ce tableau remarquable semble connu de certains devins (par exemple de Namdro, devin Antandroy habitant Majunga).

Il est évident qu'un tableau ne peut pas être quatre fois *tokan* (car il n'y a que quatre points

cardinaux). Pourtant, Njarike nous a montré un autre tableau remarquable, également connu de Falesoa, autre devin Antandroy de Tulear. Il s'agit d'une matrice mère qui donne quatre *tokan*, non pas au sein des même filles, mais en construisant les filles dans les quatre directions possibles. On voit sur la figure que les filles du bas donnent *asombola* (2, 2, 2, 2) *tokan* en *haky* P_{12} . Mais si l'on construit les filles vers la droite, on trouve la même figure *tokan* dans la même position. La matrice étant invariante par rotation de 180° , la propriété est conservée pour les filles construites vers le haut et vers la gauche.

Soit r l'application qui effectue la rotation d'une matrice de 90° dans le sens horaire (donc qui échange la première ligne lue de gauche à droite, avec la colonne de droite). La propriété exprime le fait que les quatre matrices mère $M, r(M), r^2(M), r^3(M)$ donnent toutes la même figure *tokan* en même position. Si l'on fait le calcul par ordinateur, on trouve trente solutions. Elles sont toutes *tokan* en position P_{12} , et la figure concernée est soit *alotsimay* (2, 1, 1, 2) à l'est, soit *asombola* (2, 2, 2, 2) au sud.

| | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| | | o | o | o | n | | |
| | | •• | • | • | • | n | |
| | | • | •• | •• | • | o | |
| | | • | •• | •• | • | o | |
| | | • | • | • | •• | o | |
| • | • | •• | •• | • | • | •• | • |
| • | •• | • | •• | • | •• | • | • |
| • | •• | • | •• | • | •• | • | • |
| •• | • | • | •• | •• | • | • | •• |
| n | o | o | s | n | o | o | n |

Tableau 4. Pseudo-quadruple *tokan* dans les quatre directions (bas, haut, droite, gauche).

La matrice du tableau 4 est de plus symétrique par rapport aux deux diagonales (et de ce fait invariante par rotation de 180° , car r^2 n'est autre que la composée des deux symétries par rapport aux deux diagonales). Si l'on impose de surcroît cette double symétrie aux matrices vérifiant la propriété ci-dessus, alors il ne reste que six solutions, formées de trois matrices (dont celle du tableau 4) et de leurs rotations de 90° . De plus, les matrices étant symétriques par rapport à la deuxième diagonale, il résulte d'une propriété énoncée plus haut que c'est nécessairement l'élément neutre *asombola* (2, 2, 2, 2) qui apparaît en P_{12} .

3. CONCLUSION

L'un des problèmes posés en ethnomathématique est la mise en évidence de liens entre les propriétés étudiées sur le plan mathématique, et les processus cognitifs sous-jacents chez les gens des sociétés concernées. De ce point de vue, l'enquête de terrain apporte un complément indispensable aux analyses formelles, en permettant d'associer aux propriétés abstraites une base cognitive réelle.

Dans le cas de la divination à Madagascar, on s'est efforcé de montrer comment chaque propriété mathématique était reliée à la pratique des devins. Cela ne veut pas dire, on s'en doute, que les devins manipulent la théorie des groupes. En revanche, la définition du groupe $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^4$ et ses propriétés immédiates sont reliées à des processus cognitifs bien réels chez les devins. On a vu que l'opération de combinaison des figures coïncide avec la loi interne du groupe, et que cette loi est appliquée par les devins avec une rigueur toute mathématique. De plus, ils utilisent certaines propriétés générales de la structure, comme l'élément neutre ou l'associativité, pour contrôler leur pratique, par exemple pour modifier l'ordre de certains calculs, ou pour en simplifier d'autres, ou encore pour effectuer des

vérifications. Plus généralement, les procédures ou énoncés qu'ils manipulent se traduisent naturellement en idées mathématiques. Par exemple, les tableaux *tokan* ou *fohatse* se définissent simplement à l'aide de formules logiques. Ou encore, le terme *avaliky* désigne une opération bien connue en algèbre linéaire appelée transposition de matrice.

Ainsi, le rôle de l'enquête de terrain est de tisser un réseau étroit de liens entre deux plans parallèles : le plan mathématique, sur lequel on met en évidence des propriétés abstraites, qui se développent de façon autonome selon les lois de la logique, et le plan cognitif, sur lequel on observe des processus mentaux réels, qui s'agrègent en système pour constituer le champ de connaissances propre aux représentants de la société étudiée.

BIBLIOGRAPHIE

ANONA M., « Aspects mathématiques du *sikidy* », Université d'Antananarivo, Département de mathématique et informatique, manuscrit, 2001.

AROM S., *Polyphonies et polyrythmies d'Afrique centrale. Structure et méthodologie*, Paris, Sela, 1985.

ASCHER M., *Ethnomathematics. A multicultural view of mathematical ideas*, New-York, Chapman & Hall, 1991, traduction K. Chemla, S. Pahaut, *Mathématiques d'ailleurs*, Paris, Seuil, 1998.

ASCHER M., « Malagasy *Sikidy*: A Case in Ethnomathematics », *Historia Mathematica*, 24, 1997, p. 376-395.

BENSON D., *Mathematics and Music*, Cambridge University Press, to appear, 2004.

BRENNER K.P., *Die kombinatorisch strukturierten Harfen - und Xylophonpattern der Nzakara (Zentralafrikanische Republik) als klingende Geometrie - eine Alternative zu Marc Chemilliers Kanonhypothese*, Bonn, Holos-Verlag, 2004.

CABANE J.-P., *Ululan, les sables de la mémoire*, Nouméa, Grains de sable, 1997.

CHEMILLIER M., « Cristallographie et musique », chapitre 9 de *Structure et méthode algébriques en informatique musicale*, Thèse d'informatique, Université Paris 7, 1989, p. 121-139.

CHEMILLIER M., « La musique de la harpe », in E. de DAMPIERRE (éd.), *Une esthétique perdue*, Paris, Presses de l'Ecole Normale Supérieure, 1995, p. 99-208.

CHEMILLIER M., de DAMPIERRE E., *Musiques des anciennes cours Bandia*, disque CD et notice CNRS/Musée de l'Homme, CNR 274 1009, Le Chant du Monde, 1996.

CHEMILLIER M., « Mathématiques et musiques de tradition orale », in H. GENEVOIS, Y. ORLAREY (éds.), *Musique & Mathématiques*, Lyon, Aléas-Grame, 1997, p. 133-143.

CHEMILLIER M. « Eric de Dampierre, un ethnologue passionné de musique. *In memoriam* », *Cahiers de musiques traditionnelles*, 11, 1998, p. 205-214.

CHEMILLIER M., trois notices pour le disque *La parole du fleuve. Harpes d'Afrique Centrale*, Paris, Cité de la musique, CM001, 1999.

CHEMILLIER M., « Ethnomusicology, Ethnomathematics. The Logic Underlying Orally

Transmitted Artistic Practices », in G. ASSAYAG, H.G. FEICHTINGER, J.F. RODRIGUES (eds), *Mathematics and Music*, Fourth Diderot Forum, European Mathematical Society, Berlin, Springer-Verlag, 2002, p. 161-183.

CHEMILLIER M., « Synchronisation of musical words », *Theoretical Computer Science*, 310, 2003, p. 35-60.

CHEMILLIER M., TRUCHET C., « Computation of words satisfying the "rhythmic oddity property" (after Simha Arom's works) », *Information Processing Letters* 86, 5, 2003(b), p. 255-261.

CHEMILLIER M., « Représentations musicales et représentations mathématiques », *L'Homme*, numéro spécial « Musique et anthropologie », 171-172, 2004, p. 267-284.

CHEMILLIER M., JACQUET D., RANDRIANARY V., ZABALIA M., « Aspects mathématiques et cognitifs de la divination *sikidy* à Madagascar », en préparation, 2004(b).

DECARY R., *La divination malgache par le sikidy*, Librairie orientaliste Paul Geuthner, 1970.

GARDENIER W.J.G., « Divination and Kinship Among the Sakalava of West Madagascar », *Madagascar: Society and History*, KOTTACK C.P., RAKOTOARISOA J.-A., SOUTHALL A., VERRIN P. (eds.), Durham, Carolina Academic Press, 1986, p. 337-351.

GERDES P., *Une tradition géométrique en Afrique. Les dessins sur le sable*, Paris, L'Harmattan, 1995.

GREGORY B., *Entropy and Complexity in Music: Some examples*, Master of Science, Department of Mathematics, University of North Carolina, 2004.

HALL R.W., KLINGSBERG P., « Asymmetric Rhythms and Tiling Canons », submitted to *American Math. Monthly*, 2004.

HÉBERT J.-C., « Analyse structurale des géomancies comoriennes, malgaches et africaines », *Journal de la Société des Africanistes*, 21, 1961, p. 115-208.

JAULIN R., « Analyse formelle de la géomancie », in P. RICHARD, R. JAULIN (éds.), *Anthropologie et calcul*, 10/18, 1971, p. 183-215.

RABEDIMY J.-F., *Pratiques de divination à Madagascar. Technique du Sikidy en pays sakalava-menabe*, ORSTOM, n°51, 1976.

SADI R., « Configurations et probabilités d'occurrence de la figure unité en P_{15} en géomancie additive et en géomancie multiplicative », in R. JAULIN, *Géomancie et Islam*, Paris, Christian Bourgois, 1989, p. 37-46.