Une introduction à la *Set-Theory*

Les concepts à la base des théories d'Allen Forte et de David Lewin[1]

Cet article se propose d'introduire les concepts de base de la *Set-Theory* aussi bien dans l'approche « classique » d'Allen Forte que dans les développements récents de la théorie « transformationnelle » de David Lewin.[2] Malgré l'abondance de publications autour de la *Set-Theory* dans les Universités et les centres de recherche Nord-américains, cette approche reste souvent peu connue en Europe dans ses principes de base. Un Colloque International, intitulé « *Autour de la Set-Theory* » se déroulera à l'Ircam dans le cadre du Festival Résonances (15-24 octobre 2003) sous l'égide de la Société française d'analyse musicale et en collaboration avec les Universités de Princeton, de Columbia et de Washington. Afin de préparer le lecteur aux sujets qui seront abordés à cette occasion, nous avons cherché à résumer dans les pages qui suivent certains des concepts majeurs de ces approches analytiques, en laissant toute évaluation critique aux débats qui ne manqueront pas d'animer le colloque.

Depuis les années soixante, la recherche théorique en musique s'est penchée sur des questions de formalisation des structures musicales. Des compositeurs / théoriciens tels que Milton Babbitt aux Etats-Unis, Iannis Xenakis en Europe et Anatol Vieru en Europe de l'Est, ont été les premiers à proposer certaines formalisation, non seulement comme moyen de renouvellement de la composition, mais aussi comme point de départ pour des applications analytiques nouvelles. Les idées et les outils proposés par ces derniers ont trouvé leur véritable dimension musicologique à l'intérieur de démarches analytiques qui ont pris le nom, aux Etats-Unis, de *Set-Theory*.

Dans leur expression la plus élémentaire ces théories proposent un protocole d'écriture sous forme symbolique des collections de notes (accords, agrégats, profils mélodiques etc.) considérées par l'analyste comme formant des unités pertinentes au sein de l'œuvre étudiée. Cette écriture facilite par la suite la mise en relation de ces collections via des concepts d'inclusion, de complémentarité et de transformation (pris, dans chaque cas, dans un sens spécifique relativement étendu). La première partie de cet article sera consacrée à une introduction à quelques-uns de ces concepts.

Au-delà des similitudes de surface, essentiellement liées à la dimension formelle commune à ces approches, certaines différences fondamentales séparent, par exemple, la démarche analytique de Forte de celle inaugurée par Lewin à partir des années quatre-vingt. Afin de donner un aperçu de ces différences, une dernière partie présentera quelques aspects plus spécifiques concernant les « stratégies analytiques » sous-jacentes à chacune de ces approches.

Tout au long de ces pages nous nous appuierons sur des exemples issus d'analyses de Forte et de Lewin de la quatrième des *Cinq pièces pour orchestre* Op. 10 (1913) d'Anton Webern et d'une analyse de Lewin du *Klavierstück III* (1954) de Karlheinz Stockhausen. Précisons que nous ne prétendons absolument pas restituer ces analyses dans leur intégralité. Les extraits

---

[1] Nous remercions la Société française d'analyse musicale et la revue *Musurgia* d'avoir sollicité cet article qui nous donne l'occasion de présenter dans une perspective plus générale quelques-uns des outils théoriques liés à la *Set-Theory* qui avaient été présentés lors du Premier Congrès Européen d'Analyse Musicale à Colmar en 1989 (voir [Deliège, 1989]; [Forte, 1989]; [Mesnage, 1989]). Cet article est dédié à la mémoire de David Lewin (1933-2003).

[2] [Forte, 1973], [Lewin, 1987].

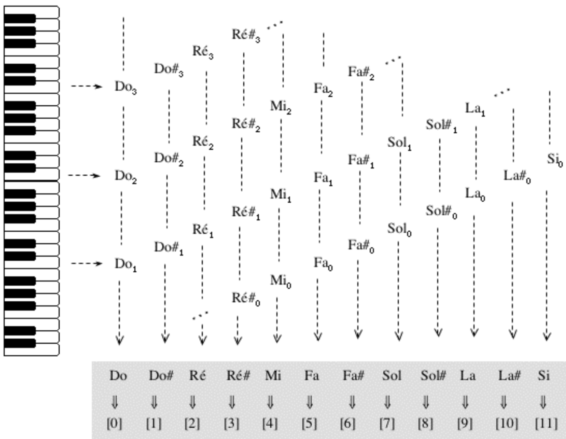
utilisés auront pour unique but d'illustrer les concepts introduits et nous renvoyons le lecteur intéressé aux textes originaux.

Écriture symbolique et représentation d'éléments musicaux

Classes de hauteurs et ensembles de classes de hauteurs

Toute analyse appliquant les principes de la *Set-Theory* se fonde sur la notion de *Classe de Hauteur* (*pitch class*). Les *classes de hauteurs* (CH) permettent de représenter les hauteurs de la gamme chromatique du tempérament égal via une double simplification. Les différentes écritures enharmoniques d'une même hauteur ainsi que l'octave à laquelle celle-ci apparaît ne sont en effet pas exprimées. Stricto sensu, il n'existe donc que douze CH distinctes : de *Do* jusqu'à *Si*, sans distinction entre, par exemple, *Do#* et *Réb*, ni entre un *Do* grave ou un *Do* aigu. Pour des raisons de commodité qui apparaîtront plus loin, les classes de hauteurs sont écrites sous forme numérique[3] : le zéro correspond au *Do*, le 1 au *Do#* et ainsi de suite jusqu'au 11 qui correspond à *Si* (voir figure 1).[4]

Figure 1 : Les douze Classes de Hauteurs

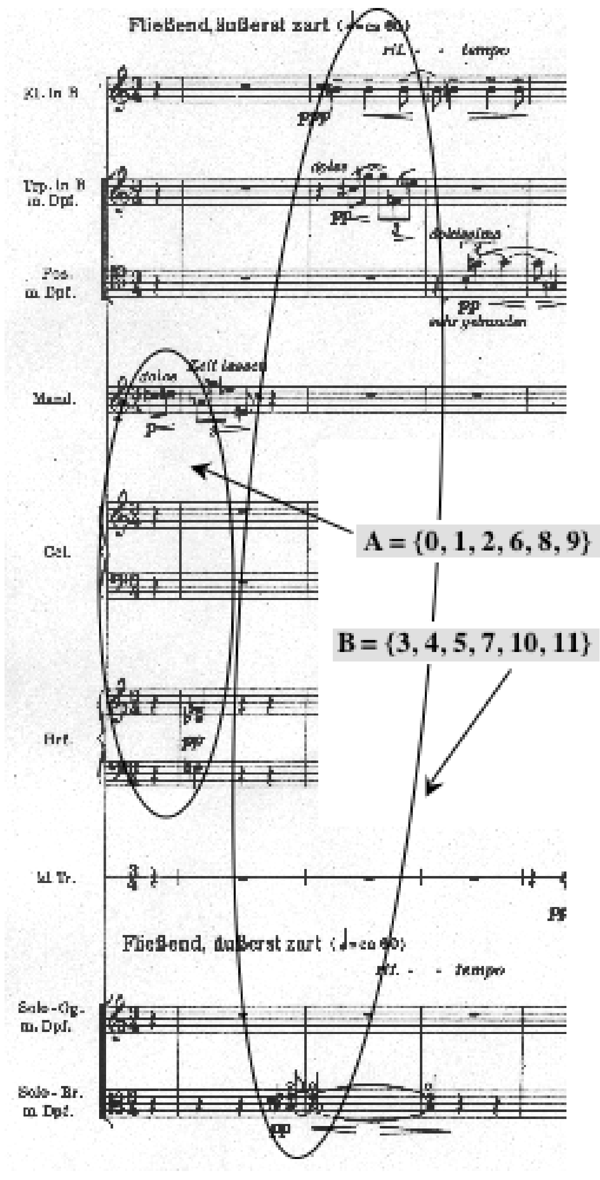


[3] D'un point de vue formel, les classes de hauteurs peuvent être exprimées en terme de *classes de congruence modulo 12.* Par définition deux nombres sont congruent modulo 12 si leur différence est un multiple entier de 12. Certaines opérations sur les CH peuvent ainsi être traduites par des relations algébriques opérant directement sur les classes de congruence, grâce à la structure sous-jacente de groupe cyclique Z/12Z. Notons que l'introduction de la notion de congruence à été appliquée à la théorie de la musique dès le XIXe siècle par Durutte [Durutte 1855]. La structure de groupe a pour sa part été mise en évidence indépendamment par des théoriciens / compositeurs tels Babbitt, Xenakis, Barbaud, Vieru etc. Ceci montre bien que certaines des idées à la base de la *Set-Theory* n'ont pas émergé uniquement au sein de ce que l'on appelle communément la « tradition américaine ». Voir à ce sujet [Verdi 1998] et [Mazzola 2003].

[4] Le choix de l'emplacement de l'origine est tout à fait arbitraire. Certains théoriciens ([Babbitt,1961], [Perle,1962]), ont traité cet aspect et proposé des systèmes à origine variable (*moveable-DO systems*). Dans la pratique le 0 est cependant, par convention, identifié avec la note *Do.* Le problème de la construction d'un système musical indépendant de l'origine, et de ses conséquences sur la notion d'*intervalle* entre classes de hauteurs a été développé dans [Lewin, 1977]. Remarquons qu'en Europe on retrouve les mêmes préoccupations chez Iannis Xenakis, dont la formalisation des échelles à travers la théorie des cribles permet de conserver l'indépendance du système musical vis-à-vis de toute origine [Xenakis, 1965].

L'*Ensemble de Classes de Hauteurs* (ECH) correspondant à une collection de notes, c'est-à-dire à un accord, agrégat ou extrait mélodique sélectionné par l'analyste, n'est autre que la liste des CH présentes dans cette collection, sans considération ni de l'ordre ni de la fréquence d'apparition. Le nombre d'éléments d'un ECH, également appelé la *cardinalité* de l'ensemble, est donc toujours compris entre un et douze. Un ECH est exprimé sous forme numérique entre accolades[5]. L'accord de *Do* majeur s'écrit donc {0, 4, 7} et la gamme par ton sur *Do#* s'écrit {1, 3, 5, 7, 9, 11}.

Figure 2 : Deux hexacorde de l'Op.10 n° 4 de Webern



Une analyse appliquant les principes de la *Set-Theory* commence donc typiquement par la transcription sous forme d'ECH des groupes de notes considérées comme formant des unités au sein de l'œuvre étudiée. Les critères régissant le sectionnement sont, pour une grande part, laissés au soin de l'analyste. Le fait qu'on attende de ce dernier qu'il soit en mesure de motiver ses choix n'efface pas les problèmes que peut soulever cette étape. La rigueur formelle et la généralité des outils de la *Set-Theory* contraste avec une mise en application particulièrement sensible aux spécificités de l'œuvre et aux buts que se fixe l'analyste.[6]

L'exemple ci-dessous reprend l'analyse par Forte de l'Op. 10 n° 4 de Webern.[7] Les deux hexacordes suivants sont sélectionnés : A = {0, 1, 2, 6, 8, 9} et B = {3, 4, 5, 7, 10, 11}.

Avant de discuter plus avant les caractéristiques des ECH, mentionnons la possibilité de visualiser ces derniers à l'aide de la représentation géométrique portant le nom évocateur d'*horloge des classes de hauteurs* (*pitch class clock*). Il s'agit d'un cercle divisé, tel une horloge, en douze sections égales. Le *Do* (c'est-à-dire le 0) est au sommet (à midi), le *Do#* à une heure et ainsi de suite jusqu'au *Si*, à onze heures. Un ECH peut ainsi être représenté par des points

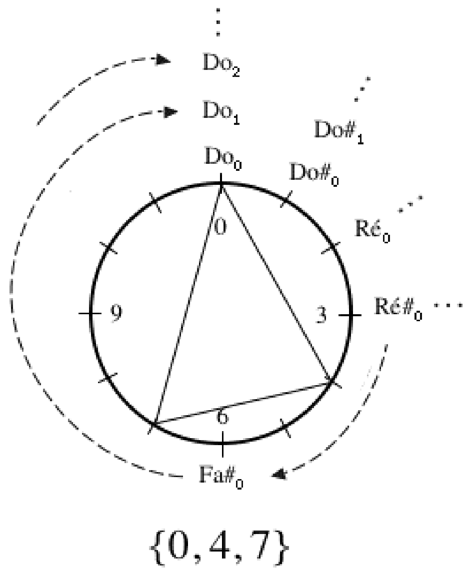
[5] La notation que nous adoptons diffère quelque peu de celle utilisée dans la *Set-Theory*. Les ECH sont généralement notés entre crochets, notation que nous introduirons plus bas avec la notion d'ECH abstrait. Pour ce qui concerne la terminologie en général, nous nous conformerons aux traductions proposées dans les articles parus dans la revue *Analyse Musicale* et au glossaire des termes analytiques contenus dans la version française de l'ouvrage *Analysis* de Ian Bent et Willian Drabkin ([Bent & Drabkin, 1998]).

[6] Nous renvoyons le lecteur à la discussion de cette question dans [Forte 1973 p. 89] et à l'échange Deliège / Forte [Deliège 1989 p. 68], [Forte 1989 p. 81].

[7] [Forte, 1973 ; 89].

placés sur les nombres correspondant aux CH qu'il contient et réunis par des segments de droites (voir Figure 2). Comme nous allons voir plus loin, cette représentation facilite l'assimilation de certaines des transformations communément appliquées aux ECH.[8]

Figure 3 : L'horloge des CH



Classes d'intervalles et contenu intervallique d'un ECH

Au concept de CH s'ajoute celui, similaire, de *classes d'intervalles* (*interval class*). Les *classes d'intervalles* (CI) ne sont autres que les intervalles musicales classiques représentés numériquement par le nombre de demi-tons qu'ils contiennent. Ainsi, la seconde mineure est représentée par 1, la seconde majeure par 2, la tierce mineure par 3 et ainsi de suite. Comme pour les hauteurs, les intervalles sont exprimés modulo l'octave : le 7 représente donc autant la quinte juste que ce même intervalle augmenté d'un multiple entier d'octaves. C'est pour cette raison que l'on parle de « classes » d'intervalles et non simplement d'intervalles et que ces classes sont au nombre restreint de douze : de la seconde mineure à l'octave.

Forte définit pour sa part un second degré de condensation de l'information. En effet, celui-ci considère un intervalle et son inverse comme faisant partie de la même « classe ». Ainsi, l'intervalle de seconde mineure et son inverse, la septième majeure, sont tous deux représentés par 1, celui de seconde majeure et de septième mineure par 2 et ainsi de suite. La légitimité d'une telle écriture peut bien sûr être débattue. Dans une certaine mesure, elle est cependant plus conséquente puisqu'elle découle directement de l'idée de réduction à l'octave.

Tout ensemble de hauteurs, dès lors qu'il contient au moins deux éléments, délimite un certain nombre d'intervalles auxquels la *Set-Theory* s'intéresse particulièrement. Il existe plusieurs formes de description des intervalles contenus dans un ECH, toutes se basant cependant sur l'une ou l'autre des CI définies ci-dessus.

La Structure Intervallique (SI)

Historiquement, la première de ces descriptions est la *structure intervallique* proposée indépendamment par Maciej Zalewski et Anatol Vieru dès les années cinquante.[9] Elle présuppose que les CH soient ordonnées par ordre croissant. La *structure intervallique*

---

[8] Cette démarche, privilégiant la représentation graphique au simple calcul numérique, est entièrement absente des textes de référence de la *Set-Theory* de [Forte 1973], [Rahn 1980] ou [Morris 1987], jusqu'à [Straus 1990]. Elle est par contre couramment employée par les théoriciens des systèmes diatoniques (*diatonic theory*) tels que [Clough & Myerson, 1985]. En France, des théoriciens tels qu'André Riotte et Marcel Mesnage ont montré son utilité pour la formalisation de structures musicales ainsi que pour la modélisation informatique de partition [Riotte et Mesnage, 2003]. Pour une discussion sur les liens entre représentation circulaire, *Set-Theory* et informatique, voir également [Andreatta & Agon 2003].

[9] [Zalewski, 1972], [Vieru, 1993].

recense alors les intervalles allant d'une CH à la suivante en incluant l'intervalle séparant la dernière note de la première. Ainsi, la *SI* de l'ECH {0, 4, 7} est (4, 3, 5) celle de l'ECH {1, 3, 5, 7, 9, 11} est (2, 2, 2, 2, 2, 2).

La Fonction Intervallique (IFUNC)

La définition de la SI est très proche de la notion traditionnelle utilisée, par exemple, pour décrire les différentes qualités harmoniques. Plus abstraite, mais également plus exhaustive, est la *fonction intervallique* (*interval function*) proposée par Lewin.[10] Les CI recensées sont alors toutes celles définies entre une CH donnée et les autres CH contenues dans l'ensemble. Ainsi, l'ECH {0, 4, 7} délimite six CI : 4, 7, 3, 8, 5 et 9 (respectivement de 0 à 4, de 0 à 7, de 4 à 7, de 4 à 0, de 7 à 0 et enfin, de 7 à 4). On remarquera que deux CH délimitent entre elles deux CI dont l'une est l'inverse de l'autre. En effet, l'intervalle allant de la CH 0 à la CH 4 correspond à la CI 4, celui entre 4 et 0 à la CI 8. La fonction IFUNC recense les deux occurrences séparément.

Le résultat de ce « recensement » est ensuite écrit sous la forme d'un vecteur contenant douze entrées. La première, notée IFUNC(0), indique le nombre de CI 0 (c'est-à-dire le nombre d'unissons, i.e. la *cardinalité* de l'ECH). La seconde, IFUNC(1), indique le nombre de CI 1 (secondes mineures) et ainsi de suite jusqu'à la dernière entrée, IFUNC(11), qui indique le nombre de CI 11 (septièmes majeures). L'exemple ci-dessus donne donc :

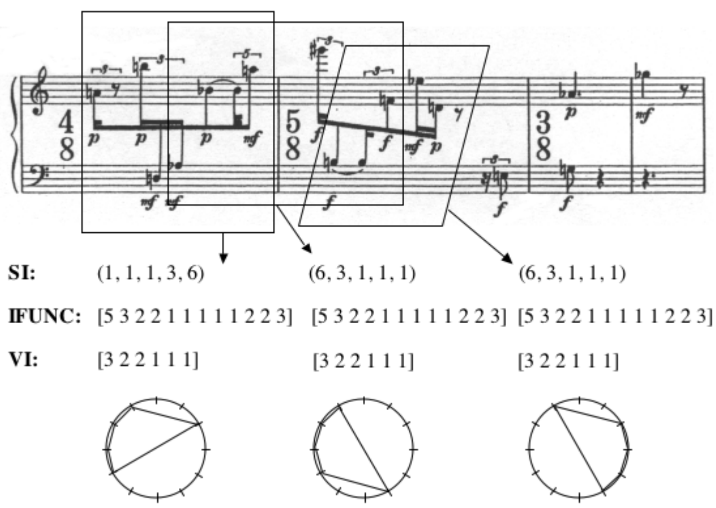
IFUNC = [3 0 0 1 1 1 0 1 1 1 0 0].

Le Vecteur Intervallique (VI)

Enfin, le *vecteur intervallique* (*interval vector*) de Forte recense les CI modulo l'inversion. Il est en tout point similaire à la FI de Lewin, à ceci près que le vecteur utilisé n'a que six entrées allant de la CI 1 à la CI 6 et que pour deux classes de hauteurs données une seule CI est recensée. Le VI correspondant à l'exemple ci-dessus est donc [0 0 1 1 1 0]. On remarquera la correspondance entre les deux formes de représentation des intervalles contenus dans un ECH. En effet, les six entrées du VI de Forte ne sont autres que les entrées 2 à 7 de la IFUNC de Lewin.

La figure suivante (Figure 3) exprime le contenu intervallique dans le cas de trois pentacordes présents dans le *Klavierstück III* de Stockhausen. Il s'agit des ECH suivantes : *A* =.{3, 8, 9, 10, 11}, *B* = {5, 8, 9, 10, 11} et *C* = {2, 3, 4, 5, 11}. Les trois contenus intervalliques SI, IFUNC et VI reflètent trois degrés d'abstraction différents. Leur « comportement » se clarifiera dès que seront

Figure 4 : Trois pentacordes et leurs contenus intervalliques



[10] La « fonction intervallique » a été proposée par Lewin dans un article paru à la fin des années cinquante [Lewin, 1959] mettant en relation deux ECH distincts. Il s'agit donc d'un concept antérieur à la parution de [Forte, 1973] et dont l'étude est loin d'être achevée [Lewin, 2003]. La définition générale de cette fonction sera abordée plus bas.

abordées les transformations élémentaires d'ECH.

Les Transformations Élémentaires d'ECH

Selon quels critères peut-on mettre en relation et comparer deux (ou plusieurs) ECH ? La Set-Theory propose différentes approches allant des cas les plus simples aux cas les plus généraux et souvent les plus abstraits.

Le premier niveau de relation se définit via le concept de *transformation* dont les deux formes principales sont la *transposition* et l'*inversion*.[11] Deux ECH sont alors considérés comme apparentés lorsque l'un est le résultat de l'autre via l'une ou plusieurs de ces transformations. Ces « relations » peuvent paraître au premier abord quelque peu arbitraires. Leur nature s'éclaircit cependant dès qu'elles sont considérées sous l'angle du contenu intervallique.

La Transposition

Le concept de transposition utilisé par la *Set-Theory* est, dans ses grandes lignes, celui appliqué par la plupart des techniques analytiques traditionnelles. Le transposé *A'* de *n* demi-tons d'un ECH *A* est en effet obtenu en ajoutant *n* demi-tons à chacune des CH contenue dans *A*. La transposition est généralement définie en termes de demi-tons *ascendants.* Cette convention est due au fait que toute transposition (d'ECH) est exprimable, du fait de la réduction à l'octave, en termes d'intervalles ascendants. Le lecteur vérifiera en effet aisément que la transposition d'un ECH de *n* demi-tons descendants est (formellement) équivalente à la transposition de (12 - *n*) demi-tons ascendants.

La transposition d'un ECH se note « T_i » avec l'indice *i* indiquant le nombre de demi-tons de l'opération.[12] Géométriquement, cette transformation s'exprime sur l'horloge des classes de hauteurs décrite précédemment par une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre d'un nombre d'unités égal au nombre de demi-tons utilisés pour la transposition.

En reprenant l'exemple précédent, on vérifie que le troisième pentacorde n'est autre que le transposé de six demi-tons du deuxième. On remarque que les trois formes de contenu intervallique sont laissées invariantes sous l'effet de cette opération. Il s'agit d'une propriété générale : la transposition laisse toujours le contenu intervallique d'un ECH inchangé.

L'Inversion

Dans l'approche classique, l'inversion est définie *par rapport* à une CH donnée. Celle-ci est généralement fixée sur le *Do* (c'est-à-dire la CH 0). L'opération d'inversion, notée « I », consiste alors à inverser tous les intervalles des CH présentes dans l'ensemble par rapport à

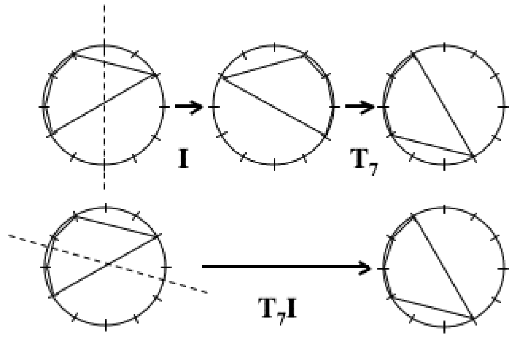
---

[11] Certains théoriciens (notamment Rahn et Morris) considèrent également l'opération de multiplication. Celle-ci est apparue plus tardivement. Sa définition est inséparable de la représentation numérique des CH. En effet, la multiplication d'un ECH est l'ensemble résultant de la multiplication par une des constantes 1, 5, 7 ou 11 de chaque CH de l'ensemble, avec la multiplication par 1 reflétant l'identité et celle par 11 l'inversion. Formellement les opérations de multiplication laissant inchangée la cardinalité d'un ECH correspondent aux *applications affines*. Une utilisation systématique de ces applications comme transformations musicales peut être trouvée dans [Mazzola 2003].

[12] Formellement, la transposition est l'opération Ti qui transforme une CH x dans la CH $x+i$ (modulo 12). Un ECH $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ est donc transformé dans l'ensemble $\{x_1+i, x_2+i, \ldots, x_m+i\}$, toujours modulo 12.

l'« axe » *Do*. Le *Ré#* devient le *Si*, le *Ré* le *Sib* et ainsi de suite. L'inverse de l'ECH {0, 4, 7} (*Do* Majeur) donne l'ECH {0, 5, 8} (*Fa* mineur).[13]

Figure 5 : Composition de deux transformations



L'opération d'inversion est rarement considérée de façon isolée mais plutôt en tandem avec l'opération de transposition. C'est pour cette raison que l' « axe » d'inversion possède une dimension arbitraire. Il peut d'ailleurs tout à fait se situer « entre » deux notes. Une inversion par rapport à une CH quelconque est en effet équivalente à une inversion par rapport au 0 suivie d'une transposition. On note traditionnellement « T_nI » la composition d'opérations consistant en une inversion suivie d'une transposition de *n* demi-tons ascendants.

Sur l'horloge des classes de hauteurs, l'inverse d'un ECH par rapport au *Do* correspond au symétrique par rapport à la droite passant par *Do* et le centre de l'« horloge ». L'inversion par rapport à une autre CH que le Do s'interprète de façon similaire. Seul change l'axe de symétrie qui passe soit par une CH donnée, soit « entre » deux CH. Le fait que le même résultat puisse être obtenu par une inversion par rapport au *Do* suivie d'une transposition se vérifie alors aisément.

L'exemple suivant montre comment le premier pentacorde du *Klavierstück III* peut être transformé dans le deuxième via la transformation T_7I.

En ce qui concerne le contenu intervallique cette opération laisse inchangées aussi bien la IFUNC que le VI. Cette observation est également vraie en général. La SI par contre est transformée dans son rétrograde.

Vers un « catalogage » des ECH

Historiquement, les observations précédentes concernant le contenu intervallique des transformations d'un ECH ont été à la base des diverses tentatives de classification des collections de hauteurs. Une première approche a consisté à considérer exclusivement la SI, menant à une catégorisation des ECH par rapport à l'opération de transposition. Deux ECH sont réunis dans une même « famille » lorsque l'un est le résultat de l'autre par une transposition. Il est alors aisé de vérifier que deux ECH font partie de la même « famille » en comparant leurs SI respectives.

Cette première démarche considère donc comme distincts deux ECH liés par la transformation d'inversion. Forte va pour sa part définir des « familles » via les opérations d'inversion et de transposition. Deux ECH font partie de la même « famille » lorsqu'ils sont identiques à une transposition ou inversion près.[14] Dans le catalogue défini par Forte chaque famille d'ECH est notée par deux entiers séparés par un tiret. Le premier indique la cardinalité de l'ECH, le second la position au sein du catalogue.

---

[13] Formellement, l'inversion I transforme une CH *x* dans la CH - *x* (modulo 12). Un ECH $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ est donc transformé dans l'ensemble $\{-x_1, -x_2, \ldots, -x_m\}$, toujours modulo 12.

[14] Formellement, le fait que l'on identifie des ECH à une transformation près (afin établir un catalogue exhaustif et cohérent) est lié à la notion de *relation d'équivalence* au sens mathématique. Une discussion approfondie des liens entre relation d'équivalence et la théorie musicale peut être trouvée dans [Lewin, 1987].

À la différence de la classification basée sur la SI, ni le VI ni le IFUNC ne permettent d'associer de façon univoque un ECH à une famille d'ECH selon la définition de Forte. En effet, deux ECH peuvent avoir le même VI sans que l'un soit une transposition ou une inversion de l'autre.

La notion de *forme primaire* (*prime form*) d'un ECH a pour fonction de faciliter la comparaison entre ECH et leur appartenance à l'une ou l'autre des familles définies. Tout ECH peut être réduit par une série d'inversions et de transpositions à une forme compacte unique commune à tous les ECH d'une même famille. La comparaison de deux ECH peut donc se faire en confrontant leurs formes primaires respectives. Deux ECH appartenant à des familles différentes auront des formes primaires distinctes.

Si le VI n'est pas suffisant pour associer un ECH à une entrée du catalogue, le fait que deux ECH partagent un même VI n'en constitue pas moins une relation entre ces deux ensembles. Dans la terminologie de Forte cette relation est appelée *Relation Z* (*Z-relation*).[15] L'exemple suivant montre un cas où deux hexacordes sont en relation Z.

Les Relations entre ECH

Relations ensemblistes littérales entre ECH

Outre la transposition et l'inversion, les relations entre ECH les plus élémentaires sont celles d'*inclusion* et de c*omplémentarité* dites *littérales*. Celles-ci sont directement empruntées à la théorie élémentaire des ensembles. Un ECH *A* est dit inclus dans un ECH *B* si tous les éléments (i.e. les CH) de *A* sont également éléments de *B.* L'ECH {0,7} est ainsi dit inclus dans l'ECH {0, 4 ,7}. De même pour le complémentaire : un ECH *A* est le complémentaire de l'ECH *B* si *A* et *B* n'ont aucun élément en commun et si tous les éléments qui ne sont pas dans *A* sont élément de *B* (et vice-versa). La gamme par tons sur *Do*, {0, 2, 4, 6, 8, 10}, est ainsi le complémentaire (littéral) de celle sur *Do#*, {1, 3, 5, 7, 9, 11}. Le complémentaire (littéral) de l'accord de Do Majeur cité précédemment est pour sa part l'ECH :{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11}.

Relations ensemblistes abstraites entre ECH

Ces mêmes notions peuvent être définies au niveau plus abstrait des familles d'ECH sous les transformations de transposition et d'inversion. Un ECH *A* est alors dit inclus dans un ECH *B* s'il existe une relation d'inclusion littérale entre *A* et une transposition et / ou inversion de *B.* De même pour la relation de complémentarité. Un ECH *A* est le complémentaire (abstrait) de *B* si cette relation est vraie dans le sens littéral entre *A* et une transposition et / ou inversion de *B.*

Dans ce contexte abstrait, il est donc tout à fait possible que *A* soit inclus dans *B* alors que sur la partition étudiée les collections de notes représentées respectivement par *A* et par *B* n'ont aucun élément en commun. Il est également possible qu'un ECH soit inclus dans son complémentaire.[16]

---

[15] Dans ses premières tentatives de classification, Forte a envisagé la possibilité d'utiliser le VI comme seul critère. Les raisons motivant son rejet de cette voie sont discutées dans [Forte 1973 p. 21]. Notons également que d'autres relations (Rp, R0, R1 etc.) sont définies par Forte, mais ne seront pas abordées ici.

[16] Certains ont cru voir là une contradiction logique au sein de la *Set-Theory*. Tel n'est pas le cas puisque la relation (littérale) d'inclusion opère entre l'ECH considéré et une *transformation* de son complémentaire. Notons

Comme pour les transpositions et inversions, les relations ensemblistes qui viennent d'être définies renvoient également à des relations entre VI. Le cas de l'inclusion est relativement évident : lorsqu'un ECH *A* est inclus dans un ECH *B* un certain nombre de CI seront nécessairement communes aux deux ensembles. La relation est moins évidente dans le cas du complémentaire. Il existe cependant un théorème dû à Milton Babbitt, stipulant qu'un hexacorde aura le même VI que son complémentaire. Une version généralisée montre qu'une relation forte existe toujours entre le VI d'une ECH et celui de son complémentaire.[17] Notons que ces relations entre les VI sont valables dans le cas du complémentaire littéral autant qu'abstrait.

L'approche classique de la *Set-Theory* donne un poids particulièrement important aux relations d'inclusion et de complémentarité. En effet, la combinaison de ces relations est à la base du concept de *complexe d'ensembles (set complex)* proposé par Forte au début des années soixante[18] et qui relie dans des réseaux relationnels toute une série d'ECH. L'ECH au « centre » de ce réseau est appelé le *Nexus* du complexe. Forte définie deux formes de complexes : le complexe K et le complexe Kh.

Pour le premier, un ECH *A* fait partie du complexe K autour de l'ECH *A* (*A* est par définition le *Nexus* du complexe) si *B* est en relation d'inclusion (abstraite) stricte soit avec A soit avec son complémentaire *A'*. Notons que « relation d'inclusion » signifie à la fois « inclus » et « être inclus ». En ce sens *A* « est en relation d'inclusion » avec *B* si *A* est inclus dans *B* ou *B* est inclus dans *A*. Le complexe plus restrictif Kh stipule que la relation d'inclusion doit être vraie autant avec *A* qu'avec son complémentaire *A'*.

La mise en évidence d'un complexe reliant divers ECH au sein d'une même œuvre est une des principales stratégies analytiques de Forte.[19] Le complexe d'ensembles devient ainsi l'abstraction centrale de la théorie classique. C'est à partir de celui-ci que l'on peut établir un « réseau de relations » permettant l'étude du discours harmonique d'une œuvre. Notons que la nature de ce réseau relationnel est essentiellement ensembliste, dans le sens qu'elle est fondée sur les opérations d'inclusion et de complémentaire.

Une approche différente consiste à mettre en évidence des relations entre des objets en s'appuyant directement sur la notion de transformation. Le poids assumé par l'idée de transformation dans le processus analytique motive l'appellation de « théorie transformationnelle ».[20] À la différence de l'approche de Forte, celle-ci vise à recouvrir entièrement la partition étudiée à travers un enchaînement de transformations d'un ou d'un nombre restreint d'ECH.

Cette forme d'analyse nécessite un outillage formel beaucoup plus abstrait et général et qui, de surcroît, est parfois adapté par Lewin aux spécificités de l'œuvre qu'il étudie. Sans prétendre à l'exhaustivité, quelques éléments de cette approche théorique vont être présentés dans la section suivante.

---

d'ailleurs que ce type de relation se rencontre fréquemment : toutes les triades, tétracordes et pentacordes (sauf un) sont inclus de façon abstraite dans leurs complémentaires (voir [Castine, 1994 p. 48])

[17] Voir [Wilcox, 1983], [Lewin, 1987 p.145].

[18] [Forte, 1964].

[19] Une application de ce principe est décrite en détail dans l'analyse par ce dernier du *Sacre du Printemps* (1913) d'Igor Stravinsky [Forte, 1978]. Pour les développements plus récents autour de la théorie des complexes et sous-complexes d'ensemble voir [Morris, 1997].

[20] Les prémisses de cette approche peuvent être trouvées dans [Lewin, 1983].

Vers une approche transformationnelle

La fonction d'injection (INJ)

Le point de départ adopté par Lewin consiste à définir un cadre conceptuel suffisamment général pour inclure et généraliser les concepts de la *Set-Theory* classique. Formellement, cette généralisation est obtenue à travers le concept d'Ensemble d'Intervalles Généralisés (*Generalized Interval System*, ci-après GIS).[21] La première partie du principal ouvrage théorique de Lewin est dédiée à l'étude systématique de cette structure. La seconde développe l'analyse transformationnelle en montrant comment des réseaux de transformations construits lors du processus analytique peuvent être formellement ramenés à des structures abstraites de GIS.

Afin de donner un aperçu du degré de généralité du volet théorique de cette approche voyons tout d'abord comment se généralisent les notions d'inclusion et de complémentaire. Par la suite, deux exemples d'analyse seront brièvement commentés afin d'illustrer les deux principales formes de réseaux utilisés.

La relation d'inclusion, telle qu'elle a été abordée précédemment, peut être assouplie en considérant des degrés d'inclusion plus ou moins forts entre ECH. La fonction d'injection INJ (*injection fonction*) mesure précisément le degré d'inclusion d'un ECH dans un autre et généralise cette relation aussi bien dans le sens abstrait que littéral.[22] Par définition, la fonction d'injection INJ d'un ECH A dans un ECH B par rapport à une transformation f calcule le nombre d'éléments communs entre B et le transformé de A via f.[23]

Dans le cas particulier où f est la transposition on retrouve les relations d'inclusion littérales et abstraites. En effet, un ensemble A de cardinalité m est inclus *littéralement* dans un ensemble B si la fonction d'injection de l'ensemble A dans B, par rapport à la transposition de zéro demi-tons est égale à m. On note $\mathrm{INJ}(A, B)(\mathrm{T}_0) = m$.

Une simple généralisation permet également d'exprimer la relation d'inclusion abstraite en termes de fonction d'injection. Il suffit de remplacer T_0 dans la définition précédente par une transposition T_n et/ou une inversion I, (i.e. par toute transformation $\mathrm{T}_n\mathrm{I}$).[24] Par conséquent, un ensemble A de cardinalité m est inclus de façon *abstraite* dans un ensemble B s'il existe une transformation $\mathrm{T}_n\mathrm{I}$ pour laquelle la fonction INJ est égale à m. On note $\mathrm{INJ}(A, B)(\mathrm{T}_n\mathrm{I}) = m$.

---

[21] Formellement, un GIS est un ensemble d'objets musicaux S, avec un *groupe* d'intervalles généralisés IVLS et d'une fonction « intervalle » *int* qui associe à deux objets a et b dans l'espace S un intervalle $int(a,b)$ dans IVLS vérifiant les deux propriétés suivantes :

1. Pour tout objet a, b, c dans S $int(a,b)int(b,c)=int(a,c)$.
2. Pour tout objet a dans S et tout intervalle i dans IVLS, il y a un seul objet b dans S tel que $int(a,b)=i$.

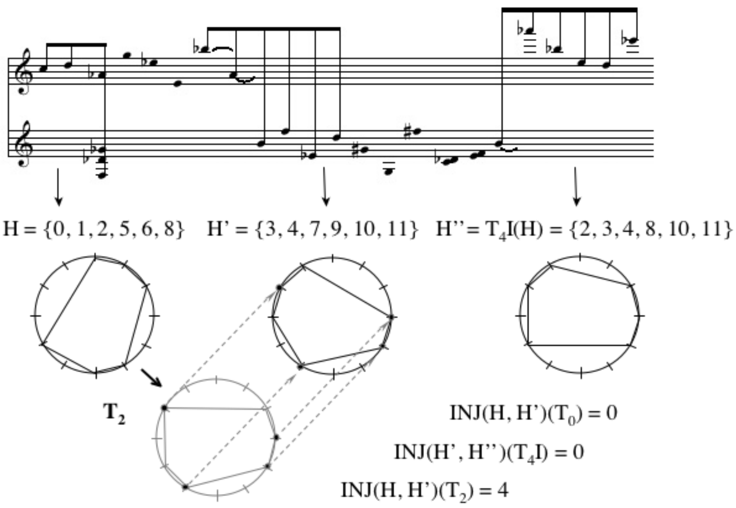
Le deuxième chapitre de [Lewin, 1987] offre plusieurs exemples démontrant la flexibilité du concept de GIS, aussi bien dans les domaines des hauteurs et de rythmes que dans des « espaces » musicaux plus généraux, tels que celui des profils mélodiques (voir également [Roeder, 1994]), des fonctions tonales ou encore des transformations néo-riemanniennes (voir également [Gollin, 2000]).

[22] Ce type de question est abordé traditionnellement dans la littérature Américaine sous l'appellation de « théorèmes des notes communes » (*common tone theorems*). Voir notamment [Rahn, 1980 ch. 5] pour un traitement détaillé de ce sujet.

[23] Formellement on indique la fonction d'injection de l'ECH A dans B (par rapport à une transformation f) par la notation suivante: $\mathrm{INJ}(A,B)(f)$.

[24] D'autres transformations, telle la multiplication, peuvent également être considérées. Voir à ce sujet [Lewin 1987, ch. 6].

Figure 6 : La fonction INJ



La figure suivante montre un exemple d'application de la fonction d'injection dans le cas de trois hexacordes « complémentaires » de l'Op. 10 n° 4 d'Anton Webern. Trivialement, les deux premiers hexacordes H et H' étant littéralement complémentaires, la valeur de INJ(H, H')(T_0) est égale à zéro. De même, le troisième hexacorde H'' étant une transformation du premier par l'opération T_4I, H' et H'' sont complémentaires au sens abstrait. Par contre, entre H' et la transposition de 2 demi-tons de H, quatre éléments sont communs. On a donc INJ(H,H')(T_2) = 4, ce qui signifie que les deux hexacordes partagent (au sens abstrait) un même tétracorde. Autrement dit, le tétracorde {4, 5, 7, 10} du premier hexacorde est inclus de façon abstraite dans le second.

La fonction intervallique généralisée (IFUNC)

Le processus de généralisation entamé avec la fonction INJ s'étend également à la notion de contenu intervallique. En effet, la fonction IFUNC définie précédemment peut être reformulée afin de permettre la comparaison de deux ECH.

Soient *A* et *B* deux collections de notes. Pour tout intervalle *i* entre 0 et 11, IFUNC(*A*, *B*)(*i*) détermine le nombre des couples de notes (*a, b*), avec *a* et *b* respectivement dans *A* et *B*, pour lesquelles l'intervalle entre *a* et *b* est égal à *i*. Par exemple, si l'on calcule IFUNC dans le cas des deux ECH précédents H et H', on obtient le résultat suivant :

IFUNC(H,H') = [0 3 4 4 3 3 2 3 3 4 4 3].

Ce vecteur restitue, dans une forme compacte, les douze valeurs obtenues par IFUNC(H, H')(*i*) pour *i* = 0, 1, …11. Par exemple, IFUNC(H, H')(0) est égale à 0 car les deux hexacordes n'ont aucune note commune (il n'y a aucun « unisson » entre les éléments des ensembles). Par contre, il est possible de trouver quatre paires d'éléments, le premier élément dans H, le second dans H', qui sont à distance d'une seconde majeure. La valeur apparaissant dans la troisième entrée de la fonction IFUNC est donc de quatre.[25]

On observera que la fonction INJ entre les deux hexacordes par rapport à la transposition T_2 abordée précédemment était également de quatre. Cette observation est vraie dans le cas général. Autrement dit, la fonction d'injection de l'ensemble *A* dans l'ensemble *B* pour une transposition T_i est égale à la fonction intervallique généralisée entre *A* et *B* pour la valeur i. On note : [26]

IFUNC(*A*,*B*)(*i*) = INJ(*A*,*B*)(T_i).

[25] Notons que la définition de la fonction intervallique donnée précédemment est un cas particulier du concept de IFUNC appliqué à deux ECH *A* et *B* telle qu'elle est décrite ici. Elle se ramène au cas où les deux ECH sont les mêmes.

[26] [Lewin, 1987 ; p. 147].

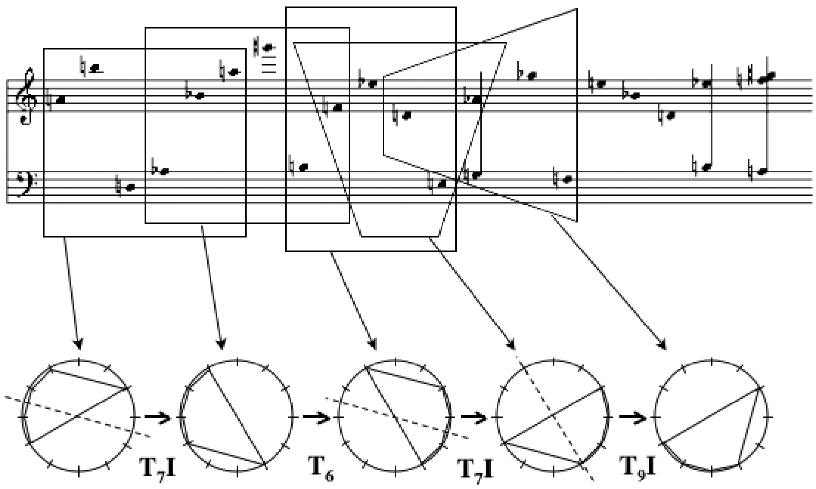
Le résultat précédent, exprimé sous la forme d'un théorème valable pour toute forme de GIS, a des conséquences dans le processus d'abstraction conduisant de l'approche classique à l'approche transformationnelle. Comme le souligne Lewin, « *on peut remplacer entièrement le concept d'intervalle (…) par celui de transposition dans un espace* »[27]. Plus généralement, on peut remplacer le concept d'intervalle avec celui d'espace musical abstrait sur lequel « opèrent » certaines transformations.

Les transformations deviennent ainsi les éléments fondamentaux du processus analytique. Parmi les diverses analyses transformationnelles, on peut distinguer deux stratégies. Dans une première approche, les transformations sont organisées dans un ordre qui reflète le déroulement temporel de la pièce (progression transformationnelle). Dans une approche plus abstraite, les transformations constituent un réseau relationnel au sein duquel il est possible de définir plusieurs parcours distincts (réseau transformationnel).

Progressions et réseaux transformationnelles

L'exemple suivant se réfère de nouveau à l'analyse par Lewin du *Klavierstück III.* Il montre comment le pentacorde *P* est progressivement transformé par inversion et transposition au cours des quatre premières mesures de la pièce.

Figure 7 : Progression transformationnelle



Une telle progression donne à chacune des transformations une position bien déterminée dans le déroulement temporel de la pièce. L'analyse reflète ainsi la progression chronologique du pentacorde au cours des premières mesures. Une telle structuration impose cependant à chacune des transformations une « présence » contredite par la réception de l'œuvre.[28]

Une stratégie différente considère les transformations comme une « *façon de structurer un espace abstrait des formes du pentacorde P à travers lesquelles la pièce se déroule* ».[29] Cet espace abstrait est représenté à l'aide de réseaux transformationnels.

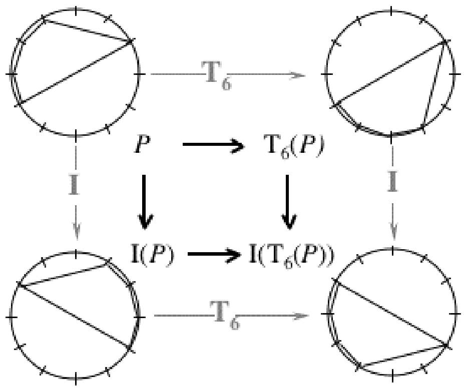
[27] [Lewin, 1987; p. 157].

[28] Pour reprendre la formulation de Lewin : « À cause précisément de la forte temporalité narrative, chaque transformation (*arrow*) doit porter un poids énorme pour affirmer une sorte de présence phénoménologique » [Lewin, 1987 ; p. 32].

[29] [Lewin, 1987 ; p. 34].

Pour prendre un cas relativement simple, considérons un réseau dans lequel on cherche à mettre en relation le pentacorde *P* avec trois de ses transformations[30] : I(*P*), T_6(*P*) et I(T_6(*P*)). Ce réseau est représenté par le diagramme suivant :

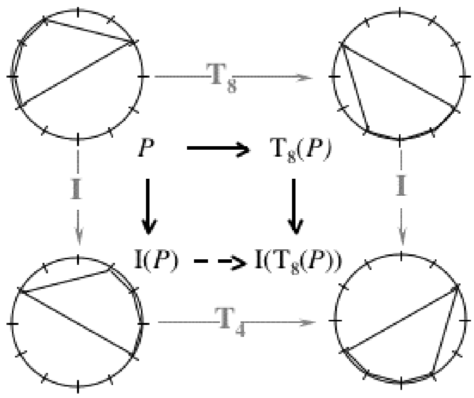
Figure 8 : Réseau transformationnel I



Ce qui donne au diagramme sa cohérence formelle est le fait que les relations entre les deux formes *P* et T_6(*P*) sont préservées entre leurs inversions respectives. Autrement dit, T_6I(*P*) est à la foi la transposition au triton de l'ensemble I(*P*) et l'inversion de l'ensemble T_6(*P*). Le lien perceptible entre les différentes formes du pentacorde se reflète ainsi dans la cohérence du réseau.

L'exemple suivant montre que l'opération d'inversion, selon sa définition traditionnelle, ne permet cependant pas en général de garantir cette cohérence dans tous les cas. Il suffit pour s'en persuader de considérer la transposition du pentacorde *P* de 8 demi-tons, c'est-à-dire l'ensemble T_8(*P*)= {4, 5, 6, 7, 10} et son inversion I(T_8(*P*)) ={2, 5, 6, 7, 8}. Dans le réseau obtenu les deux inversions I(*P*) et I(T_8(*P*)) ne conservent pas entre elles la même relation de transposition de 8 demi-tons.

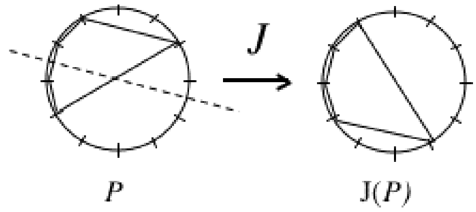
Figure 9 : Réseau transformationnel II



Lewin propose donc d'élargir le concept d'inversion en considérant une famille d'opérations « sensibles » à des aspects spécifiques de l'œuvre analysée. Une telle opération est dite *contextuelle*.[31]

Un exemple d'une telle transformation est l'opération d'inversion *J* transformant un pentacorde (ou ses transpositions) en son inverse tout en gardant inchangées (au sens littéral) les quatre notes qui forment le tétracorde chromatique inclus dans le pentacorde *P*. Il est toujours possible d'exprimer une occurrence particulière de *J* en terme de transformation T_nI. L'indice de transposition change cependant selon la position particulière du pentacorde dans le total chromatique.

Figure10: L'opération J



La figure suivante montre l'effet de l'opération *J* sur le pentacorde *P*={2, 8, 9, 10, 11} qui est donc transformé dans son « inverse contextuel » *p*={5, 8, 9, 10, 11}, et garde inchangé le tétracorde chromatique {8, 9, 10, 11}.

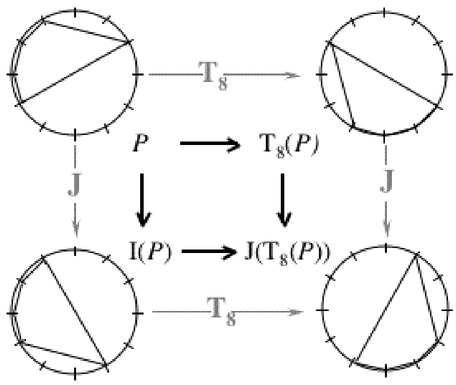
En outre, cette inversion contextuelle rend le réseau transformationnel précédent cohérent par rapport à

[30] Lewin propose d'utiliser une notation abrégée pour indiquer les transpositions et les inversions de *P*. Nous préférons garder la notation utilisée jusqu'à présent pour des raisons de continuité.

[31] Pour une discussion récente sur les *opérations contextuelles* on pourra se référer à l'étude de Philip Lambert [Lambert 2000].

toute opération de transposition du pentacorde de départ. La relation de transposition entre deux pentacordes *P* et $T_n(P)$ est conservée entre les deux formes inverses J(*P*) et $J(T_n(P))$ pour toute transposition T_n. La figure suivante montre le cas pour la transposition T_8.

Figure 11 : Réseau transformationnel III



C'est précisément ce tétracorde chromatique qui constitue selon Lewin un point d'encrage pour la perception, un aspect qui n'était pas pris en compte par la série d'inversions utilisées dans la progression transformationnelle précédente.

Grâce à cette nouvelle inversion, il est possible de créer des relations « formelles » entre diverses formes du pentacorde. L'ensemble de ces relations forme un espace de potentialités à l'intérieur duquel la pièce se déroule. À la différence de la progression temporelle précédente, les formes du pentacorde sont organisées dans un espace abstrait sans lien direct avec leur apparition chronologique. Cette structuration abstraite est néanmoins suggérée et limitée par les transitions effectives dégagées dans la progression temporelle. Pour paraphraser la conclusion de Lewin, dans le cas des progressions transformationnelles, quand nous sommes à un point d'une telle progression, nous sommes à un *instant* précis du temps, de la *narration* de la pièce, tandis que dans le cas d'un réseau abstrait nous sommes plutôt à un *point* bien défini à l'intérieur d'un *espace* créé par la pièce. Dans un réseau spatial, les différents événements musicaux « *se déroulent à l'intérieur d'un univers bien défini de relations possibles tout en rendant l'espace abstrait de cet univers accessible à nos sensibilités. Autrement dit, l'histoire projette ce qu'on appelle traditionnellement la* forme ».[32]

Conclusions

Nous espérons avoir donné un aperçu du fait que le caractère formel de l'outillage théorique ne fait en rien obstacle à la diversité des approches analytiques qui peuvent en découler. De fait, une présentation de la *Set-Theory,* aussi exhaustive soit-elle, ne saurait s'achever avec la description de son outillage formel. Elle ne peut cependant commencer qu'à partir de celle-ci.

La portée limitée de l'article, écrit sous la contrainte expresse de ne présupposer aucune connaissance préalable des théories présentées, ne permettait pas de rentrer dans de questions d'ordre plus épistémologique sur le rapport entre démarche théorique formelle et analyse musicale. Ces questions trouveront une place dans un Colloque qui visera précisément à aborder quelques-uns des sujets majeurs *Autour de la Set-Theory,* aussi bien d'un point de vue purement théorique que de ses multiples ramifications analytiques.

[32] [Lewin, 1987 ; p. 41].

Références bibliographiques

ANDREATTA, Moreno, et AGON, Carlos, «Formalisation algébrique des structures musicales à l'aide de la *Set-Theory* : aspects théoriques et analytiques », A paraître dans les actes des Journées d'Informatique Musicale, 2003.

BABBITT, Milton, « Set Structure as a Compositional Determinant », *Journal of Music Theory*, 5(2), 1961, p. 72-94.

BABBITT, Milton, « Twelve-Tone Invariants as Compositional Determinants », *The Musical Quaterly* 46, 1960, p. 246-259.

BARBAUD, Pierre, *La musique discipine scientifique*, Paris, Dunod, 1968.

BENT, Ian, et DRABKIN, William, *Analyse musicale. Histoire et méthodes*, Editions main d'œuvre, 1998 (version anglaise : *Analysis*, The MacMillian Press, 1987).

CASTINE, Peter, *Set-Theory Objects*, Frankfurt: Lang Press, 1994.

CLOUGH, John, et MYERSON, «Variety and multiplicity in diatonic systems », *Journal of Music Theory*, 29(2), 1985, p. 249-270.

DELIÈGE, Célestin, « La *Set-Theory* ou les enjeux du pléonasme», *Analyse Musicale*, 4e trimestre, 1989, p. 64-79.

DURUTTE, Camille, *Technie, ou lois générales du système harmonique*, Paris, Mallet-Bachelier, 1855

FORTE, Allen, «A Theory of Set-Complexes for Music, *Journal of Music Theory*, 8, 1964, p. 136-184.

FORTE, Allen, *The Structure of Atonal Music*, New Heaven, Yale University Press, 1973.

FORTE, Allen, *The Harmonic Organization of* The Rite of Spring, New Haven and London, Yale University Press, 1978.

FORTE, Allen, « La *Set-complex theory* : élevons les enjeux », *Analyse Musicale*, 4e trimestre, 1989, p. 80-86.

GOLLIN, Edward H., *Representations of Space and Conceptions of distance in Transformational Music Theories*, PhD, Harvard University, 2000.

LAMBERT, Philippe, « On contextual transformations », *Perspectives of New Music*, 38(1), 2000.

LEWIN, David, « A label-free development for 12-pitch-class systems », *Journal of Music Theory*, 21, 1977.

LEWIN, David, « Transformational Techniques in Atonal and other Music Theories », *Perspectives of New Music* 21, 1982/83, p. 312-371.

LEWIN, David, *Generalized Musical Intervals and Transformations,* New Heaven, Yale University Press, 1987.

LEWIN, David, *Musical Form and Transformation : 4 Analytic Essays,* New Heaven, Yale University Press, 1993

MAZZOLA, Guerino, *The Topos of Music*, Birkhäuser, 2002.

MESNAGE, Marcel, « Typologie des classes modales », *Musurgia*, Vol.IV n. 2, 1997, p. 77-93.

MESNAGE, Marcel, « La *Set-Complex Theory* : de quels enjeux s'agit-il? », *Analyse Musicale*, 4e trimestre, 1989, p. 87-90.

MORRIS, Robert, *Composition with Pitch-Classes,* New Heaven, Yale University Press, 1987.

MORRIS, Robert, « K- Kh- and Beyond» dans *Music Theory in Concept and Practice,* James BAKER, David BEACH et Jonathan BERNARD, eds., Rochester University Press, 1997.

MOSCARIELLO, Carmine, « Quando l'Est e l'Ovest si incontrano….ovvero, un sommario confronto tra la Teoria delle Strutture di Maciej Zalewski e la Set-Theory d'Allen Forte », *Analisi,* 16, 1995, p. 5-16.

PERLE, George, *Serial Composition and Atonality, Los Angeles,* 1962.

RAHN, John, *Basic Atonal Theory,* New York, Schirmer Books, 1980.

RAHN, John, *Music Inside Out. Going too far in musical essays,* Overseas Publisher Association, 2001.

REGENER, Eric, «On Allen Forte's theory of chords », PNM, 13, 191-212, 1974

RIOTTE, André et MESNAGE, Marcel, *Formalismes et modèles* (en deux tomes), à paraître chez l'Harmattan.

STRAUS, Joseph, *Introduction to post-tonal theory*, New Jersey, Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1990.

VERDI, Luigi, *Organizzazione delle altezze nello spazio temperato*, Treviso, Ensemble '900, 1998.

VIERU, Anatol, *The book of modes,* Bucharest, Editura Muzicala, 1993.

VUZA, Dan T, «Some mathematical aspects of David Lewin's Book *Generalized Musical Intervals and Transformations* », *Perspectives of New Music,* 26(1), 1988, p. 258-287.

WILCOX, Howard, J., « Group tables and the generalized hexachord theorem », *Perspective of new music,* 21(1-2), 1983, p. 535-539.

XENAKIS, Iannis, «La voie de la recherche et de la question », *Preuves,* 177, 1965.

ZALEWSKY, Maciej, *Harmonia Teoretyczna*, Pologne, 1972.