Formation ATIAM

Acoustique Traitement du Signal Informatique Appliqués à la Musique
Parcours multi-mentions du Master (M2) Sciences et Technologies de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)

UNIVERSITE PIERRE & MARIE CURIE
LA SCIENCE A PARIS

UE Méthodes mathématiques pour l'informatique musicale [MMIM]

Marc Chemillier - Moreno Andreatta
Equipe Représentations Musicales
IRCAM/CNRS UMR 9912

ircam
Centre Pompidou

CNRS
CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Plan du cours (M. Andreatta10/1; 17/1; 18/1; 24/1; 7/2 ; 15/2)

Survol sur l'émergence des structures algébriques en musique

Set Theory et théorie transformationnelle.

Théorie des cribles de Iannis Xenakis et structures d'ordre

Théorie modale d'Anatol Vieru

Enumération et classification paradigmatique des structures musicales en *OpenMusic*

Canons rythmiques et théorie des suites périodiques engendrées par différences finies

Nomos Alpha de Xenakis, groupe de rotations du cube et Fibonacci

Méthodes algébriques en Musique et Musicologie du XX^{e} siècle : aspects théoriques, analytiques et compositionnels

www.ircam.fr/equipes/repmus/moreno

www.ircam.fr/equipes/repmus/mamux

double perspective

Musique

Mathématiques modernes

XX^{e} siècle

Musicologie

Théorie

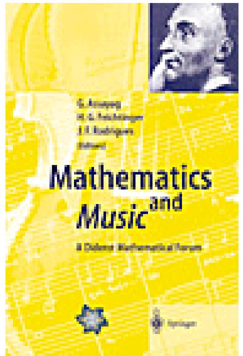
Analyse

Composition

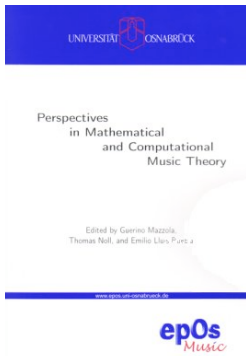
tripartition

Mathématiques/Musique

Quelques repères récents

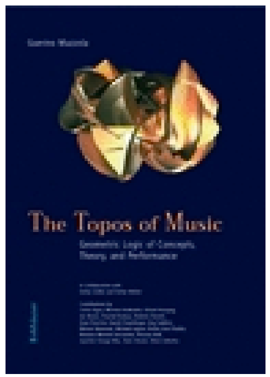


• 1999 : 4^{e} Forum Diderot (Paris, Vienne, Lisbonne), *Mathematics and Music* (Assayag et al., 2001)



• 2000 - 2003 : International Seminar on MaMuTh (Mexique, Zürich, Berlin). *Perspectives in Mathematical and Computational Music Theory* (Mazzola, Noll, Luis-Puebla, epOs, 2004)
http://www.epos.uos.de/music/

• 2004 : Formal Systems and Music. Special Issue of Soft Computing (Assayag, Cafagna, Chemillier)



• 2001 - 2005 : Séminaire *MaMuX* de l'IRCAM
http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/

• 2004 - 2005 : Séminaire « Penser la musique avec les mathématiques » (ENS/IRCAM)
http://www.entretemps.asso.fr/maths

Algèbre et Musique : un survol

➡ *Méthodes algébriques en théorie de la musique*

Tradition américaine 'set-théorique'
Musiques formelles
Théorie modale
Théorie mathématique de la musique

➡ *Musicologie computationnelle*

Musicologie systématique
CAO, AAO et TAO
« Analyse paradigmatique » en *OpenMusic*
➡ Implémentation du processus compositionnel

Babbitt
Lewin

Xenakis
Barbaud

Vieru

Mazzola

Adler
Seeger

Riotte
Mesnage
Assayag

La place des mathématiques dans la musicologie systématique

Guido Adler : « Umfang, Methode und Ziel der Musikwissenschaft » (1885)

II. Systematisch.

Aufstellung der in den einzelnen Zweigen der Tonkunst zuhöchst stehenden Gesetze.

A. Erforschung und Begründung derselben in der			B. Aesthetik der Tonkunst.	C. Musikalische Pädagogik und Didaktik	D. Musikologie
1. *Harmonik* (tonal od. tonlich).	2. *Rhythmik* (temporär oder zeitlich).	3. *Melik* (Cohärenz von tonal und temporär).	1. Vergleichung und Werthschätzung der Gesetze und deren Relation mit den appercipirenden Subjecten behufs Feststellung der *Kriterien des musikalisch Schönen.* 2. Complex unmittelbar und mittelbar damit zusammenhängender Fragen.	(Zusammenstellung der Gesetze mit Rücksicht auf den Lehrzweck) 1. Tonlehre, 2. Harmonielehre, 3. Kontrapunkt, 4. Compositionslehre, 5. Instrumentationslehre, 6. Methoden des Unterrichtes im Gesang und Instrumentalspiel.	(Untersuchung und Vergleichung zu ethnographischen Zwecken).

Hilfswissenschaften: Akustik und Mathematik.
Physiologie (Tonempfindungen).
Psychologie (Tonvorstellungen, Tonurtheile und Tongefühle).
Logik (das musikalische Denken).
Grammatik, Metrik und Poetik.
Pädagogik
Ästhetik etc.

« La deuxième grande partie de la musicologie est la partie systématique; cette partie se base sur la partie historique. (...) L'accent de l'observation réside dans ***l'analogie de la méthode musicologique avec la méthode scientifique*** *».*

Musique

Méthodes algébriques

Théorie

$\Updownarrow$

Composition

Théoriciens/Compositeurs

- Ernst Krenek
- Milton Babbitt
- Iannis Xenakis
- Anatol Vieru
- Pierre Barbaud
- Michel Philippot
- André Riotte
- ...

Vers l'émergence des structures algébriques en musique

Ernst Krenek et la méthode axiomatique

- *The Relativity of Scientific Systems*
- *The Significance of Axioms*
- *Axioms in music*
- *Musical Theory and Musical Practice*

Ernst Krenek : *Über Neue Musik*, 1937 (Engl. Transl. *Music here and now,* 1939).

«Physicists and mathematicians are far in advance of musicians in realizing that their respective sciences do not serve to establish a concept of the universe conforming to an objectively existent nature»

«As the study of axioms eliminates the idea that axioms are something absolute, conceiving them instead as ***free propositions of the human mind****, just so would this* ***musical theory*** *free us from the concept of major/minor tonality [...] as an irrevocable law of nature».*

Babbitt : *The function of Set Structure in the Twelve-Tone System*, PhD 1946/1992

Xenakis : *Musiques formelles*, 1963

Vieru : *Eléments d 'une théorie générale des modes*, 1967

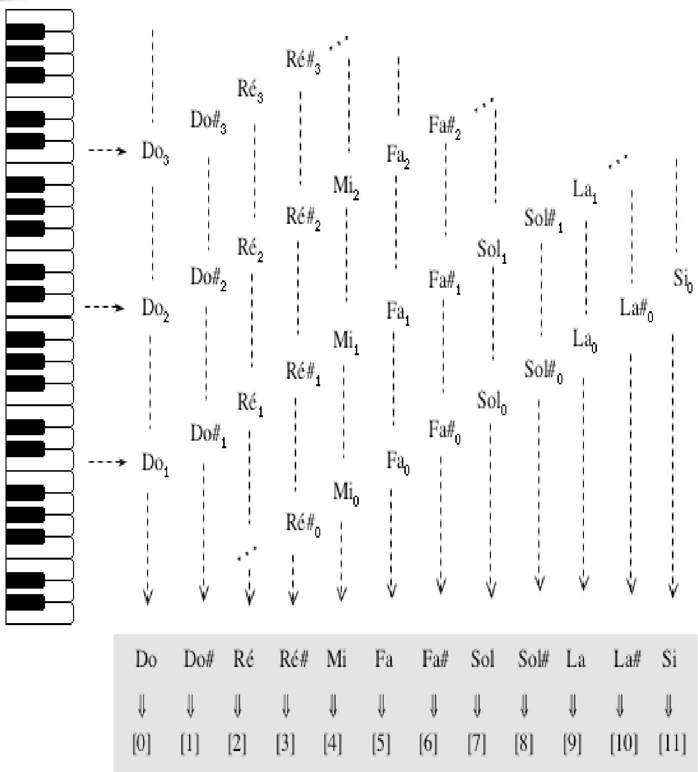
La structure de groupe en musique

Théorie → Groupe cyclique **Z/nZ**
Groupe dihédral $\mathbf{D_n}$
Groupe affine $\mathbf{Aff_n}$

Composition → Groupe de Klein
Groupe des rotations du cube S_4
Groupe cyclique

Towards an algebraic approach in music

The congruence relation mod 12

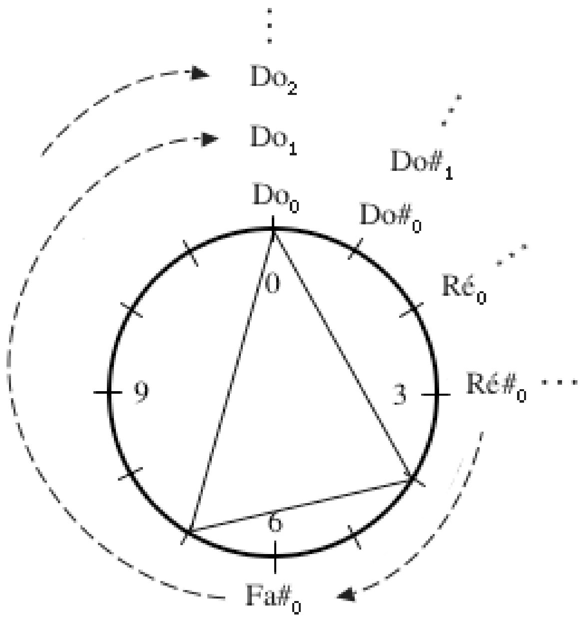


Camille Durutte:
- *Technie, ou lois générales du système harmonique* (1855)
- *Résumé élémentaire de la Technie harmonique, et complément de cette Technie* (1876)

« Two elements are congruent modulo 12 if their difference is equal to a multiple of 12 »

(M. Babbitt: *The function of Set Structure in the Twelve-Tone System*, 1946)

The emergence of group structure in music



(4,3,5)

Cyclic group
Z/12Z

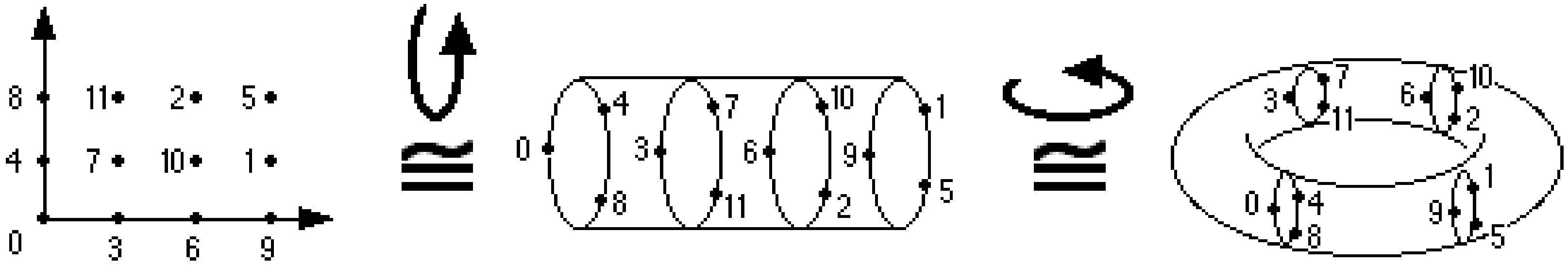
*The congruence modulo 12 is an **equivalence** relation*

- Reflexivity: $a \sim a$
- Symmetry: $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$
- Transitivity: $a \sim b,\ b \sim c \Rightarrow a \sim c$

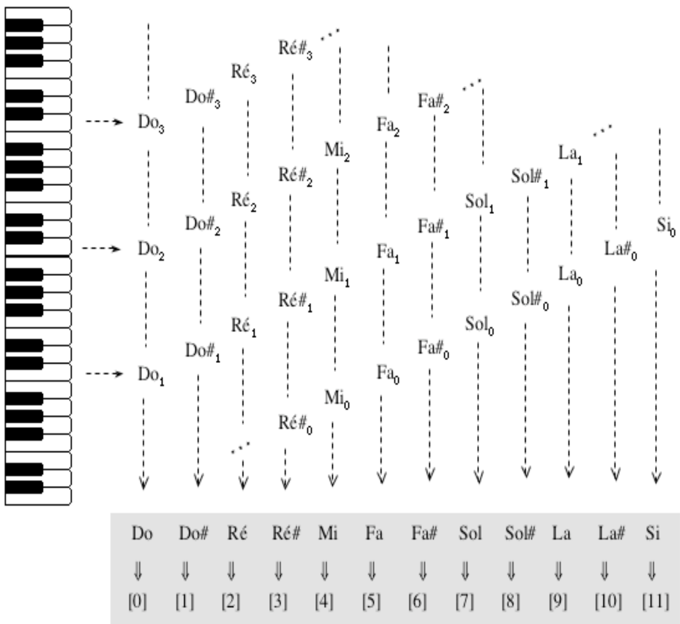
*The equivalence classes modulo 12 define a **group** structure*

- The operation is internal
- Existence of an identity
- Existence of an invers
- Associativity

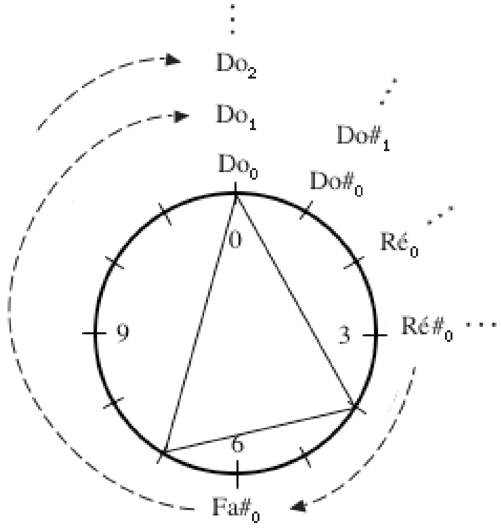
Formalisation vs représentation



Représentation toroïdale

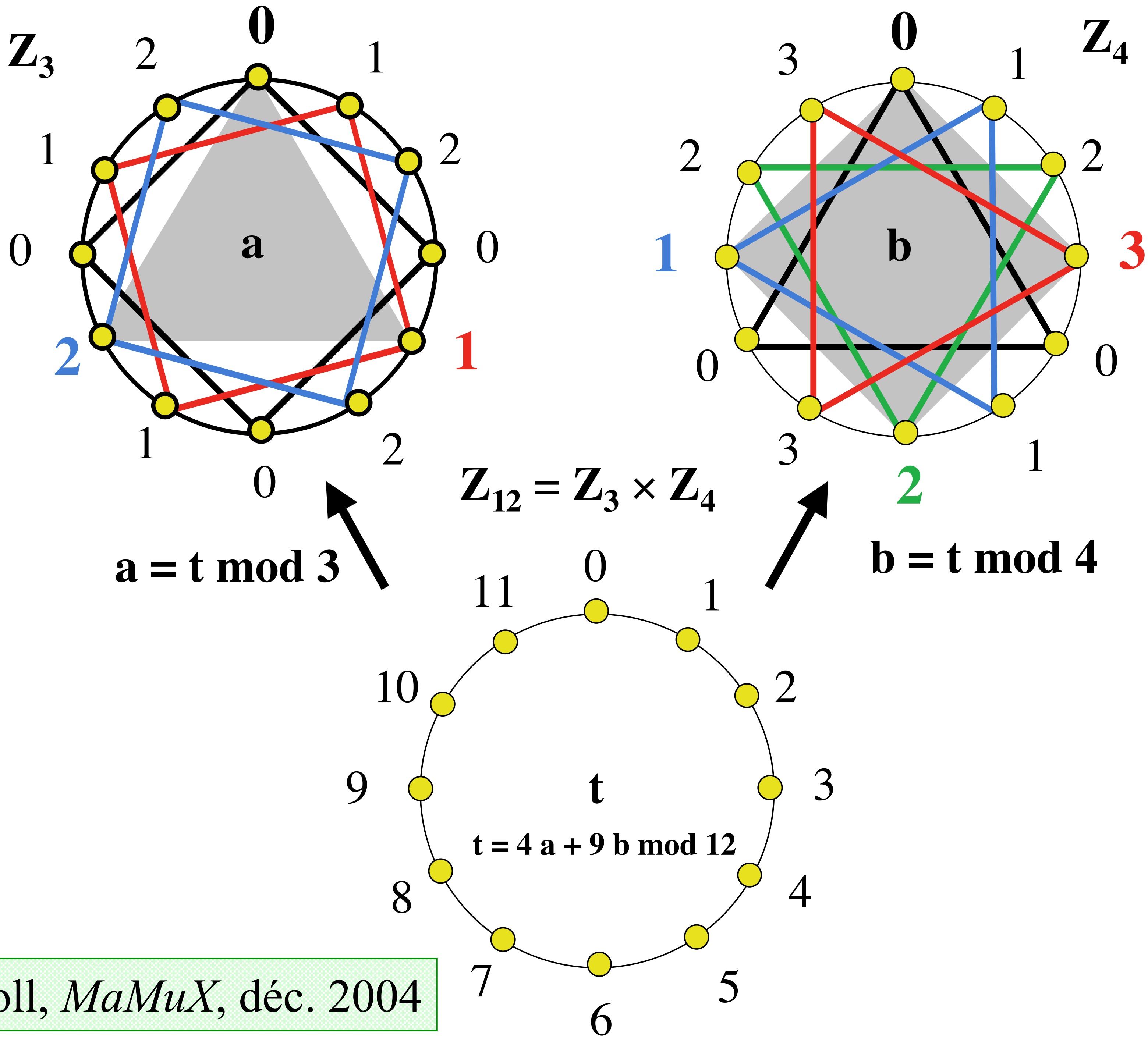


$$Z_{12} = Z_3 \times Z_4$$



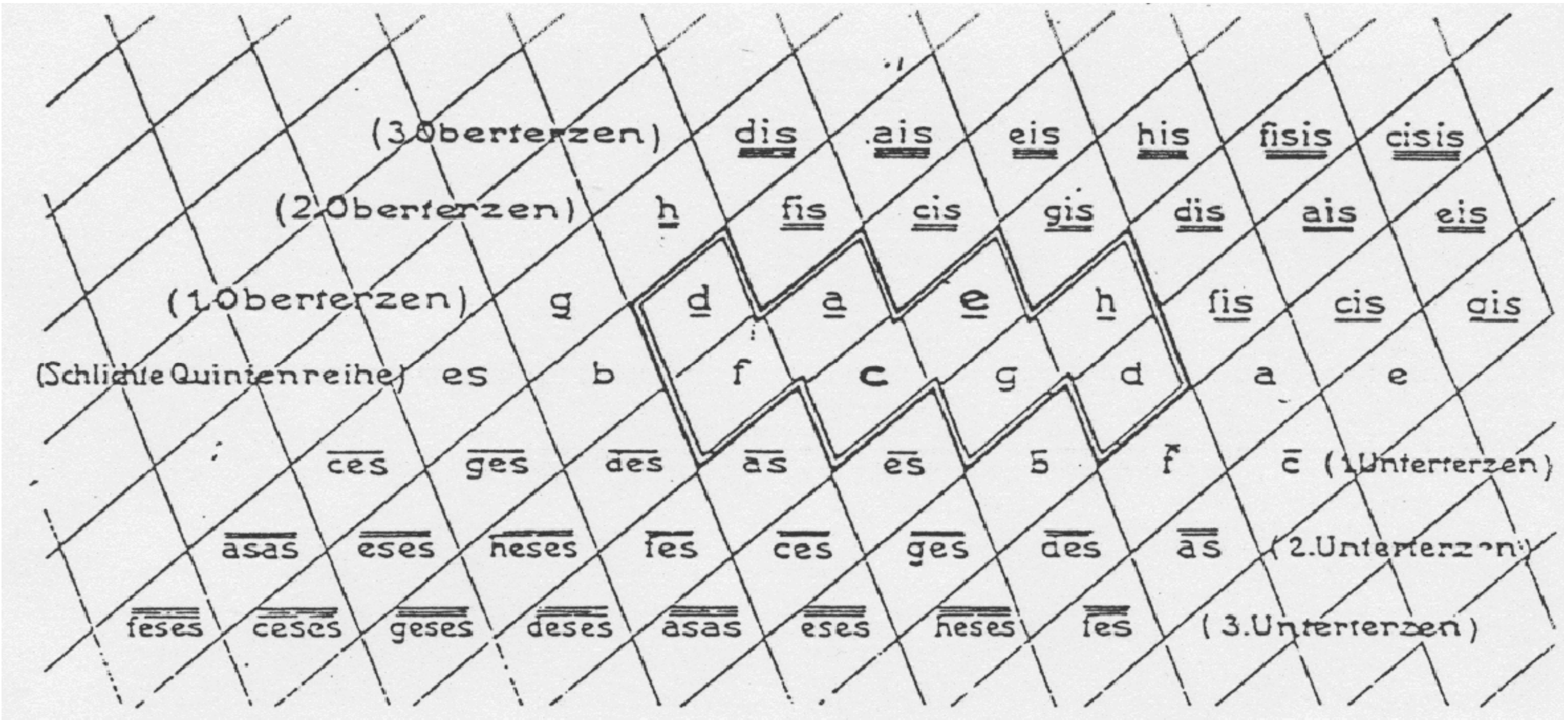
(4,3,5)

Représentation circulaire



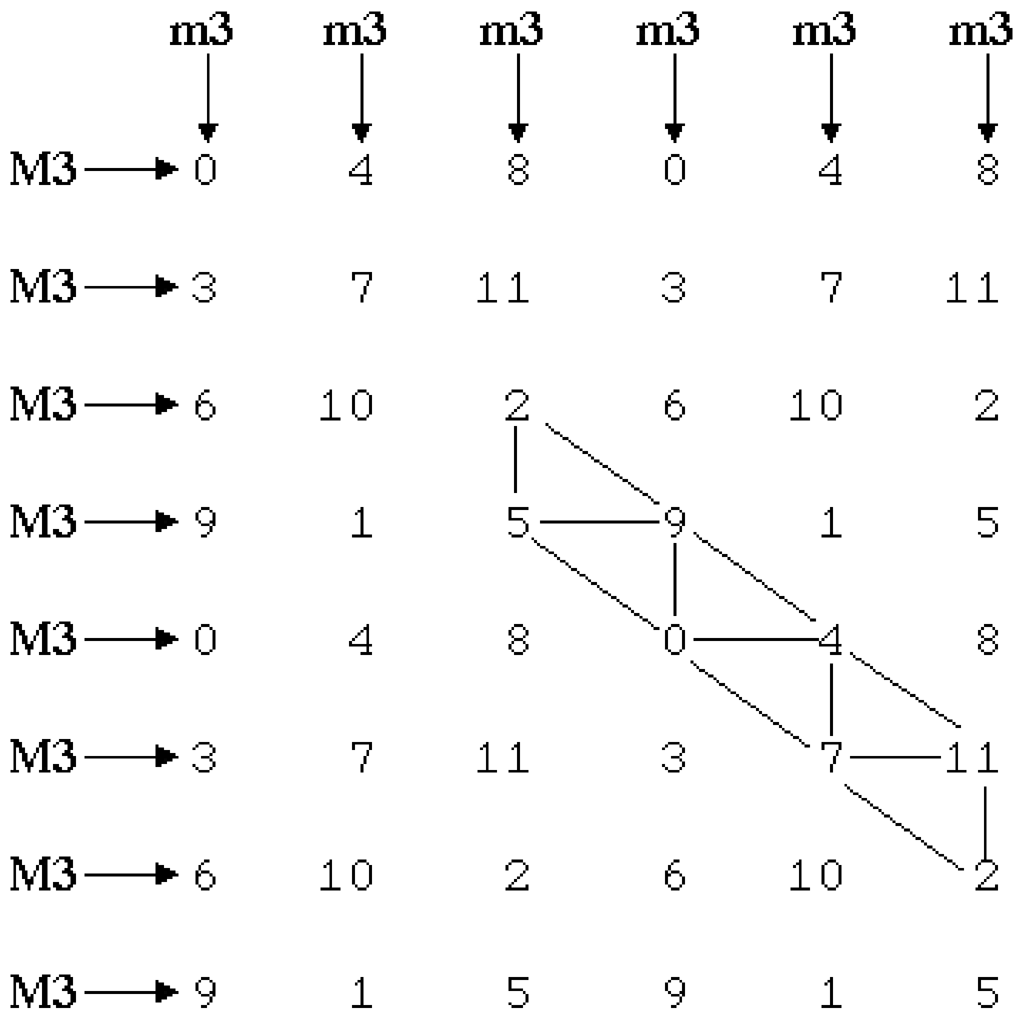
Noll, *MaMuX*, déc. 2004

La représentation (géométrique) des structures musicales



Hugo Riemann : « Ideen zu einer *Lehre von den Tonvorstellung* », 1914

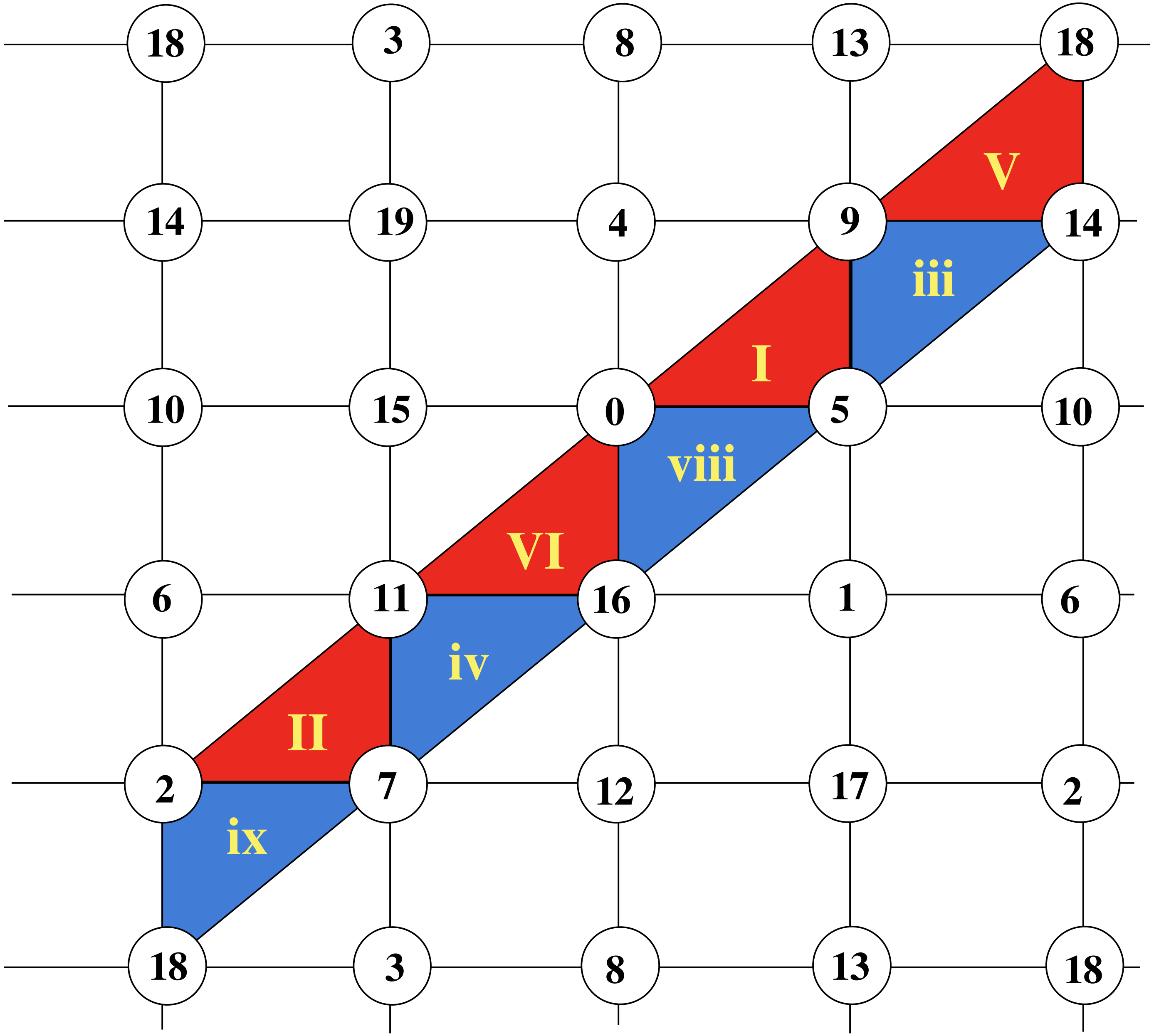
Représentation bidimensionnelle de **Z/12Z**



Propriété géométrique de la gamme diatonique
(Longuet-Higgins, Balzano, …)

Généralisations pour $\mathbf{Z_n = Z_{k(k+1)}}$ (Balzano, 1980)

Noll, *MaMuX*, Déc. 2004



Une démarche algébrique pour le sérialisme intégral

*« Une compréhension de la structuration dodécaphonique des composantes autres que les hauteurs ne peut que passer par une définition correcte et rigoureuse de la **nature** du système et des **opérations** qui lui sont associées »*

M. Babbitt : « Some Aspects of Twelve-Tone Composition »,1955

*« [Le système] peut être caractérisée complètement en explicitant les éléments, les **relations** […] entre ces éléments et les **opération**s sur les éléments ainsi reliés. […] Toute considération sur les opérations du système doit procéder de la conscience de leur nature permutationnelle »*

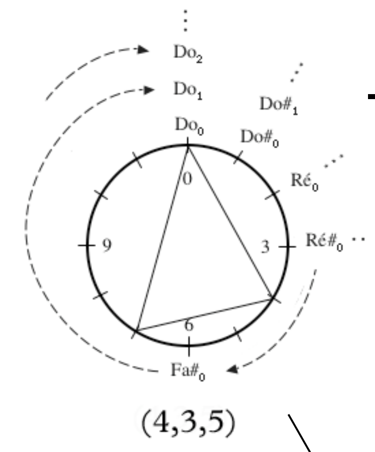
M. Babbitt : « Twelve-Tone Invariants as Compositional Determinants », 1960

*« …un large nombre de conséquences compositionnelles sont dérivables directement de théorèmes de **théorie des groupes finis** »*

M. Babbitt : « Set Structure as a Compositional Determinant », 1961

Le système dodécaphonique et la théorie des groupes

The Twelve-Tone System, is a «*set of elements, **relations** between elements and **operations** upon elements*» (Babbitt, 1946)



	S	I	R	RI
S	S	I	R	RI
I	I	S	RI	R
R	R	RI	S	I
RI	RI	R	I	S

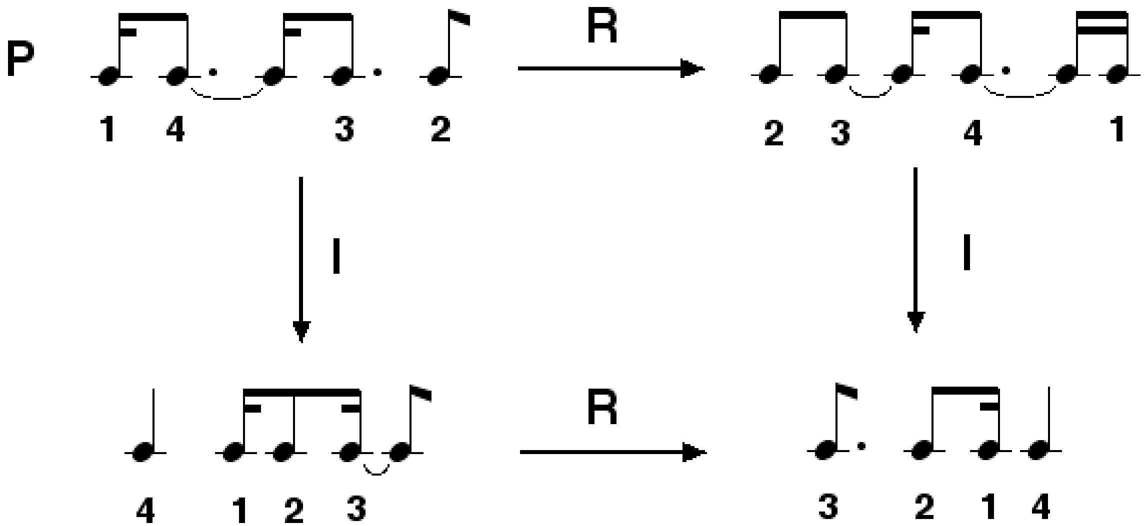
S: $(a,b) \rightarrow (a,b)$
I: $(a,b) \rightarrow (a,\ 12\text{-}b \bmod 12)$
R: $(a,b) \rightarrow (11\text{-}a, b)$.
RI: $(a,b) \rightarrow (a,\ 12\text{-}b \bmod 12)$
$\downarrow$
$(11\text{-}a,\ 12\text{-}b \bmod 12)$

S$(a,b) = (a,b)$
I$(a,b) = (a,\ 12\text{-}b \bmod 12)$
R$(a,b) = (11\text{-}a, b)$.
RI(a,b)= **R**$(a,\ 12\text{-}b \bmod 12)$=
$= (11\text{-}a,\ 12\text{-}b \bmod 12)$

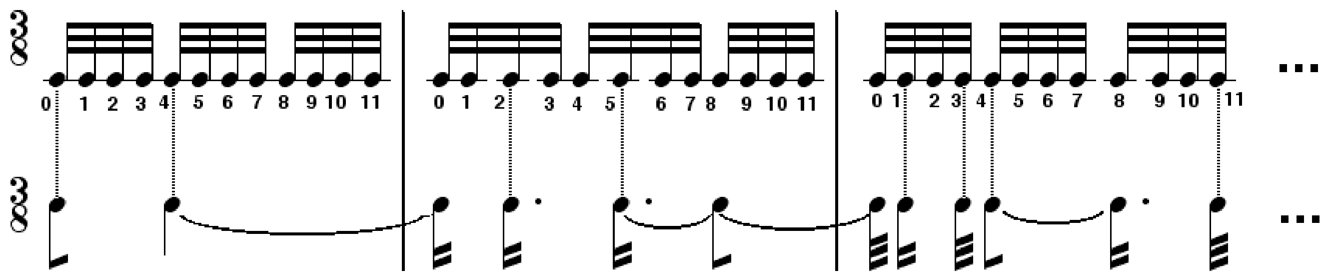
Vers une formalisation algébrique du sérialisme intégrale

- La série des durées temporelles (*durational row*)

Three compositions for piano (1947)



- Le système des points d'attaque (*Time-Points System*)



Vers un modèle de la pensée intervallique chez A. Vieru

*« ...The modes, no matter which they may be, start from a common background of the musical human hearing; **anywhere** and **any time**, our hearing on the basis of an inborn sensibility and logics [...] performs in the field of musical scales certain modal operations. [...] These intuitive or technical operations are of the nature called in mathematics the **theory of sets** ».*

A. Vieru: « Modes, elements of a general theory of modes », 1967

« Nous appelons mode tout ensemble de classes de résidus »

A. Vieru : *Le livre des* modes, 1980

« [...] si les échelles ont vraiment un statut ensembliste, où sont les intervalles ? Quel est leur statut ? »

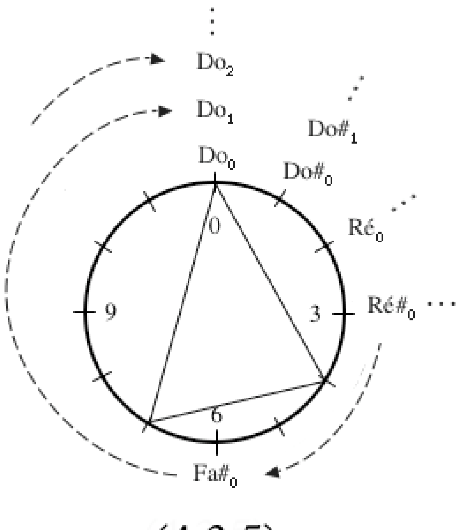
A. Vieru : « Nature et culture dans la perception musicale »,1998.

« ...l'une des questions les plus spécifiques, délicates et mystérieuses de la musique : la dualité sons/intervalles »

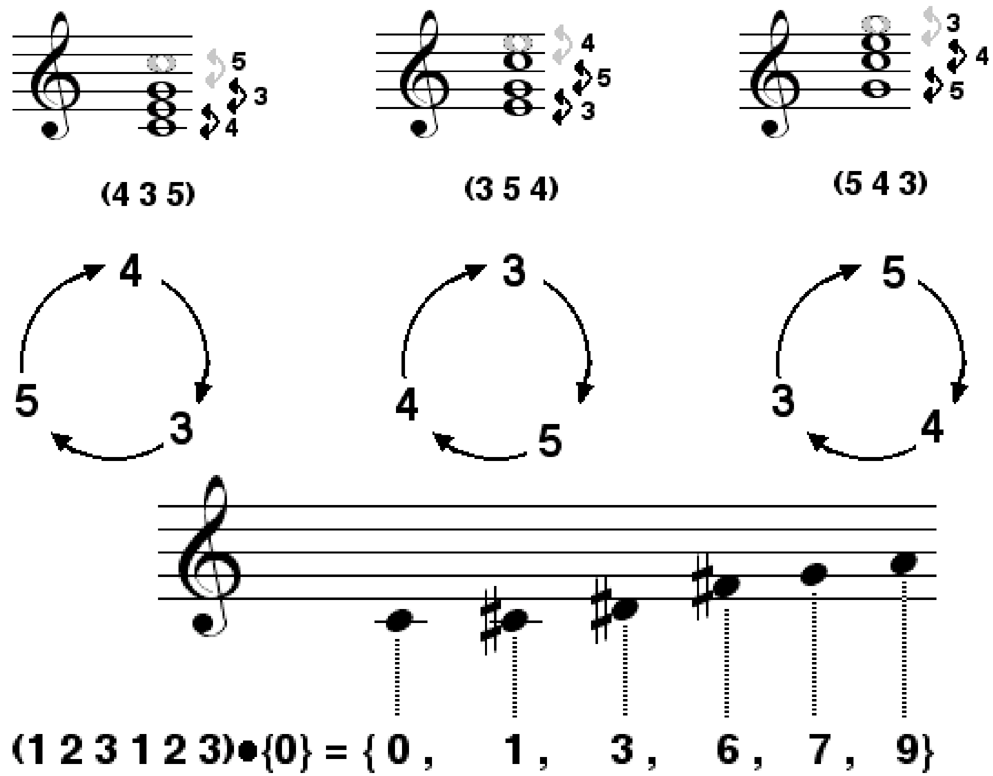
A. Vieru : « Une théorie musicale pour la période postmoderne », 1994.

La dualité son/intervalles

La « structure intervallique » et l'opération de « composition »



(4,3,5)



$(6\ 6)\bullet\{0, 1, 3\}=$

$=((6\ 6)\bullet\{0\})\cup((6\ 6)\bullet\{1\})\cup((6\ 6)\bullet\{3\})=$

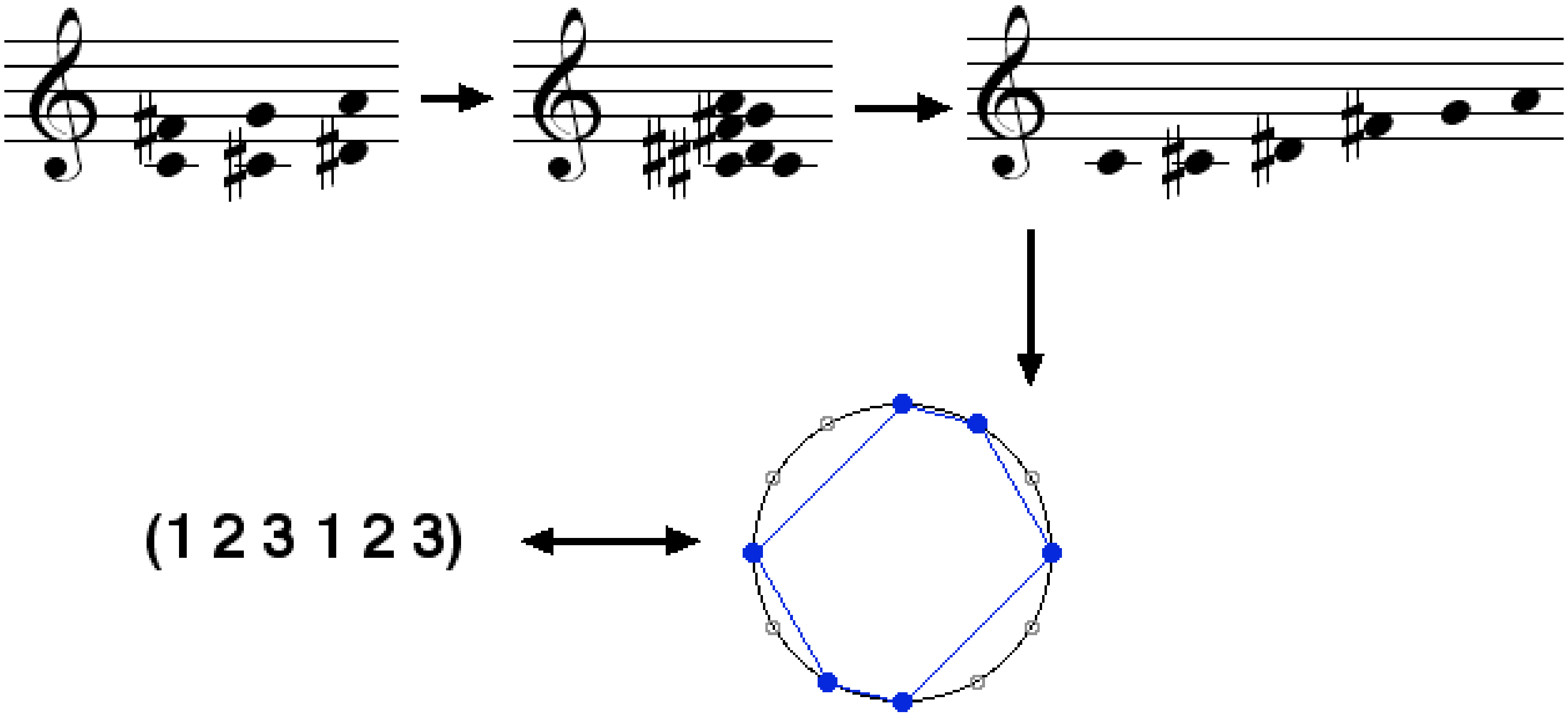
$=\{0,6\}\cup\{1,7\}\cup\{3,9\}=$

$=\{0,1,3,6,7,9\}.$

$\boxed{6_0 \cup 6_1 \cup 6_3}$

crible

« • » et la « multiplications d'accords » (Boulez)
(ou *Transpositional Combination*, Richard Cohn)



Composition de deux structures intervalliques

(6 6) • (1 2 9) = ?

La composition de deux structure intervalliques

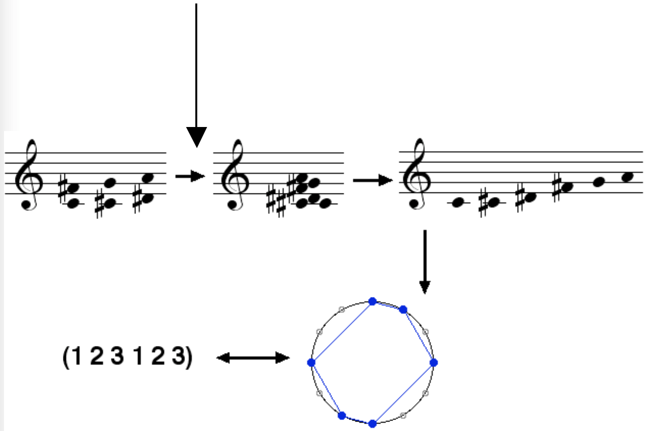
$(6\ 6) \bullet (1\ 2\ 9) = \mathbf{?}$

$(6\ 6) \bullet \{0, 1, 3\} =$

…

$= \{0,1,3,6,7,9\}$

$(1\ 2\ 3\ 1\ 2\ 3)$

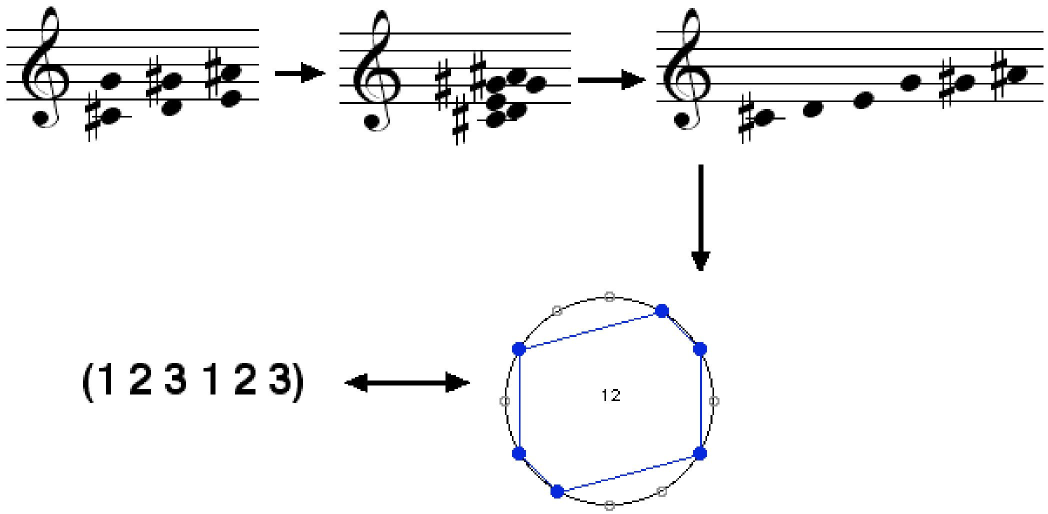


$(6\ 6) \bullet \{1, 2, 4\} =$

$=\{1,7\}\cup\{2,8\}\cup\{4,10\}=$

$=\{1,2,4,7,8,10\}$

$(1\ 2\ 3\ 1\ 2\ 3)$



Elle est bien définie !

Quelques applications de l'opération « • »

- Construction des modes (généralisés) de Messiaen
- Construction des canons rythmiques

$(6\ 6) \bullet \{0, 1, 3\} = \ldots = \{0, 1, 3, 6, 7\ 9\}$ → $(1\ 2\ 3\ 1\ 2\ 3)$

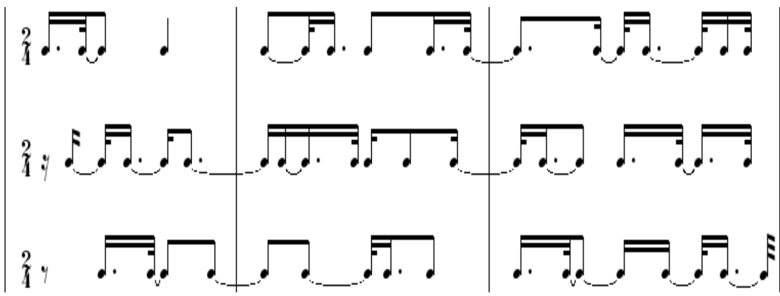
$(6\ 6) \bullet \{0, 1\} = \ldots = \{0, 1, 6, 7\}$ → $(1\ 5\ 1\ 5)$

$(6\ 6) \bullet \{\ a, b, c, \ \ldots\}$ → Mode de Messiaen

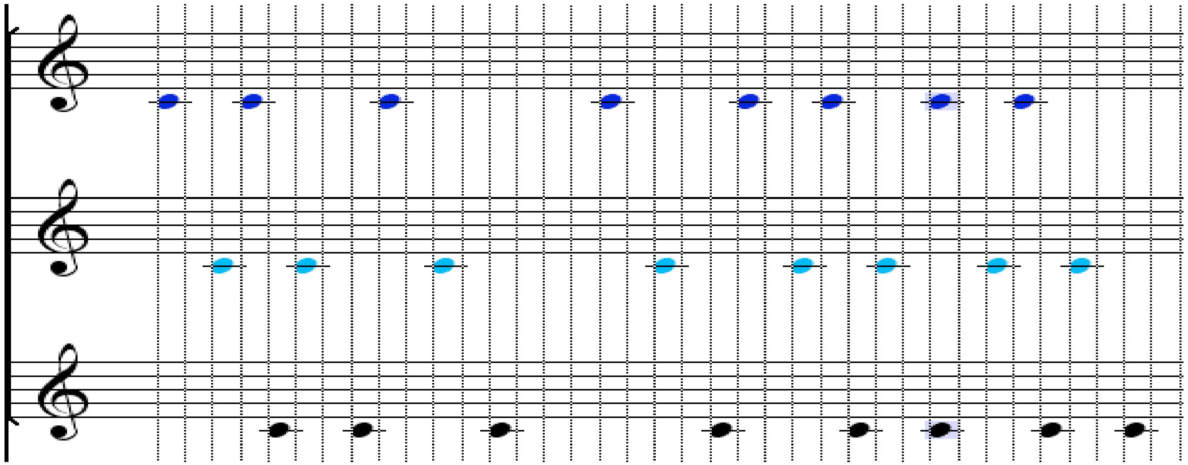
$A_1=(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$	↔	*Totale chromatique*
$A_2=(2,2,2,2,2,2)$		*Gamme par tons*
$A_3=(3,3,3,3)$		*Accorde diminué*
$A_4=(4,4,4)$		*Accorde augmentée*
$A_6=(6, 6)$		*Triton*
$A_7=(0)$		*« Classe de hauteur »*

The construction of rhythmic (tiling) canons

Harawi (1945)



Visions de l'Amen (1943)

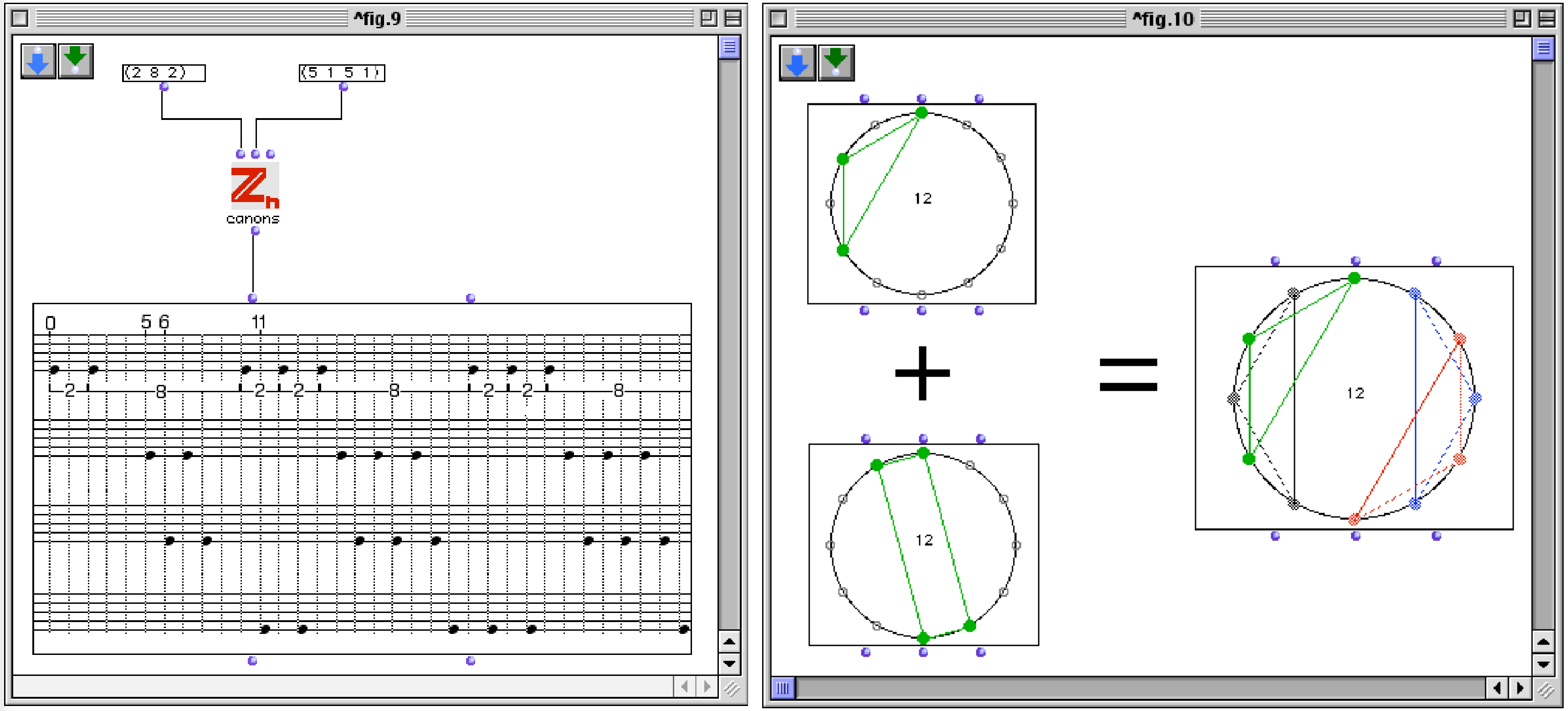


Rhythmic model

« …il résulte de tout cela que les différentes sonorités se mélangent ou s'opposent de manières très diverses, **jamais au même moment ni au même endroit […]. C'est du désordre organisé** »

O. Messiaen : *Traité de Rythme, de Couleur et d'Ornithologie,* tome 2, Alphonse Leduc, Editions Musicales, Paris, 1992.

Canons as Composition between modal structures



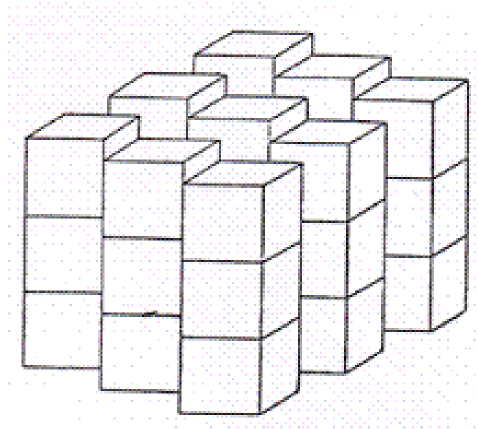
(2 8 2) • (5 1 5 1) = **Z/12Z**

Transposition limited mode

Canons rythmiques de pavage

théorie ⟷ composition

- La conjecture de Minkowski
- La solution algébrique de Hajos
- Les intuitions du « rythmicien » Messiaen
- Le modèle algébrique de Vieru/Vuza
- Le modèle informatique généralisé (en collaboration avec Carlos Agon et Thomas Noll)
- Applications compositionnelles (G. Bloch)
- L'énumération des solutions: un problème ouvert (Vuza, Andreatta, Fripertinger, Amiot, Noll, Tangian, Jedrzejewski…)

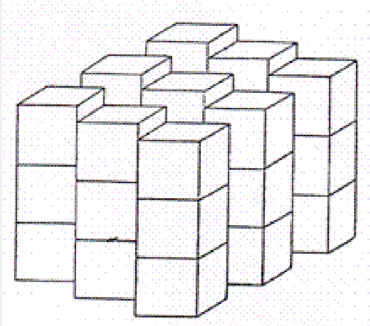


Minkowski Conjecture (1896/1907)

In a simple lattice tiling] of the n-dimensional space by unit cubes, there are at least two cubes which share an entire (n-1)-dimensional face.

(Cf. S. Stein, S. Szabó : *Algebra and Tiling*, 1994)

Conjecture de Minkowski et théorème de Hajos



Conjecture de Minkowski (1896/1907)

Dans un pavage simple [simple lattice tiling] d'un espace à n dimensions par des cubes unités, il y a au moins un couple de cubes qui ont en commun une face entière de dimension n-1.

Théorème de Hajós (1942)

Soit G un groupe abélien fini et soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n éléments de G.

Si l'on suppose que le groupe admet comme factorisation la somme directe des sous-ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ suivants :

$$A_1 = \{1, a_1, \ldots, a_1^{m_1-1}\},\ A_2 = \{1, a_2, \ldots, a_2^{m_2-1}\},\ \ldots,\ A_n = \{1, a_n, \ldots, a_n^{m_n-1}\}$$

avec $m_i > 0$ pour tout i=1, 2, …, n, alors un des facteurs A_i est un groupe

Théorème de Redei (1965)

Soit G un groupe abélien fini et soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n sous-ensembles de G, chacun contenant l'élément neutre du groupe et chacun ayant un nombre premier d'éléments et supposons que le groupe admette comme factorisation la somme directe des sous-ensembles A_i, i=1, …, n. Alors, un des sous-ensembles A_i est périodique

Groupes de Hajós et canons de pavage

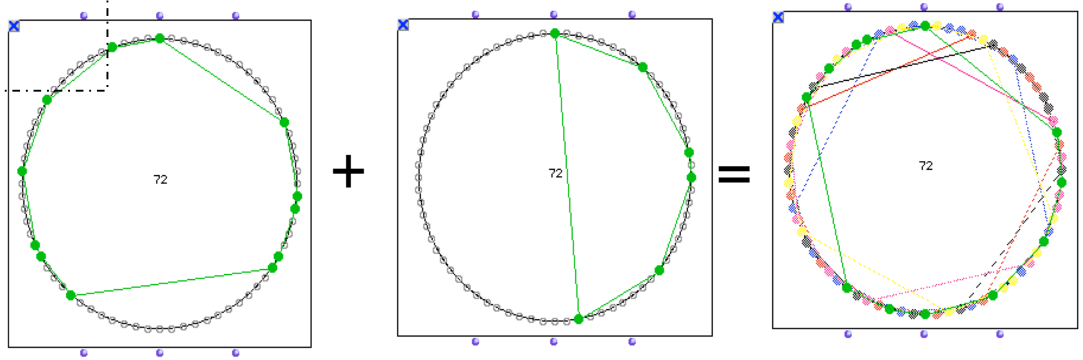
Un groupe G est " groupe de Hajós " si pour toute factorisation du groupe en somme directe de ses sous-ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_k$, au moins un des facteurs est périodique.

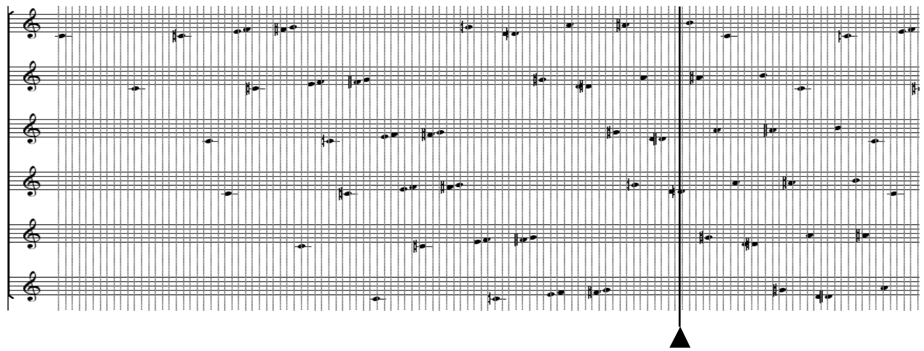
Rédei 1947	(p, p)
Hajós 1950	$\mathbf{Z}$
	$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ avec $n = p^{\alpha}$
De Brujin 1953	(p^{α}, q)
	(p, q, r)
Sands 1957	(p^2, q^2)
	(p^2, q, r)
	(p, q, r, s)
Sands 1959	$(2^2, 2^2)$
	$(3^2, 3)$
	$(2^n, 2)$
Sands 1962	$(p, 3, 3)$
	$(p, 2^2, 2)$
	$(p, 2, 2, 2, 2)$
	$(p^2, 2, 2, 2)$
	$(p^3, 2, 2)$
	$(p, q, 2, 2)$
Sands 1964	$\mathbf{Q}$
	$\mathbf{Z}+\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$
	$\mathbf{Q}+\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$

$\longleftrightarrow$

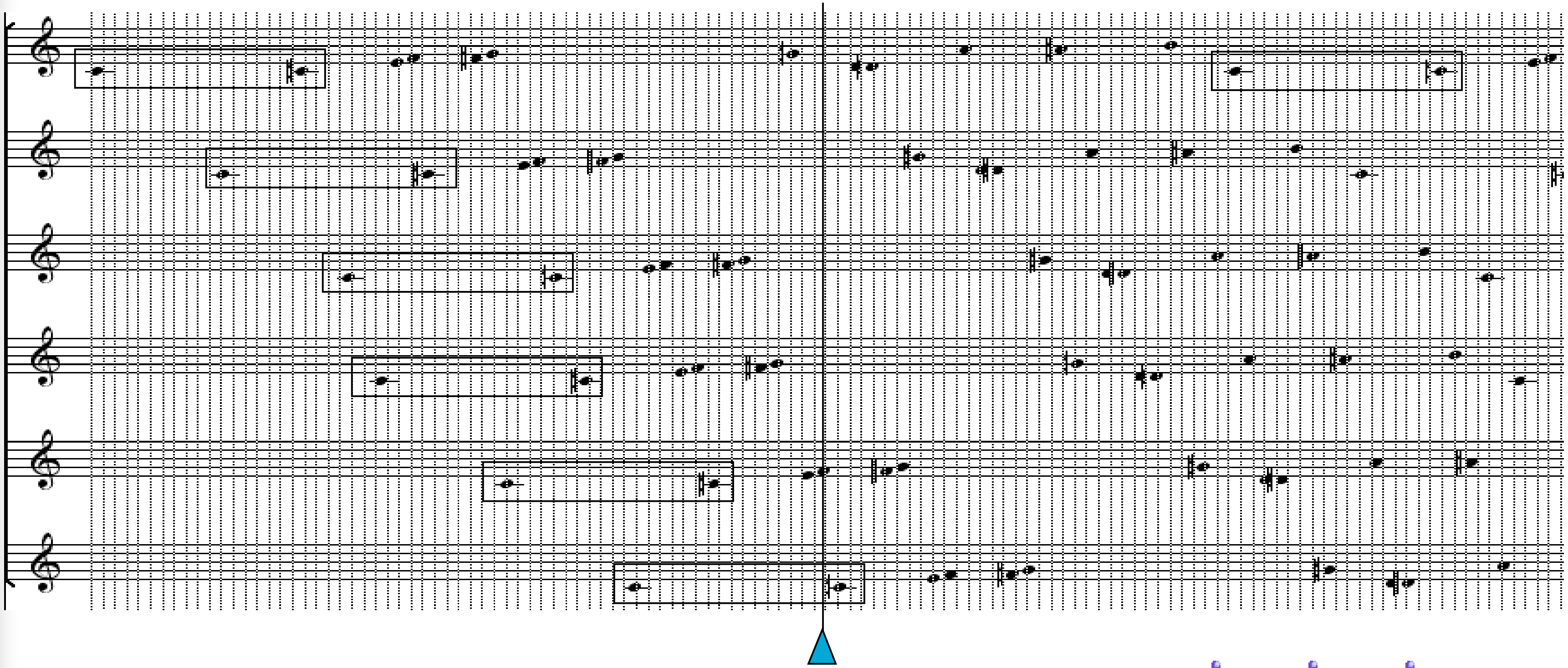
$n \notin$

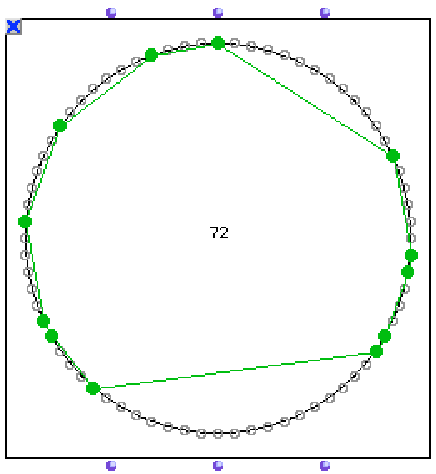
72
108 120 144 168 180
200 216 240 252 264 270 280 288
300 312 324 336 360 378 392 396
400 408 432 440 450 456 468 480
500 504 520 528 540 552 560 576 588 594
600 612 616 624 648 672 675 680 684 696
700 702 720 728 744 750 756 760 784 792
800 810 816 828 864 880 882 888
900 912 918 920 936 945 952 960 968 972 980 984
1000 ...



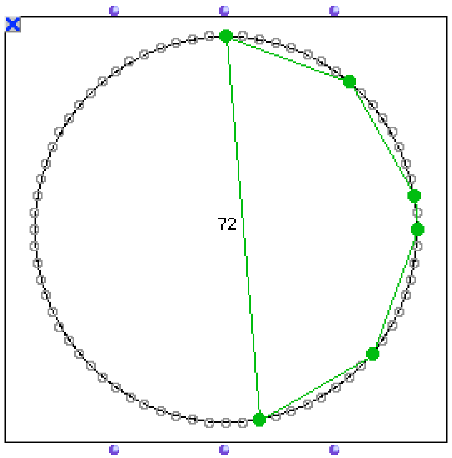


Hauteurs/Rythmes : les canons rythmiques de pavage

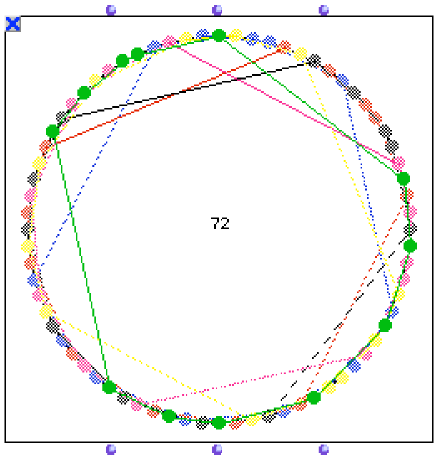




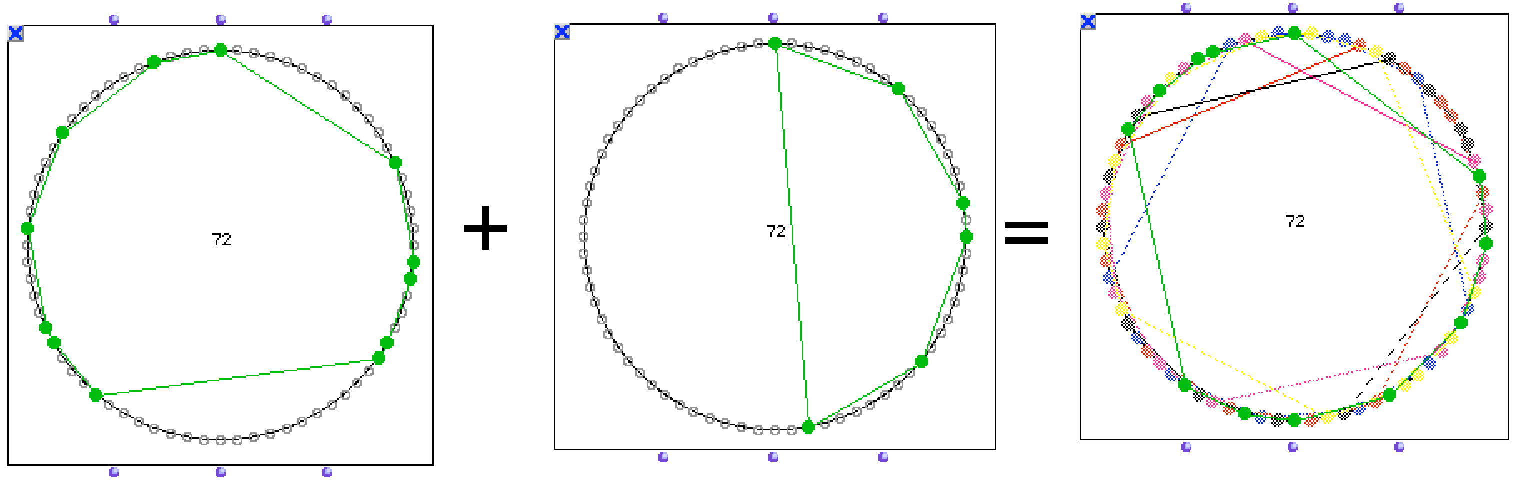
+



=



Vers une classification des canons RCCM

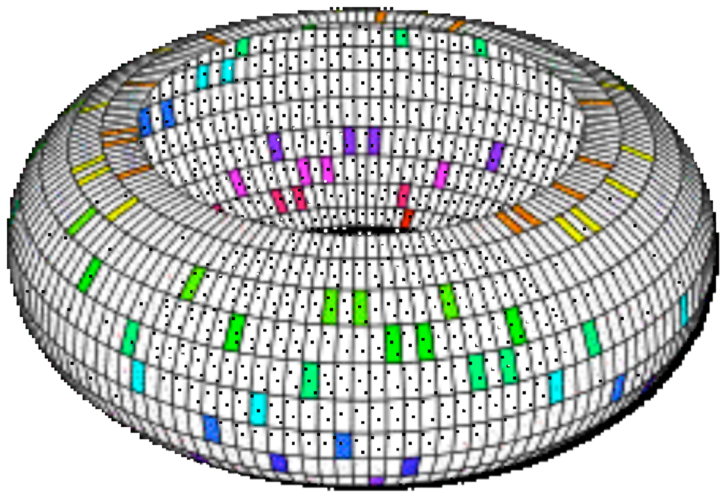


R

(1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)
(20 3 1 5 6 9 4 11 6 3 3 1)
(1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6)
(6 13 4 7 6 6 1 4 19 1 4 1)
(1 5 15 4 5 6 6 3 4 17 3 3)
(3 3 17 4 3 6 6 5 4 15 5 1)

S

(8 8 2 8 8 38)
(16 2 14 2 16 22)
(14 8 10 8 14 18)



Évolutions récentes: le pavage de la ligne

- Tom Johnson (2001): pavage de la ligne avec un pattern rythmique donné
  - ex. 11001
- Andranik Tangian (2001): Représentation polynomial
  - $J(X) = 1 + X + X^4$ (**JOHNSON's polynomial**).
- Emmanuel Amiot (2002): A solution to Johnson-Tangian conjecture
  - **Theorem:** *Any tiling of the line by the pattern 1 1 0 0 1 and its binary augmentations (eg 1 0 1 0 0 0 0 0 1, 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1...) has a length that is a multiple of 15.*
- Harald Fripertinger (2002):
  - "Enumeration of non-isomorphic canons", *Tatra Mt. Math. Publ.*, 23, 47-57, 2001

- R. Tijdeman : "Decomposition of the Integers as a direct sum of two subsets" (dans *Séminaire de théorie des nombres de Paris,* CUP, 1995)
- J. Lagarias & Y. Wang : "Tiling the line with translates of one tile", *Inv. Math.*, 124, pp.341-365, 1996
- E. Coven & A. Meyerowitz : "Tiling the integers with translates of one finite set", *J. Algebra*, 212, pp.161-174, 1999

Canons de pavage et pôlynomes

$$A \oplus B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

Amiot 2001-2005

$$A(x) = \sum_{k \in A} x^k$$

$$A(x) \times B(x) = (A \oplus B)(x) \equiv 1 + x + \dots x^{n-1} \pmod{X^n - 1}$$

$\{0, 1, 3, 6\} \oplus \{0, 8, 12, 4\}$

$$(X^6 + X^3 + X + 1)(X^{12} + X^8 + X^4 + 1)$$

$$X^{18} + X^{15} + X^{14} + X^{13} + X^{12} + X^{11} + X^{10} + X^9 + X^8 + X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X + 1$$

$$X^{15} + X^{14} + X^{13} + X^{12} + X^{11} + X^{10} + X^9 + X^8 + X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$$

Racines de l'unité et pôlynomes cyclotomiques

Racines *n*-ièmes de l'unité : $z^n = 1$

n=3 $\longrightarrow$ $\left\{1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$

n=4 $\longrightarrow$ $\{1, +i, -1, -i\}$

Le racines *n*-ièmes de l'unité peuvent s'écrire sous la forme :

$$e^{\frac{2k\pi i}{n}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \qquad (k, n \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq k < n)$$

Elles sont exactement les racines du pôlynome : $P(X) = X^n - 1$

Le racines *n*-ièmes primitives de l'unité : $e^{\frac{2ki\pi}{n}}$ $(n,k)=1$

Elles sont exactement les racines du pôlynome cyclotomique :

$$\Phi_n(X) = \prod_{k=1}^{\varphi(n)} (X - z_k) \longleftrightarrow X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X).$$

Pavage de la ligne et pôlynomes cyclotomiques

$$\Phi_n(X) = \prod_{k=1}^{\varphi(n)} (X - z_k) \longleftrightarrow X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X).$$

$\Phi_1(X) = -1 + X \longleftrightarrow (-1, 1)$

$\Phi_2(X) = 1 + X \longleftrightarrow (1, 1)$

$\Phi_3(X) = 1 + X + X^2 \longleftrightarrow (1, 1, 1)$

$\Phi_4(X) = 1 + X^2 \longleftrightarrow (1, 0, 1)$

$\Phi_5(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 \longleftrightarrow (1, 1, 1, 1, 1)$

$\Phi_6(X) = 1 - X + X^2 \longleftrightarrow (1, -1, 1)$

$$\Delta_n = 1 + X + X^2 + \ldots + X^{n-1} = \prod_{\substack{d|n \\ d \neq 1}} \Phi_d(X)$$

$$\Delta_4 = 1 + X + X^2 + X^3 + \ldots + X^7 = \Phi_2(X) \times \Phi_4(X)$$

$$A(x) \times B(x) = (A \oplus B)(x) \equiv 1 + x + \ldots x^{n-1} \pmod{X^n - 1}.$$

Les conditions de Coven-Meyerowitz

$$\Delta_n = 1 + X + X^2 + \ldots + X^{n-1} = \prod_{\substack{d \mid n \\ d \neq 1}} \Phi_d(X)$$

$$\Phi_2(X) = 1 + X \longleftrightarrow (1, 1)$$

$$\Phi_3(X) = 1 + X + X^2 \longleftrightarrow (1, 1, 1)$$

$$\Phi_4(X) = 1 + X^2 \longleftrightarrow (1, 0, 1)$$

$$\Phi_6(X) = 1 - X + X^2 \longleftrightarrow (1, -1, 1)$$

$$\Delta_{12} = 1 + X + \ldots + X^{11} = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_4 \times \Phi_6 \times \Phi_{12}$$

$$A(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_6 \times \Phi_{12} = 1 + X + X^4 + X^5 + X^8 + X^9$$

$$B(X) = \Phi_4 = 1 + X^2$$

$$S = \{0, 2\}$$

$$R = \{0, 1, 4, 5, 8, 9\}$$

$$A^*(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_{12}$$

$$B^*(X) = \Phi_4 \times \Phi_6$$

Cette décomposition ne marche pas

Les conditions de Coven-Meyerowitz

- E. Coven & A. Meyerowitz : "Tiling the integers with translates of one finite set", *J. Algebra*, 212, pp.161-174, 1999

There is no loss of generality in restricting attention to translates of a finite set A of *nonnegative* integers. Then $A(x) = \sum_{a \in A} x^a$ is a polynomial such that $\#A = A(1)$. Let S_A be the set of prime powers s such that the s-th cyclotomic polynomial $\Phi_s(x)$ divides $A(x)$. Consider the following conditions on $A(x)$.

(T1) $A(1) = \prod_{s \in S_A} \Phi_s(1)$.

(T2) If $s_1, \ldots, s_m \in S_A$ are powers of distinct primes, then $\Phi_{s_1 \cdots s_m}(x)$ divides $A(x)$.

$$A(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_6 \times \Phi_{12} = 1 + X + X^4 + X^5 + X^8 + X^9$$

$$\Phi_2(X) = 1 + X$$

$$\Phi_3(X) = 1 + X + X^2$$

$$A^*(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_{12}$$

(T1) $A(1) = 6 = \Phi_2(1) \times \Phi_3(1) = 2 \times 3$

(T2) $\Phi_2 \mid A(X)$ et $\Phi_3 \mid A(X) \Rightarrow \Phi_{2\times 3} \mid A(X)$

Les conditions de Coven-Meyerowitz

- E. Coven & A. Meyerowitz : "Tiling the integers with translates of one finite set", *J. Algebra*, 212, pp.161-174, 1999

There is no loss of generality in restricting attention to translates of a finite set A of *nonnegative* integers. Then $A(x) = \sum_{a\in A} x^a$ is a polynomial such that $\#A = A(1)$. Let S_A be the set of prime powers s such that the s-th cyclotomic polynomial $\Phi_s(x)$ divides $A(x)$. Consider the following conditions on $A(x)$.

(T1) $A(1) = \prod_{s\in S_A} \Phi_s(1)$.

(T2) If $s_1, \ldots, s_m \in S_A$ are powers of distinct primes, then $\Phi_{s_1\cdots s_m}(x)$ divides $A(x)$.

$$A(X) = \Phi_2\times\Phi_3\times\Phi_6\times\Phi_{12} = 1 + X + X^4 + X^5 + X^8 + X^9$$

$$\Phi_2(X) = 1 + X$$
$$\Phi_3(X) = 1 + X + X^2$$

$$A^*(X) = \Phi_2\times\Phi_3\times\Phi_{12}$$

(T1) $A(1) = 6 = \Phi_2(1) \times \Phi_3(1) = 2 \times 3$

(T2) $\Phi_2 \mid A(X)$ et $\Phi_3 \mid A(X) \Rightarrow \Phi_{2\times 3} \mid A(X)$

Georges Bloch (2001-2004)

Stratégies compositionnelles nouvelles à partir du modèle formel

- Organisation métrique d’un canon de pavage
- Réduction d’un canon de pavage en canons auto-similaires
- Modulation métrique entre canons
- *Transformation* d’un canon rythmique en « texture »

- *Projet Beyeler* (2001)
- *Projet Hitchcock*
- *Visite des tours de la cathédrale de Reims*
- *Noël des Chasseurs*
- *Canons à marcher*
- *Canon à eau*
- *Harawun* (2004)

Harawun: L’entrée d’un canon RCCM modélisé sur *Harawi*

Georges Bloch (2001-2004)

Stratégies compositionnelles nouvelles à partir du modèle formel

Canon Final : transformation d'un canon rythmique en « texture »

La dualité son/intervalles

Séquences périodiques et différences finies

$Df(x)=f(x)-f(x-1).$

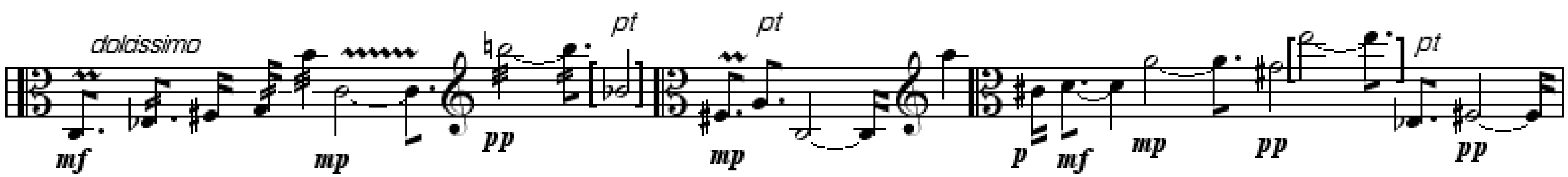
$$f = 7\ 11\ 10\ 11\ 7\ 2\ 7\ 11\ 10\ 11\ 7\ 2\ 7\ 11\ldots$$

$$Df = 4\ 11\ 1\ 8\ 7\ 5\ 4\ 11\ 1\ 8\ 7\ 5\ 4\ 11\ldots$$

$$D^2 f = 11\ 7\ 2\ 7\ 11\ 0\ 11\ 7\ 2\ 7\ 11\ 0\ldots$$

$$D^3 f = 1\ 8\ 7\ 5\ 4\ 11\ 1\ 8\ 7\ 5\ 4\ 11\ldots$$

$$D^k f = \ldots\ldots$$



V	0	3	8	7	11	0	11	10	6	9	0	9	1	2	9	8	4	3	6
VIII	0	0	0	0	3	3	7	2	0	0	0	6	3	3	3	4	8	0	0
IV	3	3	4	4	1	11	11	8	3	3	9	4	1	7	11	8	11	3	9
IX	0	0	0	0	0	3	6	[1]	3	3	3	3	9	0	3	6	[10]	6	6
IV	0	10	3	9	10	0	9	7	0	6	7	9	6	4	9	3	4	6	3

Zone d'oubli pour alto (1973)

Actualité de la démarche algébrique

Séquences périodiques et résultats 'structuraux'

f = 11 6 7 2 3 10 11 6 …

Df = 7 1 7 1 7 1 7 1…

$D^2 f$ = 6 6 6 6 6…

$D^3 f$ = 0 0 0…

$Df(x)=f(x)-f(x-1).$

Séquences reductibles :
$\exists\, k \geq 1$ t.q. $D^k f = 0$

f = 7 11 10 11 7 2 7 11 …

Df = 4 11 1 8 7 5 4 11 …

$D^2 f$ = 11 7 2 7 11 0 11 7 …

$D^3 f$ = 1 8 7 5 4 11 1 8 …

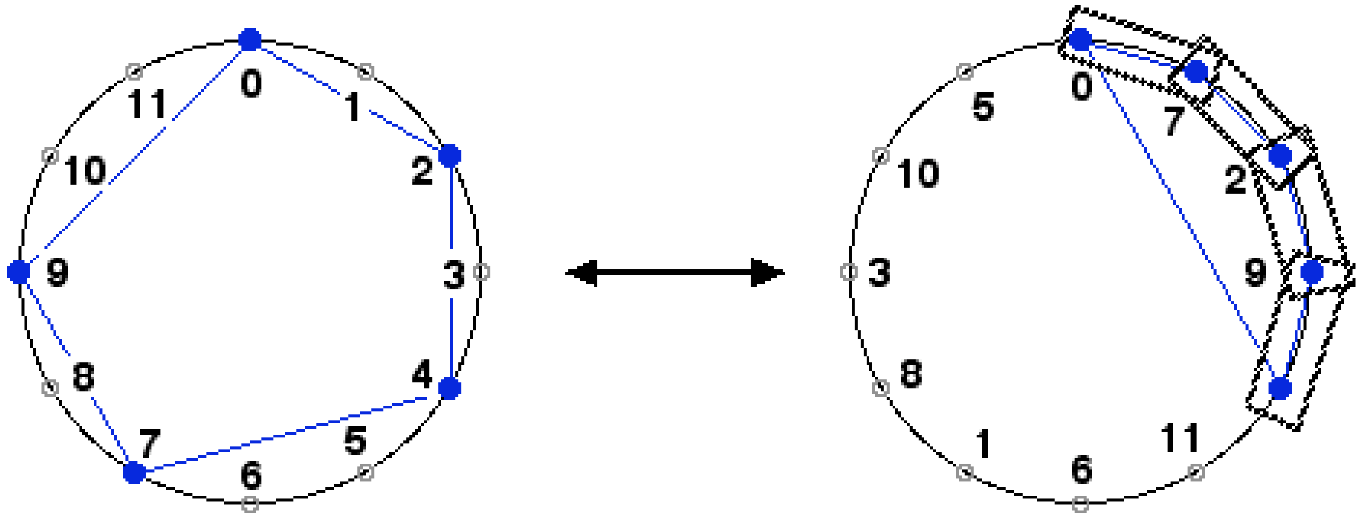
$D^4 f$ = 7 11 10 11 7 2 7 11 …

Séquences reproductibles :
$\exists\, k \geq 1$ s.t. $D^k f = f$

Théorème de décomposition: Toute suite périodique à valeurs dans un groupe cyclique **Z/nZ** est décomposable (de façon unique) en une somme d'une suite réductible et d'une suite reproductible (Vuza/Andreatta, 2001)

Dégrée de 'diatonicité' des struct. intervalliques

La mesure « DIA/CHRO »



« DIA/CHRO » donne la mesure du rapport entre composantes diatoniques et composantes chromatiques

Quelles sont les structures intervalliques équilibrées (i.e. DIA/CHRO=1)?

Fonction et structure d'une théorie de la musique

« ...rendre possible d'un côté l'étude de la ***structure*** *des systèmes musicaux [...] et la formulation des contraintes de ces systèmes dans une perspective compositionnelle [...] mais aussi, comme étape préalable, une terminologie adéquate [...] pour rendre possible et établir un* ***modèle*** *qui autorise des énoncés bien déterminés et vérifiables sur les œuvres musicales »*

M. Babbitt : « The Structure and Function of Music Theory », 1965

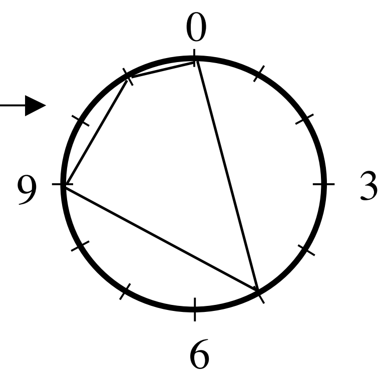
La *Set Theory*

- A. Forte : *The Structure of Atonal Music*, 1973.
- D. Lewin : *Generalized Musical Intervals and Transformation*, 1987

- A. Vieru : *The Book of modes*, 1993 (orig. 1980)

- A. Riotte, M. Mesnage : l'analyse formalisée

- E. Carter : *Harmony Book*, 2002



{do, fa, si, la}

{0, 5, 9, 11}

[1, 1, 1, 1, 1, 1]

4-Z29

(5 4 2 1)

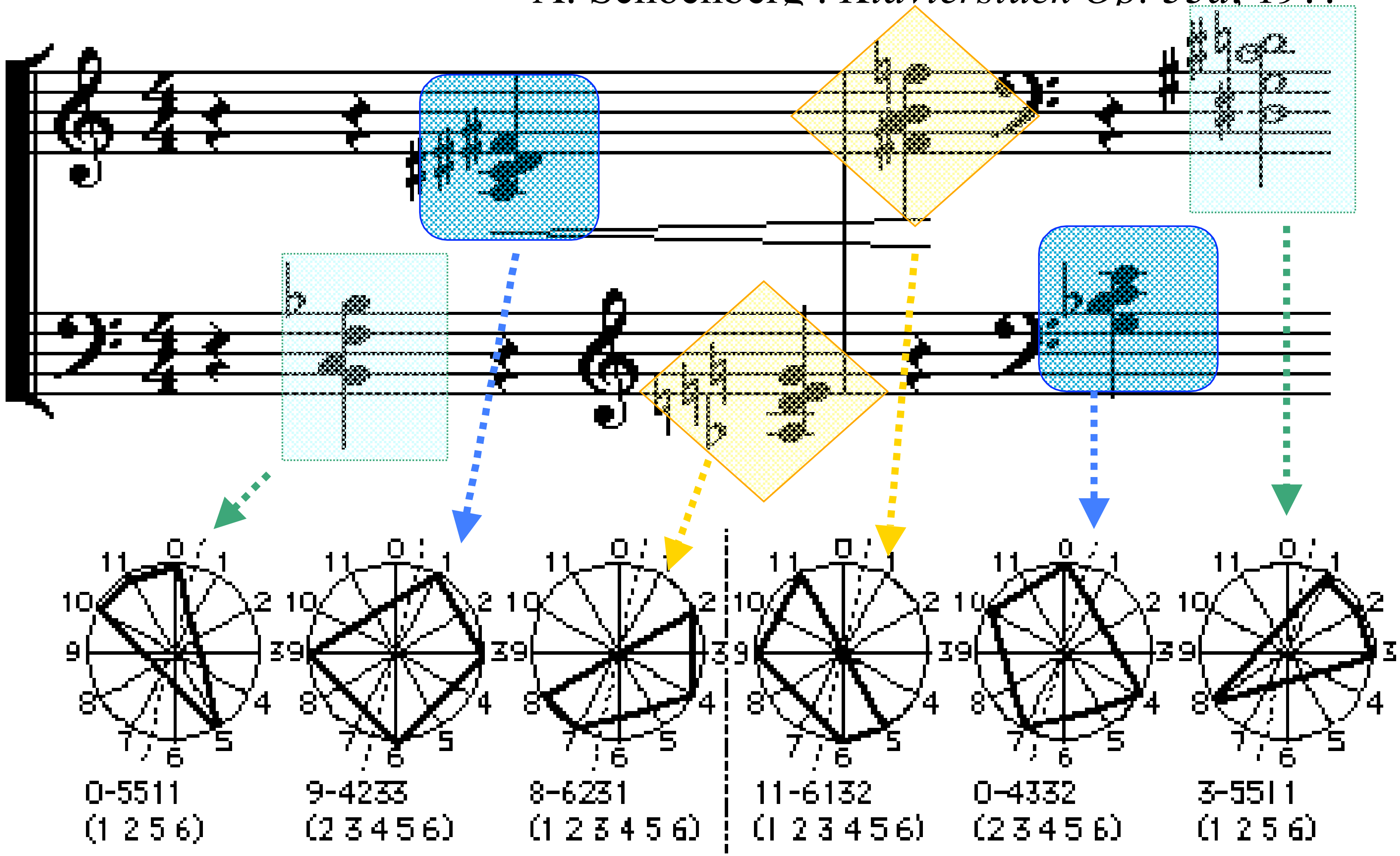
...

...

L’analyse formalisée ou les « entités formelles » en musique

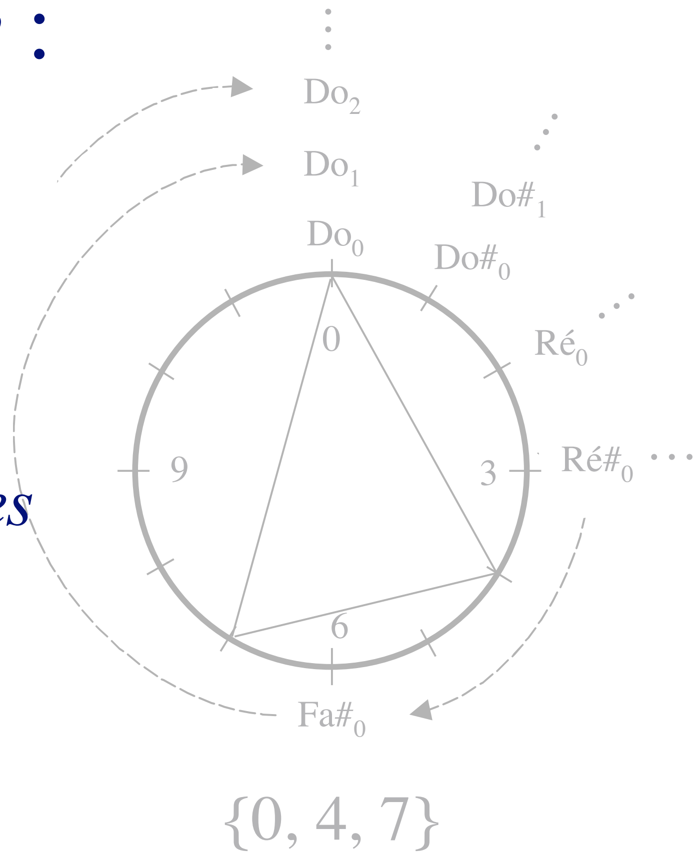
André Riotte et Marcel Mesnage

A. Schoenberg : *Klavierstück Op. 33a*, 19??



Les principes de base de la *Set Theory* : une introduction

Set Theory « classique » et Approches Transformationnelles



Moreno Andreatta
Stéphan Schaub

Colloque international
Autour de la *Set Theory*

Résonances 2003

Le catalogue des *pcs* d'Allen Forte

5-Z36	0,1,2,4,7	222121

7-Z36	0,1,2,3,5,6,8	444342

Ensemble (littéral) de Classes de Hauteurs (ECH)

(Literal) pitch class set (pcs)

A. Schoenberg *Sechs kleine Klavierstücke* op. 19 no. 4, 1911 (Forte 2003)

A

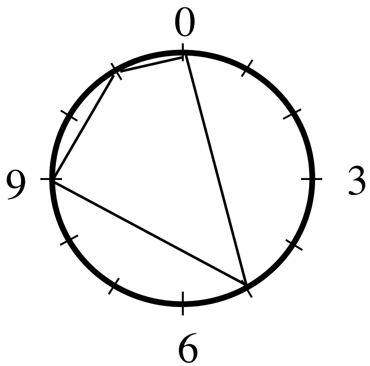
m. 2

↓

{do, fa, si, la}

{0, 5, 11, 9}

{0, 5, 9, 11}



B

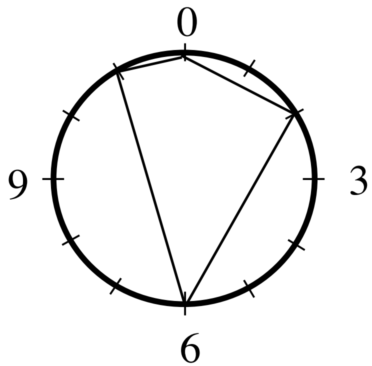
m. 5

↓

{si, do, ré; fa#}

{11, 0, 2; 6}

{0, 2, 6, 11}



C

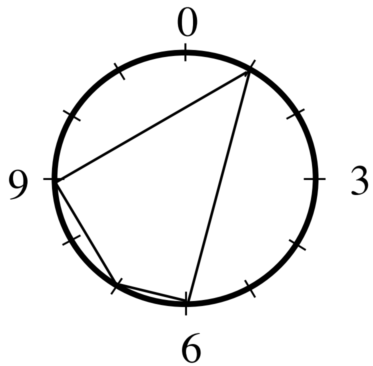
m. 8

↓

{sol, la, fa#, do#}

{7, 9, 6, 1}

{1, 6, 7, 9}



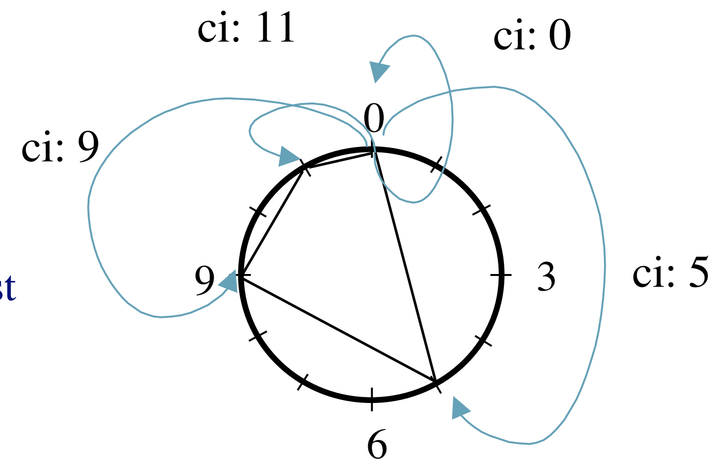
Classes d'Intervalles et Contenu Intervallique d'un ECH (2)

Interval Classes and Interval Content of a pcs

Le vecteur IFUNC (Lewin) répertorie la fréquence d'apparition des classes d'intervalles contenues dans un ECH.

IFUNC(A, A) = [4 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]

ci 0 ci 1 ci 2 … ci 11.



A = {0, 5, 9, 11}

Au sein de la théorie « classique », l'information est encore condensée, puisqu'un intervalle et son inverse sont considérés comme faisant partie de la même « classe ».

seconde mineure / septième majeure: 1,
seconde majeure / septième mineure: 2
… triton: 6.

Le vecteur intervallique (Forte) répertorie la fréquence d'apparition des classes d'intervalles contenues dans un ECH, selon la définition ci-dessus.

VI(A) = [1 1 1 1 1 1]

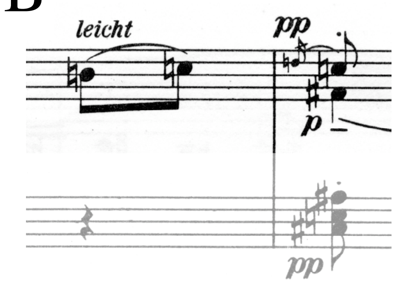
ci 1 ci 2 ci 3 … ci 6.

Classes d'Intervalles et Contenu Intervallique d'un ECH

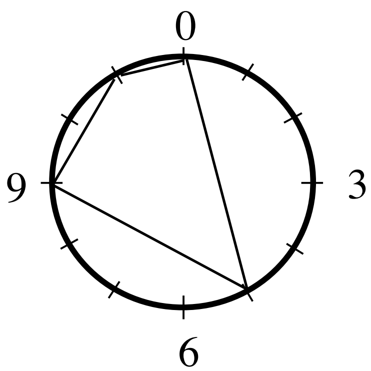
Interval Classes and Interval Content of a pcs

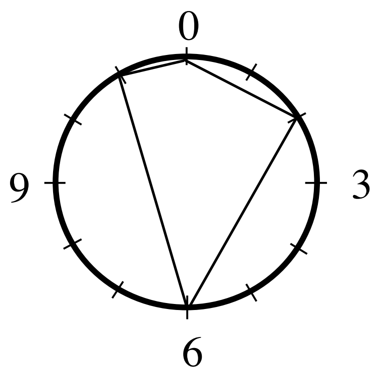
A

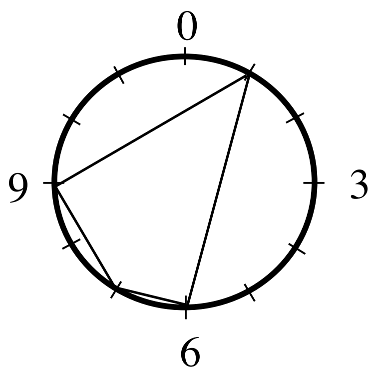
B



C





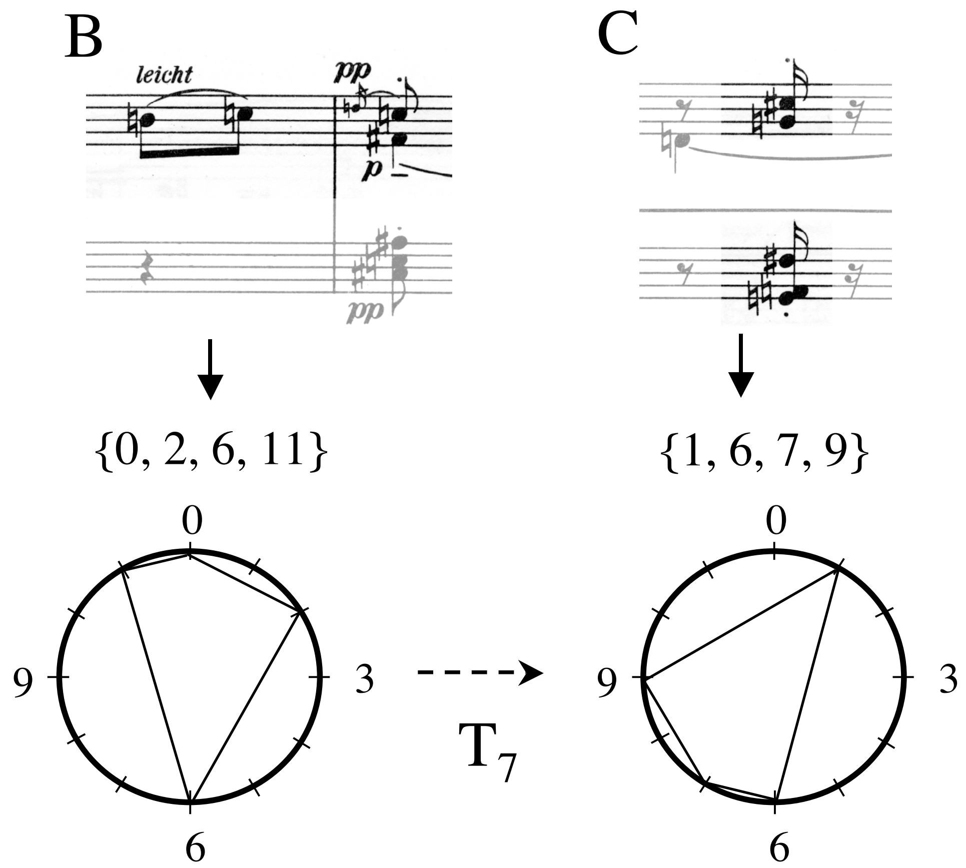


	A	B	C
SI:	(5, 4, 2, 1)	(2, 4, 5, 1)	(5, 1, 2, 4)
IFUNC:	[4 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]	[4 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]	[4 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]
VI:	[1 1 1 1 1 1]	[1 1 1 1 1 1]	[1 1 1 1 1 1]

(Retrouver les transformations)

Transformations d’ECH : la Transposition

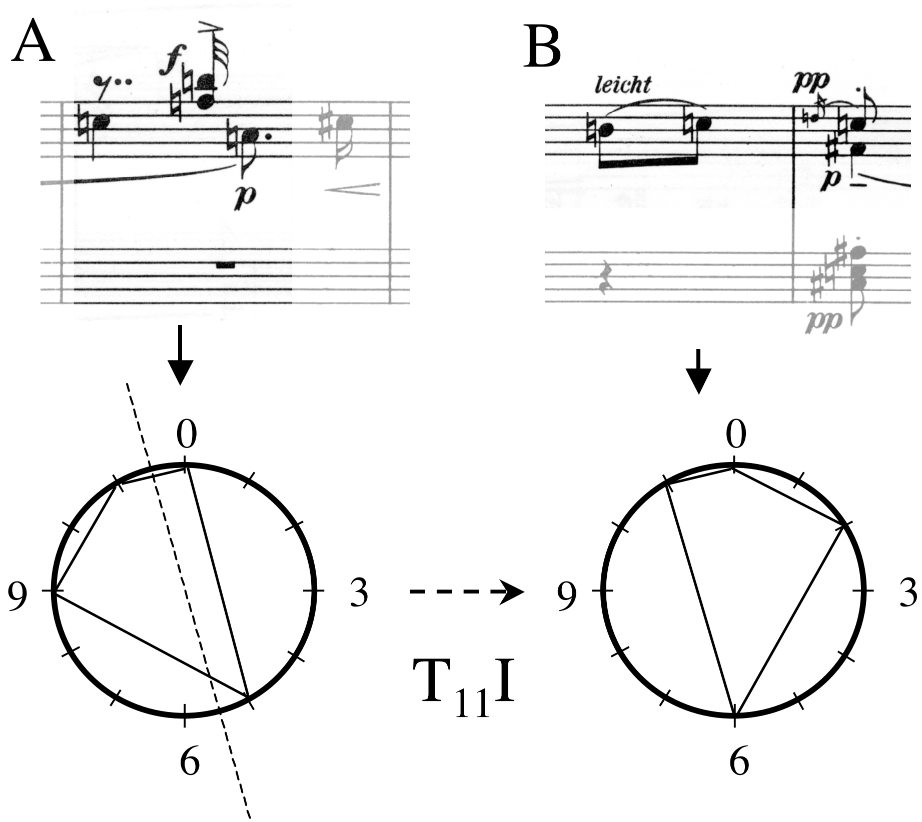
Pcs Transformations : Transposition



$$T_7(B) = C$$

Transformations d'ECH : l'Inversion

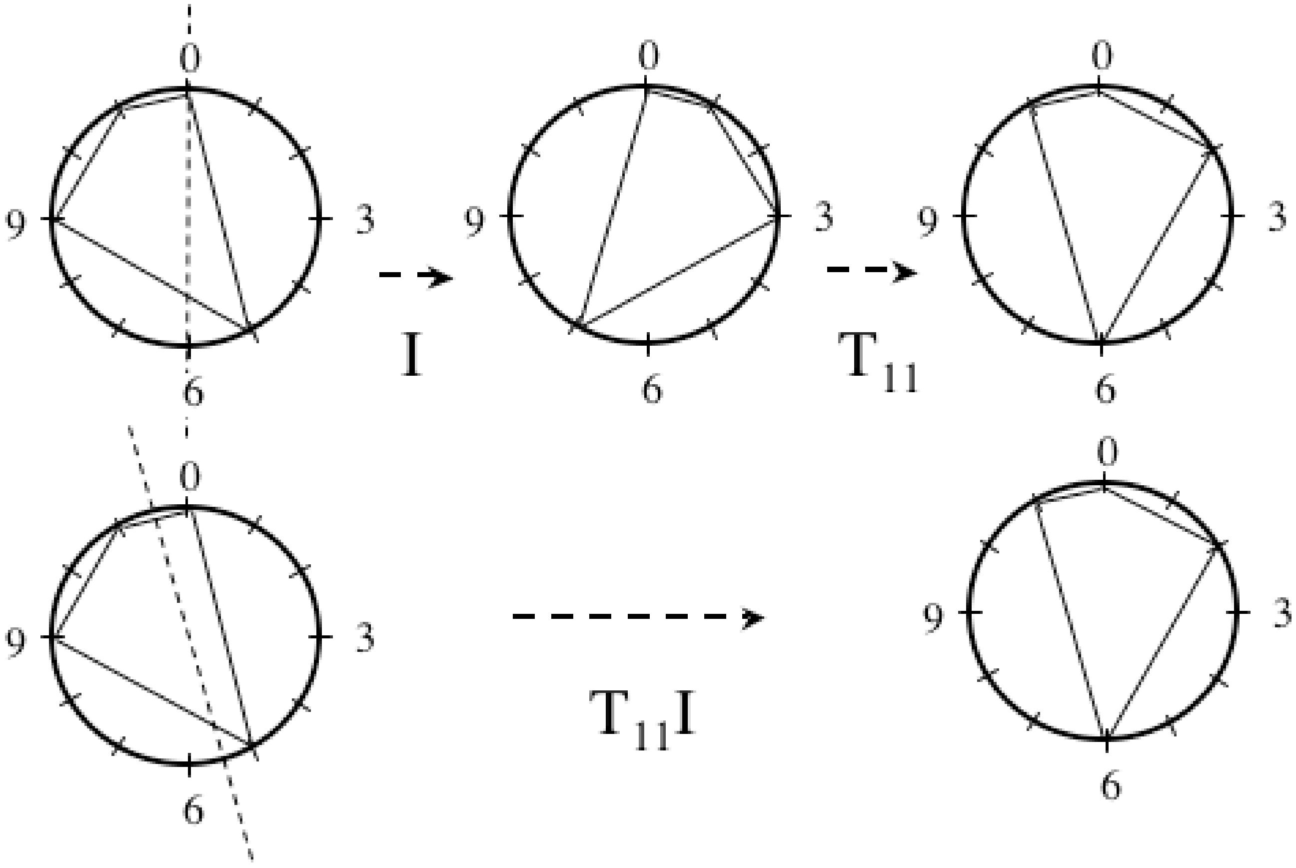
Pcs Transformations : Inversion



$$T_{11}I(A) = B$$

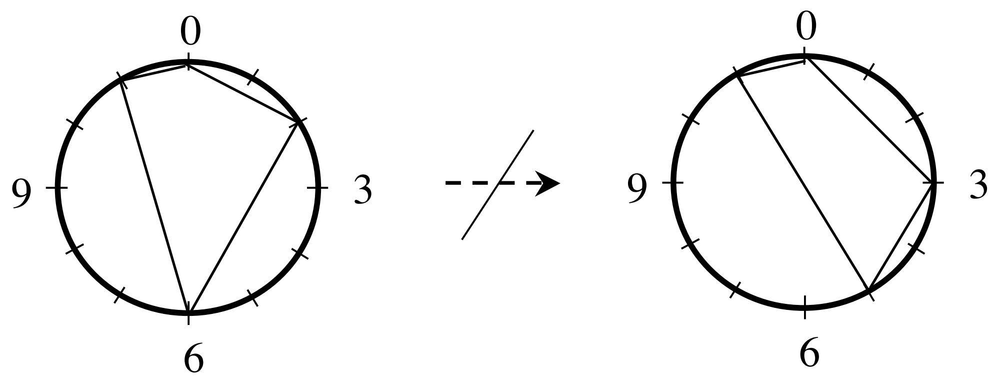
Transformations d'ECH : Inversion et Transposition

Pcs Transformations : Inversion and Transposition



La Relation z
Z-relation

La transposition autant que l'inversion laissent le contenu intervallique d'un ECH inchangé. En d'autres termes, si un ECH B est le transformé par inversion et / ou transposition d'un ECH A, alors A et B ont le même contenu intervallique.

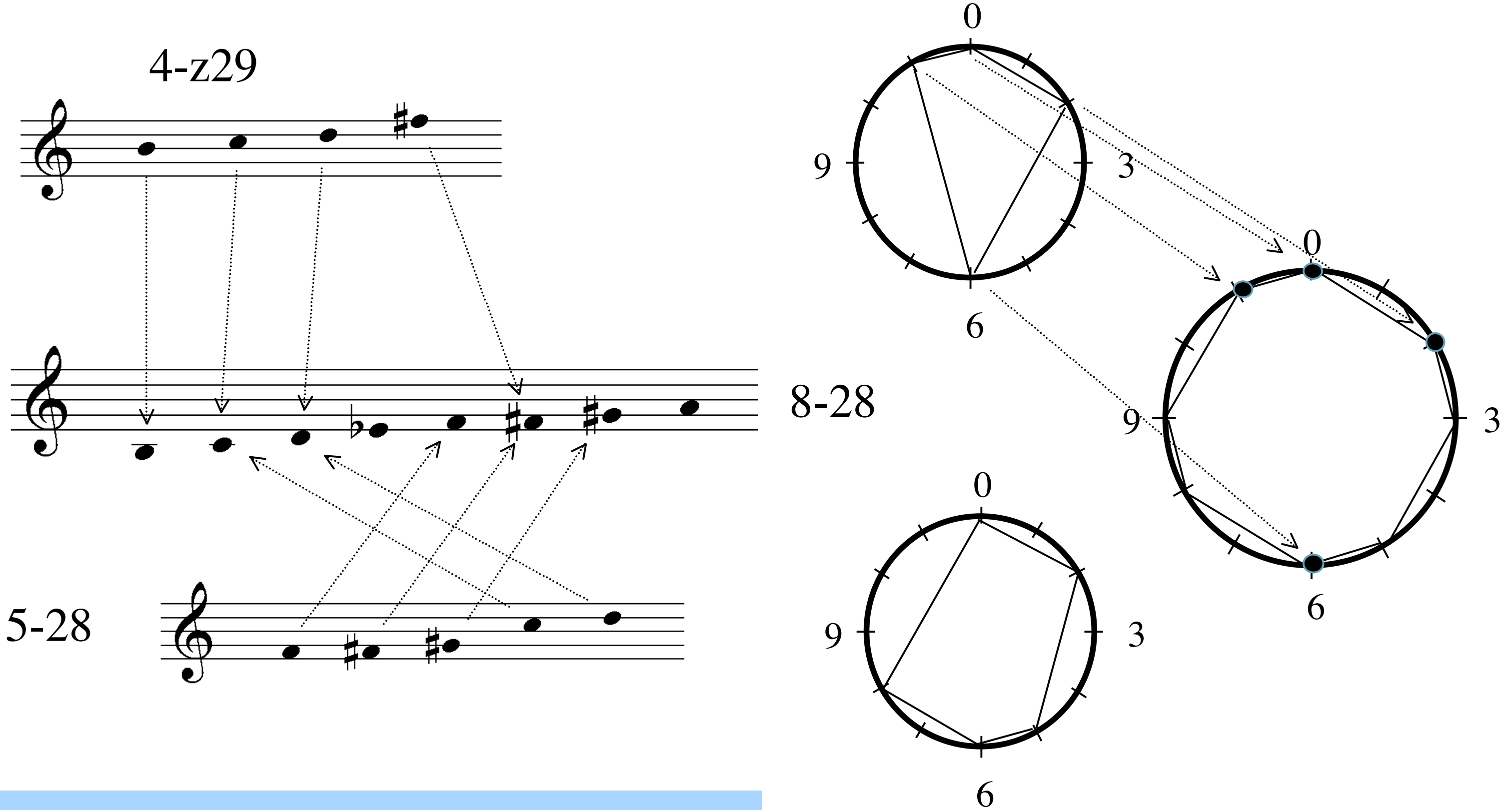


VI: [1 1 1 1 1 1] ---→ [1 1 1 1 1 1]

La proposition inverse n'est pas vraie.

Relations entre ECH: l'inclusion littérale

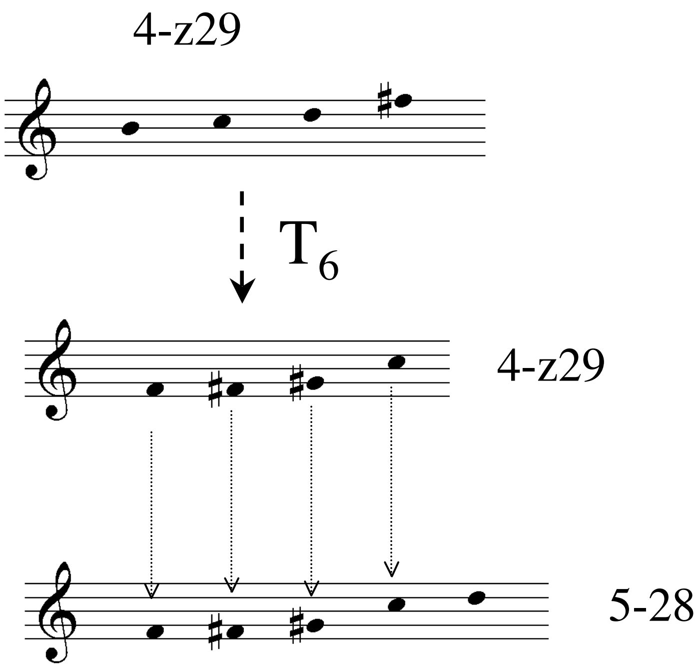
Relations between pcs: literal inclusion

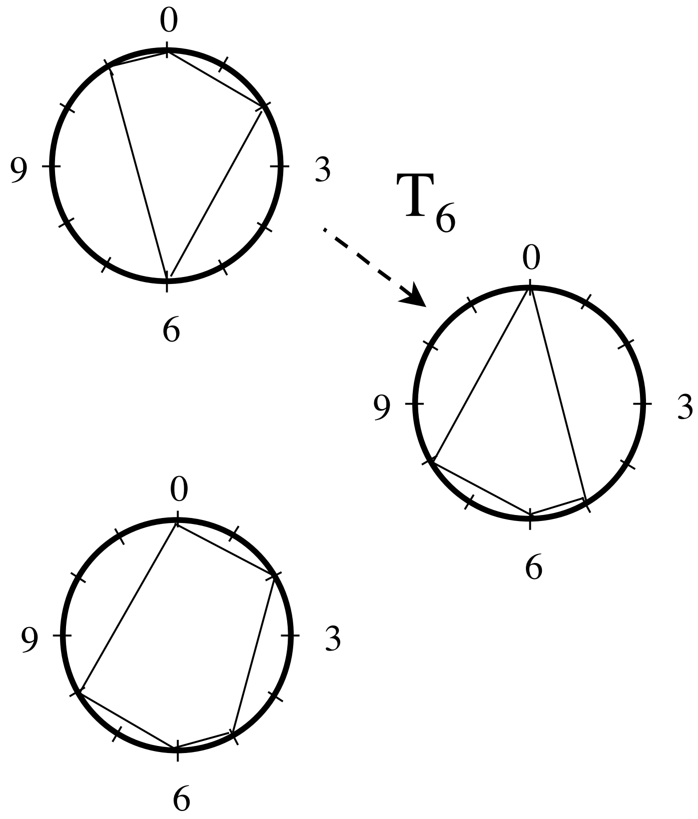


4-z29 ⊂ 8-28 5-28 ⊂ 8-28

Relations entre ECH: l'inclusion abstraite

Relations between pcs: abstract inclusion



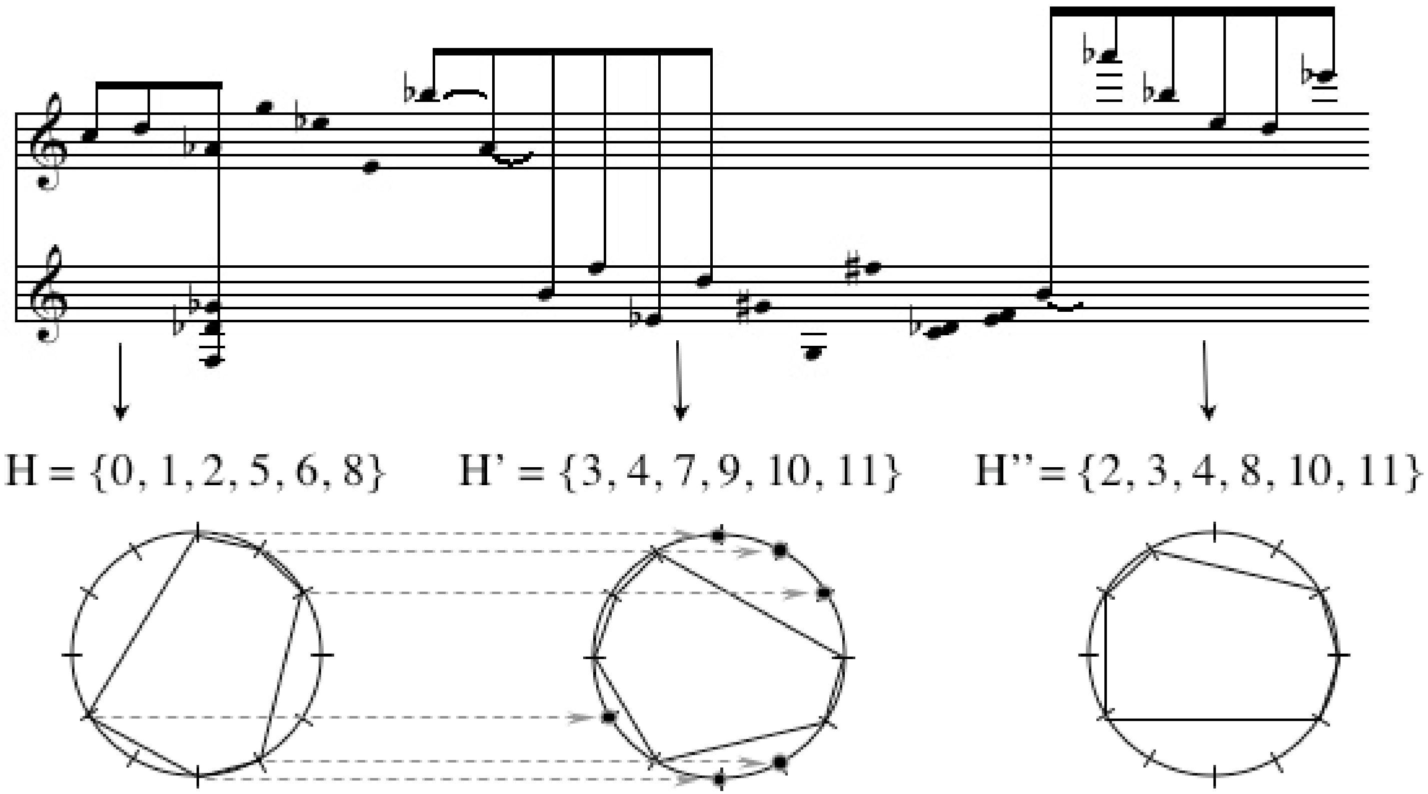


4-z29 ⊂ 5-28 ⊂ 8-28

Relations entre ECH: le complémentaire littérale

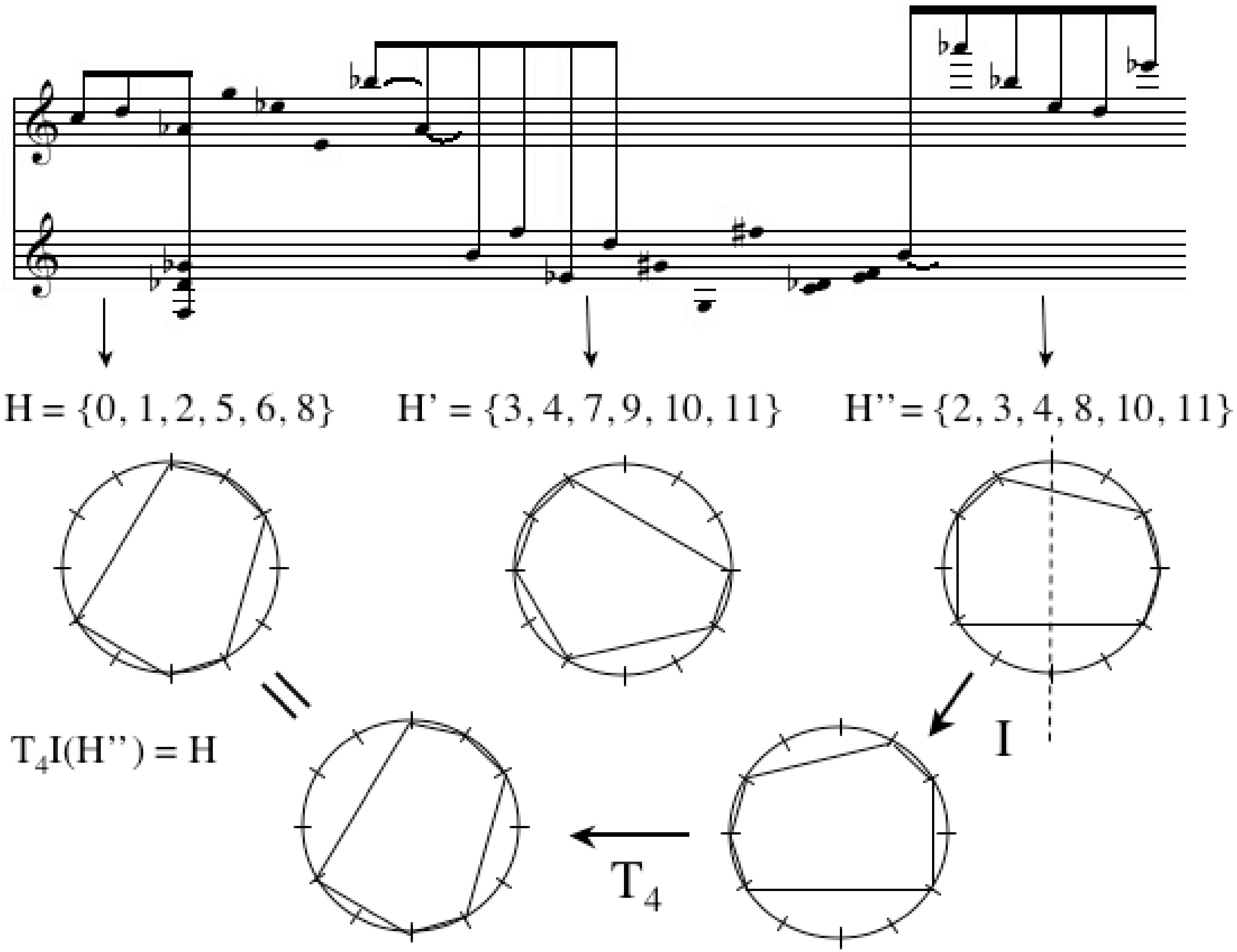
Relations between pcs: literal complement

A. Webern *Fünf Stücke* op. 10 no. 4, 1913 (Forte 1973 / Lewin 1987)



Relations entre ECH: le complémentaire abstrait

Relations between pcs: abstract complement



L 'approche transformationnelle
Transformation(al) Theory/Analysis

1. GIS = *Generalized Interval System*

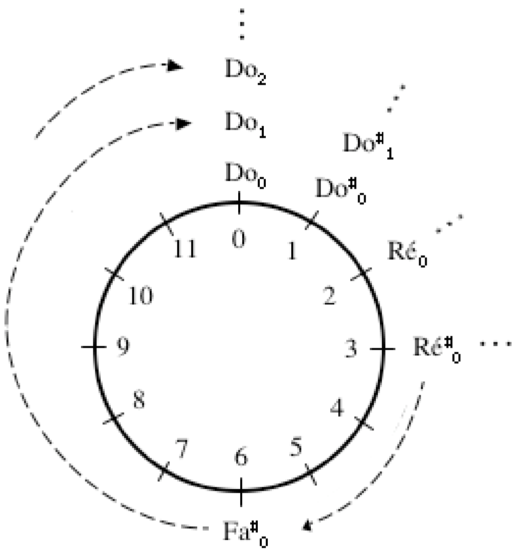
Système d'Intervalles Généralisées
Système Généralisé d'Intervalles

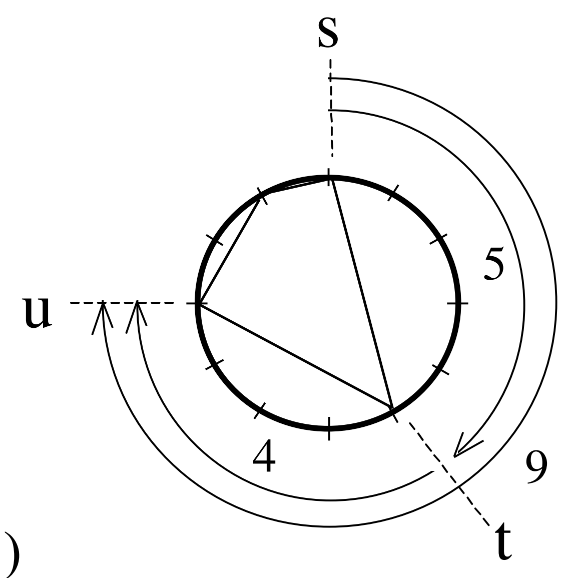
2. *Set Theory* généralisée
   - Fonction intervallique (IFUNC)
   - Fonction injection (INJ)
   - Théorème généralisé de l'hexacorde

3. Analyse transformationnelle
   - Progressions transformationnelles
   - Réseaux transformationnels

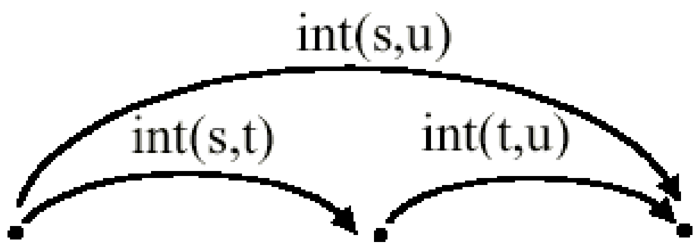
Vers un Système d'Intervalles Généralisés

Towards a Generalized Interval System





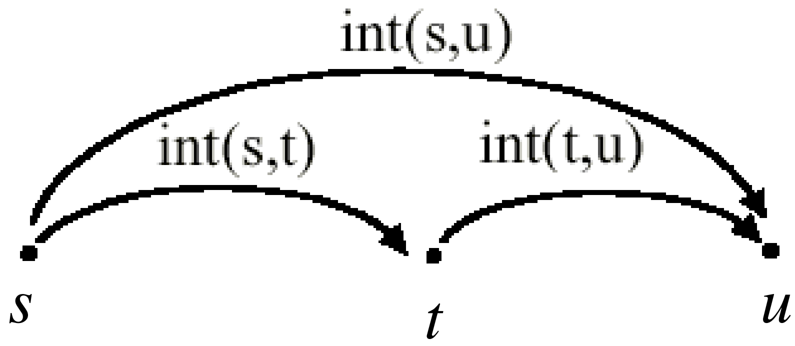
(5, 4, 2, 1)



Système d’Intervalles Généralisés/Système Généralisé d ’Intervalles

Generalized Interval System

GIS = (S, G, int)



S= ensemble

(G,•) = groupe d’intervalles

int = fonction intervallique

$S \times S$ - - -▸ G

1. Pour tout objets s, t, u dans S :
 int(s,t)•int(t,u)=int(s,u)

2. Pour tout objet s dans S et tout intervalle i dans G il y a un seul objet u dans S tel que int(s,u)=i

$\Longleftrightarrow$

ACTION simplement transitive d ’un *groupe* sur un ensemble

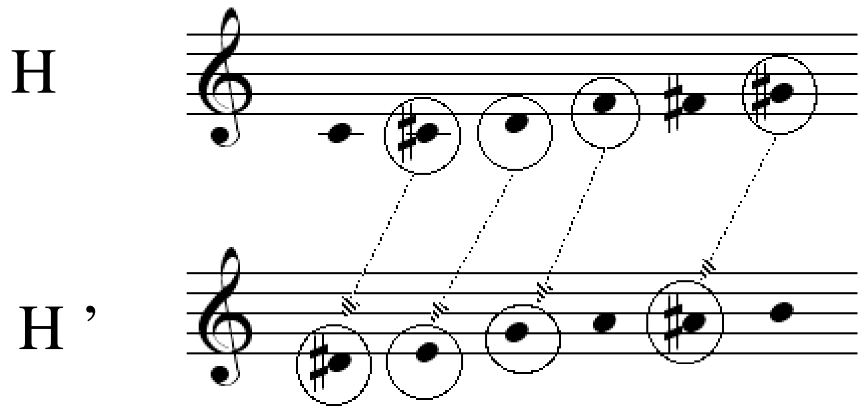
Fonction Intervallique IFUNC dans un GIS

Interval Function IFUNC in a GIS

GIS = (*S*, *G*, int)

S ensemble

H et H’ dans *S*

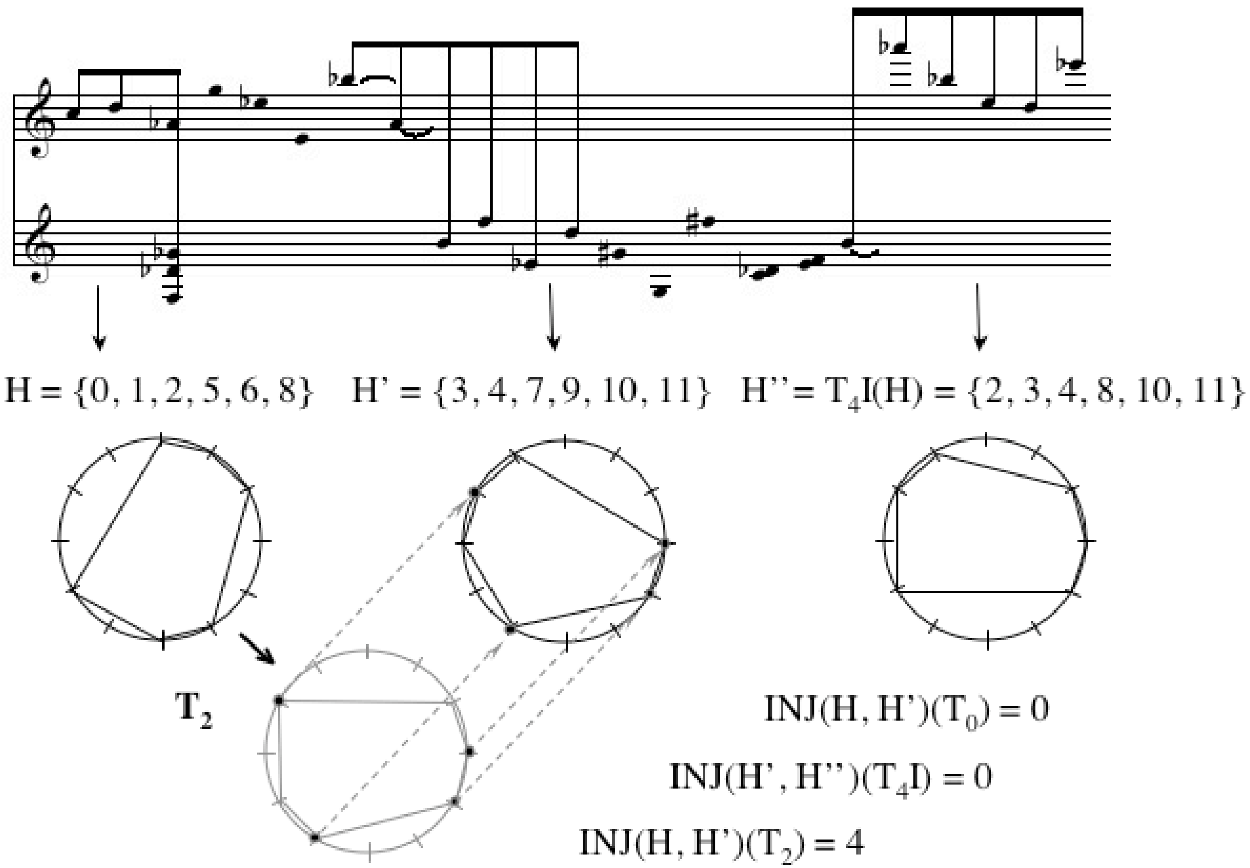


IFUNC(H, H’)(i) = nombre d'éléments (*a*,*b*) dans H × H ’ tels que int(*a*,*b*)=i

IFUNC(H, H ’)(2) = 4

Fonction d'Injection et relation d'inclusion/complémentaire

Injection function and the inclusion/complementary relation

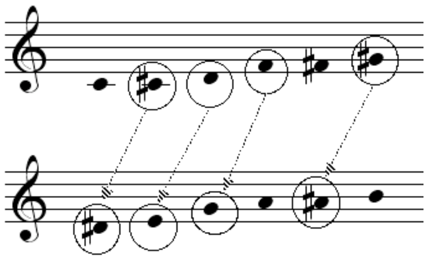


INJ(H,H ')(T_n) = nombre d'éléments *a* de H tels que $T_n(a) \in$ H'

Fonction d 'Injection INJ et Fonction Intervallique IFUNC

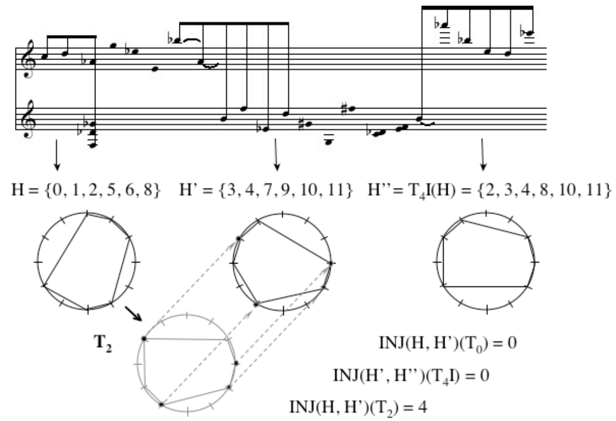
Injection Function and IFUNC

GIS = (S, G, int)



?

<-->



S ensemble

A et B dans S

f transformation sur S

INJ(A,B)(f) = nombre d'éléments a de A tels que f(a) appartient à B

?

IFUNC(A,B)(i) = nombre d'éléments (a,b) de AxB tels que int(a,b) = i

Fonction d 'Injection, IFUNC et système dodécaphonique

Injection Function, IFUNC and the twelve-tone system

« Here the basic hierarchical scope of the (twelve-tone) system is contained essentially in the simple theorem that:

Given a collection of pitches (pitch classes), the multiplicity of occurrence of any interval (…) determines the number of common pitches between the original collection and the transposition by the interval »

(Milton Babbitt, *Past and Present Concepts*, 1961)

$$\mathrm{INJ}(A,B)(\mathrm{T}_i) \quad = \quad \mathrm{IFUNC}(A,B)(i)$$

Fonction d 'Injection, IFUNC et théorie transformationnelle

Injection Function, IFUNC and transformational theory

« ...on peut remplacer entièrement le concept d'intervalle dans un GIS avec le concept de transposition dans un espace »

« ...on peut remplacer le concept même de GIS avec l'idée d'un espace S sur lequel on a un groupe d'opérations qui opère »

(David Lewin, *Generalized Musical Intervals and Transformations*, 1987)

$$\mathrm{INJ}(A,B)(\mathrm{T}_\mathrm{i}) \quad = \quad \mathrm{IFUNC}(A,B)(\mathrm{i})$$

Théorème généralisé de l'hexacorde
Generalized Hexachord Theorem

« Un hexacorde et son complémentaire ont le même contenu intervallique »

$$\mathrm{IFUNC}(A, A)(\mathrm{i}) \quad = \quad \mathrm{IFUNC}(A', A')(\mathrm{i})$$

« Un hexacorde et son complémentaire ont la même fonction d 'injection par rapport à toute transformation bijective »

$$\mathrm{INJ}(A, A)(f) \quad = \quad \mathrm{INJ}(A', A')(f)$$

$$\mathrm{INJ}(A, A')(f) \quad = \quad \mathrm{INJ}(A', A)(f)$$

Horizons philosophique d 'une démarche structurale en musique

G.-G. Granger et la dualité de l'objectal et de l'opératoire

- « Pygmalion. Réflexions sur la pensée formelle », 1947
- *Pour la connaissance philosophique*, 1988
- *Formes, opérations, objets*, 1994

*« [C'est la notion de groupe qui] donne un sens précis à l'idée de structure d'un ensemble [et] permet de déterminer les éléments efficaces des transformations en réduisant en quelque sorte à son schéma opératoire le domaine envisagé. [...]L'objet véritable de la science est le **système des relations** et non pas les termes supposés qu'il relie. [...] Intégrer les résultats - symbolisés - d'une **expérience** nouvelle revient [...] à créer un canevas nouveau, un **groupe de transformations** plus complexe et plus compréhensif »*

G.-G. Granger : « Pygmalion. Réflexions sur la pensée formelle », 1947

Horizons philosophique d 'une démarche structurale en musique

J. Piaget: de la théorie des groupes à la théorie des catégories

- *Le structuralisme*, 1968
- *Morphismes et Catégories. Comparer et transformer* (avec G. Henriques, E. Ascher 1990

*« ...**attitude relationnelle**, selon laquelle ce qui compte [sont] les relations entre les éléments, autrement dit les procédés ou processus de composition [...] La structure [de **groupe**] se referme sur elle-même, mais cette fermeture ne signifie en rien que la structure considérée ne peut pas entrer à titre de sous-structure dans une structure plus large »*

*« De même qu'en mathématique le structuralisme des Bourbaki est déjà doublé par un mouvement faisant appel à des **structures plus dynamiques** (les « catégories » [...]) de même toutes les formes actuelles du structuralisme [...] sont certainement grosses de développements multiples... »*

J. Piaget: *Le structuralisme*

Retombées perceptives de l'approche algébrique

De la théorie des groupes à la théorie des catégories

- E. Cassirer : « The concept of group and the theory of perception », 1944
- G. Balzano : « The group-theoretic description of 12-fold and microtonal pitch systems », 1980

La question de la **ressemblance perceptive** entre différentes transpositions d'un même profil mélodique est liée *« à un problème beaucoup plus général, un problème qui concerne les mathématiques abstraites »*

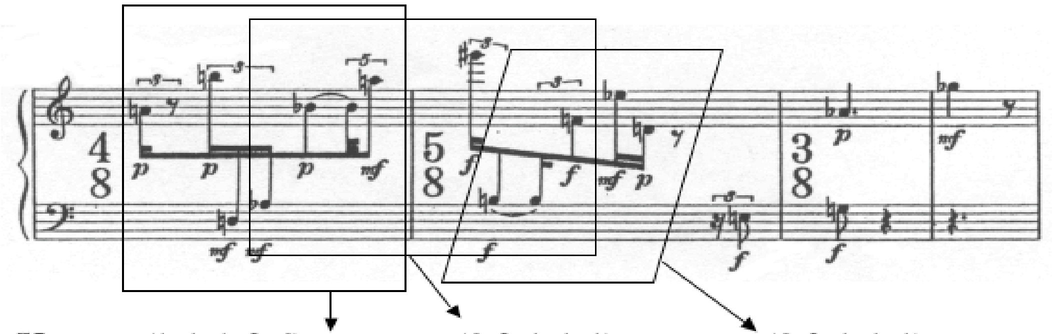
E. Cassirer : « The concept of group and the theory of perception », 1944

« Le caractère singulier de l'expérience musicale est dû en partie aux structures particulières de ***groupe*** *que la musique rend accessible à l'auditeur »*

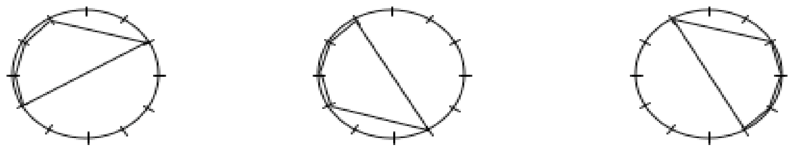
G. Balzano : « The group-theoretic description of 12-fold and microtonal pitch systems », 1980

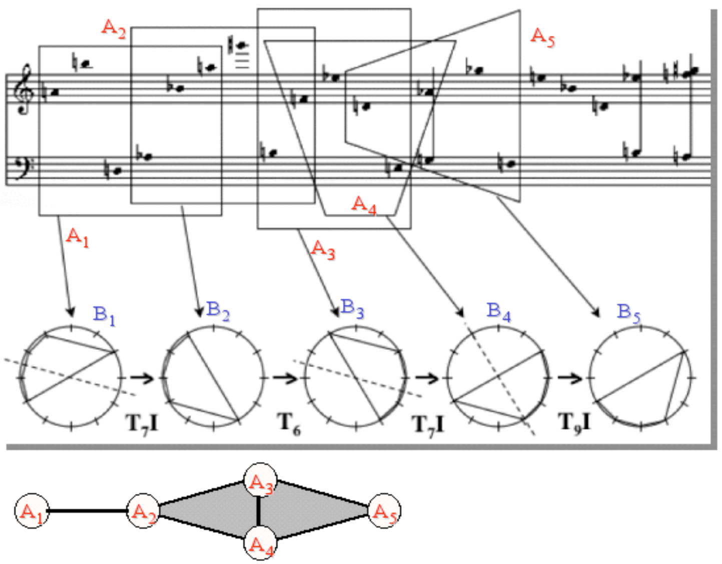
Set Theory, analyse transformationnelle et théorie des catégories

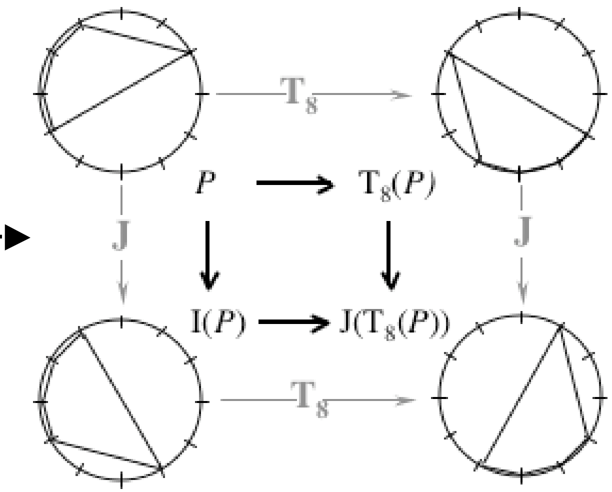
Stockhausen's *Klavierstück III* (Analyse de David Lewin, 1992)



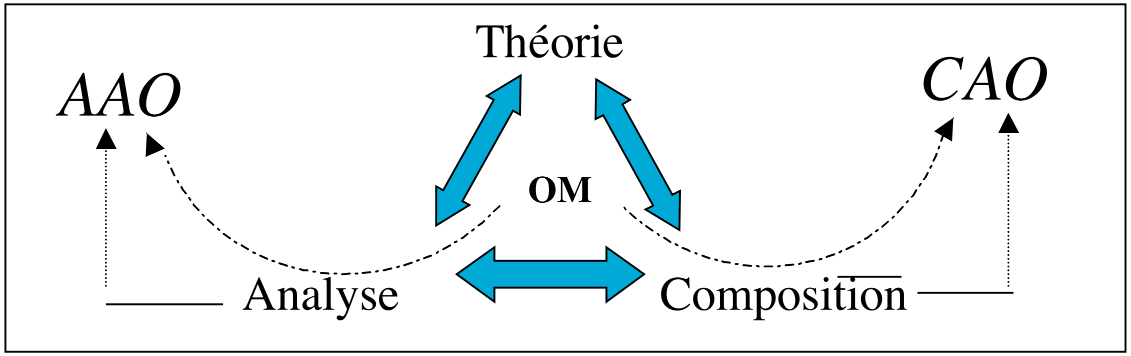
SI:	(1, 1, 1, 3, 6)	(6, 3, 1, 1, 1)	(6, 3, 1, 1, 1)
IFUNC:	[5 3 2 2 1 1 1 1 1 1 2 2 3]	[5 3 2 2 1 1 1 1 1 1 2 2 3]	[5 3 2 2 1 1 1 1 1 1 2 2 3]
VI:	[3 2 2 1 1 1]	[3 2 2 1 1 1]	[3 2 2 1 1 1]

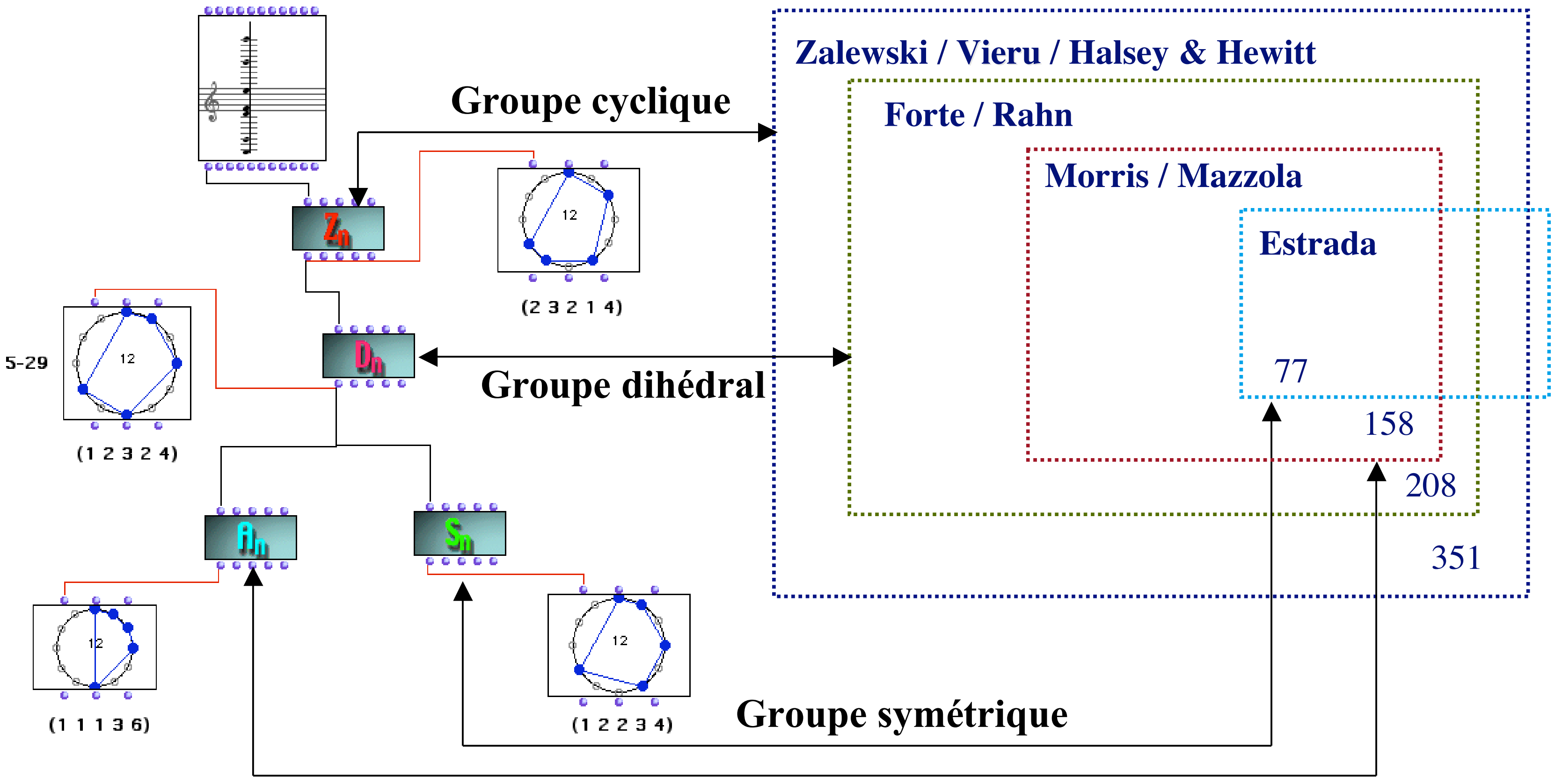






Classification ‘paradigmatique’ des structures musicales

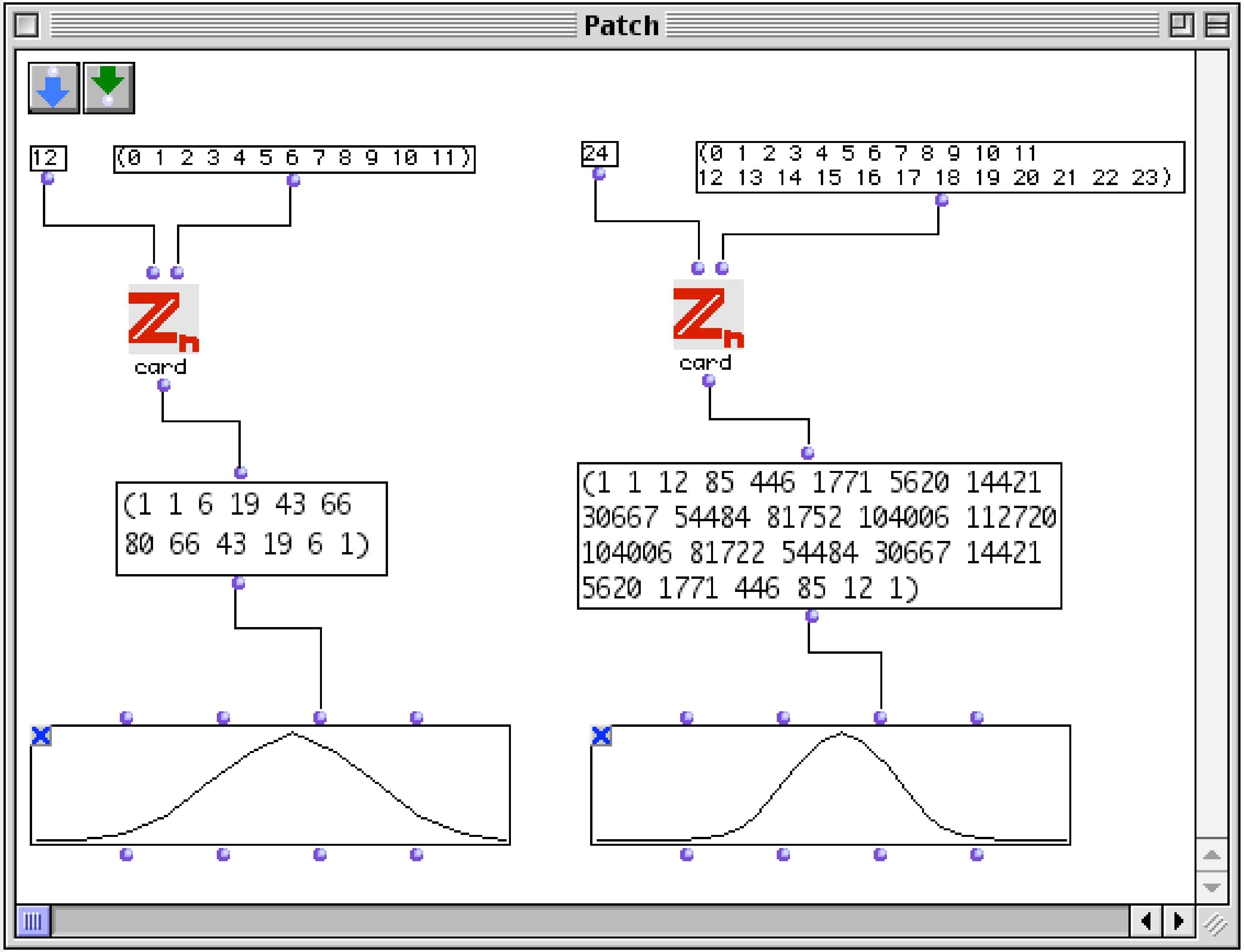




Architecture paradigmatique

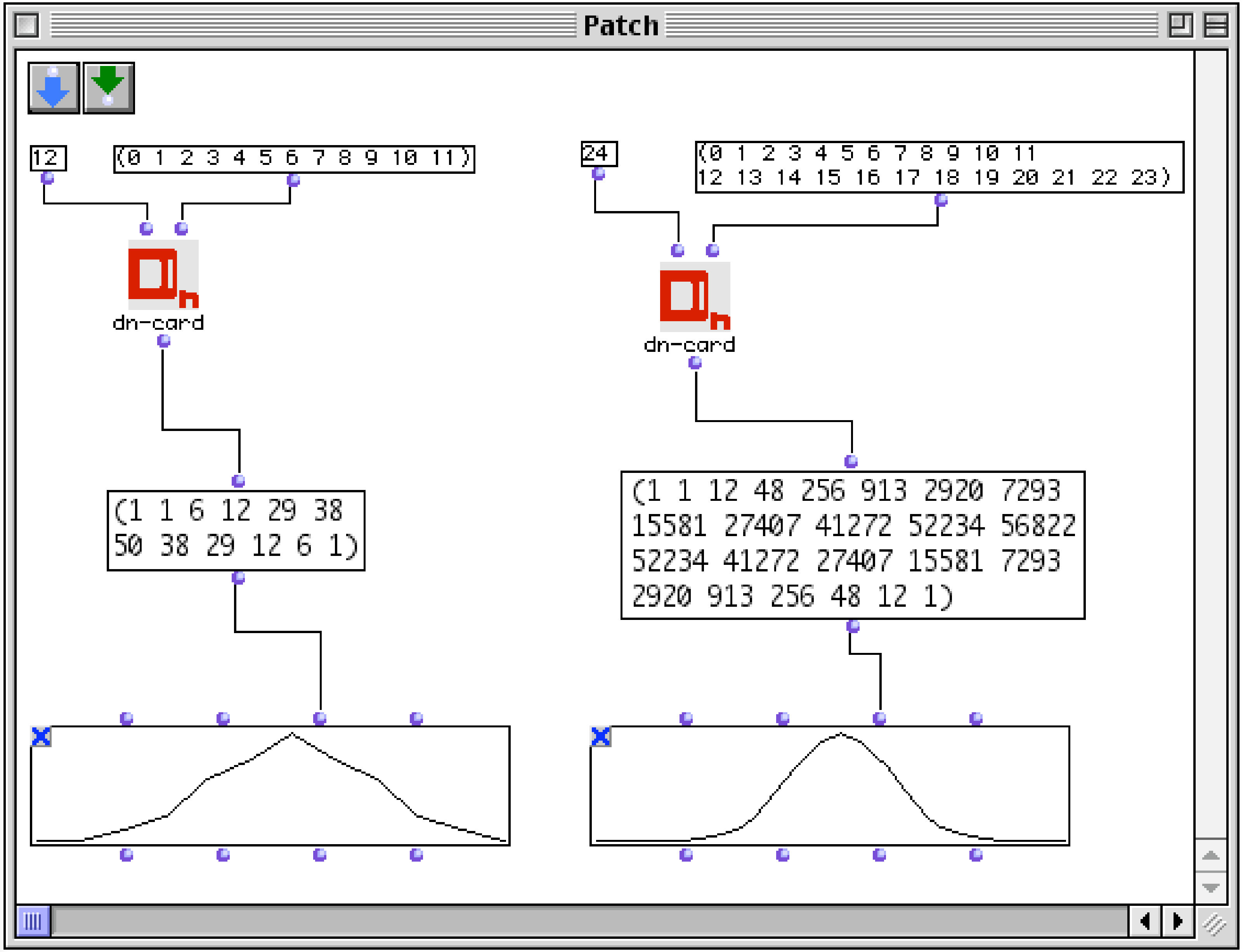
Computational aspects

*Enumeration of transposition classes in a tempered space **Z/nZ***

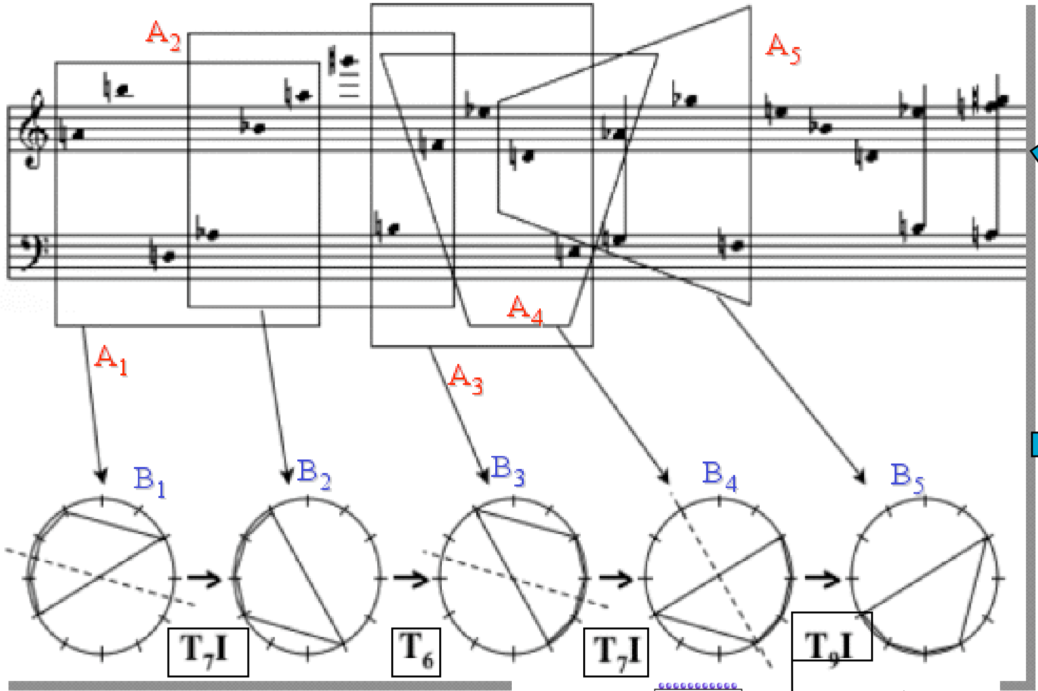


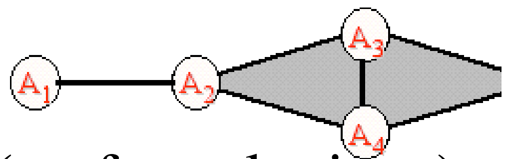
Computational aspects

Enumeration of transposition classes in a tempered space ***Dn***

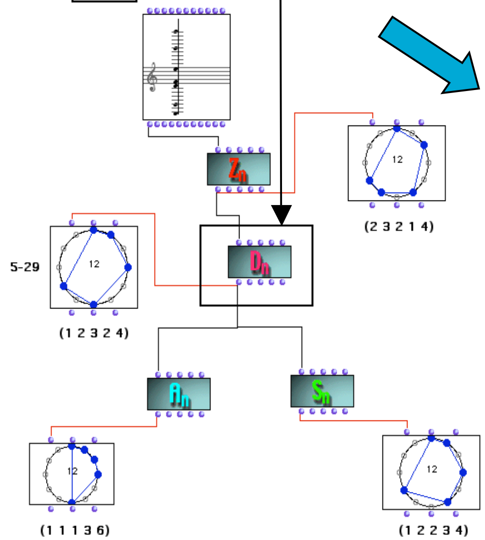


Retombées de l'analyse transformationnelle





(nerf topologique)



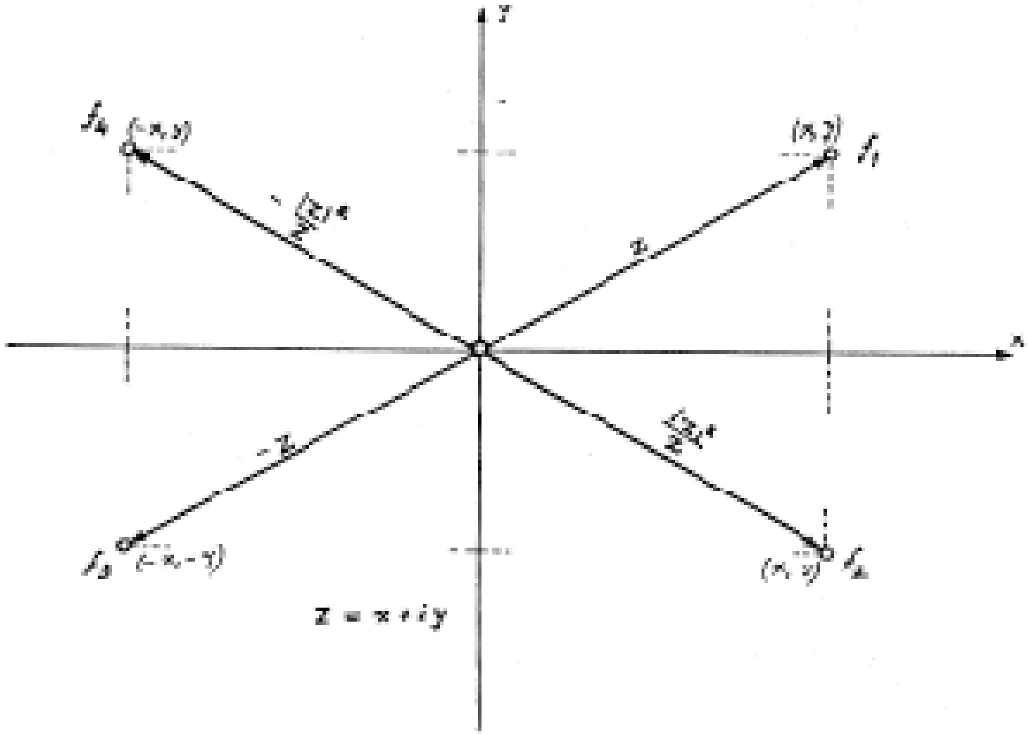
Mathématiques
- Transformations et typologies d 'accords

Épistémologie
- Segmentation
- Équivalence
- Transformations

Philosophie
- Dualité objet/opération
- Dualité local/global
- Les universaux

Algèbre/géométrie chez Xenakis

	S	I	R	R
S	S	I	R	R
I	I	S	RI	R
R	R	RI	S	I
RI	RI	R	I	S



$Z = x + yi$

S série de base → $f_1 = Z = x + yi = Z = f_1(Z)$ = original form

I inversion → $f_2 = x - yi = |Z|^2/Z = f_2(Z)$ = inversion

RI rétrog. inverse → $f_3 = -x - yi = -Z = f_3(Z)$ = inverted retrogradation

R rétrogradation → $f_4 = -x + yi = -(|Z|^2/Z) = f_4(Z)$ = retrogradation

Axiomatique et théorie des groupes en musique

*« La musique peut […] être définie comme une organisation d'**opérations** et de **relations** élémentaires entre des êtres ou entre des fonctions d'êtres sonores. Nous comprenons la place de choix qui revient à la **théorie des ensembles**, non seulement pour la **construction** d'œuvres nouvelles, mais aussi pour l'**analyse** et la meilleure compréhension des œuvres du passé. Ainsi, même une construction stochastique ou une investigation de l'histoire à l'aide de la stochastique ne peuvent être exploitées sans l'aide de la reine des sciences et même des arts, dirais-je, qu'est la logique ou sa forme mathématique l'**algèbre** »*

I. Xenakis : « La musique stochastique : éléments sur les procédés probabilistes de composition musicale » 1961.

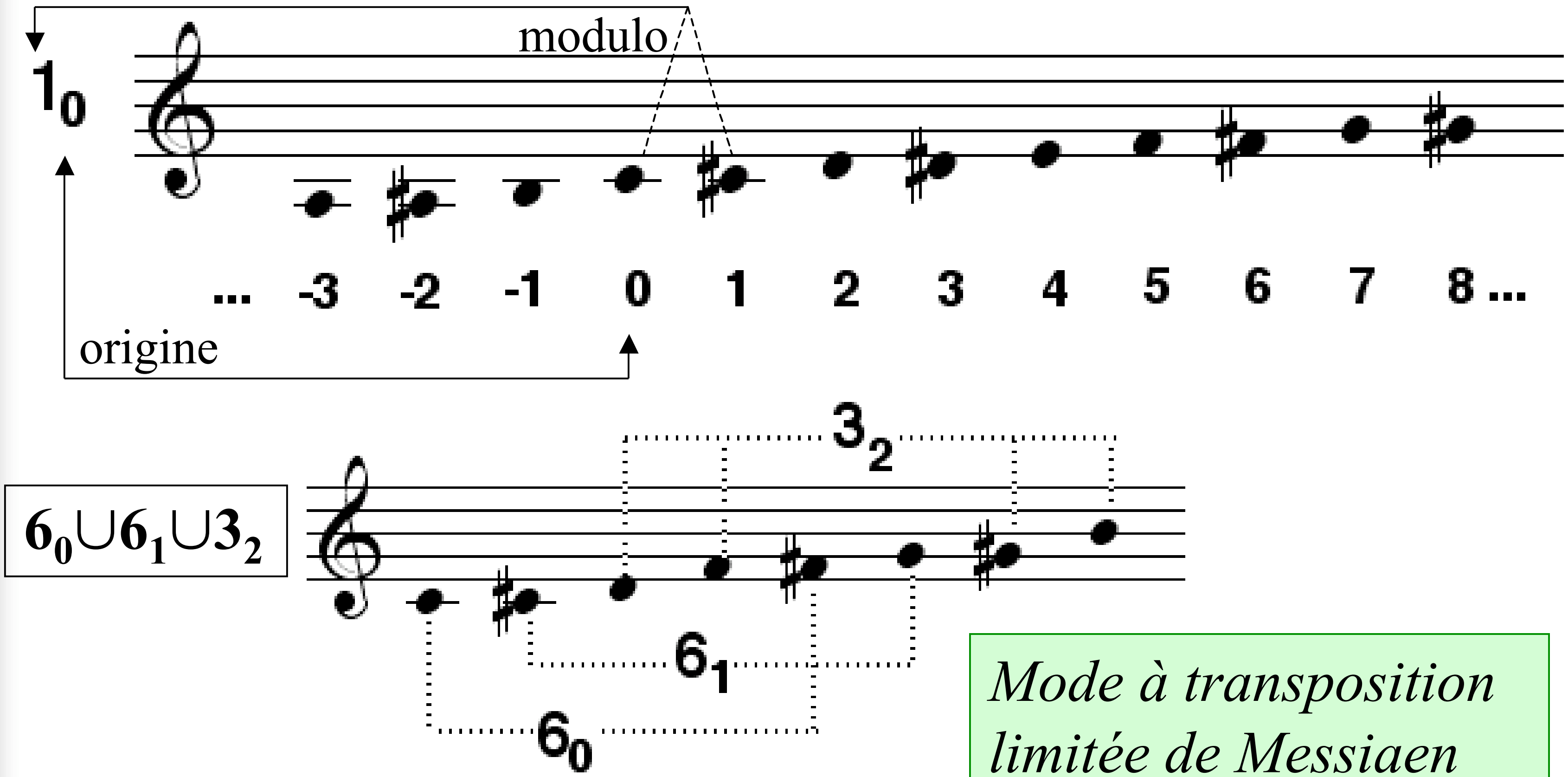
*« La **formalisation** et l'**axiomatisation** constituent en réalité un guide processionnel plus adapté à la pensée moderne en général. Elle permet de placer d'emblée sur un terrain plus **universel** l'art des sons… »*

I. Xenakis : *Musiques formelles*, 1963

*« Aujourd'hui, on peut affirmer qu'avec les vingt-cinq siècles d'évolution musicale, on aboutit à une **formulation universelle** en ce qui concerne la **perception** des hauteurs, qui est la suivante: l'ensemble des intervalles mélodiques est muni d'une structure de **groupe** avec comme loi de composition l'addition »*

I. Xenakis : « La voie de la recherche et de la question », 1965

Théorie des cribles: algèbre et structures ordonnées



$6_0 \cup 6_1 \cup 3_2$

Mode à transposition limitée de Messiaen

- Gammes traditionnelles (diatoniques, Modes de Messiaen, …)
- Gammes micro-tonales et non octaviantes (*Nomos Alpha*, …)
- Cribles comme généralisation de rythmes (*Psappha*, …)
- Cribles comme outil de modélisation des partitions (Riotte&Mesnage)

(6_0) (2_0) $6_0 \cup 6_1$ $6_0 \cup 6_1 \cup 6_5$ $4_0 \cup 4_2 \cup 4_3$ $3_0 \cup 3_1$

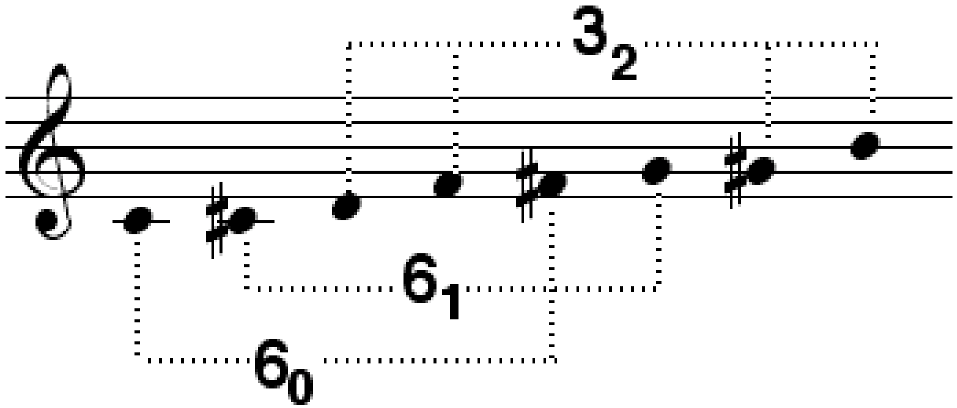
(1_0)

Cribles / Messiaen

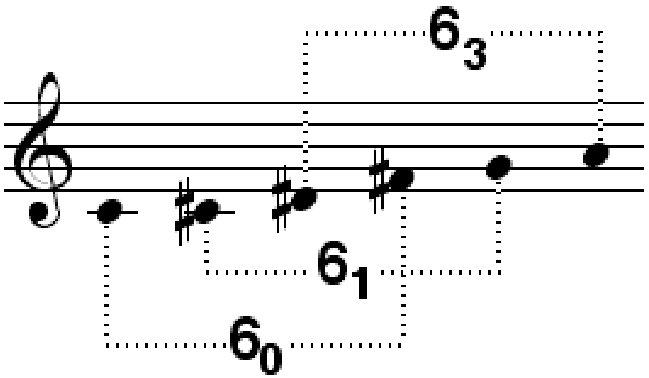
$6_0 \cup 6_1 \cup 3_2$

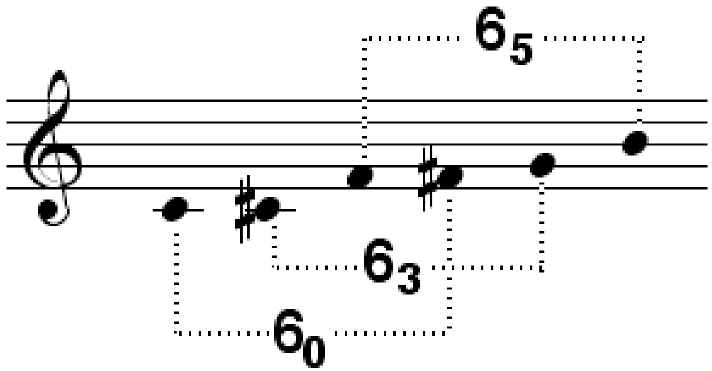
(3_0) (4_0) $6_0 \cup 6_2$ $2_0 \cup 6_5$ $2_1 \cup 6_0 \cup 6_2$

$4_0 \cup 4_1$



Trois modes ‘oubliés’





$6_0 \cup 6_1 \cup 6_3$

$6_0 \cup 6_3 \cup 6_5$

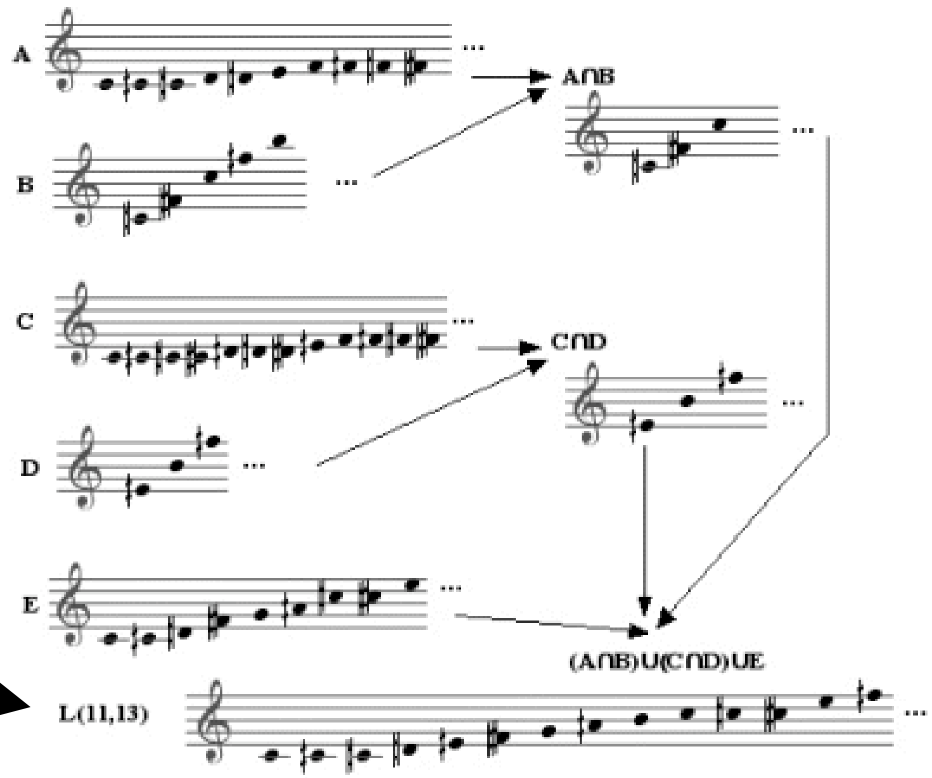
Pitch/Rhythm Isomorphism (Xenakis)

*« [With the sieve theory] one can build very complex **rhythmic architectures** which can simulate the stochastic distribution of points on a line if the period is big enough »*
(« Redécouvrir le temps », éditions de l'Université de Bruxelles, 1988)

$A = (\mathbf{13_3} \cup \mathbf{13_5} \cup \mathbf{13_7} \cup \mathbf{13_9})^c$
$B = \mathbf{11_2}$
$C = (\mathbf{11_4} \cup \mathbf{11_8})^c$
$D = \mathbf{13_9}$
$E = \mathbf{13_0} \cup \mathbf{13_1} \cup \mathbf{13_6}$

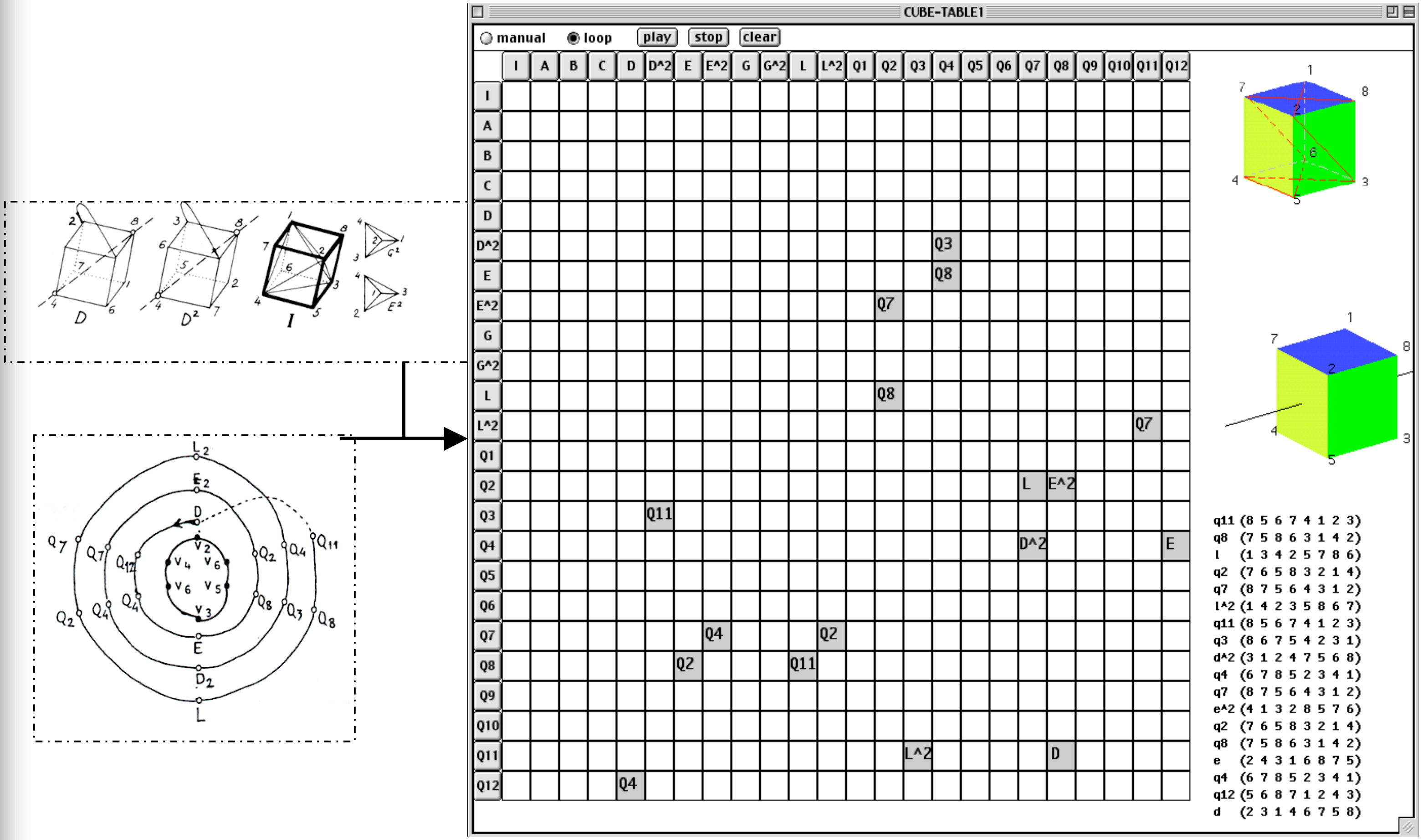
(*Nomos Alpha*, 1966)

$(A \cap B) \cup (C \cap D) \cup E$



1 1 4 3 4 1 5 3 2 2 1 5 3 4 1 5 7 1 5 3 4 1 5 7 1 5 3 3 1 1 5 3 1 3 1 5 2 1 4 1…

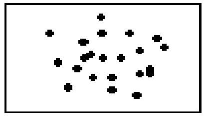
Nomos Alpha (1966)

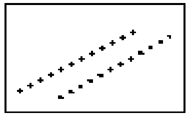


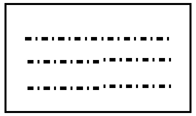
*« Musique **symbolique** pour violoncelle seul, possède une architecture « hors-temps » fondée sur la théorie des groupes de transformations. Il y fait usage de la théorie des cribles, théorie qui annexe les congruence modulo n et qui est issue d'une **axiomatique** de la structure **universelle** de la musique »*

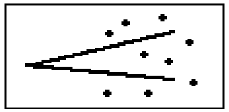
Nomos Alpha : implémentation en OM

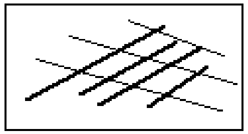
Complexes sonores

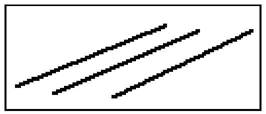
S1  Nuage ataxique de sons pontuels

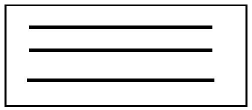
S2  Nuage relativement ordonné, ascendant ou descendant, de sons ponctuels

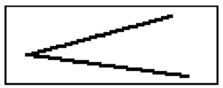
S3  Nuage relativement ordonné, ni ascendant ni descendant de sons ponctuels

S4  Atome ionisé, représenté au violoncelle par des interferences d'un quasi-unisson accompagnés de pizzicati

S5  Champ ataxique de sons glissés

S6  Champ relativement ordonné, ascendant ou descendant, de sons glissés

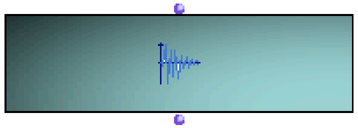
S7  Champ relativement ordonné, ni ascendant ni descendant, de sons glissés

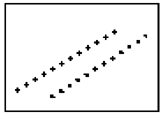
S8  Champ représenté au violoncelle par des interferences d'un quasi-unisson

Nomos Alpha : implémentation en OM

Complexe sonore n. 2
(section Beta)

D S2

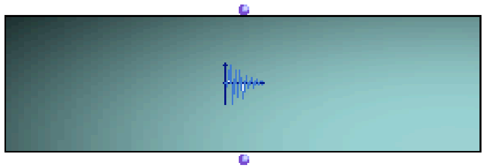




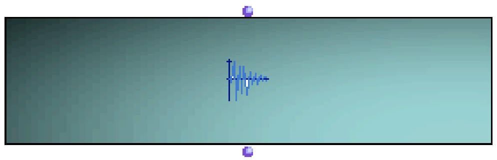
mes. 1

D S2

Q12 S2

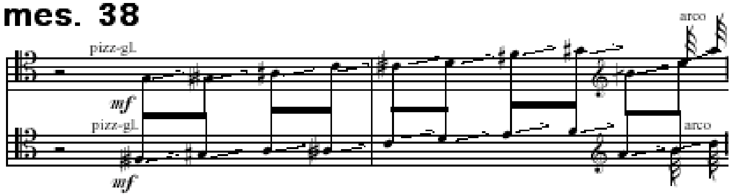


Q4 S2



Nuage relativement ordonné, ascendant ou descentend, de sons ponctuels

mes. 38

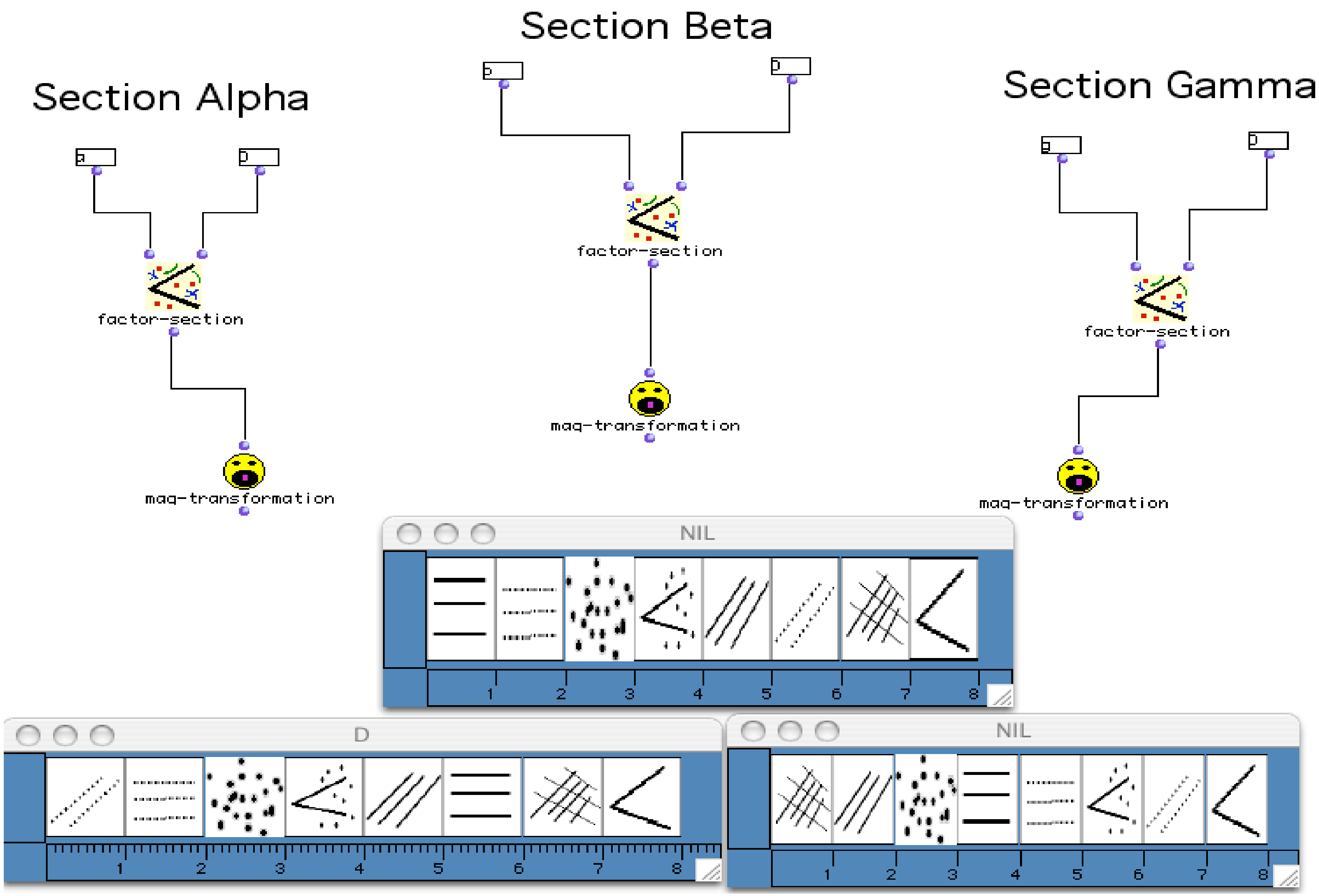


(Cf. R. Peck: "Toward an interpretation of Nomos Alpha", PNM, 41(1), 106-157, 2003)

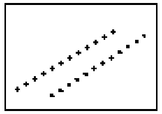
Nomos Alpha : implémentation en OM

Changement de section

(permutation des indices des complexes sonores)



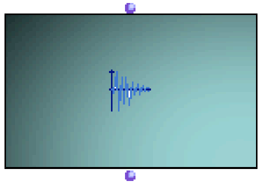
Nomos Alpha : implémentation en OM



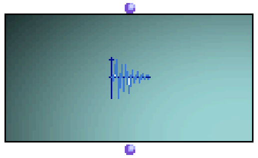
Complexe sonore n. 2

Nuage relativement ordonné, ascendant ou descentend, de sons ponctuels

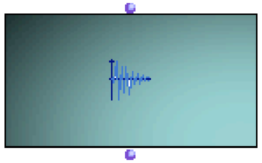
E S5



Q8 S5



Q2 S5



$\kappa^{\alpha}_{1} = 1 . mf . 2 = 2 . mf$

$\kappa^{\alpha}_{2} = 1 . fff . 4.5 = 4.5 . fff$

$\kappa^{\alpha}_{3} = 2.5 . fff . 4.5 = 11.25 . fff$

$\kappa^{\alpha}_{4} = 2.5 . mf . 2 = 5 . mf$

$\kappa^{\alpha}_{5} = 1.5 . f . 2.62 = 3.93 . f$

$\kappa^{\alpha}_{6} = 1.5 . ff . 3.44 = 5.15 . ff$

$\kappa^{\alpha}_{7} = 2.0 . ff . 3.44 = 6.88 . ff$

$\kappa^{\alpha}_{8} = 2.0 . f . 2.62 = 5.24 . f$

<=== (section Alpha)

$\kappa^{\beta}_{1} = 0.5 . mf . 2 = 1 . mf$

$\kappa^{\beta}_{2} = 0.5 . fff . 4.5 = 2.25 . fff$

$\kappa^{\beta}_{3} = 5 . fff . 4.5 = 22.5 . fff$

$\kappa^{\beta}_{4} = 5.0 . mf . 2 = 10.0 . mf$

$\kappa^{\beta}_{5} = 1.08 . f . 2.62 = 2.83 . f$

$\kappa^{\beta}_{6} = 1.08 . ff . 3.44 = 3.72 . ff$

$\kappa^{\beta}_{7} = 2.32 . ff . 3.44 = 7.98 . ff$

$\kappa^{\beta}_{8} = 2.32 . f . 2.62 = 6.08 . f$

(section Gamma) ===>

$\kappa^{\gamma}_{1} = 1 . mf . 2 = 2 . mf$

$\kappa^{\gamma}_{2} = 1 . fff . 2 = 2 . fff$

$\kappa^{\gamma}_{3} = 4.0 . fff . 4.5 = 18.0 . fff$

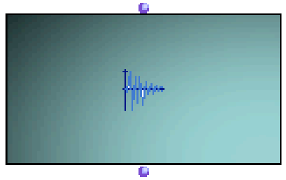
$\kappa^{\gamma}_{4} = 4.0 . mf . 2.0 = 8.0 . mf$

$\kappa^{\gamma}_{5} = 2.0 . f . 2.62 = 5.24 . f$

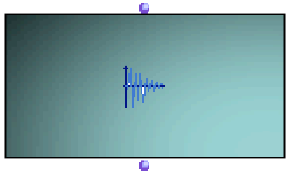
$\kappa^{\gamma}_{6} = 2.0 . ff . 3.44 = 6.88 . ff$

$\kappa^{\gamma}_{7} = 3.0 . ff . 3.44 = 10.32 . ff$

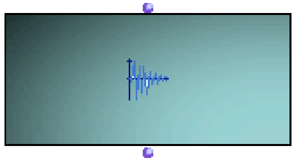
$\kappa^{\gamma}_{8} = 3.0 . f . 2.62 = 7.86 . f$



E^2 S7



Q7 S7



Q4 S7

Nomos Alpha : implémentation en OM

Label	Order of Vertices
I	12345678
A	21436587
B	34127856
C	43218765
D	23146758
D^2	31247568
E	24316875
E^2	41328576
G	32417685
G^2	42138657
L	13425786
L^2	14235867
Q_1	78653421
Q_2	76583214
Q_3	86754231
Q_4	67852341
Q_5	68572413
Q_6	65782134
Q_7	87564312
Q_8	75863142
Q_9	58761432
Q_{10}	57681324
Q_{11}	85674123
Q_{12}	56871243

Structure de la pièce

Beta	X1 ---> X2 ---> X3 --->	Intermezzo 1
Gamma	---> X4 ---> X5 ---> X6 --->	Intermezzo 2
Alpha	---> X7 ---> X8 ---> X9 --->	Intermezzo 3
Beta	---> X10 ---> X11 ---> X12 --->	Intermezzo 4
Gamma	---> X13 ---> X14 ---> X15 --->	Intermezzo 5
Alpha	---> X16 ---> X17 ---> X18 --->	Intermezzo 6

(Théorie des cribles)

+

(Théorie des groupes)

(Théorie des cribles)

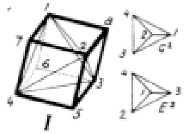
Nomos Alpha : implémentation en OM

Label	Order of Vertices
I	12345678
A	21436587
B	34127856
C	43218765
D	23146758
D^2	31247568
E	24316875
E^2	41328576
G	32417685
G^2	42138657
L	13425786
L^2	14235867
Q_1	78653421
Q_2	76583214
Q_3	86754231
Q_4	67852341
Q_5	68572413
Q_6	65782134
Q_7	87564312
Q_8	75863142
Q_9	58761432
Q_{10}	57681324
Q_{11}	85674123
Q_{12}	56871243

Groupe de rotations du cube dans l'espace

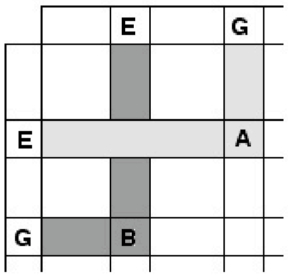
isomorphe au groupe des permutations de 4 éléments S4

isomorphe au groupe des symétries du tétraèdre

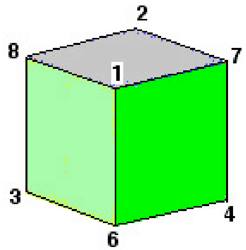


<===

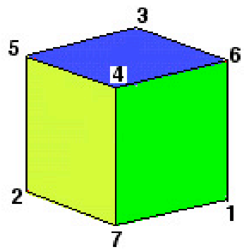
<===

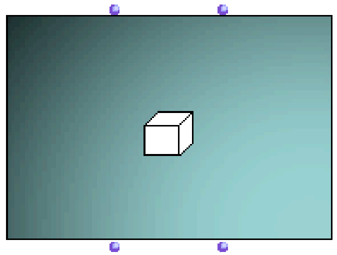


E (G) = A =



G(E) = B =





(24316875)°(32417685)=(21436587)

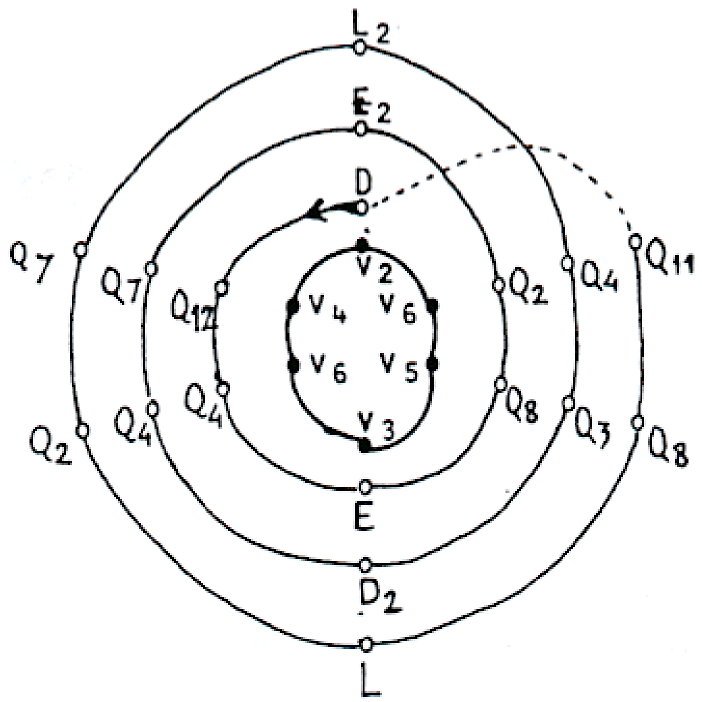
=(12)(34)(56)(78)

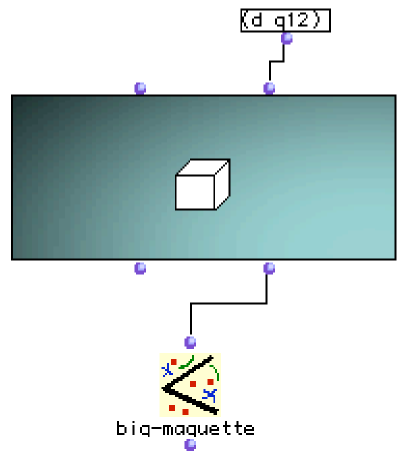
<===>

1-->2
2-->1
3-->4
4-->3
5-->6
6-->5
7-->8
8-->7

Nomos Alpha : implémentation en OM

Processus de Fibonacci généralisé



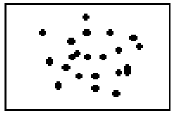


- Caractère cyclique
- Longueur maximale = 18
- Degré maximal = 13

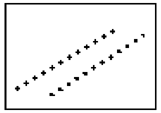
Nomos Alpha : implémentation en OM

Deux processus de Fibonacci en parallèle

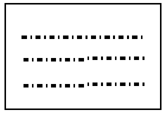
S1



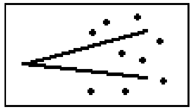
S2



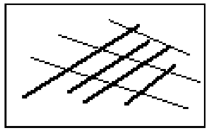
S3



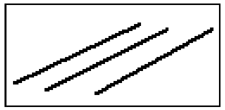
S4



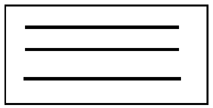
S5



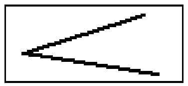
S6

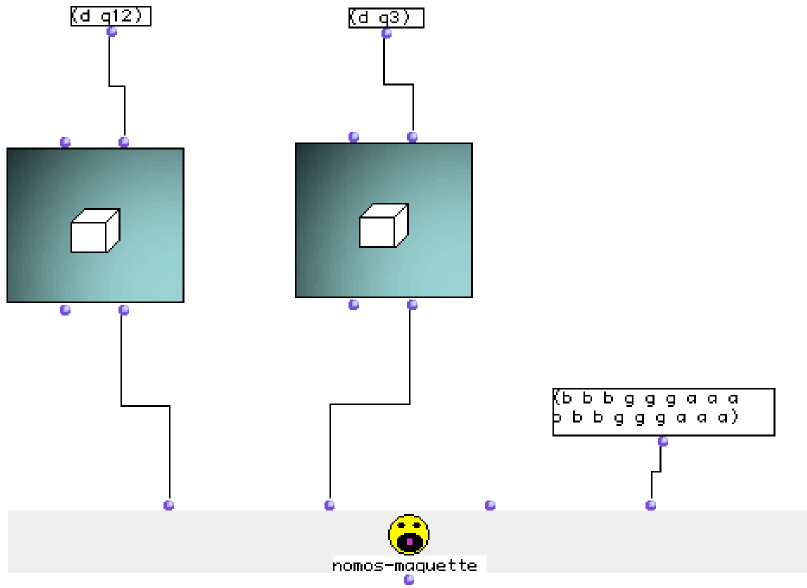


S7



S8





$\kappa^{\sigma}_{1} = 1 \, . \, mf \, . \, 2 = 2 \, mf$

$\kappa^{\sigma}_{2} = 1 \, . \, fff \, . \, 4.5 = 4.5 \, . \, fff$

$\kappa^{\sigma}_{3} = 2.5 \, . \, fff \, . \, 4.5 = 11.25 \, . \, fff$

$\kappa^{\sigma}_{4} = 2.5 \, . \, mf \, . \, 2 = 5 \, mf$

$\kappa^{\sigma}_{5} = 1.5 \, . \, f \, . \, 2.62 = 3.93 \, f$

$\kappa^{\sigma}_{6} = 1.5 \, . \, ff \, . \, 3.44 = 5.15 \, ff$

$\kappa^{\sigma}_{7} = 2.0 \, . \, ff \, . \, 3.44 = 6.88 \, ff$

$\kappa^{\sigma}_{8} = 2.0 \, . \, f \, . \, 2.62 = 5.24 \, f$

$\kappa^{\beta}_{1} = 0.5 \, . \, mf \, . \, 2 = 1 \, mf$

$\kappa^{\beta}_{2} = 0.5 \, . \, fff \, . \, 4.5 = 2.25 \, . \, fff$

$\kappa^{\beta}_{3} = 5 \, . \, fff \, . \, 4.5 = 22.5 \, . \, fff$

$\kappa^{\beta}_{4} = 5.0 \, . \, mf \, . \, 2 = 10.0 \, mf$

$\kappa^{\beta}_{5} = 1.08 \, . \, f \, . \, 2.62 = 2.83 \, f$

$\kappa^{\beta}_{6} = 1.08 \, . \, ff \, . \, 3.44 = 3.72 \, ff$

$\kappa^{\beta}_{7} = 2.32 \, . \, ff \, . \, 3.44 = 7.98 \, ff$

$\kappa^{\beta}_{8} = 2.32 \, . \, f \, . \, 2.62 = 6.08 \, f$

$\kappa^{\gamma}_{1} = 1 \, . \, mf \, . \, 2 = 2 \, mf$

$\kappa^{\gamma}_{2} = 1 \, . \, fff \, . \, 2 = 2 \, . \, fff$

$\kappa^{\gamma}_{3} = 4.0 \, . \, fff \, . \, 4.5 = 18.0 \, . \, fff$

$\kappa^{\gamma}_{4} = 4.0 \, . \, mf \, . \, 2.0 = 8.0 \, mf$

$\kappa^{\gamma}_{5} = 2.0 \, . \, f \, . \, 2.62 = 5.24 \, f$

$\kappa^{\gamma}_{6} = 2.0 \, . \, ff \, . \, 3.44 = 6.88 \, ff$

$\kappa^{\gamma}_{7} = 3.0 \, . \, ff \, . \, 3.44 = 10.32 \, ff$

$\kappa^{\gamma}_{8} = 3.0 \, . \, f \, . \, 2.62 = 7.86 \, f$

Nomos Alpha : implémentation en OM

- La pièce...   ... et ses variantes