

Formation ATIAM

Acoustique Traitement du Signal Informatique Appliqués à la Musique
Parcours multi-mentions du Master (M2) Sciences et Technologies de
l'Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)



UE Méthodes mathématiques pour l'informatique musicale [MMIM]

Moreno Andreatta

Equipe Représentations Musicales

IRCAM/CNRS UMR 9912



Plan du cours (15/1; 22/1; 5/2; 13/2)

L'approche algébrique en musique :

- Survol historique et outils théoriques de base

La *Set Theory* « classique » :

- Le sérialisme intégral de Milton Babbitt
- Le catalogue des *pitch-class sets* d'Allen Forte
- Le catalogue des structures modales d'Anatol Vieru
- Le catalogue d'Elliot Carter
- Enumération et classification paradigmatique en *OpenMusic*

La *Set Theory* « transformationnelle » :

- Le système d'intervalles généralisés de David Lewin
- Les réseaux d'Henry Klumpenhouwer (*K-nets*)

Problèmes mathématiques posés par la musique :

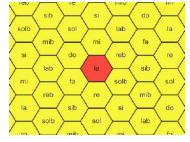
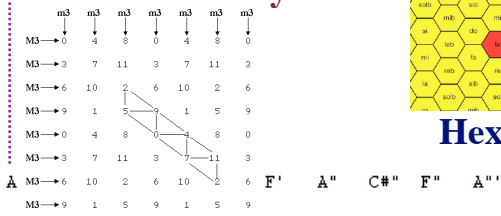
- Canons rythmiques mosaïques et imparité rythmique
- Séquences périodique et calcul des différences finies
- Le théorème de l'hexacorde de Babbitt
- Les isographies fortes dans les *K-nets*

La « musique formalisée » de Iannis Xenakis :

- Théorie des cribles et structures d'ordre
- De *Herma* à *Nomos Alpha*

Ramifications philosophiques et cognitives de l'approche algébrique en musique

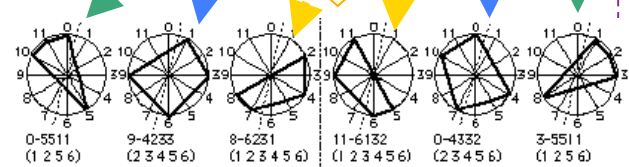
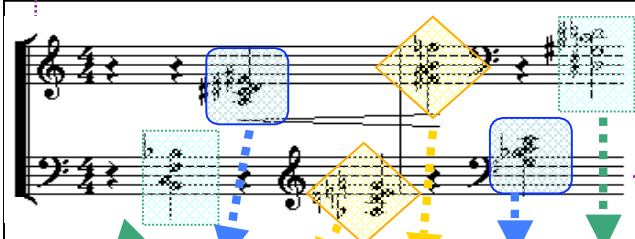
Diatonic Theory



Hexagons

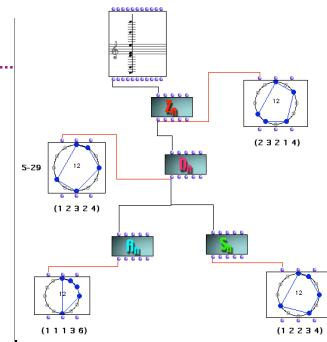
D	F#	A#	D'	F#'	A#'	D''	F#''	A#''	D'''
G	B	D#	G'	B'	D#'	G''	B''	D#''	G'''
C	E	G#	C'	E'	G#'	C''	E''	G#''	C'''
F	A	C#	F'	A'	C#'	F''	A''	C#''	F'''
Bb	D	F#	Bb'	D'	F#'	Bb''	D''	F#''	Bb'''
Eb	G	B	Eb'	G'	B'	Eb''	G''	B''	Eb'''
Ab	C	E	Ab'	C'	E'	Ab''	C''	E''	Ab'''

Longuet-Higgins (1962)

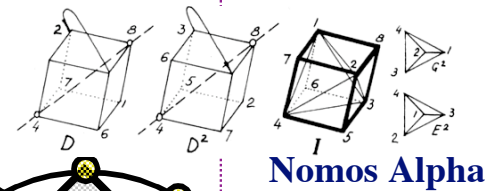


5-30	0,1,4,6,8	121321	7-30	0,1,2,4,6,8,9	343542
5-31	0,1,3,6,9	114112	7-31	0,1,3,4,6,7,9	336333
5-32	0,1,6,6,9	113221	7-32	0,1,3,4,6,6,9	335442
5-33(12)	0,2,4,6,8	040402	7-33	0,1,2,4,6,8,10	262623
5-34(10)	0,2,4,6,9	032221	7-34	0,1,2,4,6,8,10	254442
5-35(10)	0,2,4,7,9	031400	7-35	0,1,3,5,6,8,10	254361
5-37(12)	0,3,4,5,8	201212	7-36	0,1,3,4,5,7,8	445421
5-38	0,1,2,5,8	212221	7-238	0,1,2,4,5,7,8	434442
6-4(12)	0,1,2,3,4,5	543110	6-2(11)	0,1,2,3,4,5,6	444342
6-7(6)	0,1,2,4,7	3221121	6-2(11)	0,1,2,3,4,5,6	444342
6-8	0,1,2,3,6,7	422322	6-2(11)	0,1,2,3,4,5,6	444342
6-9(12)	0,1,2,5,6,7	421242	6-238(12)	0,1,2,3,7,8	
6-10	0,1,2,6,7,8	420243			
6-11(2)	0,2,3,4,5,7	343230			
6-9	0,1,2,3,5,7	342231			
6-2(10)	0,1,3,4,5,7	333231	6-239	0,2,3,4,5,8	
6-2(11)	0,1,2,4,5,7	332231	6-240	0,1,2,3,5,8	
6-2(12)	0,1,2,4,6,7	332232	6-241	0,1,2,3,6,8	
6-2(13)(12)	0,1,3,4,6,7	324222	6-242(12)	0,1,2,3,6,9	

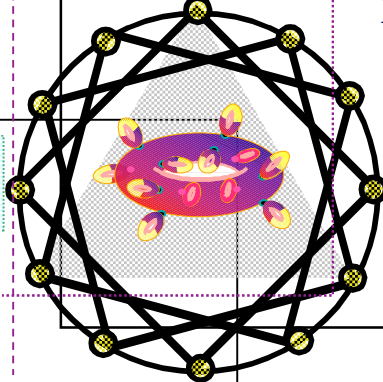
Set Theory



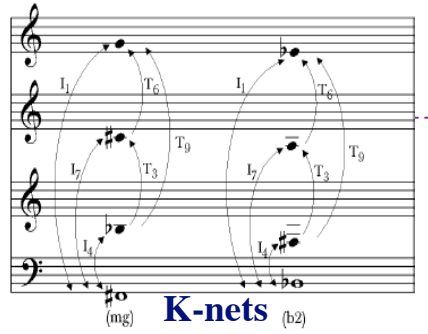
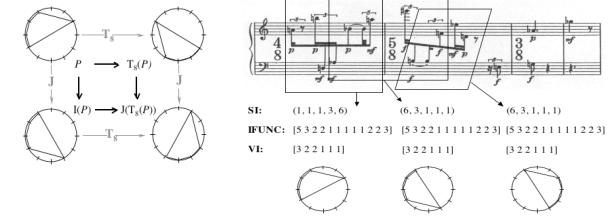
Paradigmatics



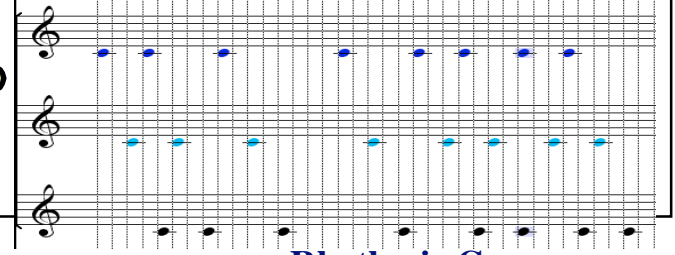
Nomos Alpha



Transformational Theories



K-nets (b2)



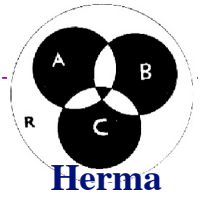
Rhythmic Canons



V	0	3	8	7	11	0	11	10	6	9	0	9	1	2	9	8	4	3	6
VIII	0	0	0	3	3	3	7	2	0	0	0	9	3	3	3	4	8	0	0
IV	3	3	4	4	1	11	11	8	3	3	9	4	1	7	11	8	11	3	9
IX	0	0	0	0	0	3	6	[1]	3	3	3	3	9	0	3	6	[10]	6	6
IV	0	10	3	9	10	0	9	7	0	6	7	9	6	4	9	3	4	6	3

Periodic Sequences

Modal Theories



Herma

Méthodes algébriques en Musique
et Musicologie du XX^e siècle :
aspects
théoriques, analytiques et
compositionnels

www.ircam.fr/equipes/repmus/moreno

« Quelques aspects théoriques d'une approche algébrique en musique », *L'Ouvert*, **112**, 2005

Mathématiques
(modernes)

double perspective

Musique

XX^e
siècle

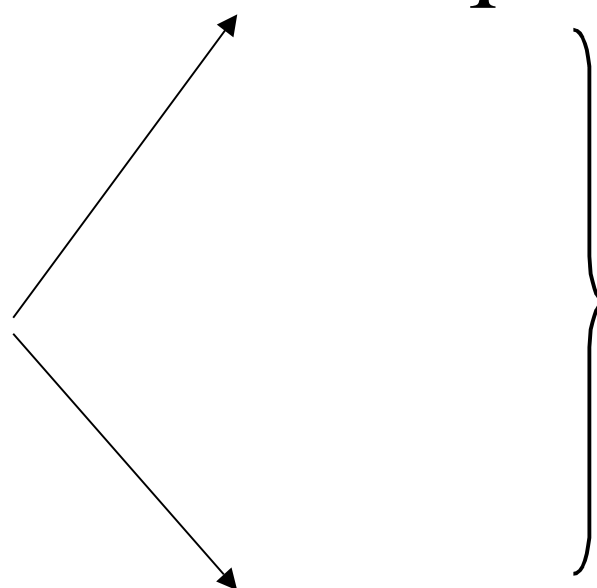
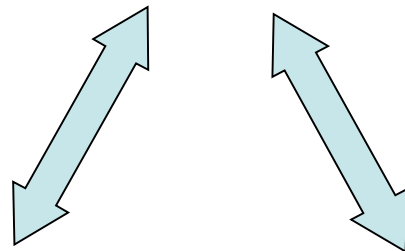
Musicologie

Théorie

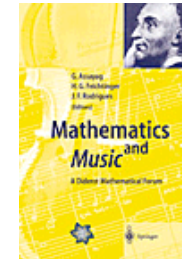
Analyse

Composition

tripartition



Mathématiques/Musique...une histoire récente



- 1999 : 4^e Forum Diderot (Paris, Vienne, Lisbonne),
Mathematics and Music (Assayag et al., Springer, 2001)

- 2000-2001: Séminaire *MaMuPhi*
Penser la musique avec les mathématiques ? (Assayag, Mazzola, Nicolas ed.,
Collection « Musique/Sciences », Ircam/Delatour, 2006)

- 2000-2003: International Seminar on *MaMuTh*
Perspectives in Mathematical and Computational Music Theory (Mazzola,
Noll, Luis-Puebla, epOs, 2004) <http://www.epos.uos.de/music/>

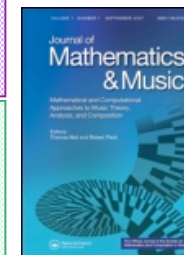
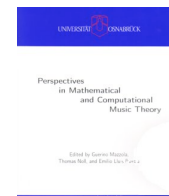
- 2003 : *The Topos of Music* (G. Mazzola et al.)

- 2001 - 2006 : Séminaire *MaMuX* de l'Ircam
<http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/>

- 2004 - 2006 : Séminaire « Musique et Mathématique » (Ens/Ircam)
<http://www.entretemps.asso.fr/math>

- 2006 : *Mathematical Theory of Music* (Franck Jedrzejewski),
Collection « Musique/Sciences », Ircam/Delatour

- 2007 : *Journal of Mathematics and Music* (Taylor & Francis)
<http://www.entretemps.asso.fr/math>



Algèbre et Musique : un survol

⇒ *Méthodes algébriques en théorie de la musique*

Tradition américaine 'set-théorique'

Musiques formelles

Théorie modale

Théorie mathématique de la musique

Babbitt
Lewin

Xenakis
Barbaud

Vieru

Mazzola

Adler

Seeger

Riotte
Mesnager
Assayag

⇒ *Musicologie computationnelle*

Musicologie systématique

CAO, AAO et TAO

« Analyse paradigmatique » en *OpenMusic*

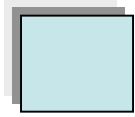
⇒ Implémentation du processus compositionnel

La place des mathématiques dans la musicologie systématique

Guido Adler : « Umfang, Methode und Ziel der Musikwissenschaft » (1885)

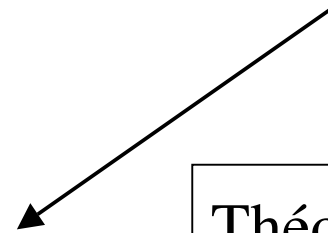
II. Systematisch.			
Aufstellung der in den einzelnen Zweigen der Tonkunst zuhöchst stehenden Gesetze.			
A. Erforschung und Begründung derselben in der	B. Aesthetik der Tonkunst.	C. Musikalische Pädagogik und Didaktik	D. Musikologie (Untersuchung und Vergleichung zu ethnographischen Zwecken).
1. <i>Harmonik</i> (tonal od. tonlich).	1. Vergleichung und Werthschätzung der Gesetze und deren Relation mit den apperzipirenden Subjecten behufs Feststellung der <i>Kriterien des musikalisch Schönen.</i>	(Zusammenstellung der Gesetze mit Rücksicht auf den Lehrzweck)	
2. <i>Rhythmik</i> (temporär oder zeitlich).	2. Complex unmittelbar und mittelbar damit zusammenhängender Fragen.	1. Tonlehre, 2. Harmonielehre, 3. Kontrapunkt, 4. Compositionslehre, 5. Instrumentationslehre, 6. Methoden des Unterrichtes im Gesang und Instrumentalspiel.	
3. <i>Melik</i> (Cohärenz von tonal und temporär).			
Hilfswissenschaften: Akustik und Mathematik. Physiologie (Tonempfindungen). Psychologie (Tonvorstellungen, Tonurtheile und Tongefühle). Logik (das musikalische Denken). Grammatik, Metrik und Poetik. Pädagogik Ästhetik etc.			

« La deuxième grande partie de la musicologie est la partie systématique; cette partie se base sur la partie historique. (...) L'accent de l'observation réside dans l'analogie de la méthode musicologique avec la méthode scientifique ».

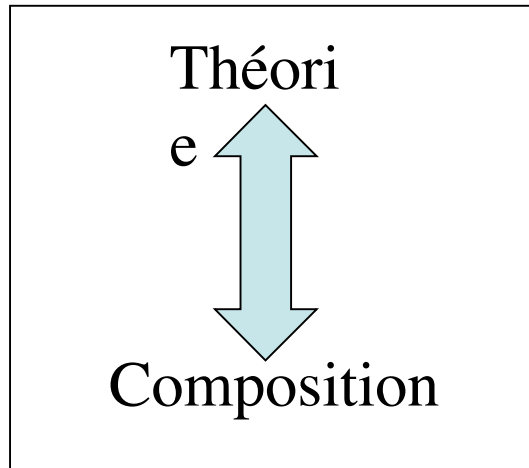


Musique

Méthodes algébriques



Théoriciens/Compositeurs



- Ernst Krenek
- Milton Babbitt
- Iannis Xenakis
- Anatol Vieru
- Pierre Barbaud
- Michel Philippot
- André Riotte
- ...

Vers l'émergence des structures algébriques en musique

Ernst Krenek et la méthode axiomatique

- *The Relativity of Scientific Systems*
- *The Significance of Axioms*
- *Axioms in music*
- *Musical Theory and Musical Practice*

Ernst Krenek : *Über Neue Musik*, 1937 (Engl. Transl. *Music here and now*, 1939).

«*Physicists and mathematicians are far in advance of musicians in realizing that their respective sciences do not serve to establish a concept of the universe conforming to an objectively existent nature*»

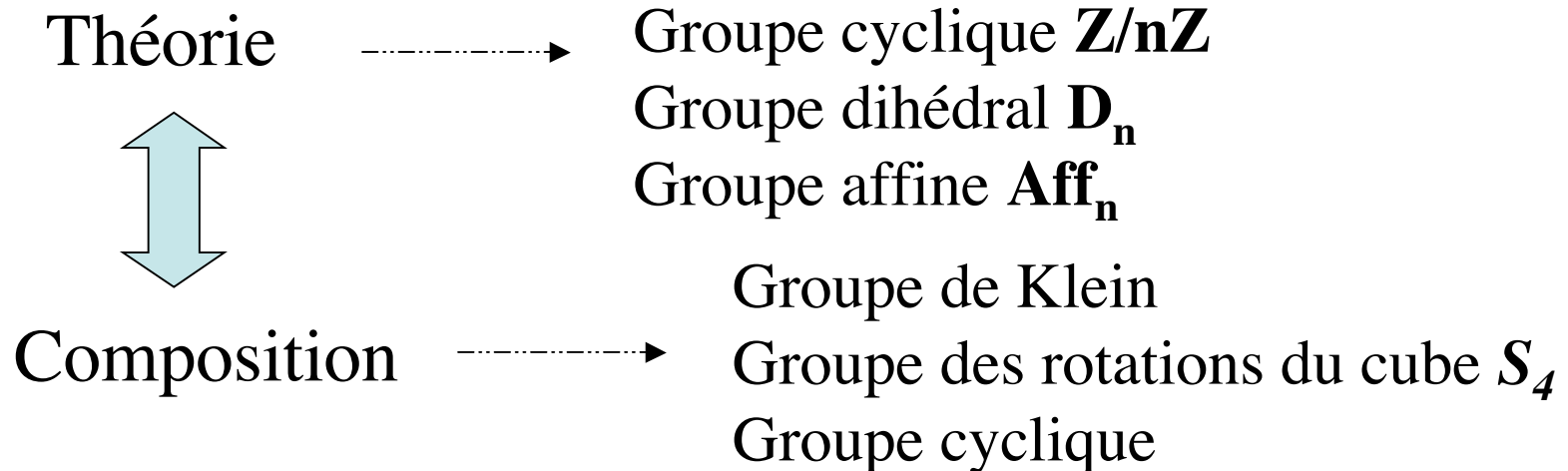
«*As the study of axioms eliminates the idea that axioms are something absolute, conceiving them instead as **free propositions of the human mind**, just so would this **musical theory** free us from the concept of major/minor tonality [...] as an irrevocable law of nature*».

Babbitt : *The function of Set Structure
in the Twelve-Tone System*, PhD 1946/1992

Xenakis : *Musiques formelles*, 1963

Vieru : *Eléments
d'une théorie générale des
modes*, 1967

La structure de
groupe en musique



Sur les orientations théoriques (et/ou métathéoriques) de la tradition américaine

B. Boretz et E.T. Cone : *Perspectives on Contemporary Music Theory*, W.W. Norton and Company, New York, 1972.

« The recognition of music-theoretical questions as critical compositional ones is not, of course, unique to the twentieth century, nor to composers. But the uniquely explicit, uniquely consequential, and uniquely exposed contemporary involvement of composers in theory as writers and system builders has given the theoretical-compositional connection unprecedentedly wide, if not always benign or even accurate, publicity : we live, as every reader of the public musical print knows, in an age of **‘theoretical composition’**. »

« Milton Babbitt, in particular, was the first to suggest that the force of any ‘musical system’ was not as universal constraints for all music but as alternative theoretical constructs, rooted in a communality of shared empirical principles and assumptions **validated** by tradition, experience, and experiment »

Une démarche algébrique pour le sérialisme intégral

*« Une compréhension de la structuration dodécaphonique des composantes autres que les hauteurs ne peut que passer par une définition correcte et rigoureuse de la **nature** du système et des **opérations** qui lui sont associées »*

M. Babbitt : « Some Aspects of Twelve-Tone Composition », 1955

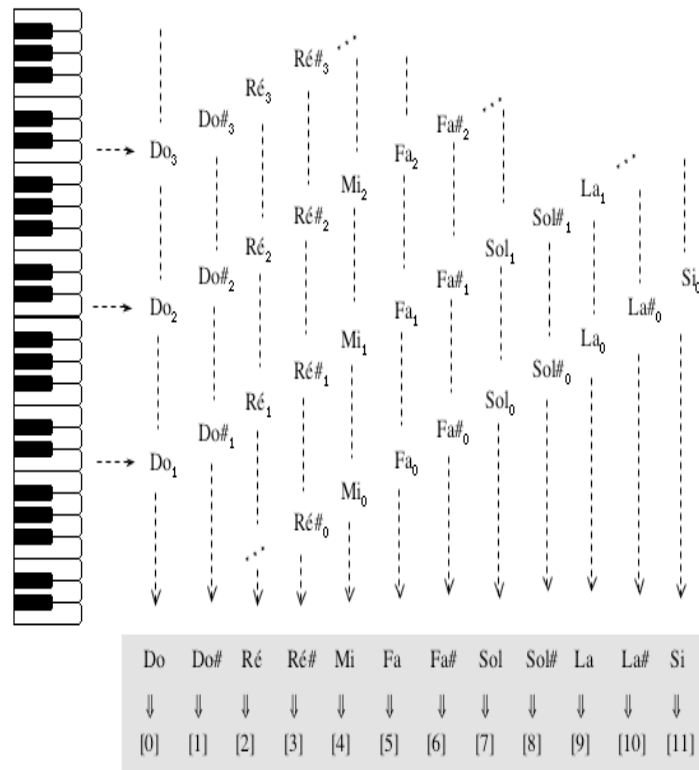
*« [Le système] peut être caractérisée complètement en explicitant les éléments, les **relations** [...] entre ces éléments et les **opérations** sur les éléments ainsi reliés. [...] Toute considération sur les opérations du système doit procéder de la conscience de leur nature permutationnelle »*

M. Babbitt : « Twelve-Tone Invariants as Compositional Determinants », 1960

*« ...un large nombre de conséquences compositionnelles sont dérivables directement de théorèmes de **théorie des groupes finis** »*

M. Babbitt : « Set Structure as a Compositional Determinant », 1961

L'émergence de la structure de groupe en musique



La relation de congruence mod 12

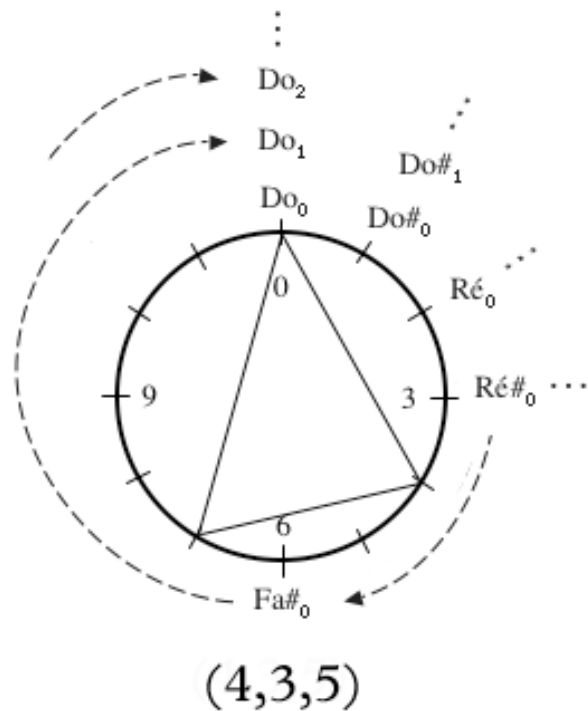
Camille Durutte:

- *Technie, ou lois générales du système harmonique (1855)*
- *Résumé élémentaire de la Technie harmonique, et complément de cette Technie (1876)*

Le système dodécaphonique est « *un ensemble d'éléments, **relations** entre les éléments et **operations** sur les éléments. [...] Une vraie mathématisation aurait besoin d'une formulation et d'une présentation dictées par le fait que le système dodécaphonique est un **groupe de permutations** qui est façonné [shaped] par la structure de ce modèle mathématique* »

(M. Babbitt: *The function of Set Structure in the Twelve-Tone System*, 1946)

The emergence of group structure in music



↓
Cyclic group
 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$

The congruence modulo 12 is an equivalence relation

- Reflexivity: $a \sim a$
- Symmetry: $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$
- Transitivity: $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$

*The equivalence classes modulo 12 define a **group** structure*

- The operation is internal
- Existence of an identity
- Existence of an invers
- Associativity

Classes d'équivalence d'accords

Transpositions

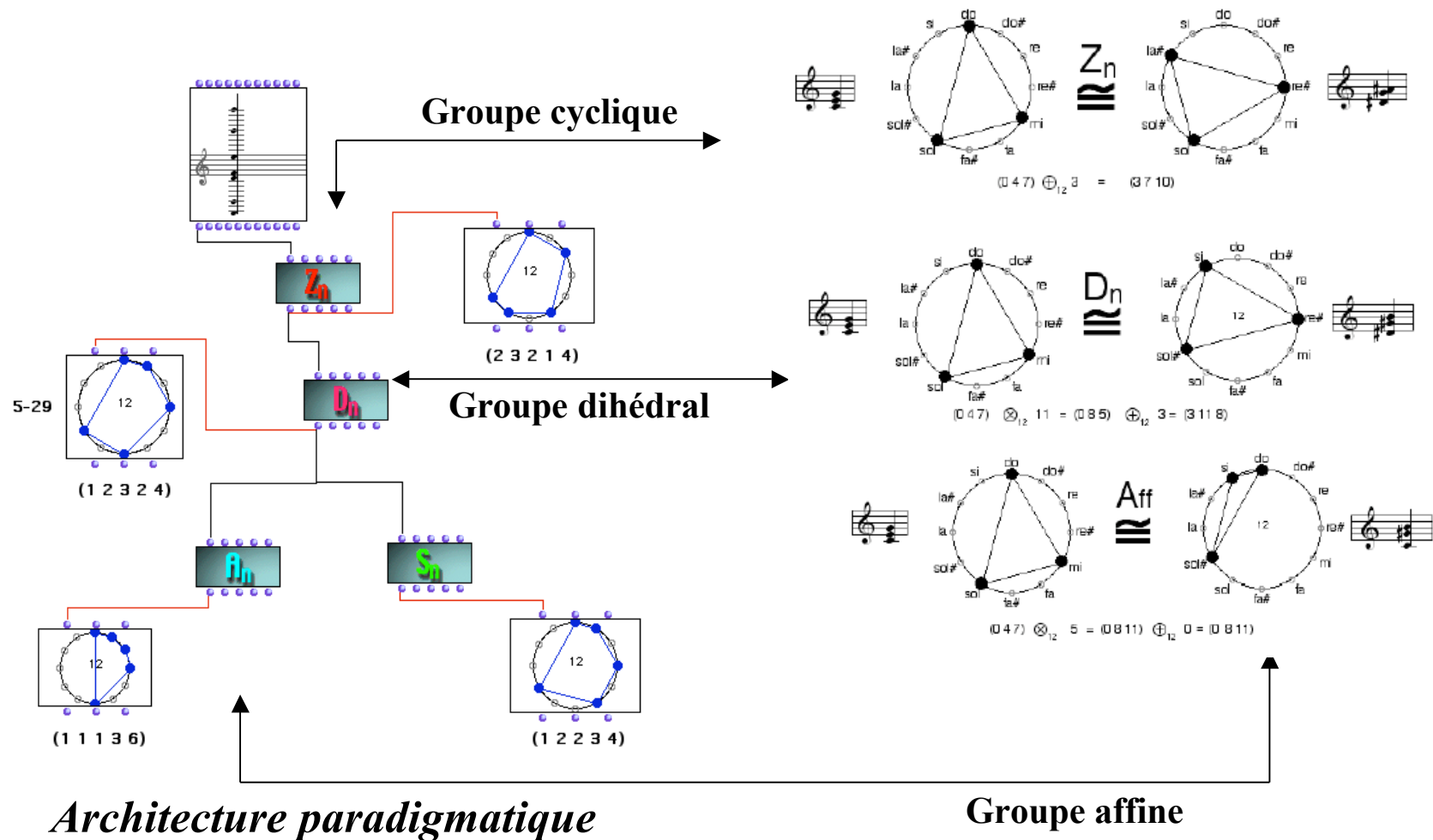
$$T_3\{0, 4, 7\} = 3 + \{0, 4, 7\} = \{3, 7, 10\}$$

Transpositions et/ou inversions

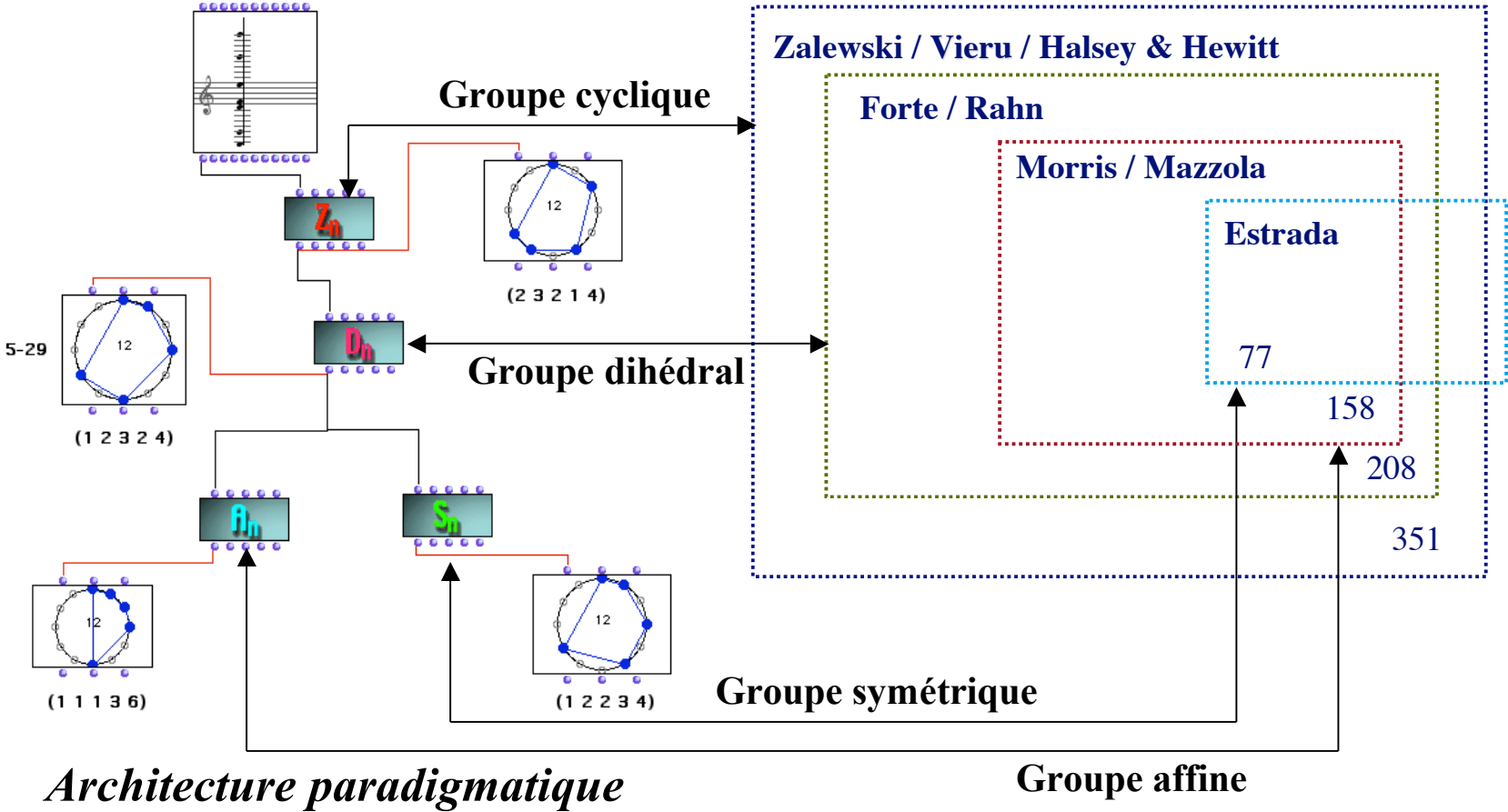
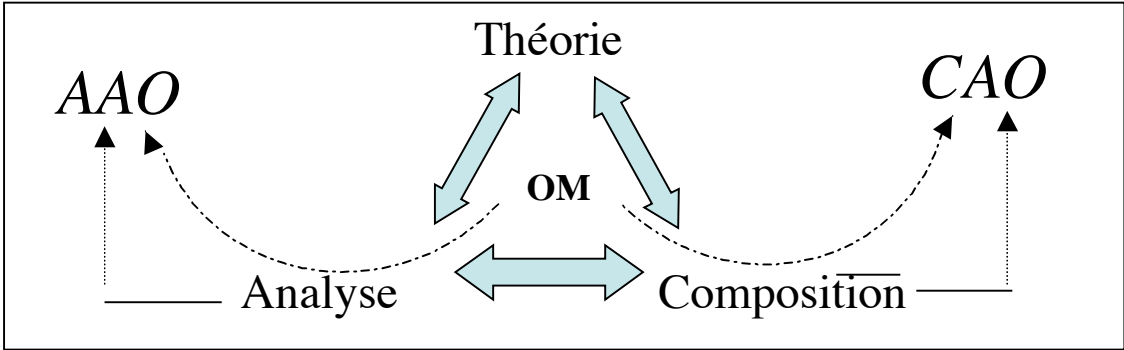
$$T_3I\{0, 4, 7\} = 3 + \{0, -4, -7\} = \{3, 11, 8\}$$

Multiplications

$$M_5\{0, 4, 7\} = 5 \times \{0, 4, 7\} = \{0, 8, 11\}$$



Classification 'paradigmatique' des structures musicales



Énumération d'accords et des séries dans un système tempéré

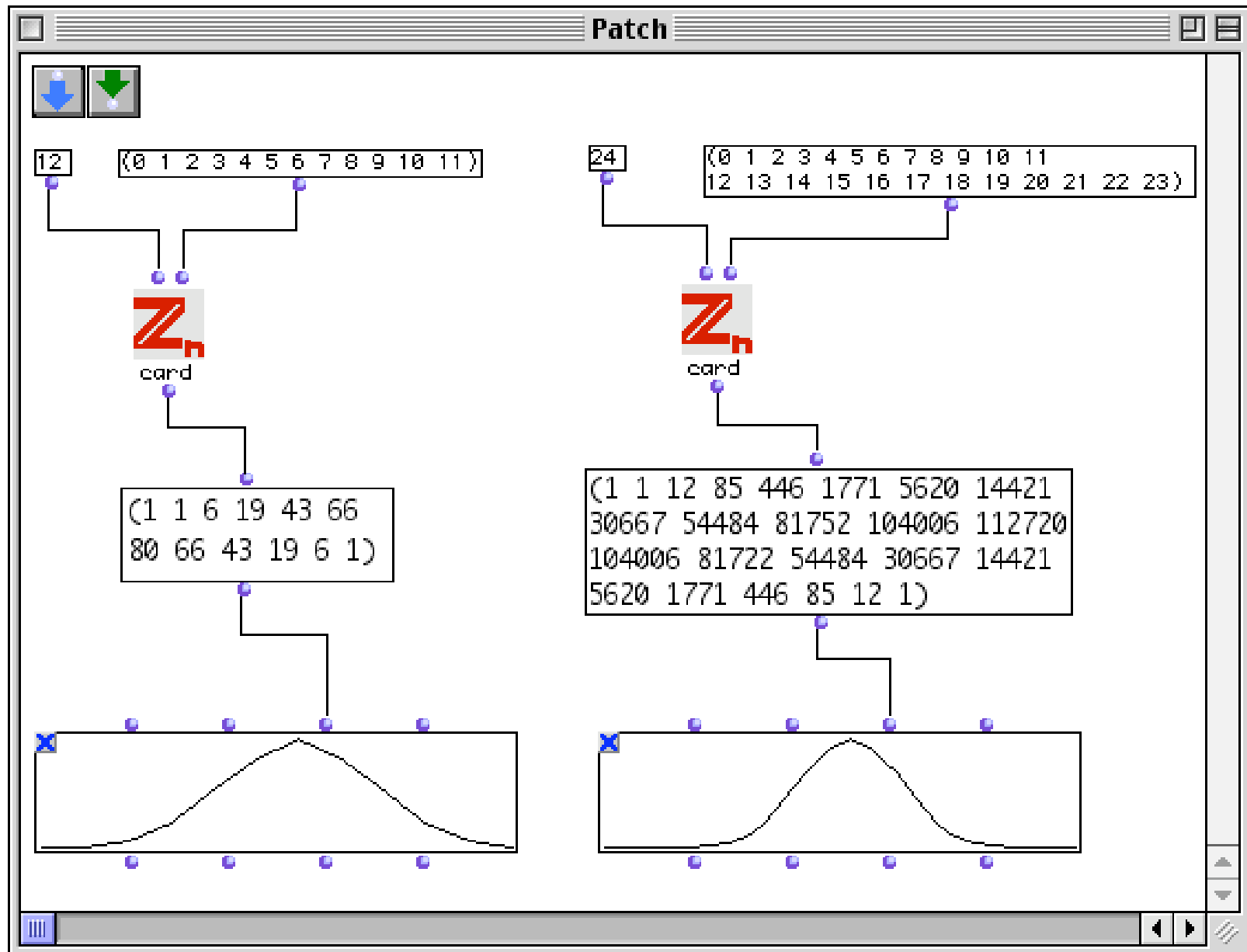
$G \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C_{12}	1	6	19	43	66	80	66	43	19	6	1	1
D_{12}	1	6	12	29	38	50	38	29	12	6	1	1
$\text{Aff}_1(Z_{12})$	1	5	9	21	25	34	25	21	9	5	1	1

(Friperinger, 1992 / 1999)

- D. Halsey & E. Hewitt: « Eine gruppentheoretische Methode in der Musik-theorie », *Jahresber. Der Dt. Math.-Vereinigung*, 80, 1978.
- D. Reiner: « Enumeration in Music Theory », *Amer. Math. Month.* 92:51-54, 1985
- H. Friperinger: « Enumeration in Musical Theory », *Beiträge zur Elektr. Musik*, 1, 1992
- R.C. Read: « Combinatorial problems in the theory of music », *Discrete Math.*, 1997
- H. Friperinger: « Enumeration of mosaics », *Discrete Math.*, 1999
- H. Friperinger: « Enumeration of non-isomorphic canons », *Tatra Mt. Math. Publ.*, 2001
- David J. Hunter & Paul T. von Hippel : « How Rare Is Symmetry in Musical 12-Tone Rows? », *The American Mathematical Monthly*, Vol. 110, No. 2., Feb., 2003
- H. Friperinger: « Tiling problems in music theory », in *Perspectives in Mathematical and Computational Music Theory* (Mazzola, Noll, Puebla ed., Epos, 2004)
- Rachel W. Hall & P. Klingsberg: « Asymmetric Rhythms, Tiling Canons, and Burnside's Lemma », *Bridge Proceedings*, 2004
- ...

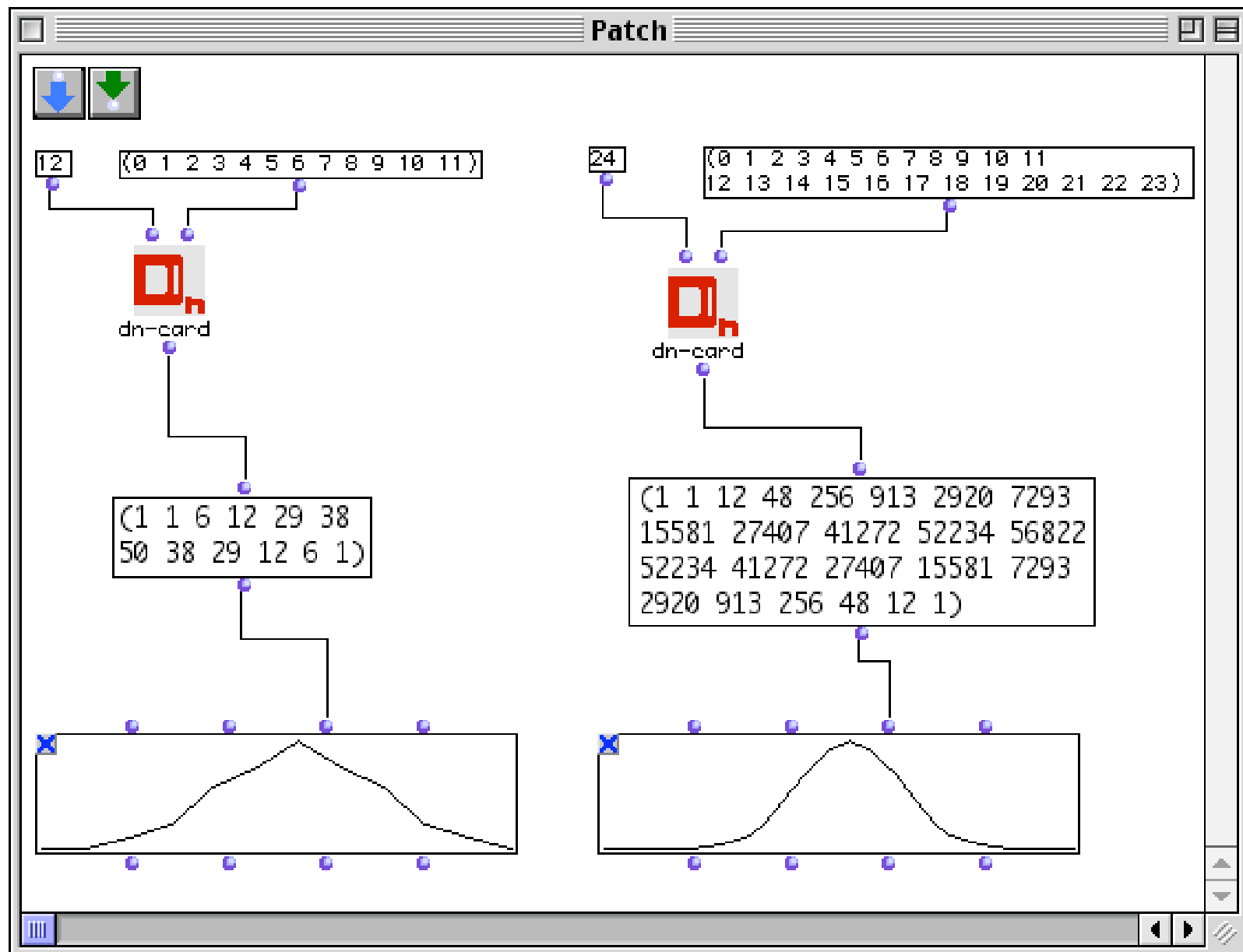
Computational aspects

Enumeration of transposition classes in a tempered space $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

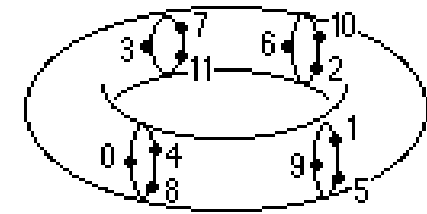
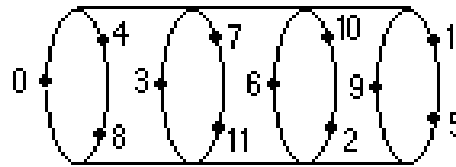
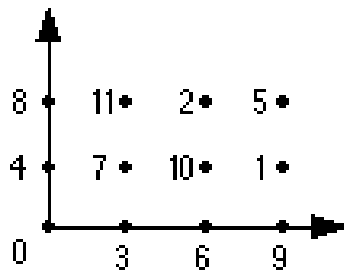


Computational aspects

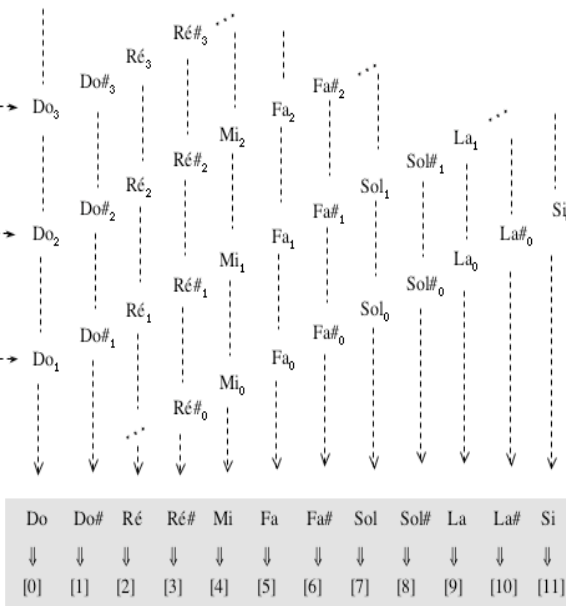
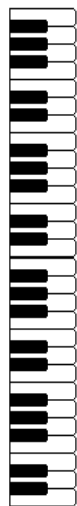
Enumeration of transposition classes in a tempered space D_n



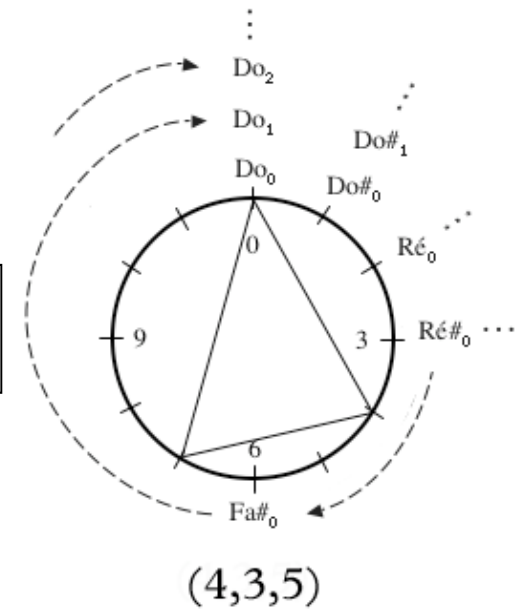
Formalisation vs représentation



Représentation toroidale

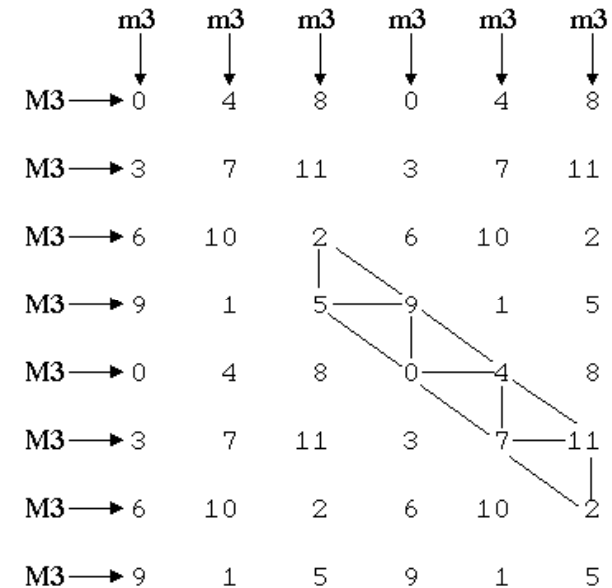
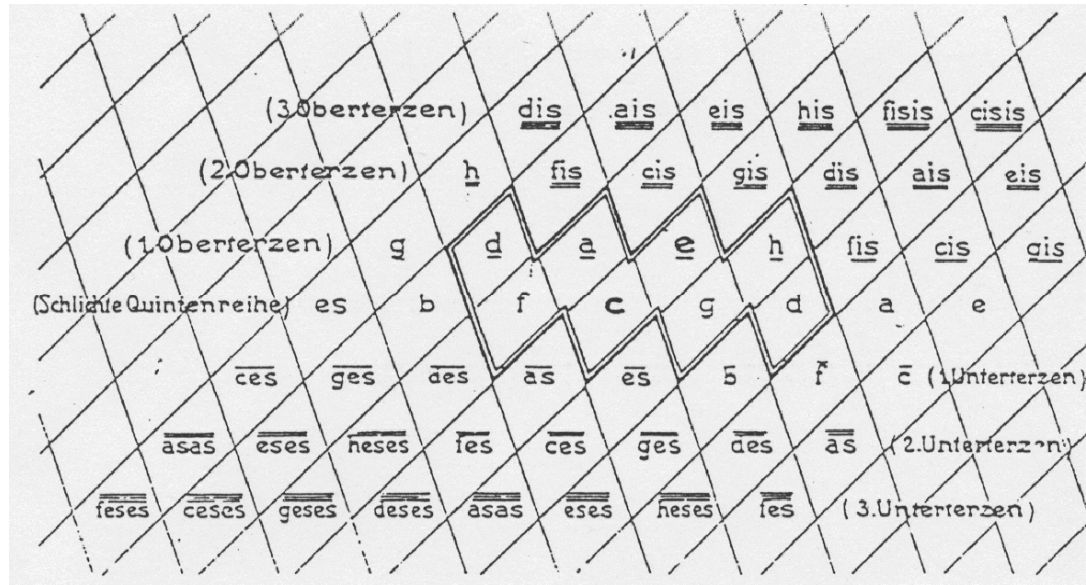


$$\mathbf{Z}_{12} = \mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_4$$



Représentation circulaire

La représentation (géométrique) des structures musicales

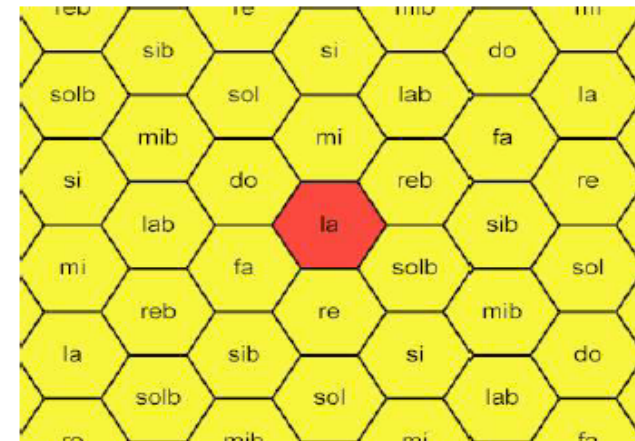


Hugo Riemann : « Ideen zu einer Lehre von den Tonvorstellung », 1914

Balzano (1980)

A	C#	F	A'	C#'	F'	A''	C#''	F''	A'''
D	F#	A#	D'	F#'	A#'	D''	F#''	A#''	D'''
G	B	D#	G'	B'	D#'	G''	B''	D#''	G'''
C	E	G#	C'	E'	G#'	C''	E''	G#''	C'''
F	A	C#	F'	A'	C#'	F''	A''	C#''	F'''
B \flat	D	F#	B \flat '	D'	F#'	B \flat ''	D''	F#''	B \flat '''
E \flat	G	B	E \flat '	G'	B'	E \flat ''	G''	B''	E \flat '''
A \flat	C	E	A \flat '	C'	E'	A \flat ''	C''	E''	A \flat '''

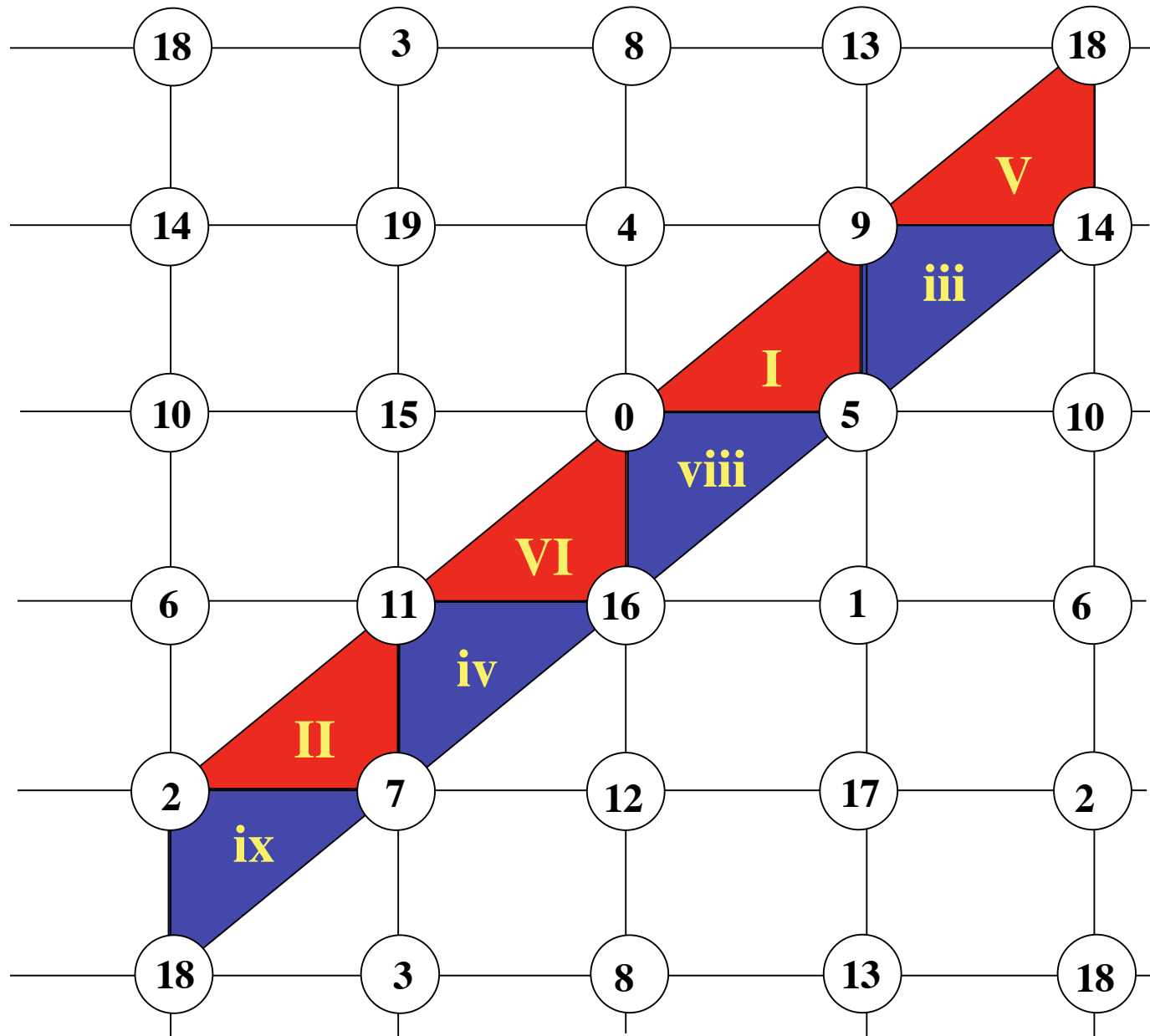
Longuet-Higgins (1962)

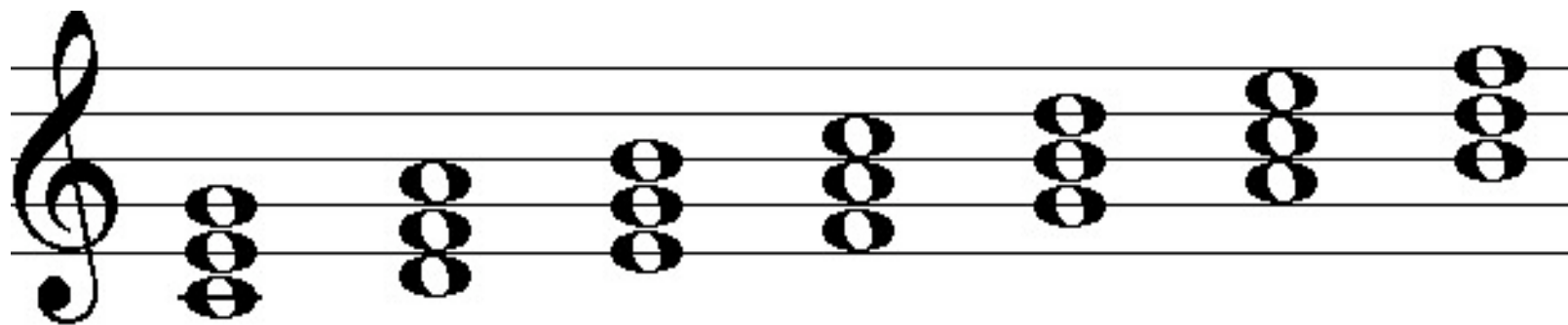


Chouvel (2002)

Généralisations pour $Z_n = Z_{k(k+1)}$ (Balzano, 1980)

Thomas Noll, *MaMuX*, Déc. 2004





I

II

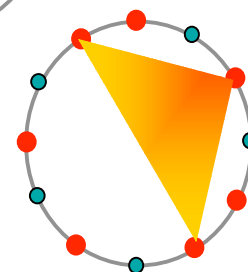
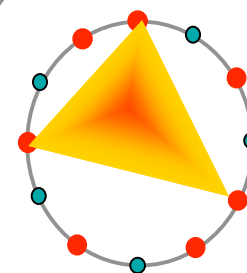
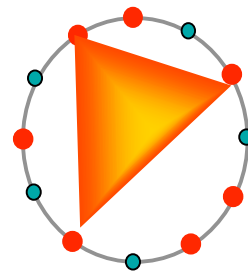
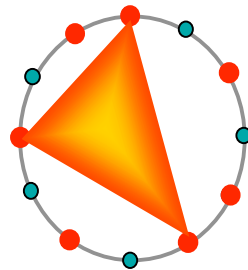
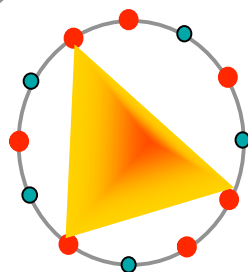
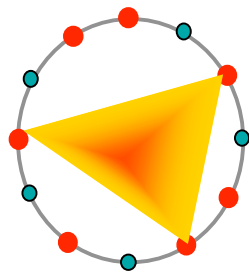
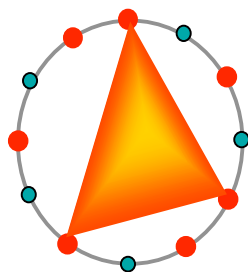
III

IV

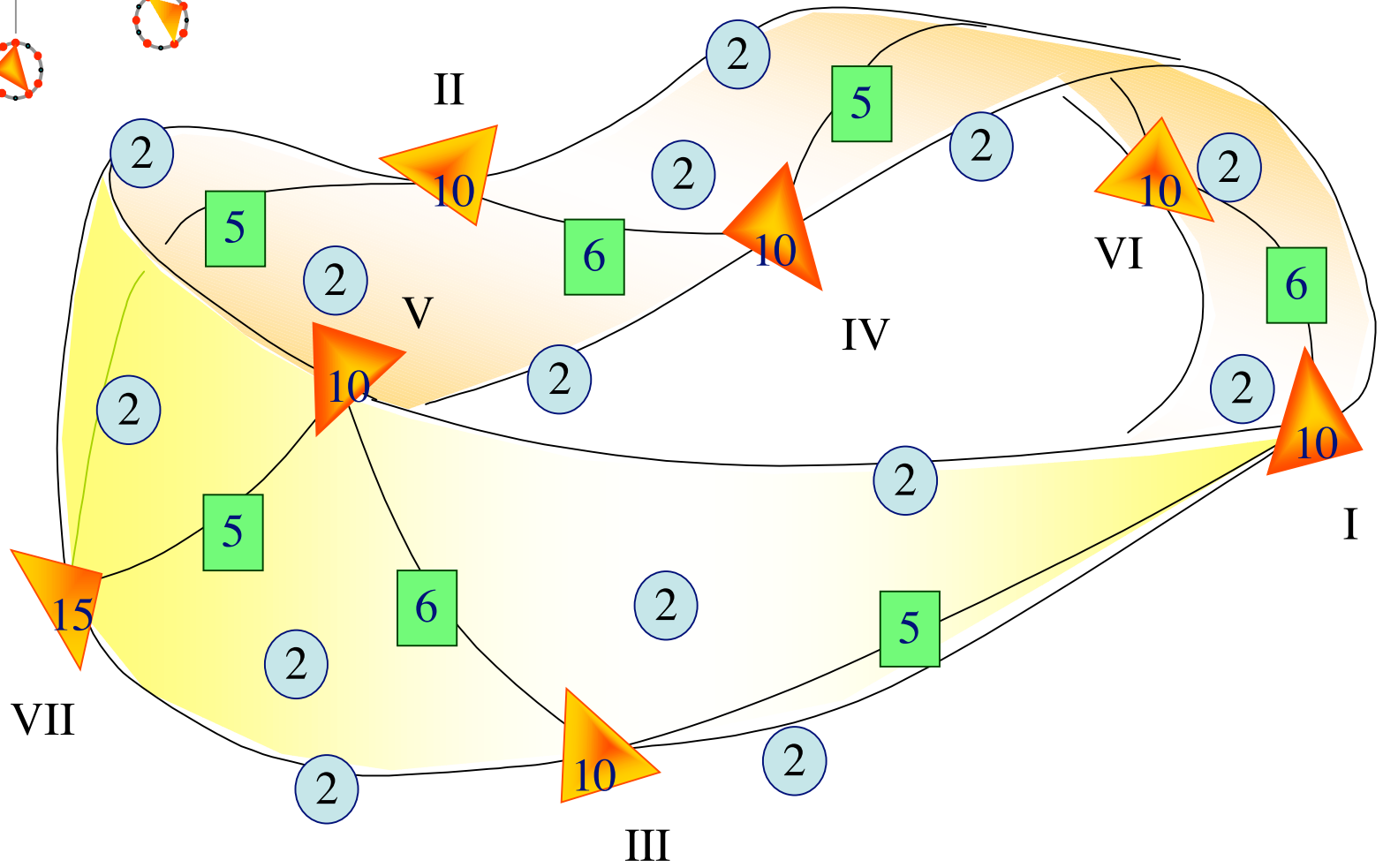
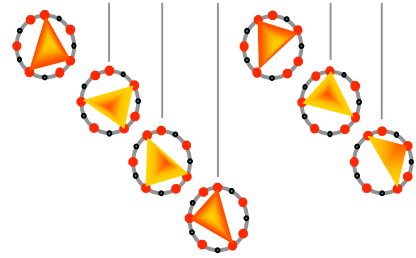
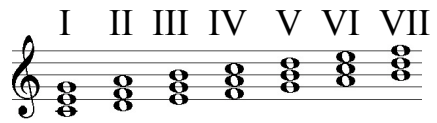
V

VI

VII



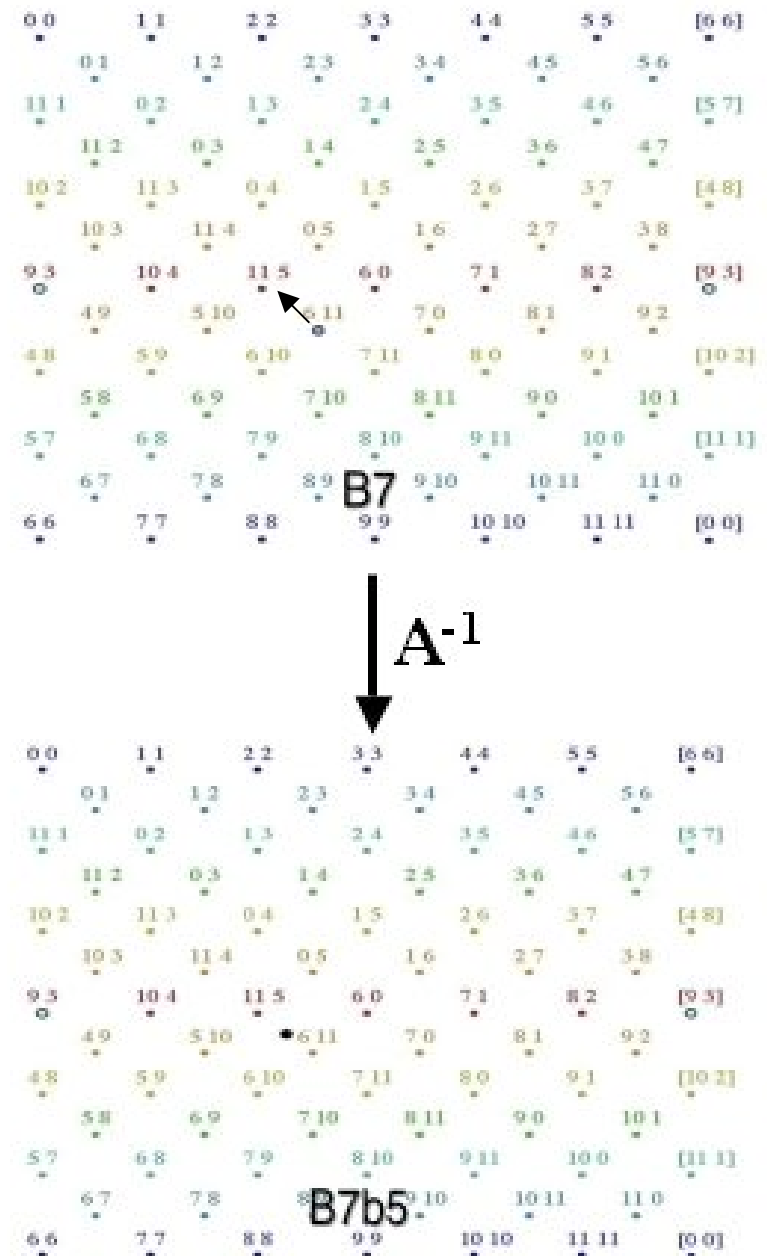
Guerino Mazzola :
Un atlas pour la gamme diatonique...



...et nerf topologique associé

Largo

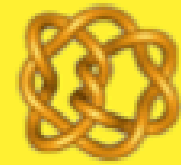
Diagram illustrating chord transformations (S⁻¹, A⁻¹, T⁻¹) between different chord voicings in the piano score.



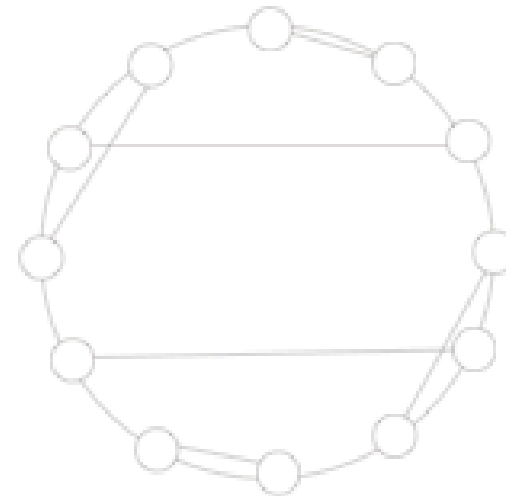
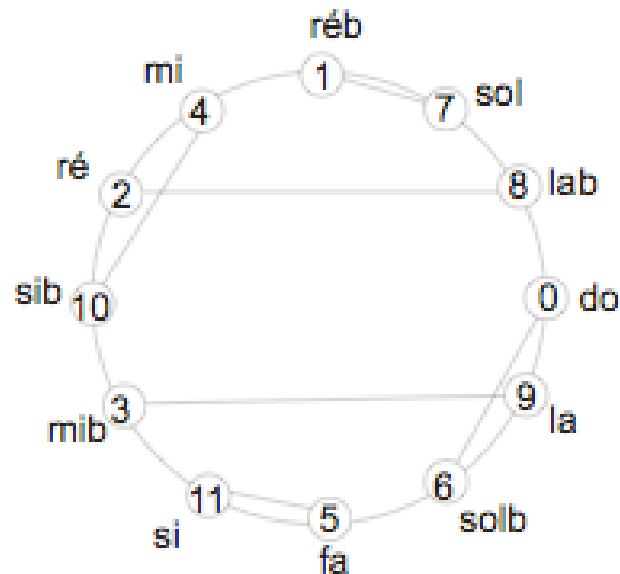
Dmitri Tymoczko :
 « The Geometry of Musical Chords »,
Science, 313, 2006



Noeuds dodécaphoniques



Jean Barraqué : Au-delà du hasard



D_111

Série de base : do, lab, sol, réb, mi, ré, sib, mib, si, fa, solb, la

Renversement : do, mi, fa, si, lab, sib, ré, la, réb, sol, solb, mib

Franck Jedrzejewski (2006)

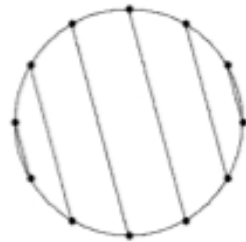


Classification des noeuds



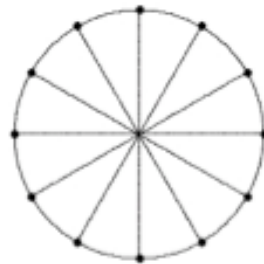
D_1 $X = a^6$
Mot de Gauss 112233445566
Vecteur de structure 600000
Permutation
(0 1) (2 3) (4 5) (6 7) (8 9) (10 11)

B.A. Zimmermann, Die Soldaten Acte I, intro (Act III, sc. 5)



D_{358} $X = ac^{-1}e^{-1}eca$
Mot de Gauss 112345665432
Vecteur de structure 202020
Permutation
(0 1) (2 11) (3 10) (4 9) (5 8) (6 7)

A. Webern, Symphonie de Chambre op. 21
K. Stockhausen, Klavierstück IX



D_{554} $X = f^6$
Mot de Gauss 123456123456
Vecteur de structure 000006
Permutation
(0 6) (1 7) (2 8) (3 9) (4 10) (5 11)

B.A. Zimmermann, Interludes

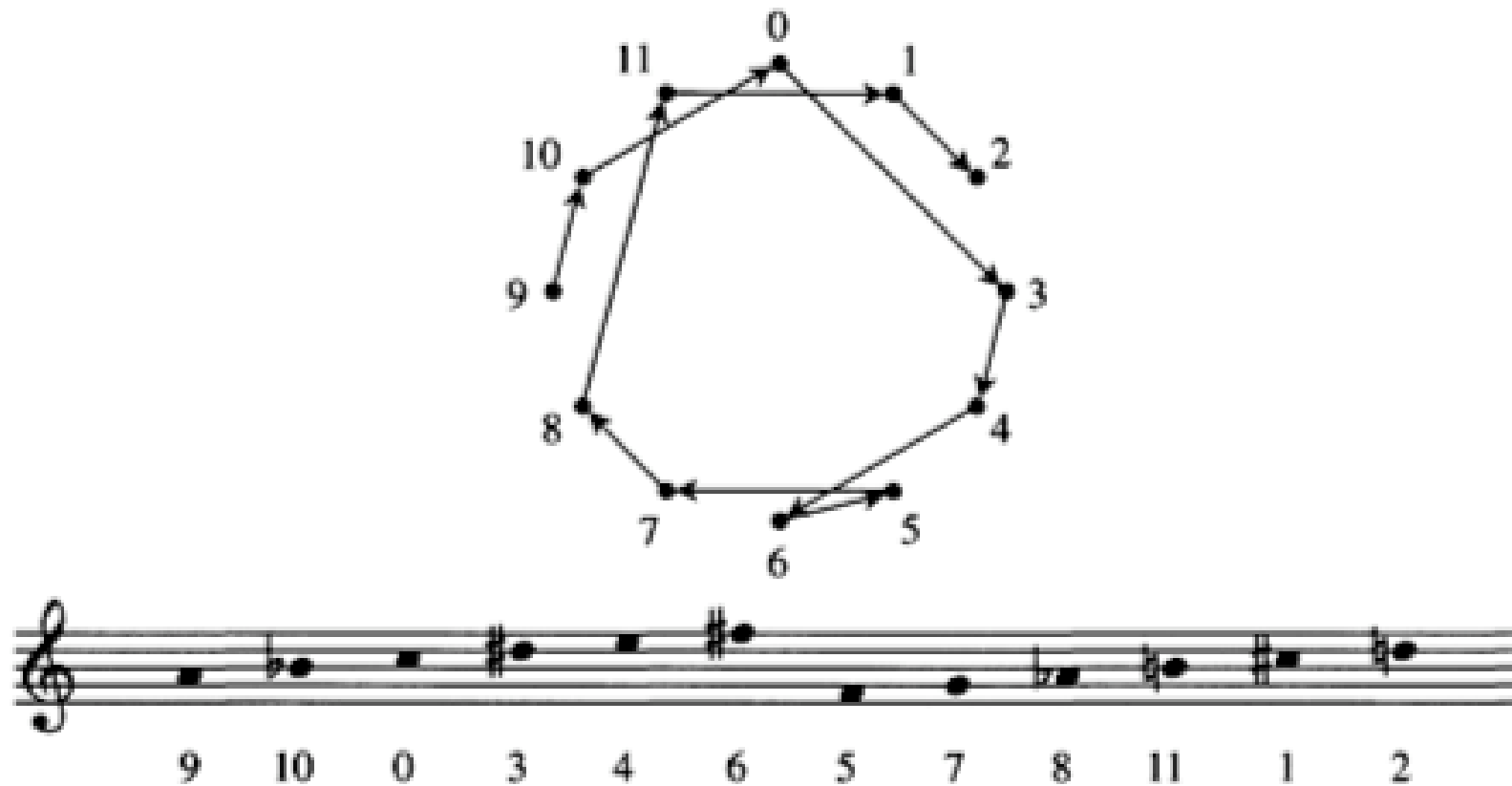
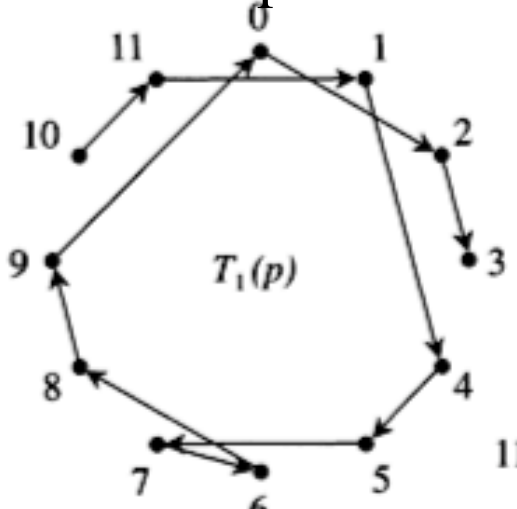


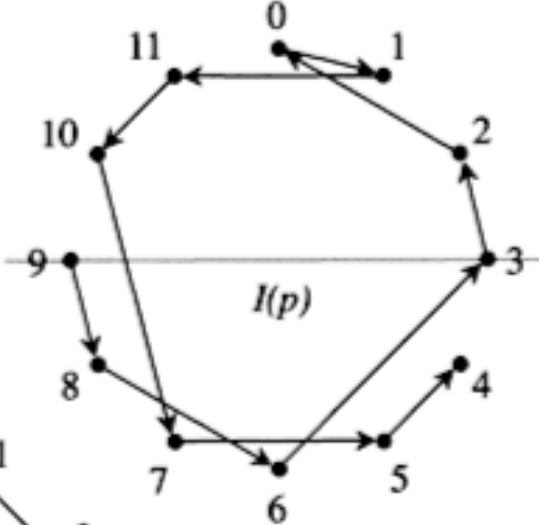
Figure 1. Clock diagram and musical notation for the row from Schoenberg's *Serenade*, opus 24, movement 5.

David J. Hunter & Paul T. von Hippel : « How Rare Is Symmetry in Musical 12-Tone Rows? », *The American Mathematical Monthly*, Vol. 110, No. 2. (Feb., 2003), pp. 124-132.

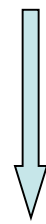
transposition



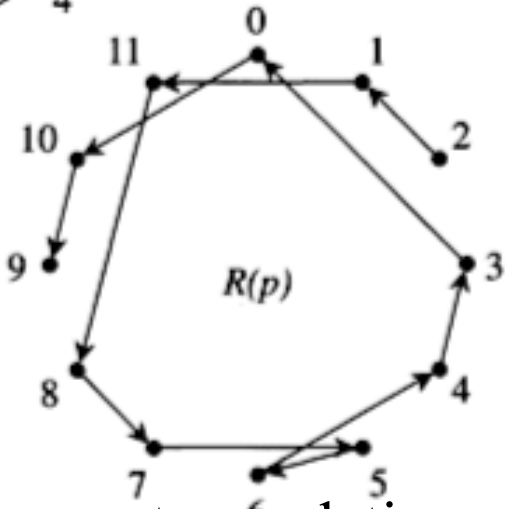
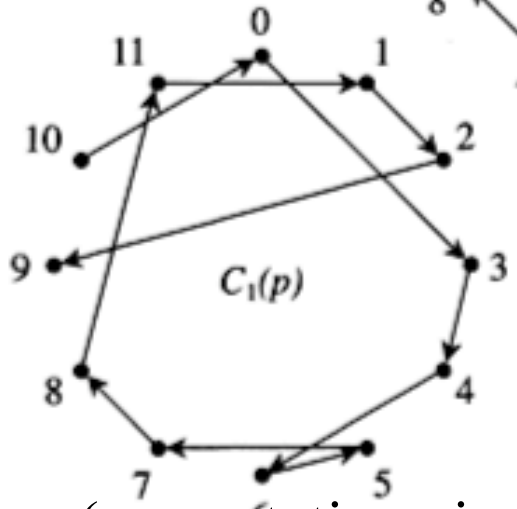
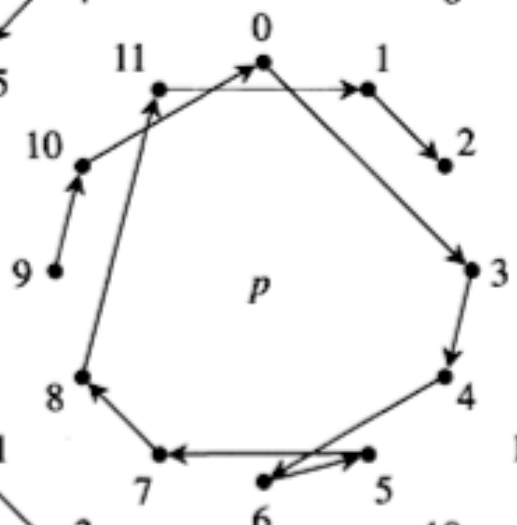
inversion



9 10 0 3 4 6 5 7 8 11 1 2
 ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑
 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11



$(0\ 9\ 11\ 2)(1\ 10)(5\ 6)$

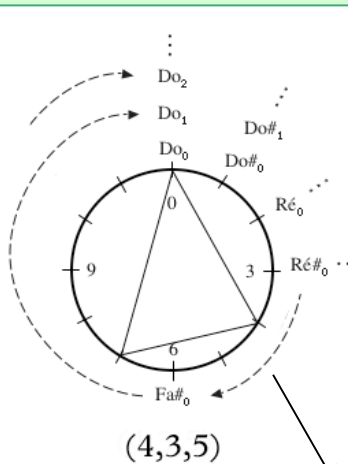


« rotation » (permutation circulaire)

retrogradation

Le système dodécaphonique et la théorie des groupes

The Twelve-Tone System, is a «*set of elements, relations between elements and operations upon elements*» (Babbitt, 1946)



	S	I	R	RI
S	S	I	R	RI
I	I	S	RI	R
R	R	RI	S	I
RI	RI	R	I	S

S: $(a,b) \rightarrow (a,b)$

I: $(a,b) \rightarrow (a, 12-b \text{ mod. } 12)$

R: $(a,b) \rightarrow (11-a,b)$

RI: $(a,b) \rightarrow (a, 12-b \text{ mod. } 12)$

↓
 $(11-a, 12-b \text{ mod. } 12)$

S	
	(0,0) (1,4) (2,2) (3,5) (4,1) (5,3) (6,11) (7,7) (8,9) (9,6) (10,10) (11,8)
I	
	(0,0) (1,8) (2,10) (3,7) (4,11) (5,9) (6,1) (7,5) (8,3) (9,6) (10,2) (11,4)
R	
	(0,8) (1,10) (2,6) (3,9) (4,7) (5,11) (6,3) (7,1) (8,5) (9,2) (10,4) (11,0)
IR	
	(0,4) (1,2) (2,6) (3,3) (4,5) (5,1) (6,9) (7,11) (8,7) (9,10) (10,8) (11,0)

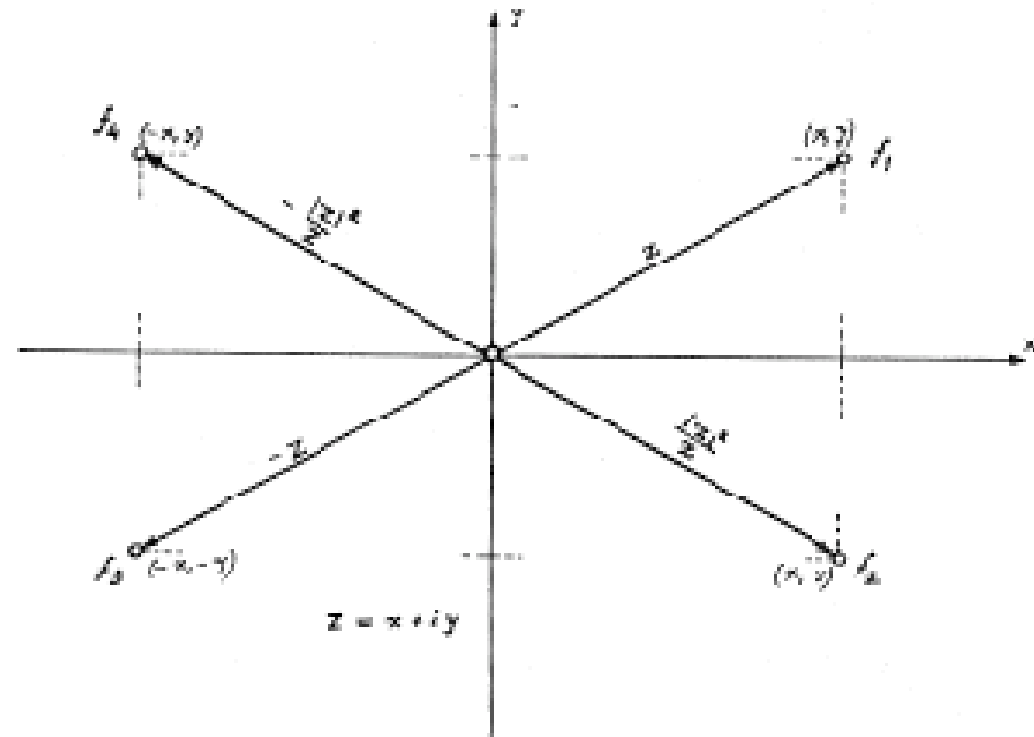
$I: x \rightarrow 12-x$

$T_k: x \rightarrow k+x$

$T_{11}I: x \rightarrow 11-x$

Algèbre/géométrie chez Xenakis : groupe de Klein

	S	I	R	R
S	S	I	R	R
I	I	S	RI	R
R	R	RI	S	I
RI	RI	R	I	S



$$Z = x + yi$$

- S série de base $\longrightarrow f_1 = Z = x + yi = Z = f_1(Z) = \text{original form}$
- I inversion $\longrightarrow f_2 = x - yi = |Z|^{-2} Z = f_2(Z) = \text{inversion}$
- RI rétrog. inverse $\longrightarrow f_3 = -x - yi = -Z = f_3(Z) = \text{inverted retrogradation}$
- R rétrogradation $\longrightarrow f_4 = -x + yi = -(|Z|^{-2} Z) = f_4(Z) = \text{retrogradation}$

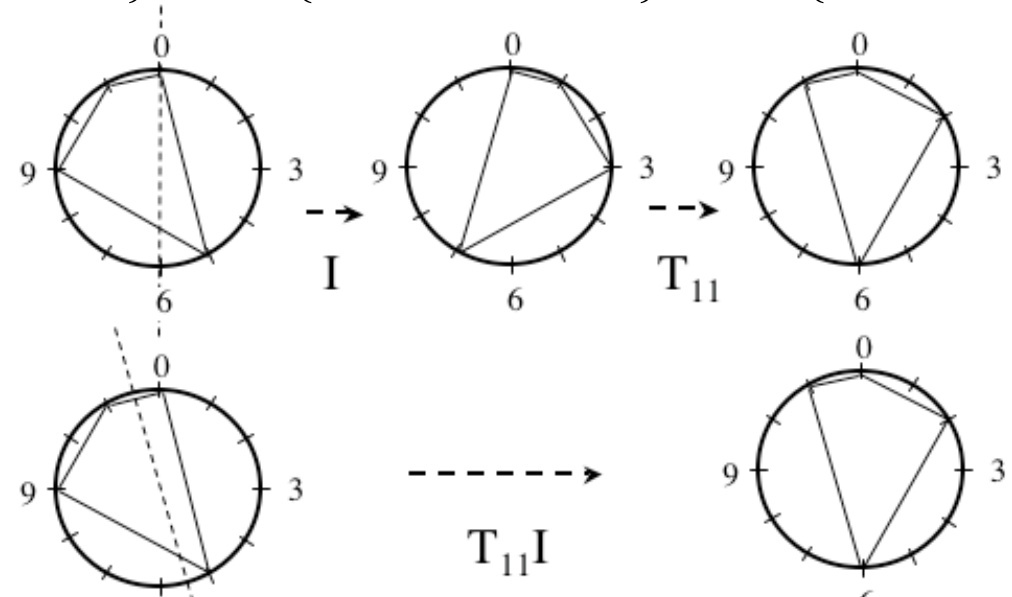
Transformations d'ensembles de classes de hauteurs

Inversions et transpositions

$$I: x \rightarrow 12-x$$

$$T_k: x \rightarrow k+x$$

$$\{0, 5, 9, 11\} \longrightarrow \{0, -5, -9, -11\} \longrightarrow \{11-0, 11-5, 11-9, 11-11\}$$



$$\{0, 5, 9, 11\} \longrightarrow \{11, 6, 3, 0\}$$

$$T_{11}I: x \rightarrow 11-x$$

A musical staff in treble clef showing a sequence of notes. The notes are grouped into two sections by red boxes:

- Section 1 (Left):** Notes corresponding to pitch classes 0, 4, 2, 5, 1, 3. Below the staff are the coordinates: (0,0), (1,4), (2,2), (3,5), (4,1), (5,3).
- Section 2 (Right):** Notes corresponding to pitch classes 11, 7, 9, 5, 10, 8. Below the staff are the coordinates: (6,11), (7,7), (8,9), (9,5), (10,10), (11,8).

$$T_{11}I: \{0,4,2,5,1,3\} \rightarrow \{11,7,9,5,10,8\}$$

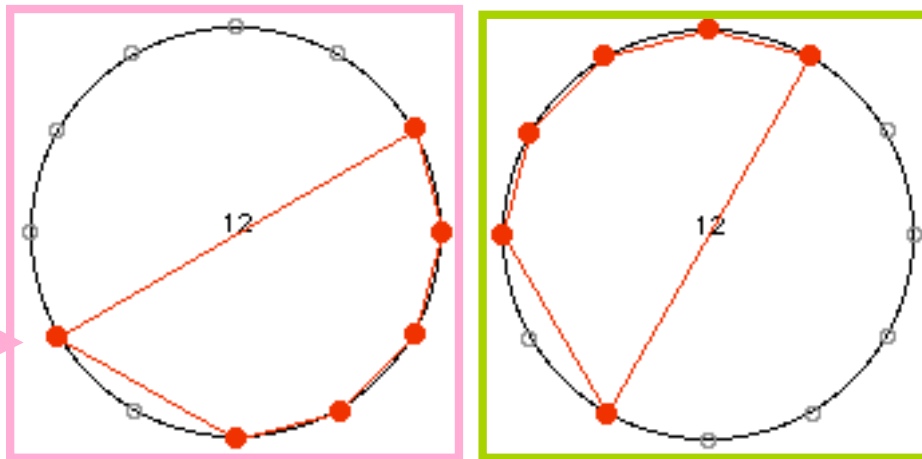
Combinatorialité inverse

« Combinatorialité hexacordale » (Schoenberg, Hauer, Krenek, Babbitt)

Basic Set: $\overbrace{E\ F\ G\ D\text{-flat}\ G\text{-flat}\ E\text{-flat}}^A$ $\overbrace{A\text{-flat}\ D\ B\ C\ A\ B\text{-flat}}^A$

Example 1. Suite, Op. 25, Minuet

Copyright 1925 by Universal Edition, A.G. Vienna.
Used by permission.



TAFEL I

Joseph Matthias Hauer, *Zwölftontechnik: Die Lehre von den Tropen*, 1926

Combinatorialité hexacordale (Schoenberg, Hauer, Krenek,...)

- Omnicombinatorialité du premier ordre

$$T_6: x \rightarrow 6+x$$

H_1 $\xrightarrow{T_6}$ h_1

H_2 $\xrightarrow{T_6}$ h_2

H_3 $\xrightarrow{T_6}$ h_3

Combinatorialité hexacordale (Schoenberg, Hauer, Krenek,...)

- Omnicombinatorialité du deuxième ordre

$T_3: x \rightarrow 3+x$

$T_9: x \rightarrow 9+x$

- Omnicombinatorialité du troisième ordre

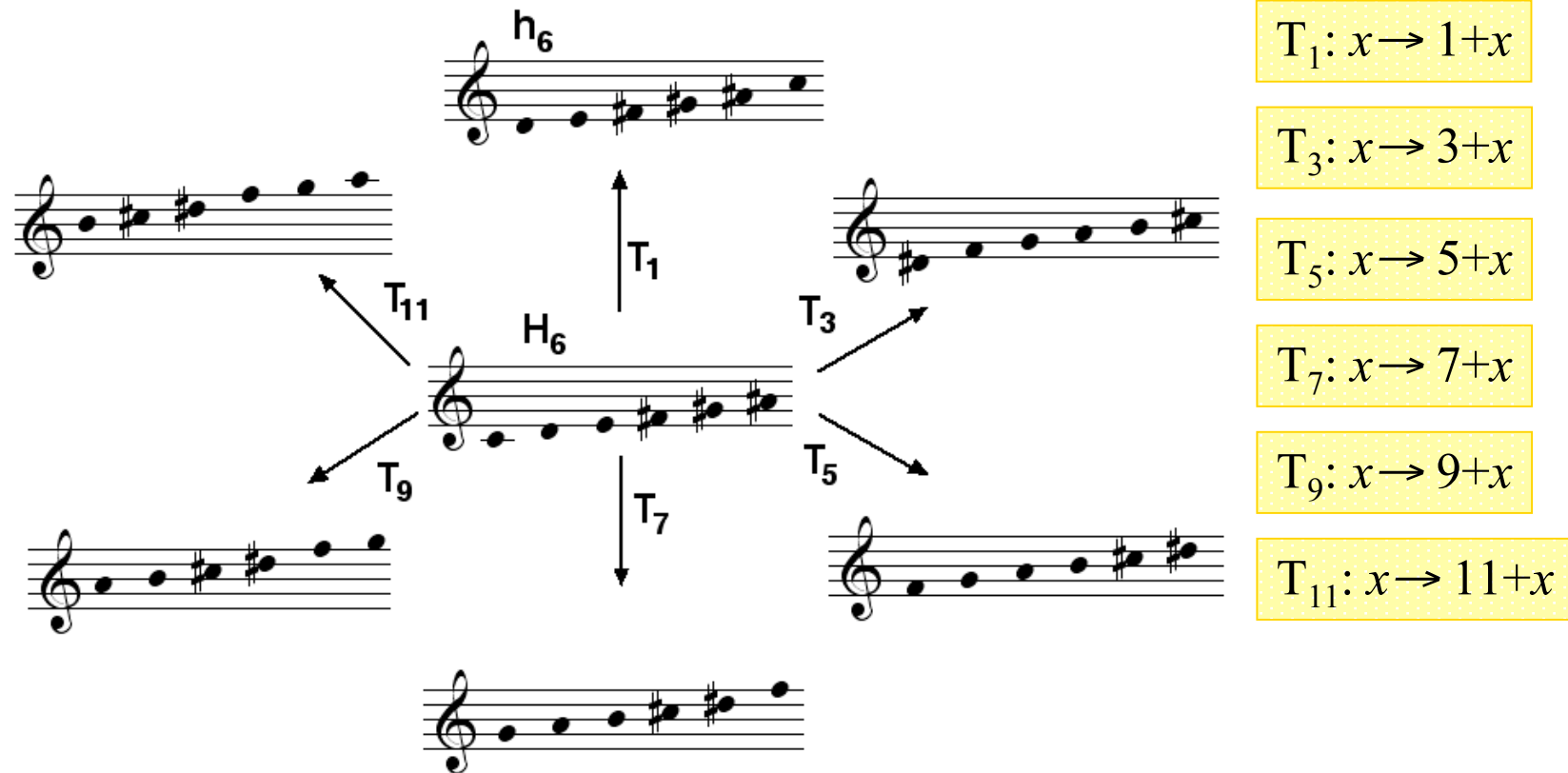
$T_2: x \rightarrow 2+x$

$T_6: x \rightarrow 6+x$

$T_{10}: x \rightarrow 10+x$

Combinatorialité hexacordale (Schoenberg, Hauer, Krenek,...)

- Omnicombinatorialité du quatrième ordre



David J. Hunter & Paul T. von Hippel : « **How Rare Is Symmetry in Musical 12-Tone Rows?** », *The American Mathematical Monthly*, Vol. 110, No. 2. (Feb., 2003), pp. 124-132.

=> *OpenMusic*

Vers une formalisation algébrique du sérialisme intégrale

- La série des durées temporelles (*durational row*)

P R I_5 I_5 R

$I_5: x \rightarrow 5-x$

$I: x \rightarrow 12-x$

- Le système des points d'attaque (*Time-Points System*)

$I_{11}: x \rightarrow 11-x$

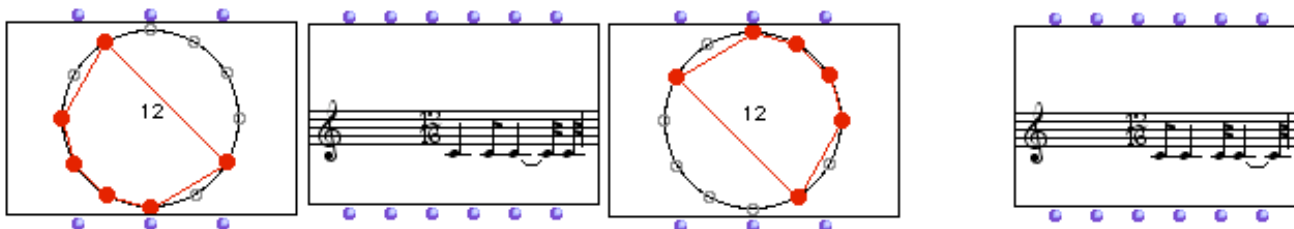
$T_{11}I: x \rightarrow 11+(12-x)$

$$T_6: x \rightarrow 6+x$$

- *Three compositions for piano* (1948)

mm.14-16

(4 2 5 1) → (2 4 1 5)

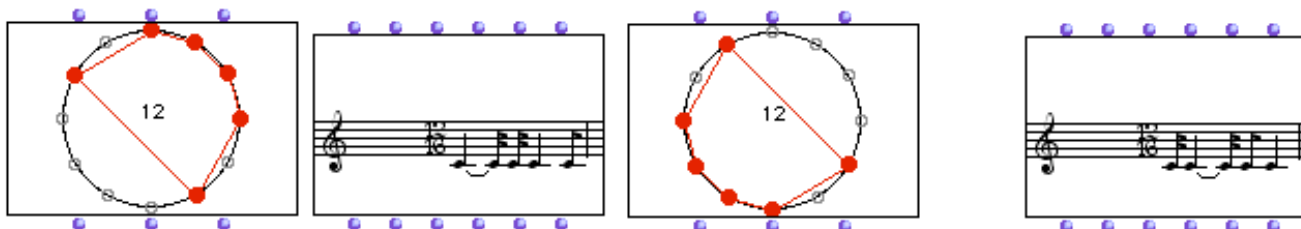


$$T_6: x \rightarrow 6+x$$

$$T_6: x \rightarrow 6+x$$

$$I_9: x \rightarrow 9-x \pmod{6}$$

$$I_9: x \rightarrow 9-x \pmod{7}$$



(5 1 4 2) → (1 5 2 4)

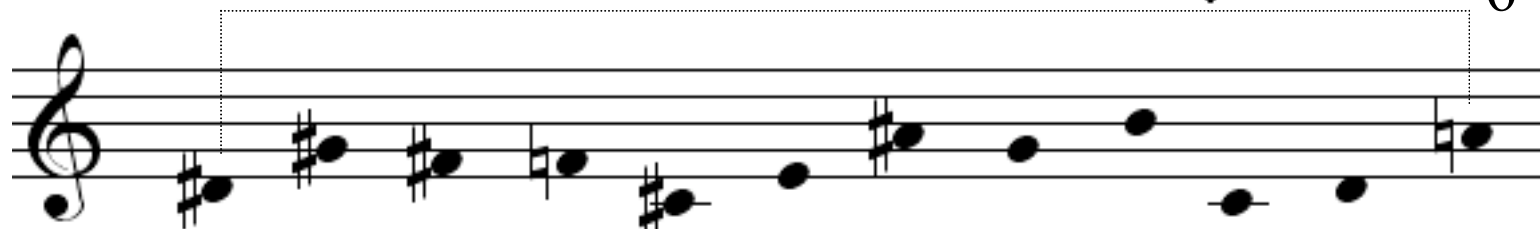
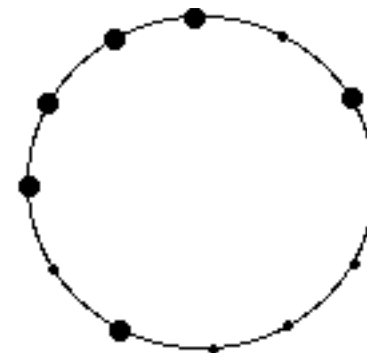
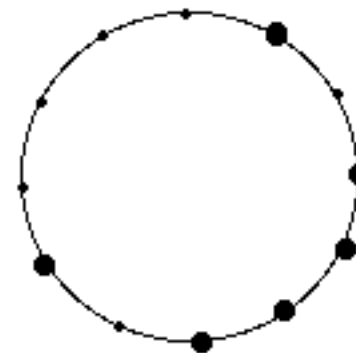
Combinatorialité hexacordale et séries tous-intervalles

• *Partitions* (1957)

• *Post-Partitions* (1957)



$T_6: x \rightarrow 6+x$

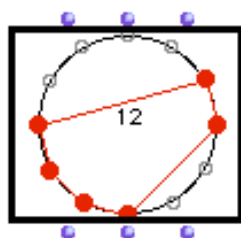
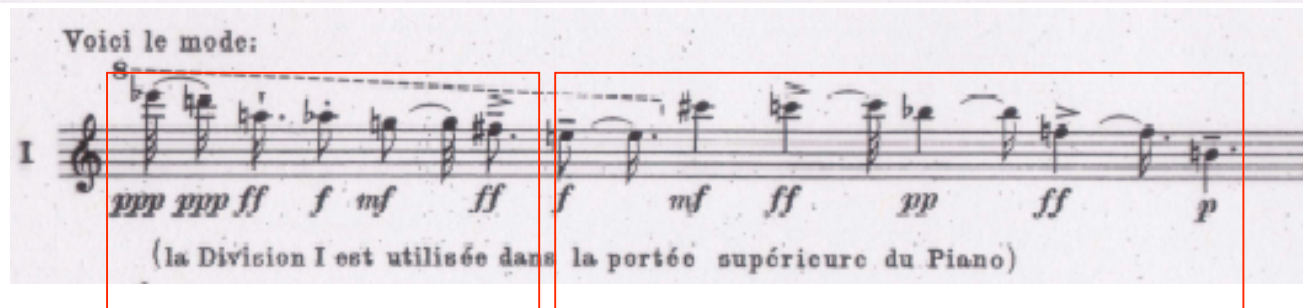


6

Combinatorialité hexacordale chez Messiaen

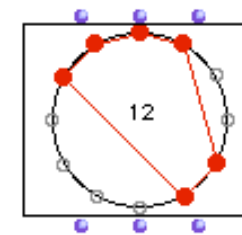
$T_7I : x \rightarrow 7-x$

- Mode de valeurs et d'intensités (1950)



$$\{3,2,9,8,7,6\} \longrightarrow \{4,5,10,11,0,1\}$$

$T_7I : x \rightarrow 7-x$



Vers un modèle de la pensée intervallique chez A. Vieru

*« ...The modes, no matter which they may be, start from a common background of the musical human hearing; **anywhere** and **any time**, our hearing on the basis of an inborn sensibility and logics [...] performs in the field of musical scales certain modal operations. [...] These intuitive or technical operations are of the nature called in mathematics the **theory of sets** ».*

A. Vieru: « Modes, elements of a general theory of modes », 1967

« Nous appelons mode tout ensemble de classes de résidus »

A. Vieru : *Le livre des modes*, 1980

« [...] si les échelles ont vraiment un statut ensembliste, où sont les intervalles ? Quel est leur statut ? »

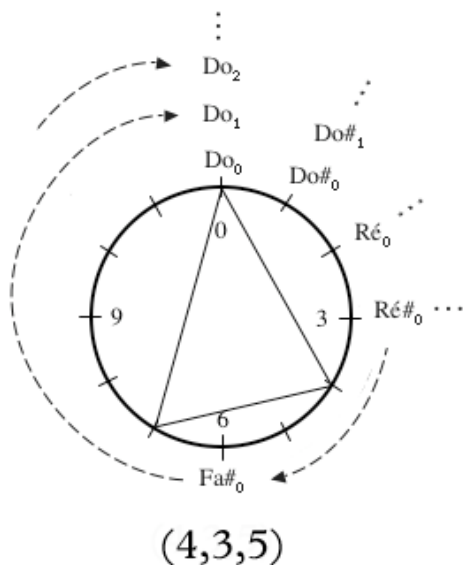
A. Vieru : « Nature et culture dans la perception musicale », 1998.

« ...l'une des questions les plus spécifiques, délicates et mystérieuses de la musique : la dualité sons/intervalles »

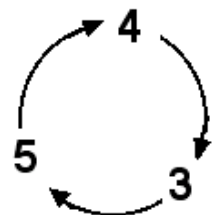
A. Vieru : « Une théorie musicale pour la période postmoderne », 1994.

La dualité son/intervalles

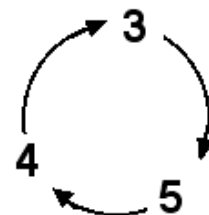
La « structure intervallique » et l'opération de « composition »



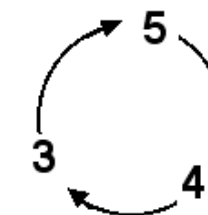
(4 3 5)



(3 5 4)



(5 4 3)



(1 2 3 1 2 3) • {0} = { 0 , 1 , 3 , 6 , 7 , 9 }

$$(6\ 6) \bullet \{0, 1, 3\} =$$

$$= ((6\ 6) \bullet \{0\}) \cup ((6\ 6) \bullet \{1\}) \cup ((6\ 6) \bullet \{3\}) =$$

$$= \{0, 6\} \cup \{1, 7\} \cup \{3, 9\} =$$

$$= \{0, 1, 3, 6, 7, 9\}.$$

$6_0 \cup 6_1 \cup 6_3$
crible

Théorie des cribles: algèbre et structures ordonnées

modulo

1₀

origine

... -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 ...

$6_0 \cup 6_1 \cup 3_2$

3₂

6₁

6₀

Mode à transposition limitée de Messiaen

- Gammes traditionnelles (diatoniques, Modes de Messiaen, ...)
- Gammes micro-tonales et non octaviantes (*Nomos Alpha*, ...)
- Cribles comme généralisation de rythmes (*Psappha*, ...)
- Cribles comme outil de modélisation des partitions (Riotte&Mesnage)

(6₀)

(2₀)

6₀ ∪ 6₁

6₀ ∪ 6₁ ∪ 6₅

4₀ ∪ 4₂ ∪ 4₃

3₀ ∪ 3₁

(1₀)

Cribles / Messiaen

6₀ ∪ 6₁ ∪ 3₂

(3₀)

(4₀)

6₀ ∪ 6₂

2₀ ∪ 6₅

2₁ ∪ 6₀ ∪ 6₂

4₀ ∪ 4₁

Trois modes 'oubliés'

A musical staff in treble clef showing a sequence of notes: G4, A4, B4, C5, B4, A4, G4. The notes A4 and B4 are marked with a sharp sign. Dotted lines connect the notes to labels: 6₀ under G4, 6₁ under A4, and 3₂ under B4.

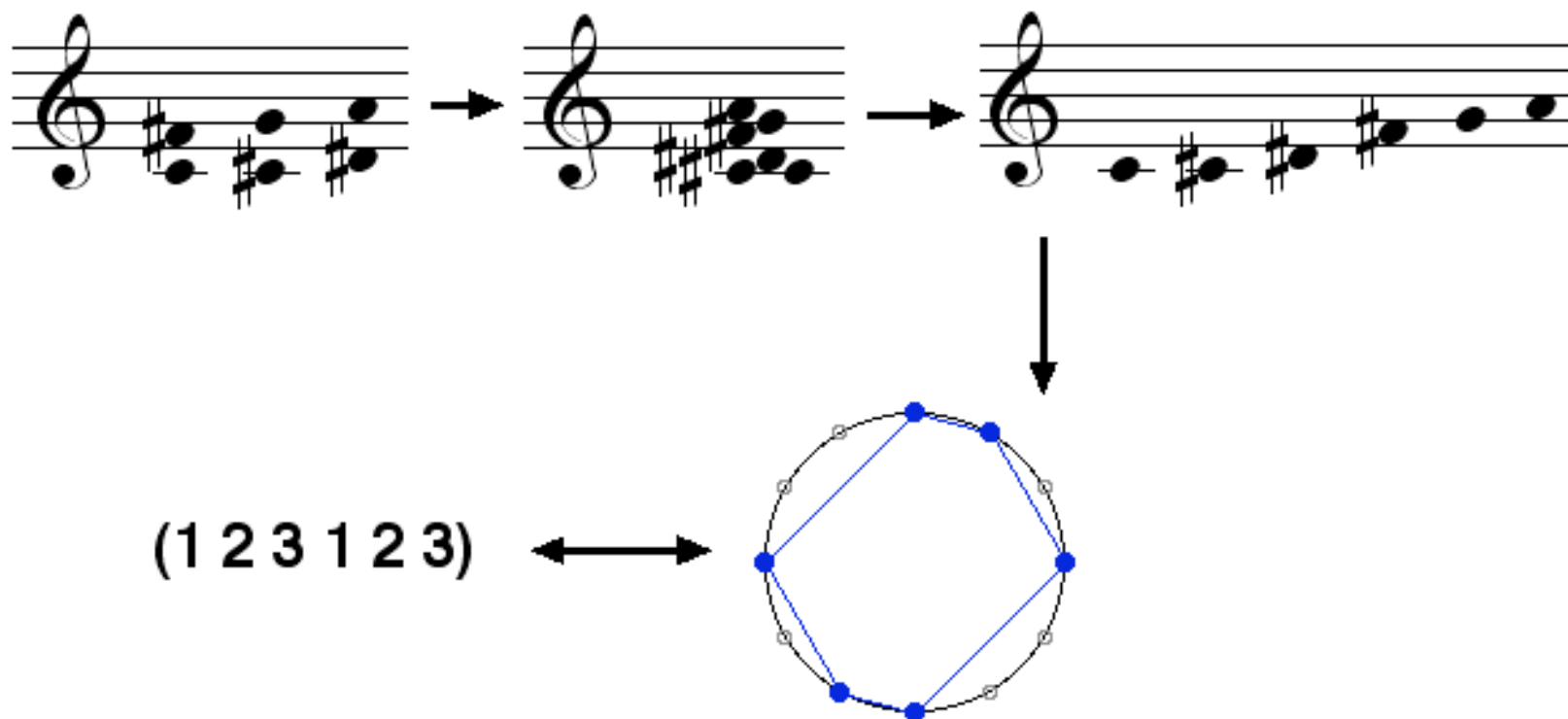
A musical staff in treble clef showing a sequence of notes: G4, A4, B4, C5, B4, A4, G4. The notes A4 and B4 are marked with a sharp sign. Dotted lines connect the notes to labels: 6₀ under G4, 6₁ under A4, and 6₃ under B4.

6₀ ∪ 6₁ ∪ 6₃

A musical staff in treble clef showing a sequence of notes: G4, A4, B4, C5, B4, A4, G4. The notes A4 and B4 are marked with a sharp sign. Dotted lines connect the notes to labels: 6₀ under G4, 6₃ under A4, and 6₅ under B4.

6₀ ∪ 6₃ ∪ 6₅

« • » et la « multiplications d'accords » (Boulez)
(ou *Transpositional Combination*, Richard Cohn)



Composition de deux structures intervalliques

$$(6\ 6) \cdot (1\ 2\ 9) = ?$$

La composition de deux structure intervalliques

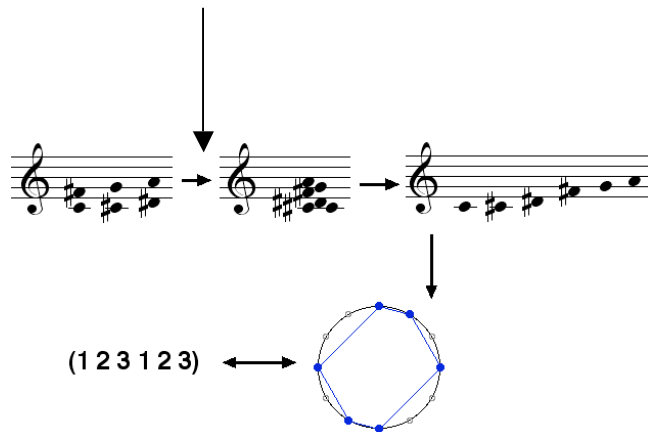
$$(6\ 6) \bullet (1\ 2\ 9) = ?$$

$$(6\ 6) \bullet \{0, 1, 3\} =$$

...

$$= \{0, 1, 3, 6, 7, 9\}$$

$$(1\ 2\ 3\ 1\ 2\ 3)$$

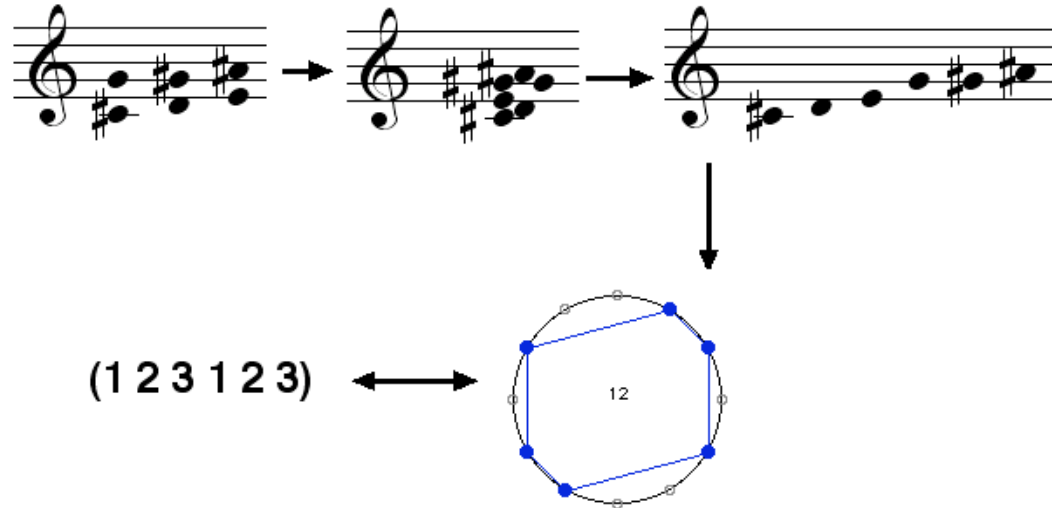


$$(6\ 6) \bullet \{1, 2, 4\} =$$

$$= \{1, 7\} \cup \{2, 8\} \cup \{4, 10\} =$$

$$= \{1, 2, 4, 7, 8, 10\}$$

$$(1\ 2\ 3\ 1\ 2\ 3)$$



Elle est bien définie !

Quelques applications de l'opération « • »

- Construction des modes (généralisés) de Messiaen
- Construction des canons rythmiques

$$(6\ 6) \bullet \{0, 1, 3\} = \dots = \{0, 1, 3, 6, 7\ 9\} \longrightarrow (1\ 2\ 3\ 1\ 2\ 3)$$

$$(6\ 6) \bullet \{0, 1\} = \dots = \{0, 1, 6, 7\} \longrightarrow (1\ 5\ 1\ 5)$$

$$(6\ 6) \bullet \{a, b, c, \dots\} \longrightarrow \text{Mode de Messiaen}$$

$$A_1 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

$$A_2 = (2, 2, 2, 2, 2, 2)$$

$$A_3 = (3, 3, 3, 3)$$

$$A_4 = (4, 4, 4)$$

$$A_6 = (6, 6)$$

$$A_7 = (0)$$



Totale chromatique

Gamme par tons

Accorde diminué

Accorde augmentée

Triton

« Classe de hauteur »

Fonction et structure d'une théorie de la musique

« ...rendre possible d'un côté l'étude de la **structure** des systèmes musicaux [...] et la formulation des contraintes de ces systèmes dans une perspective compositionnelle [...] mais aussi, comme étape préalable, une terminologie adéquate [...] pour rendre possible et établir un **modèle** qui autorise des énoncés bien déterminés et vérifiables sur les œuvres musicales »

M. Babbitt : « The Structure and Function of Music Theory », 1965

La Set Theory

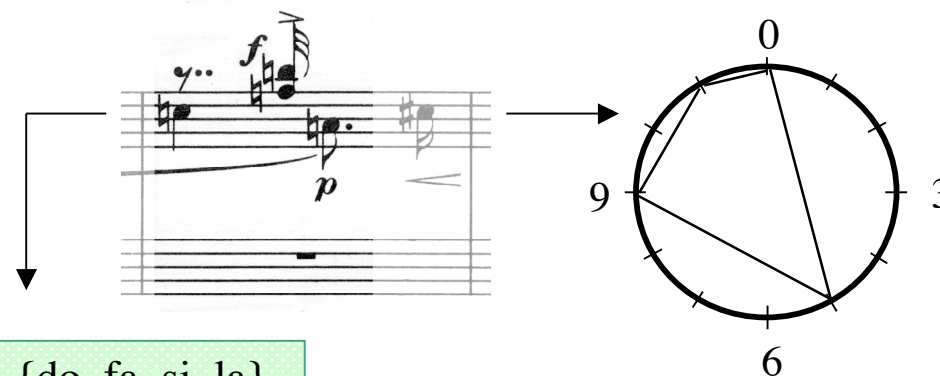
- A. Forte : *The Structure of Atonal Music*, 1973.

- D. Lewin : *Generalized Musical Intervals and Transformation*, 1987

- A. Vieru : *The Book of modes*, 1993 (orig. 1980)

- A. Riotte, M. Mesnage : l'analyse formalisée

- E. Carter : *Harmony Book*, 2002



{do, fa, si, la}

{0, 5, 9, 11}

[1, 1, 1, 1, 1, 1]

4-Z29

(5 4 2 1)

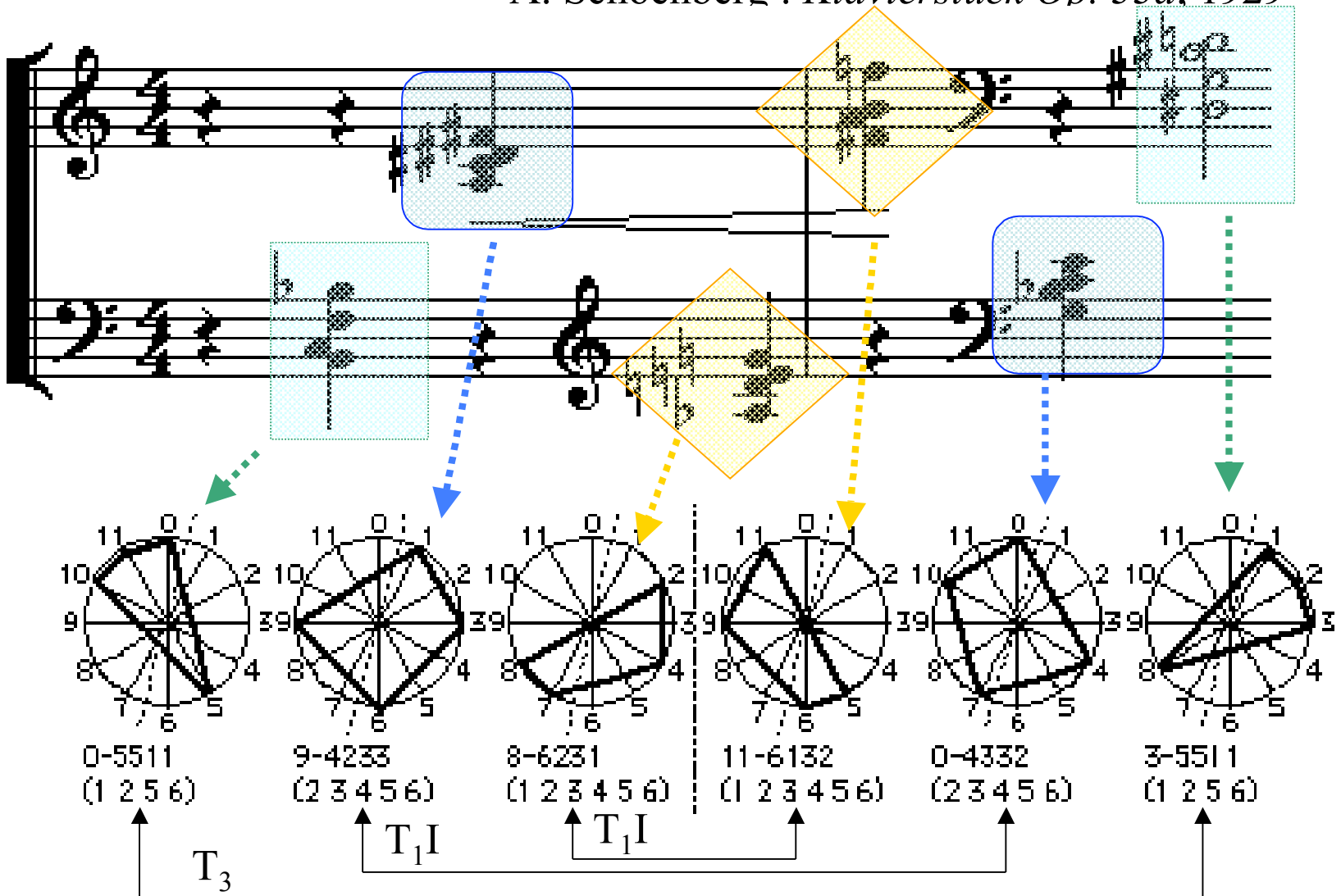
...

...

L'analyse formalisée ou les « entités formelles » en musique

André Riotte et Marcel Mesnage

A. Schoenberg : *Klavierstück Op. 33a*, 1929



Fonction et structure d'une *théorie mathématique de la musique*

G. Mazzola : *The Topos of Music*, ch. 13 - "What are global compositions ?"

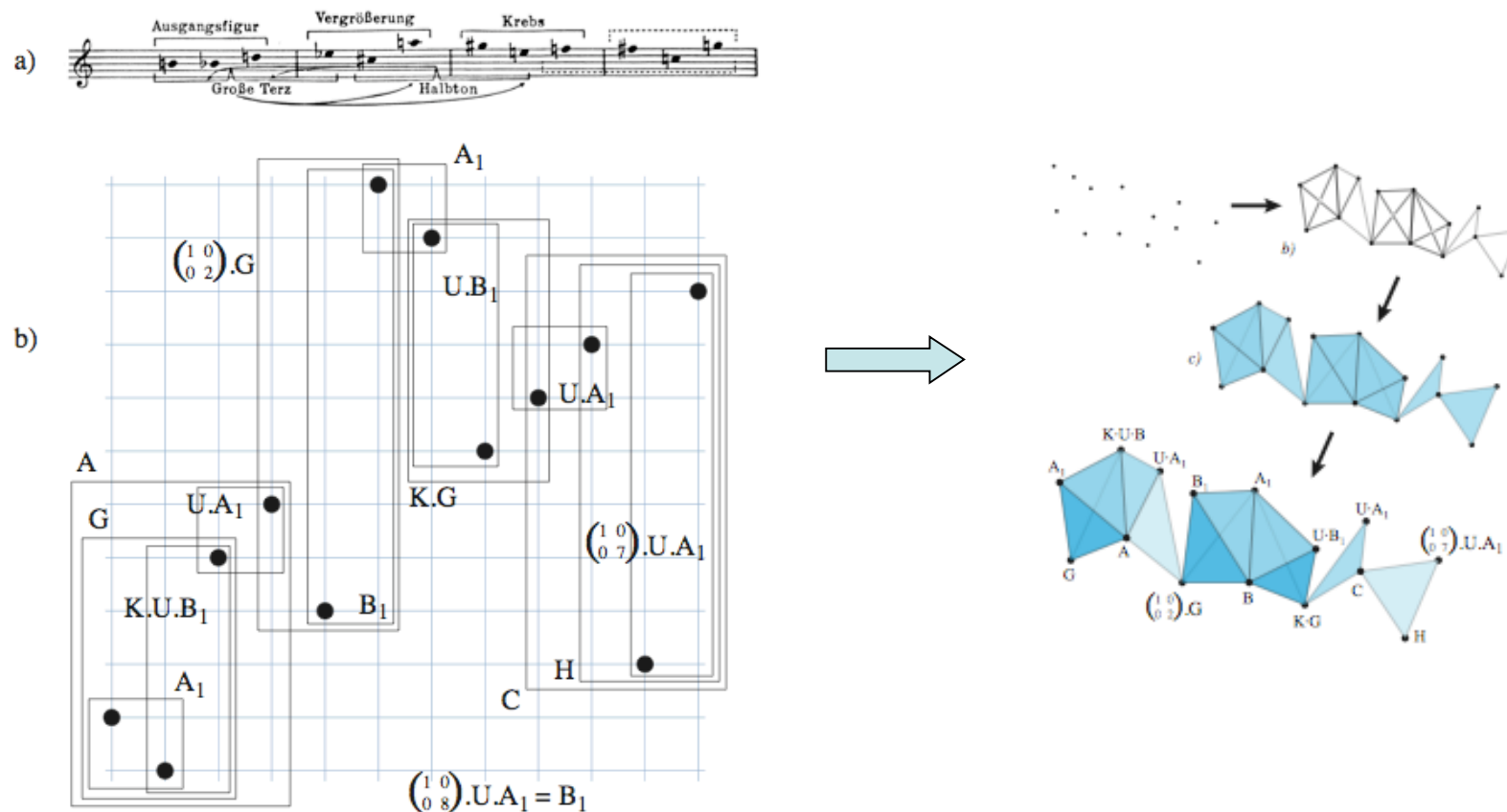
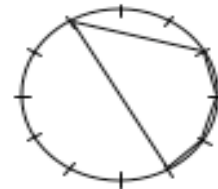
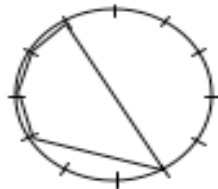
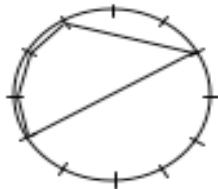


Figure 13.1: a) Internal structure of a dodecaphonic series following Boulez [60, I], with kind permission of Schott-Verlag; b) representation of the series as a local composition in ambient space $OnPiMod_{0,12}$. Frames are drawn around partial series as suggested by Boulez (part a) of this figure), which are related to each other by symmetry transformations (U = inversion, K = retrograde).

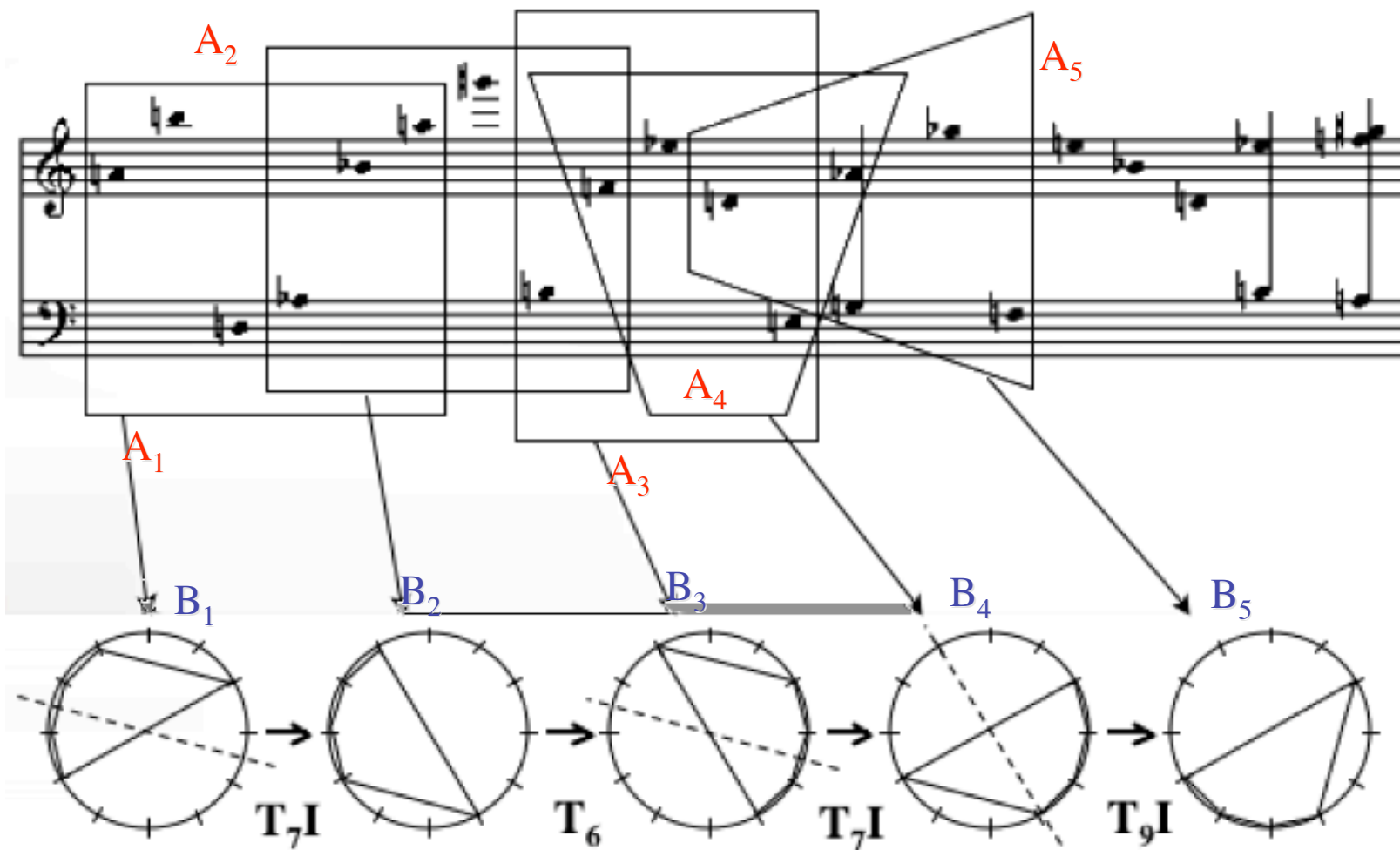
« Making and Using a Pcset Network for Stockhausen's Klavierstück III »

Lewin 1993

SI:	(1, 1, 1, 3, 6)	(6, 3, 1, 1, 1)	(6, 3, 1, 1, 1)
IFUNC:	[5 3 2 2 1 1 1 1 2 2 3]	[5 3 2 2 1 1 1 1 2 2 3]	[5 3 2 2 1 1 1 1 2 2 3]
VI:	[3 2 2 1 1 1]	[3 2 2 1 1 1]	[3 2 2 1 1 1]

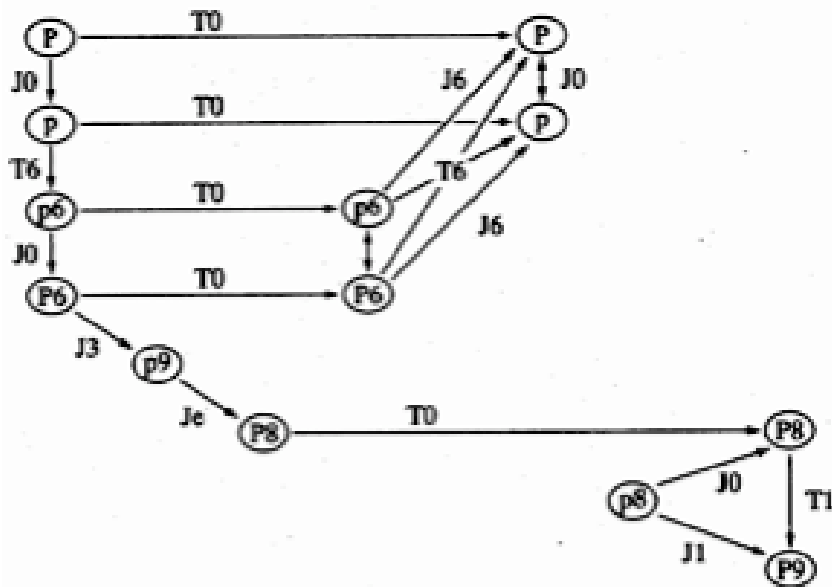


« The most ‘theoretical’ of the four essays, it focuses on the forms of one pentachord reasonably ubiquitous in the piece. A special **group of transformations** is developed, one suggested by the musical interrelations of the pentachord forms. Using that group, the essay arranges **all pentachord forms** of the music into a **spatial configuration** that illustrates network structure, for this particular phenomenon, over the entire piece. »



David Lewin: Analysis of Stockhausen's *Klavierstück III*
 (*Musical Form and Transformation: 4 Analytic Essays*, Yale U Press, 1993)

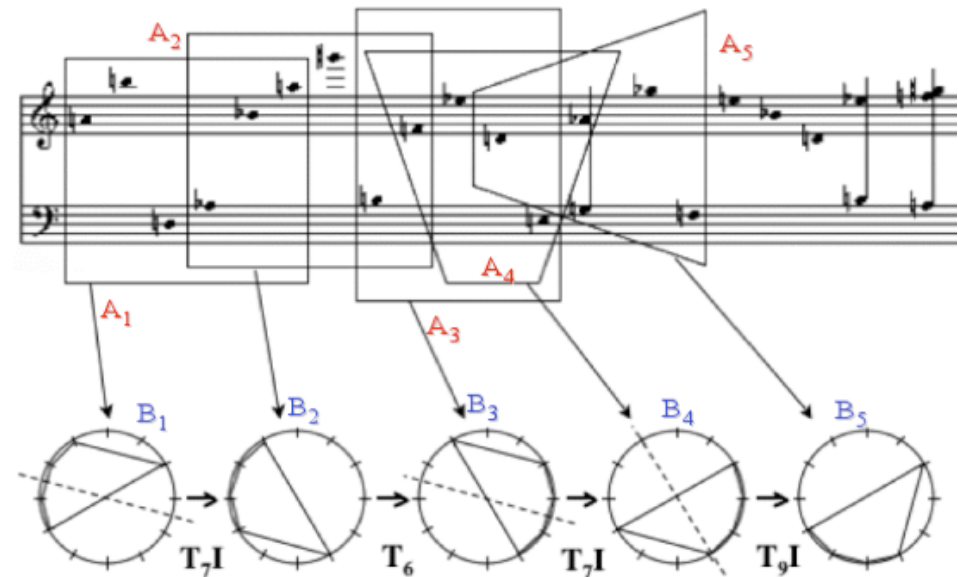
Progression transformationnelle et inversion contextuelle



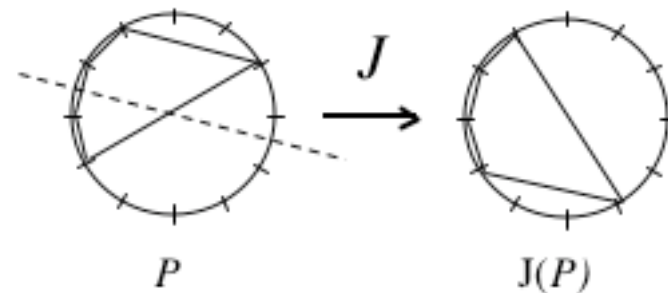
...and so on, ending with



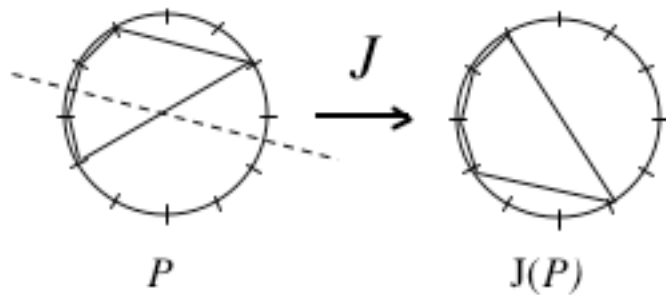
Example 2.4. A network whose left-to-right layout reflects the chronological progress of the piece through P/p forms.



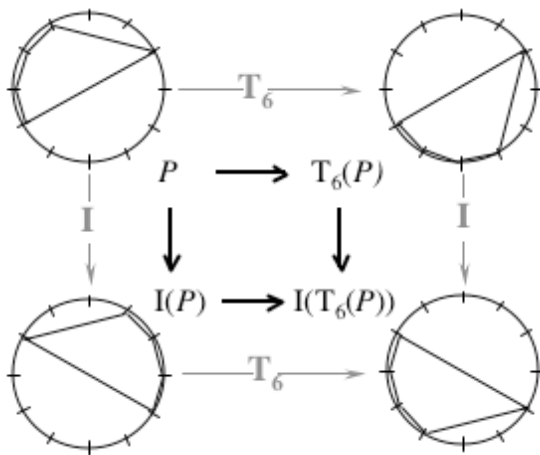
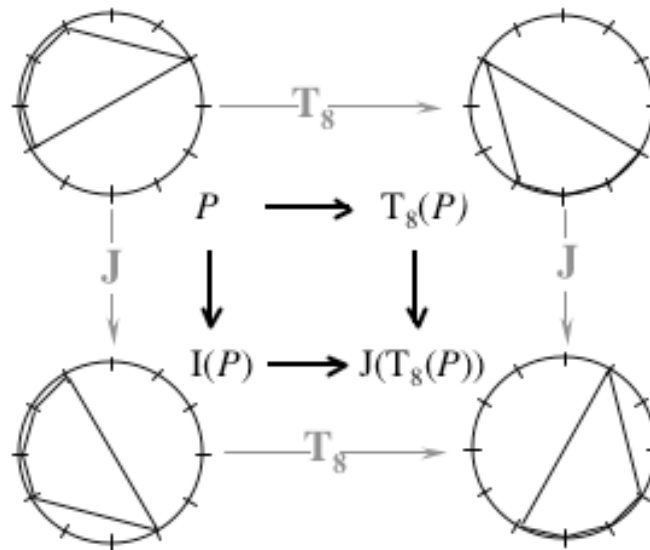
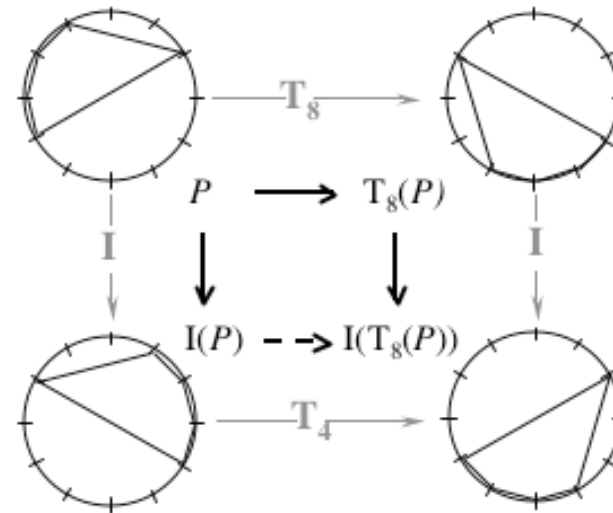
« Given a pentachord-form, J maps into the unique form of the pentachord which inverts the given form and leaves invariant the four-note chromatic tetrachordal subset. »



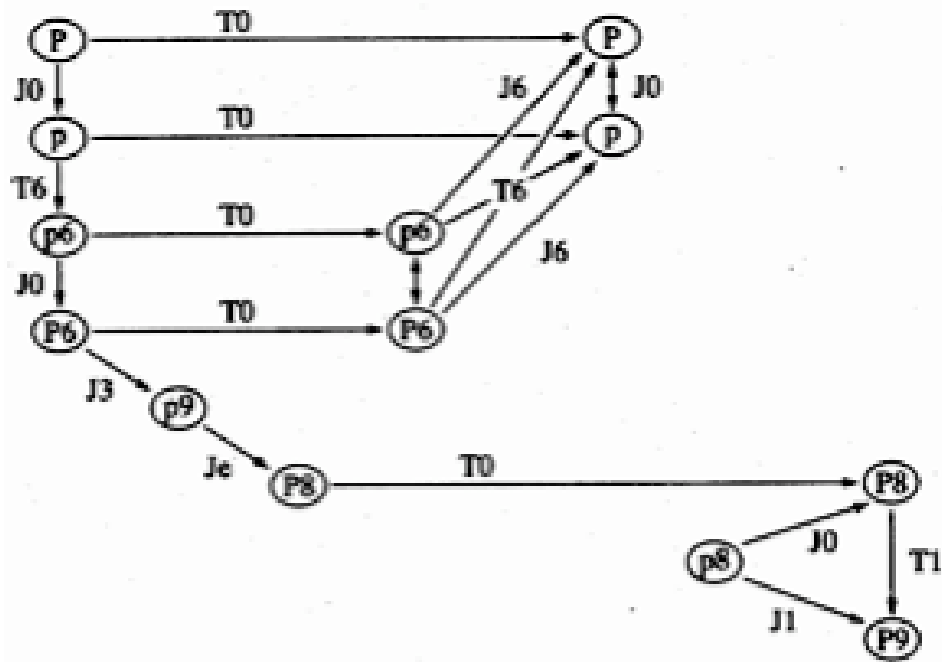
Propriétés musicales et « diagrammatiques » de l'inversion contextuelle



« Given a pentachord-form, J maps into the unique form of the pentachord which **inverts** the given form **and leaves invariant the four-note chromatic tetrachordal subset.** »



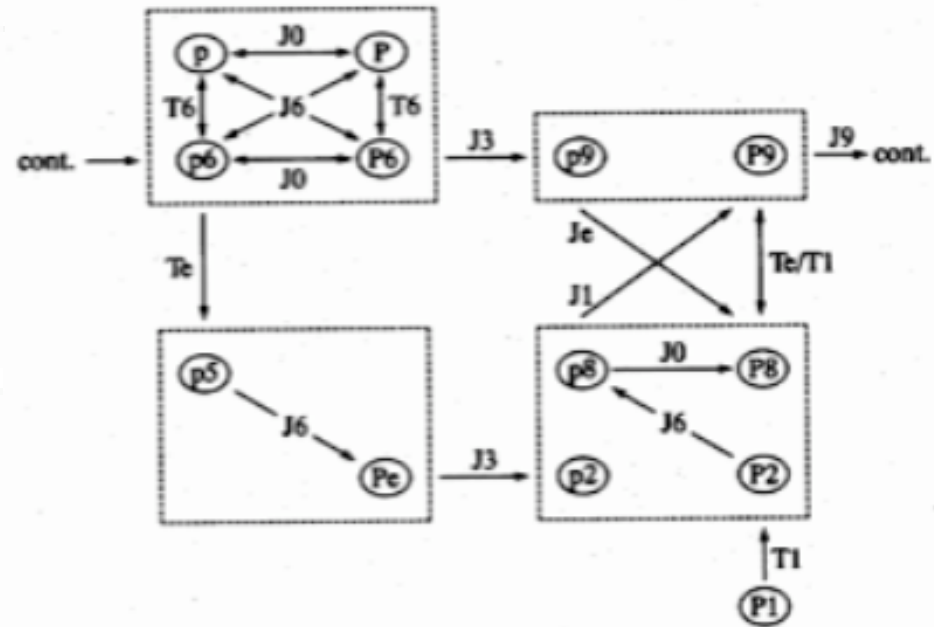
Progression transformationnelle vs réseau transformationnel



...and so on, ending with

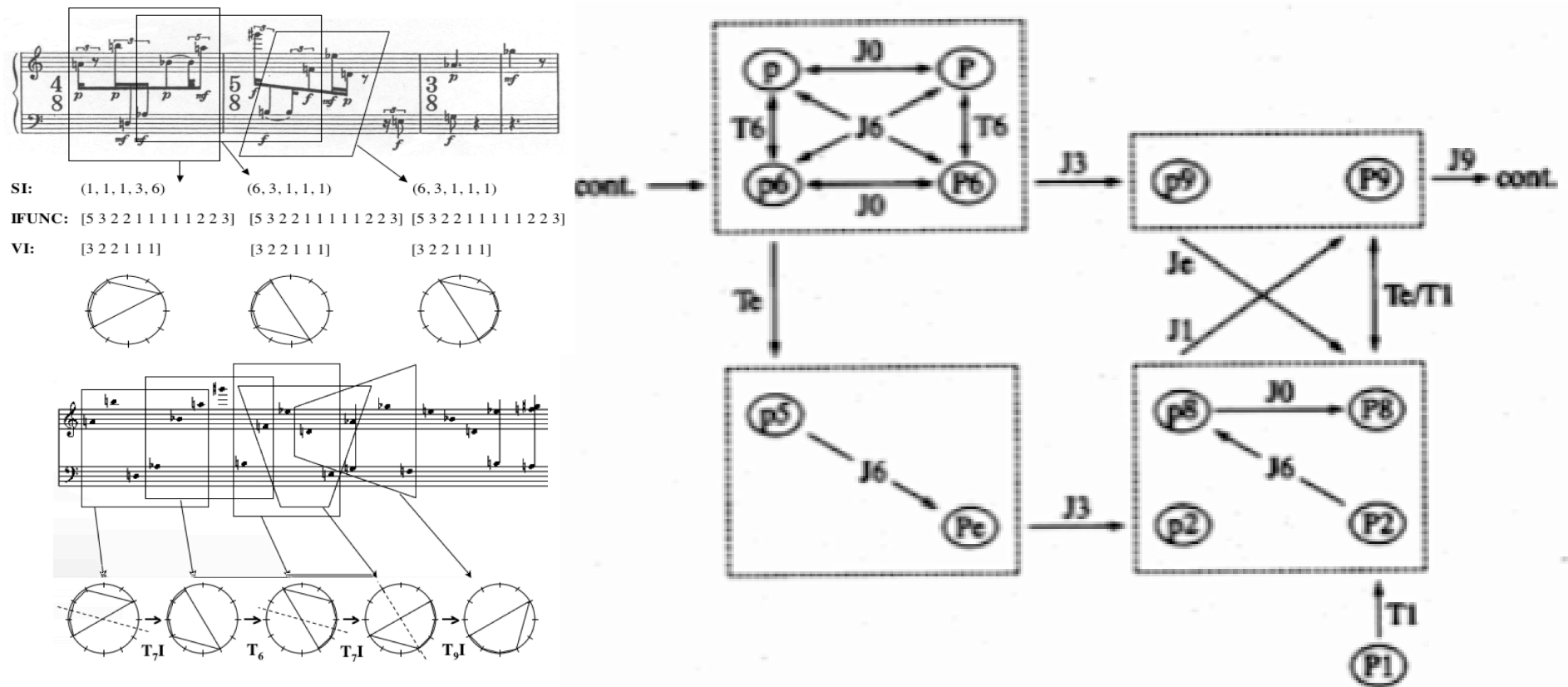


Example 2.4. A network whose left-to-right layout reflects the chronological progress of the piece through P/p forms.



« Rather than asserting a network that follows pentachord relations one at a time, according to the chronology of the piece, I shall assert instead a **network that displays all the pentachord forms used and all their potentially functional interrelationships, in a very compactly organized little spatial configuration.** »

Progression transformationnelle vs réseau transformationnel



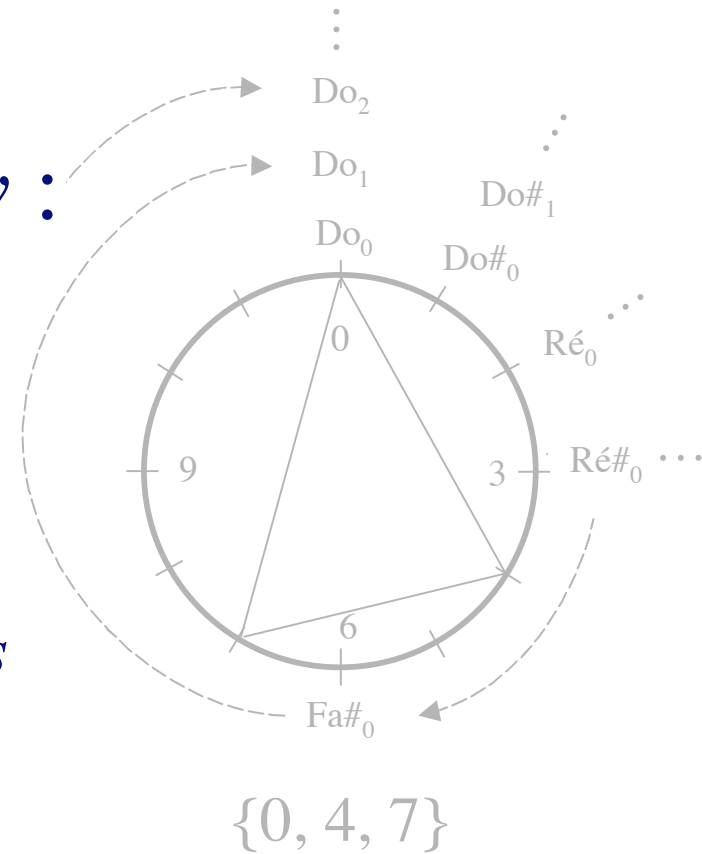
« A **rational reconstruction** of a work or works, which is a **theory** of the work or works, is an **explanation** not, assuredly, of the ‘actual’ process of construction, but of how the work or works may be construed by a hearer, how the ‘given’ may be ‘taken’ »

M. Babbitt : « Contemporary Music Composition and Music Theory as Contemporary Intellectual History », 1972

Les principes de base de la *Set Theory* : une introduction

Set Theory « classique » et
Approches Transformationnelles

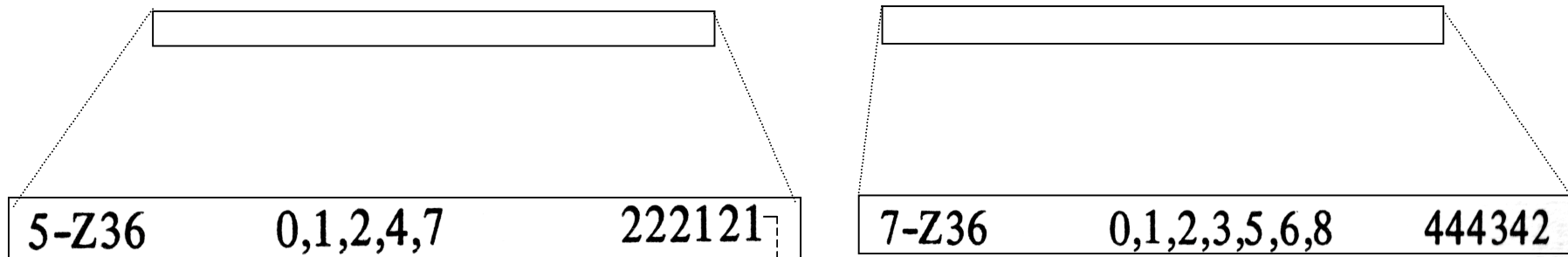
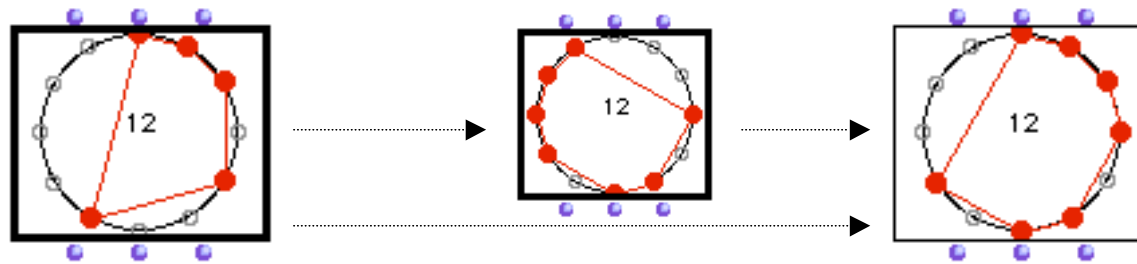
Moreno Andreatta
Stéphan Schaub



Colloque International
Autour de la *Set Theory*
IRCAM Octobre 2003

« Une introduction à la *Set Theory* : Les concepts à la base des théories d'Allen Forte et de David Lewin », *Musurgia*, Vol. X/1, 2003, 73-92.

Le catalogue des *pcs* d'Allen Forte (1973)



5-Z12

A la recherche des bons *invariants* pour un ECH

La fonction intervallique IFUNC (Lewin) répertorie la fréquence d'apparition des classes d'intervalles contenues dans un ECH.

$$\text{IFUNC}(A, A) = [4 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

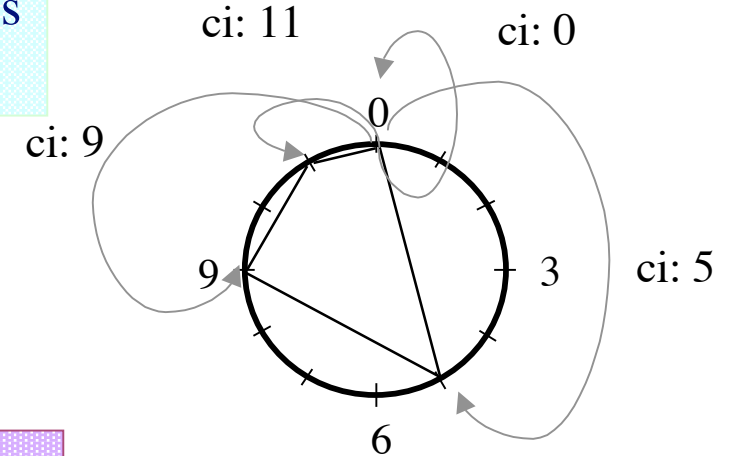
$\begin{array}{cccccccccccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{ci } 0 & \text{ci } 1 & \text{ci } 2 & \dots & & & & & & & & \text{ci } 11. \end{array}$

Le vecteur intervallique (Forte) répertorie la fréquence d'apparition des classes d'intervalles modulo l'équivalence : $\text{cii} = \text{ci}(12-i)$

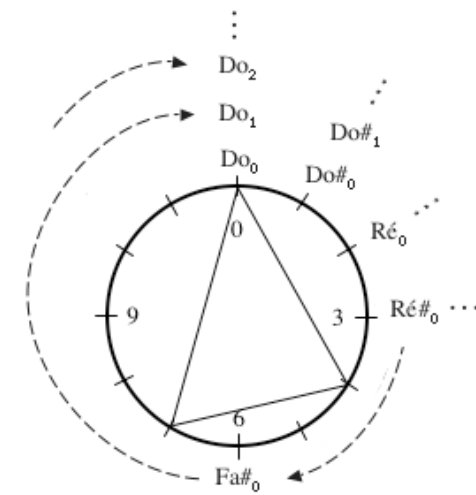
$$\text{VI}(A) = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

$\begin{array}{cccccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{ci } 1 & \text{ci } 2 & \text{ci } 3 & \dots & \text{ci } 6. \end{array}$

La structure intervallique (Vieru) répertorie les classes d'intervalles successives dans un ensemble des classes de hauteurs.

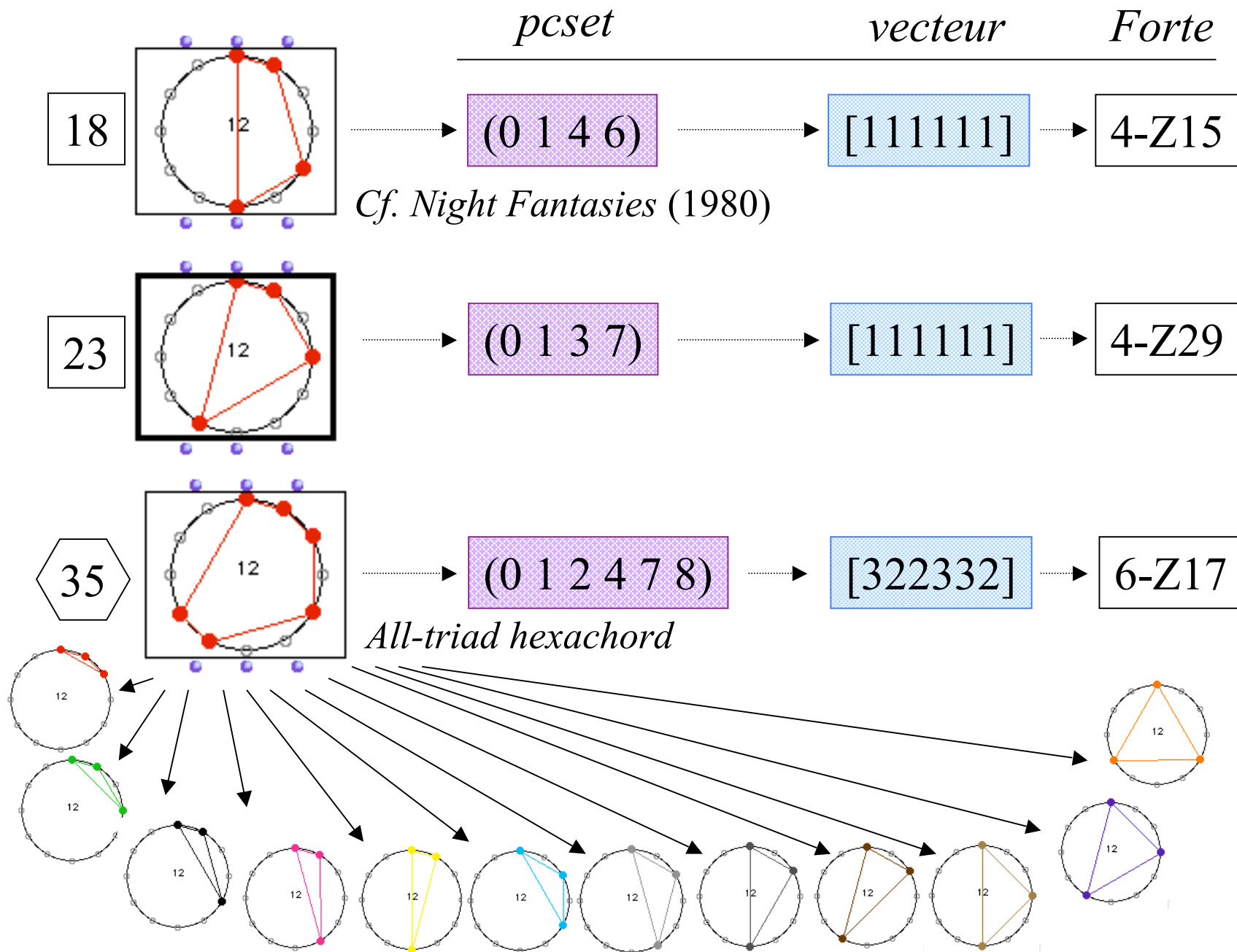


$$A = \{0, 5, 9, 11\}$$



$$(4,3,5)$$

Elliott Carter's *Harmony Book* (2002)



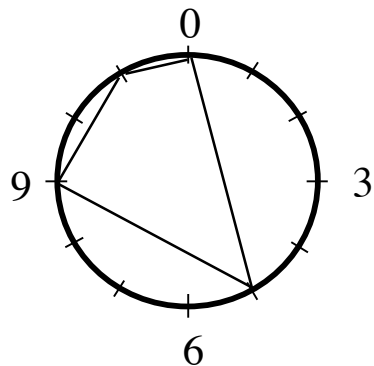
Ensemble (littéral) de Classes de Hauteurs (ECH) (Literal) pitch class set (pcs)

A. Schoenberg *Sechs kleine Klavierstücke* op. 19 no. 4, 1911 (Forte 2003)

A

m. 2
↓

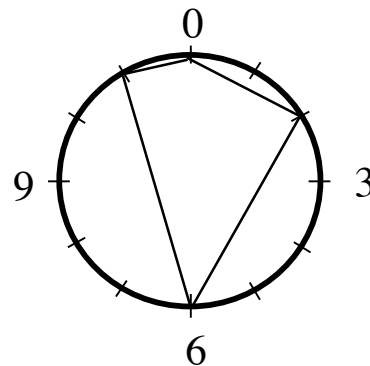
{do, fa, si, la}
{0, 5, 11, 9}
{0, 5, 9, 11}



B

m. 5
↓

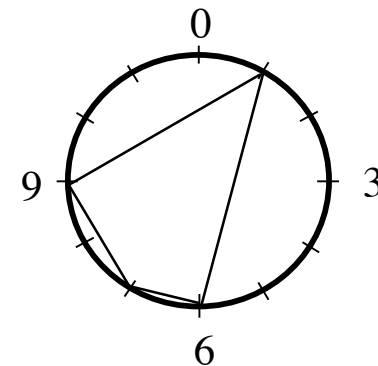
{si, do, ré; fa#}
{11, 0, 2; 6}
{0, 2, 6, 11}



C

m. 8
↓

{sol, la, fa#, do#}
{7, 9, 6, 1}
{1, 6, 7, 9}



Classes d'Intervalles et Contenu Intervallique d'un ECH (2)

Interval Classes and Interval Content of a pcs

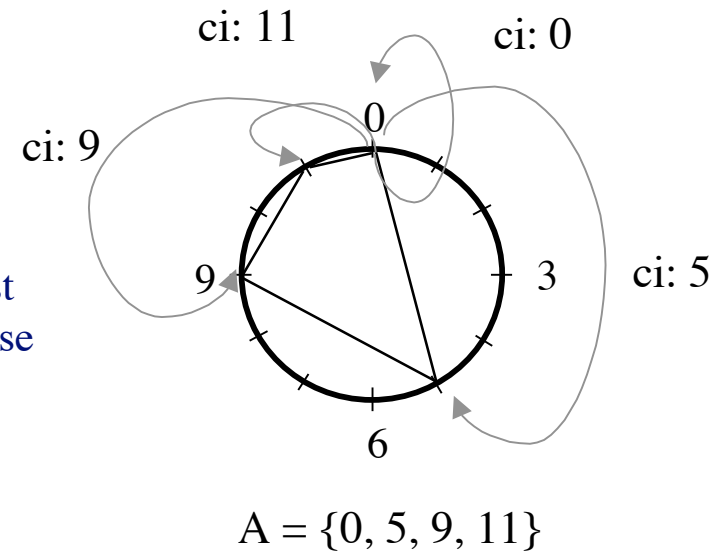
Le **vecteur IFUNC** (Lewin) répertorie la fréquence d'apparition des classes d'intervalles contenues dans un ECH.

$$\text{IFUNC}(A, A) = [4 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

$\begin{array}{cccccccccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & & & & & & & & \uparrow \\ \text{ci } 0 & \text{ci } 1 & \text{ci } 2 & \dots & & & & & & & \text{ci } 11. \end{array}$

Au sein de la théorie « classique », l'information est encore condensée, puisqu'un intervalle et son inverse sont considérés comme faisant partie de la même « classe ».

seconde mineure / septième majeure: 1,
 seconde majeure / septième mineure: 2
 ... triton: 6.



Le **vecteur intervallique** (Forte) répertorie la fréquence d'apparition des classes d'intervalles contenues dans un ECH, selon la définition ci-dessus.

$$\text{VI}(A) = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

$\begin{array}{cccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \text{ci } 1 & \text{ci } 2 & \text{ci } 3 & \dots & \text{ci } 6. \end{array}$

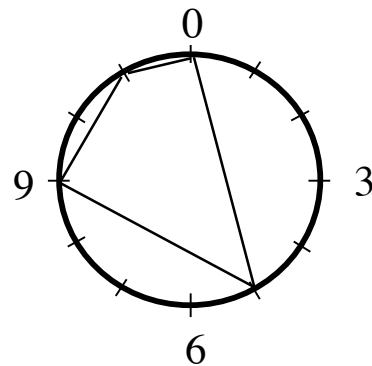
Classes d'Intervalles et Contenu Intervallique d'un ECH

Interval Classes and Interval Content of a pcs

A

B

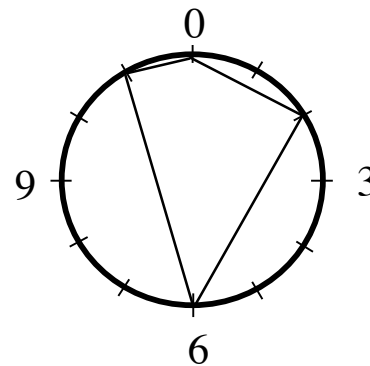
C



SI: (5, 4, 2, 1)

IFUNC: [4 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]

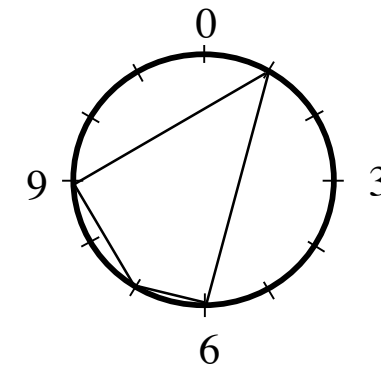
VI: [1 1 1 1 1 1]



(2, 4, 5, 1)

[4 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]

[1 1 1 1 1 1]



(5, 1, 2, 4)

[4 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]

[1 1 1 1 1 1]

(Retrouver les transformations)

Transformations d'ECH : la Transposition

Pcs Transformations : Transposition

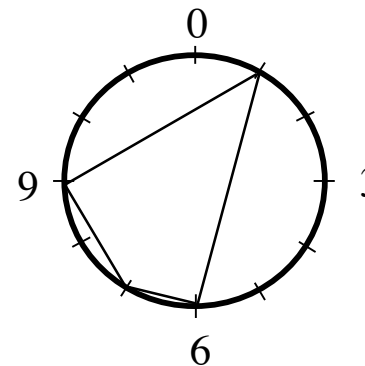
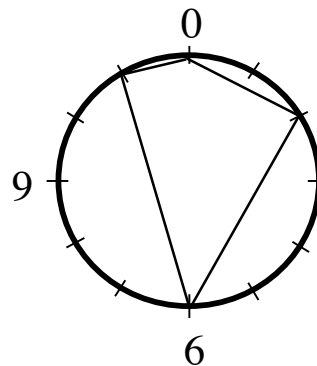


B

C

{0, 2, 6, 11}

{1, 6, 7, 9}



T_7

$$T_7(B) = C$$

Transformations d'ECH : l'Inversion

Pcs Transformations : Inversion

The diagram illustrates the transformation $T_{11}I$ (Inversion by 11 semitones) through musical notation and chromatic circle diagrams.

Musical Notation:

- Left:** A grand staff in 2/4 time. The treble clef has a key signature of one sharp (F#). The bass clef has a key signature of one flat (Bb). The music starts with a piano (*p*) dynamic and a forte (*f*) dynamic.
- A:** A musical fragment in the treble clef, starting with a piano (*p*) dynamic and a forte (*f*) dynamic. It features a melodic line with a fermata over the final note.
- B:** A musical fragment in the treble clef, starting with a piano (*p*) dynamic and a pianissimo (*pp*) dynamic. It features a melodic line with a fermata over the final note, marked *leicht* (light).

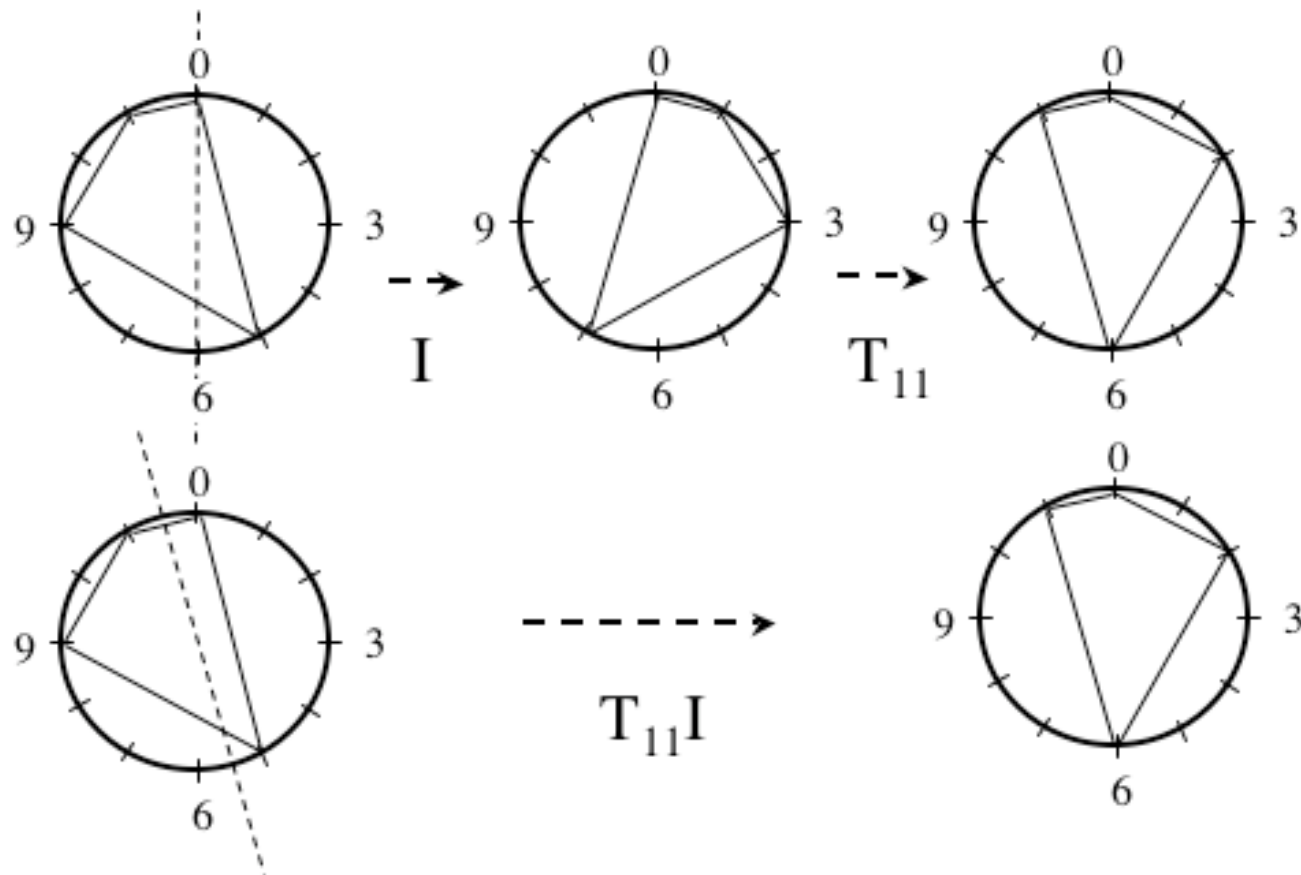
Chromatic Circle Diagrams:

- Left Diagram:** A circle representing the chromatic scale with notes 0, 3, 6, 9. A dashed line indicates an inversion operation. The notes 0, 3, 6, 9 are connected by solid lines, forming a triangle.
- Right Diagram:** A circle representing the chromatic scale with notes 0, 3, 6, 9. The notes 0, 3, 6, 9 are connected by solid lines, forming a triangle.
- Transformation:** A dashed arrow labeled $T_{11}I$ points from the left diagram to the right diagram.

$$T_{11}I(A) = B$$

Transformations d'ECH : Inversion et Transposition

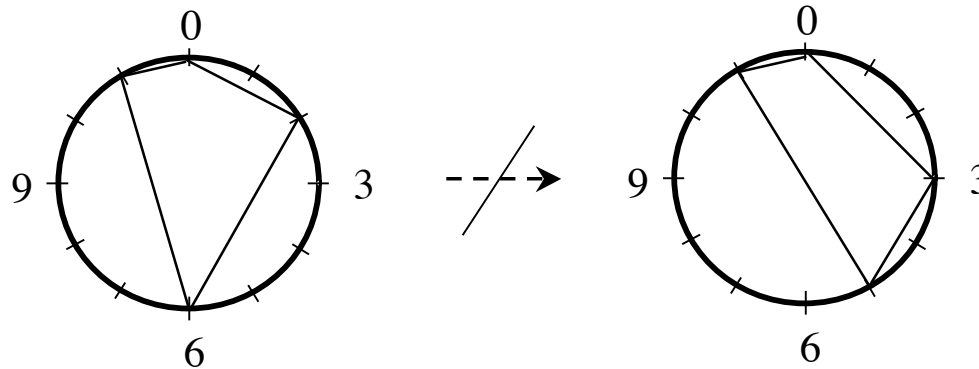
Pcs Transformations : Inversion and Transposition



La Relation z

Z-relation

La transposition autant que l'inversion laissent le contenu intervallique d'un ECH inchangé. En d'autres termes, si un ECH B est le transformé par inversion et / ou transposition d'un ECH A, alors A et B ont le même contenu intervallique.

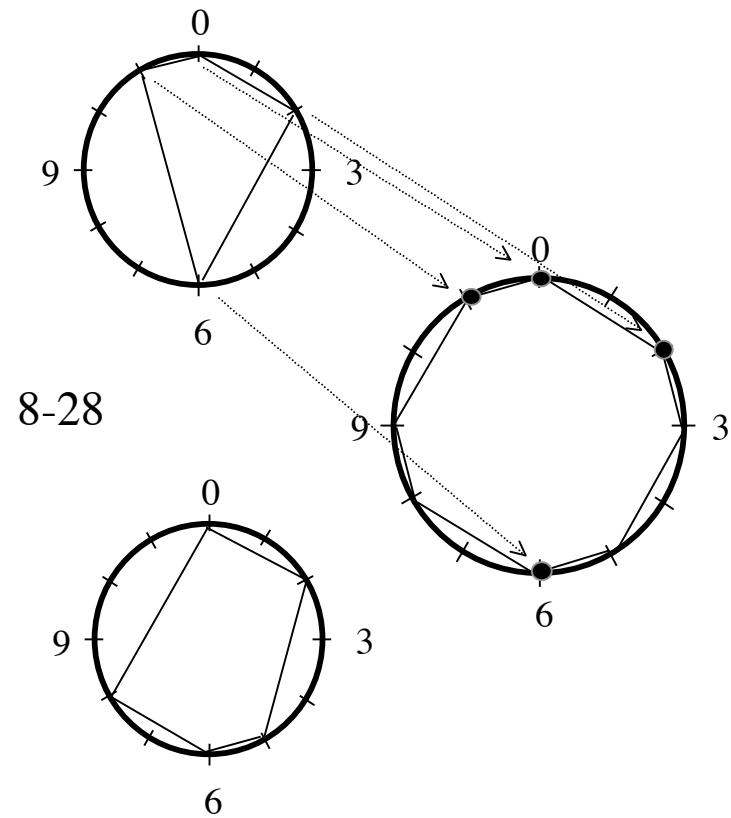
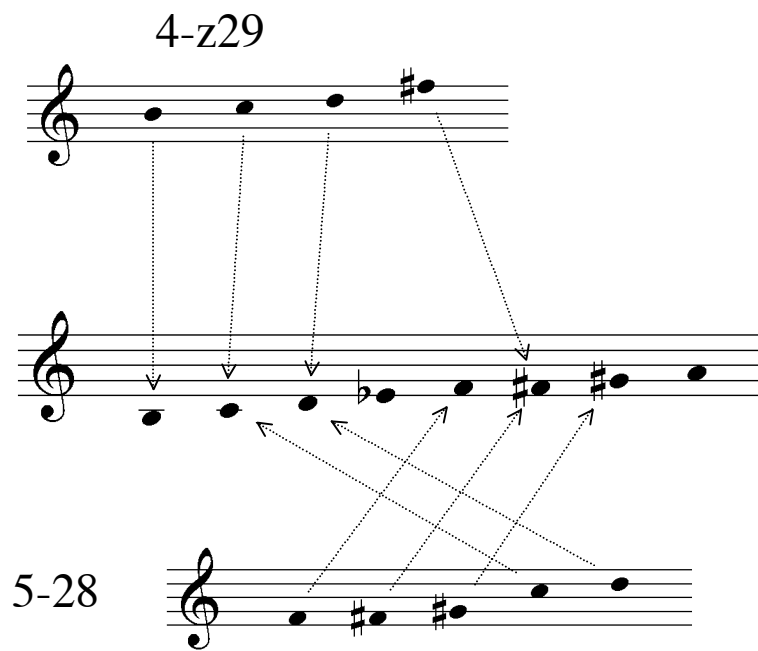


VI: [1 1 1 1 1 1] \dashrightarrow [1 1 1 1 1 1]

La proposition inverse n'est pas vraie.

Relations entre ECH: l'inclusion littérale

Relations between pcs: literal inclusion



$4-z29 \subset 8-28$

$5-28 \subset 8-28$

Relations entre ECH: l'inclusion abstraite

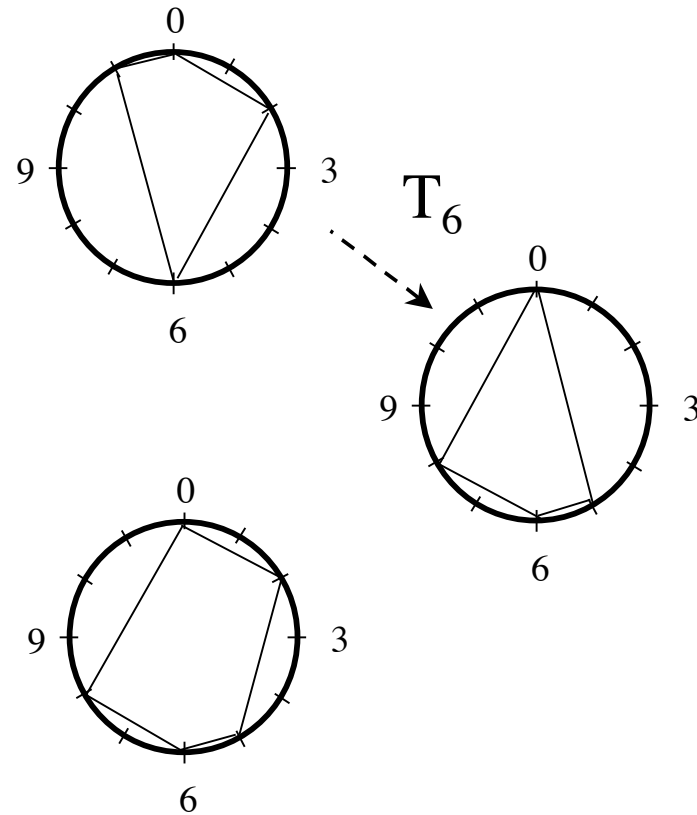
Relations between pcs: abstract inclusion

4-z29

T_6

4-z29

5-28



$$4-z29 \subset 5-28 \subset 8-28$$

Relations entre ECH: le complémentaire littérale

Relations between pcs: literal complement

A. Webern *Fünf Stücke* op. 10 no. 4, 1913 (Forte 1973 / Lewin 1987)

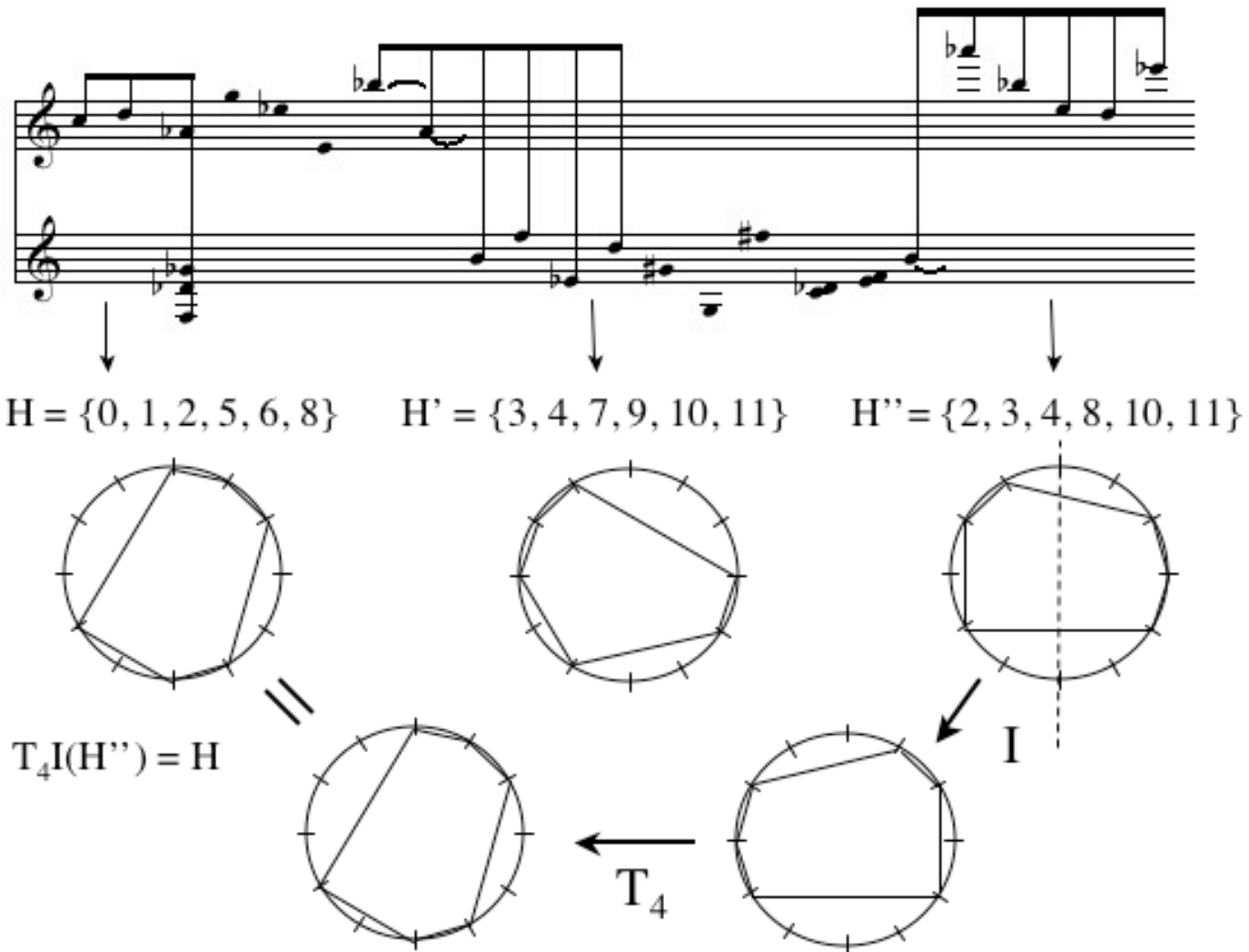
The image displays a musical score for two staves. The upper staff is in treble clef and the lower staff is in bass clef. Three specific pitch classes are highlighted with arrows pointing to their corresponding sets below the score:

- $H = \{0, 1, 2, 5, 6, 8\}$
- $H' = \{3, 4, 7, 9, 10, 11\}$
- $H'' = \{2, 3, 4, 8, 10, 11\}$

Below the sets are three circular pitch class diagrams (chromatic circles) illustrating the relationships between these sets. The first diagram shows the set H as a hexagon. The second diagram shows the set H' as a hexagon, which is the literal complement of H . The third diagram shows the set H'' as a hexagon, which is the literal complement of H' . Dashed lines connect the vertices of the first two diagrams, and the third diagram is positioned to the right of the second.

Relations entre ECH: le complémentaire abstrait

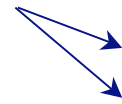
Relations between pcs: abstract complement



L 'approche transformationnelle

Transformation(al) Theory/Analysis

1. GIS = *Generalized Interval System*



Systeme d'Intervalles Généralisées
Systeme Généralisé d'Intervalles

2. *Set Theory* généralisée

Fonction intervallique (IFUNC)

Fonction injection (INJ)

Théorème généralisé de l'hexacorde

3. Analyse transformationnelle

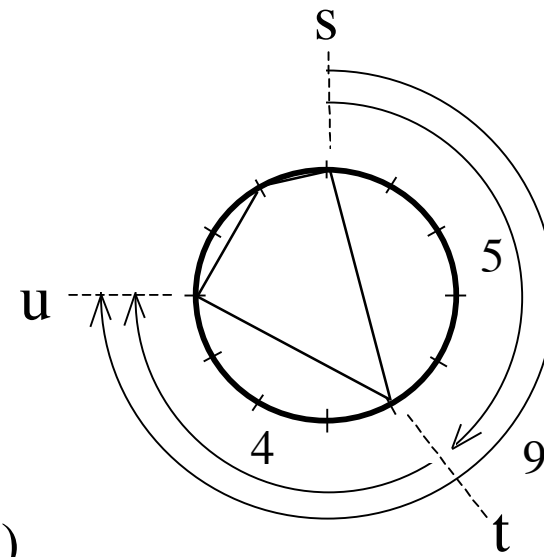
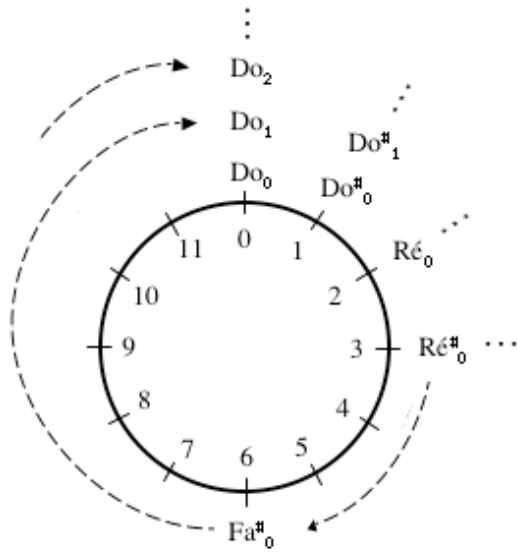
Progressions transformationnelles

Réseaux transformationnels

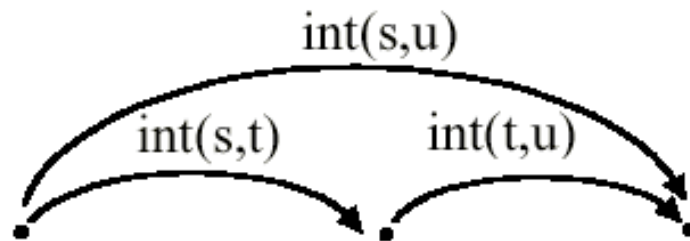
Klumpenhouwer Networks (K-nets)

Vers un Système d'Intervalles Généralisés

Towards a Generalized Interval System



(5, 4, 2, 1)



Systeme d'Intervalles Généralisés - Systeme Généralisé d'Intervalles
 David Lewin's *Generalized Interval System* [GMIT, 1987]

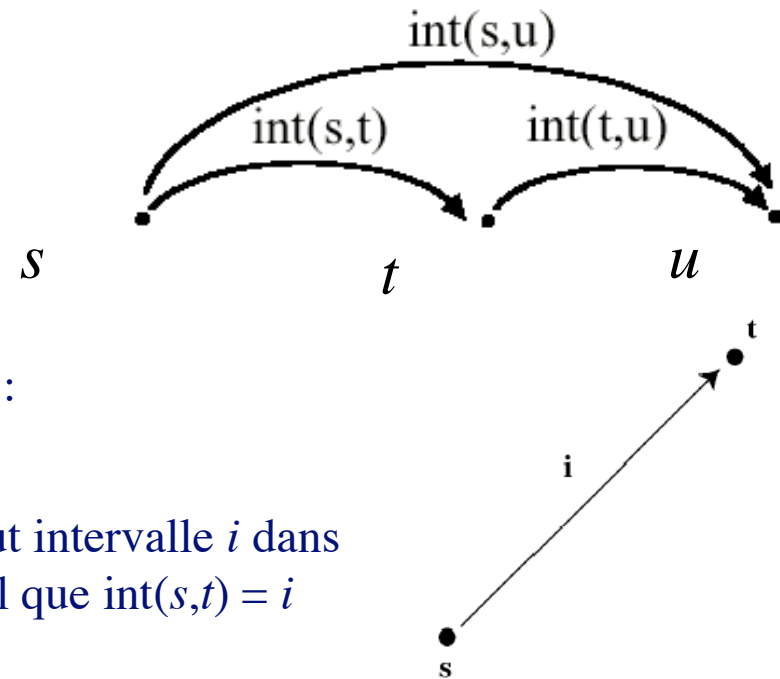
GIS = (S, G, int)

S = ensemble

(G, •) = groupe d'intervalles

int = fonction intervallique

$S \times S \xrightarrow{\text{int}} G$



Action
 simplement
 transitive

- 1. Pour tout objets s, t, u dans S :
 $\text{int}(s,t) \bullet \text{int}(t,u) = \text{int}(s,u)$
- 2. Pour tout objet s dans S et tout intervalle i dans G il y a un seul objet t dans S tel que $\text{int}(s,t) = i$

Généralisation de la notion de transposition (musicale)
 Pour tout élément i dans G , la transposition T_i est une application
 $T_i : S \rightarrow S$ telle que $\text{int}(s, T_i(s)) = i$ pour tout élément s dans S

Fonction Intervallique IFUNC dans un GIS

Interval Function IFUNC in a GIS

$GIS = (S, G, \text{int})$

S ensemble

H et H' dans S

H



H'

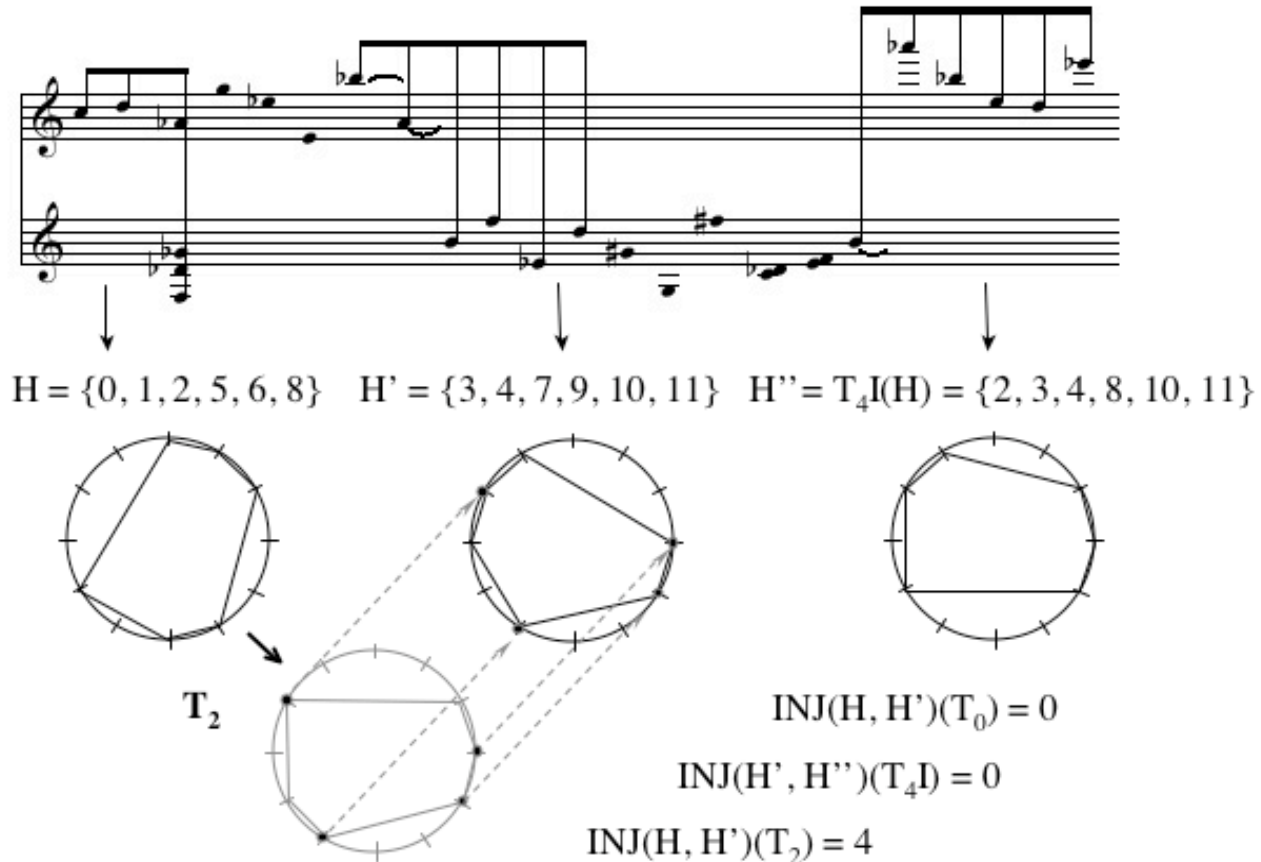


$IFUNC(H, H')(i) = \text{nombre d'éléments } (a,b) \text{ dans } H \times H' \text{ tels que } \text{int}(a,b)=i$

$$IFUNC(H, H')(2) = 4$$

Fonction d'Injection et relation d'inclusion/complémentaire

Injection function and the inclusion/complementary relation

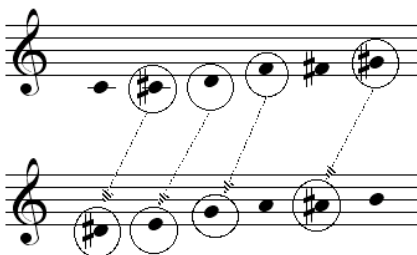


$INJ(H, H')(T_n) = \text{nombre d'éléments } a \text{ de } H \text{ tels que } T_n(a) \in H'$

Fonction d'Injection INJ et Fonction Intervallique IFUNC

Injection Function and IFUNC

GIS = (S, G, int)



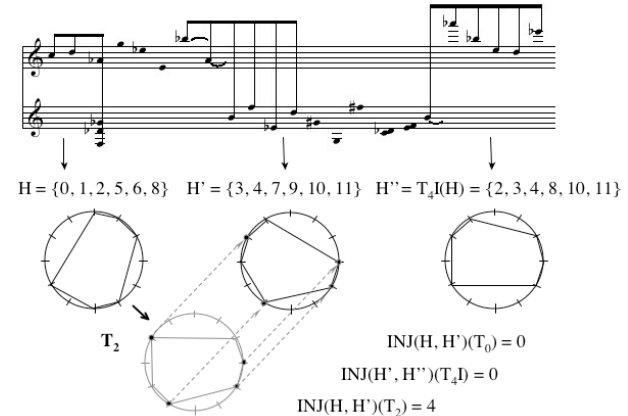
S ensemble

A et B dans S

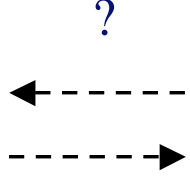
f transformation sur S

?

<-->



$\text{INJ}(A, B)(f) =$ nombre
 d'éléments a de A tels
 que $f(a)$ appartient à B

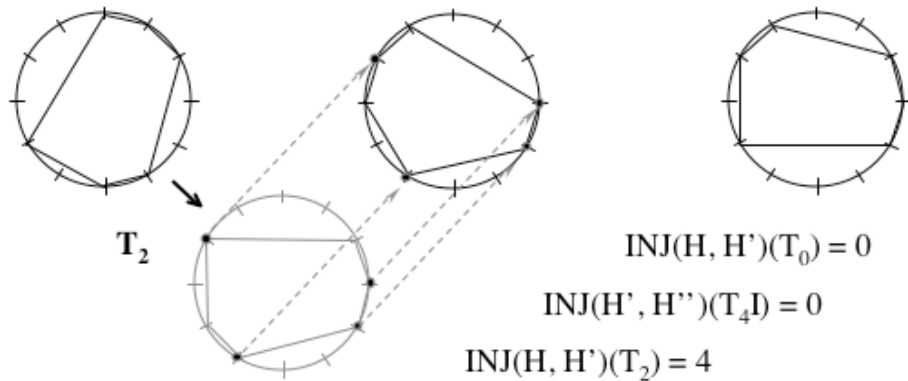


$\text{IFUNC}(A, B)(i) =$ nombre
 d'éléments (a, b) de $A \times B$
 tels que $\text{int}(a, b) = i$

Fonction d'Injection et relation d'inclusion/complémentaire

Injection function and the inclusion/complementary relation

$H = \{0, 1, 2, 5, 6, 8\}$ $H' = \{3, 4, 7, 9, 10, 11\}$ $H'' = T_4I(H) = \{2, 3, 4, 8, 10, 11\}$

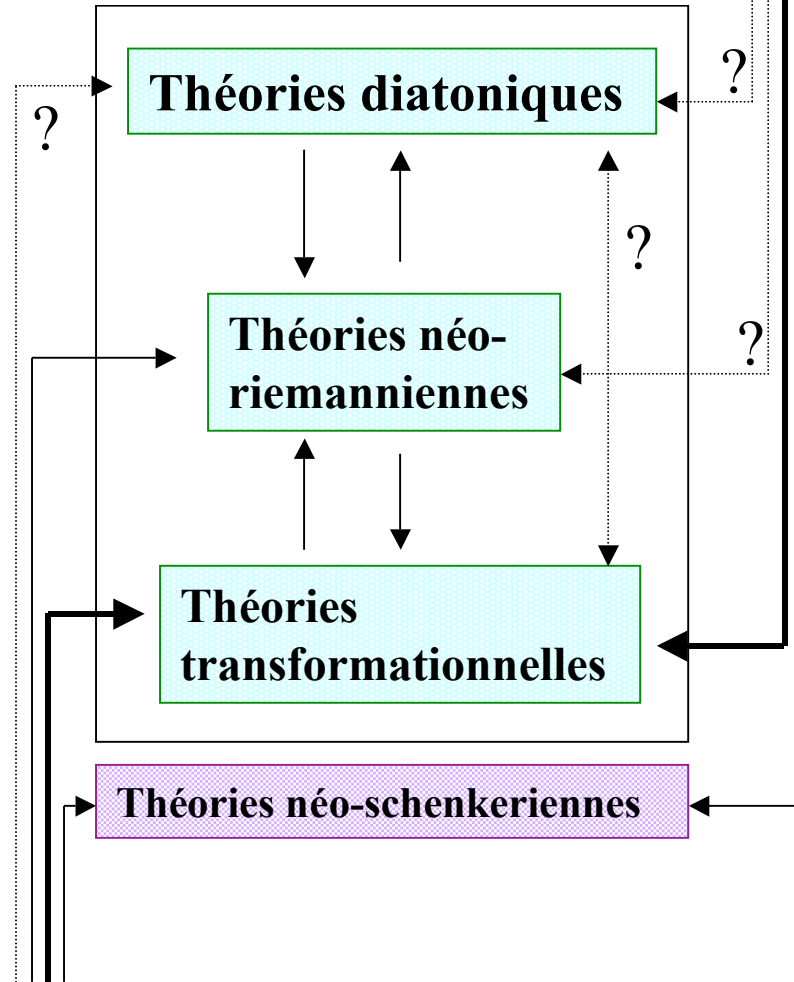


$INJ(H, H')(T_n) =$
 nombre d'éléments a
 de H tels que $T_n(a) \in H'$

||

$IFUNC(H, H')(i) =$
 nombre d'éléments (a, b)
 dans $H \times H'$ tels que
 $int(a, b) = i$

Babbitt



« Here the basic hierarchical scope of the (twelve-tone) system is contained essentially in the simple theorem that:

Given a collection of pitches (pitch classes), the multiplicity of occurrence of any interval (...) determines the number of common pitches between the original collection and the transposition by the interval »

(Milton Babbitt, *Past and Present Concepts*, 1961)

↕ GIS

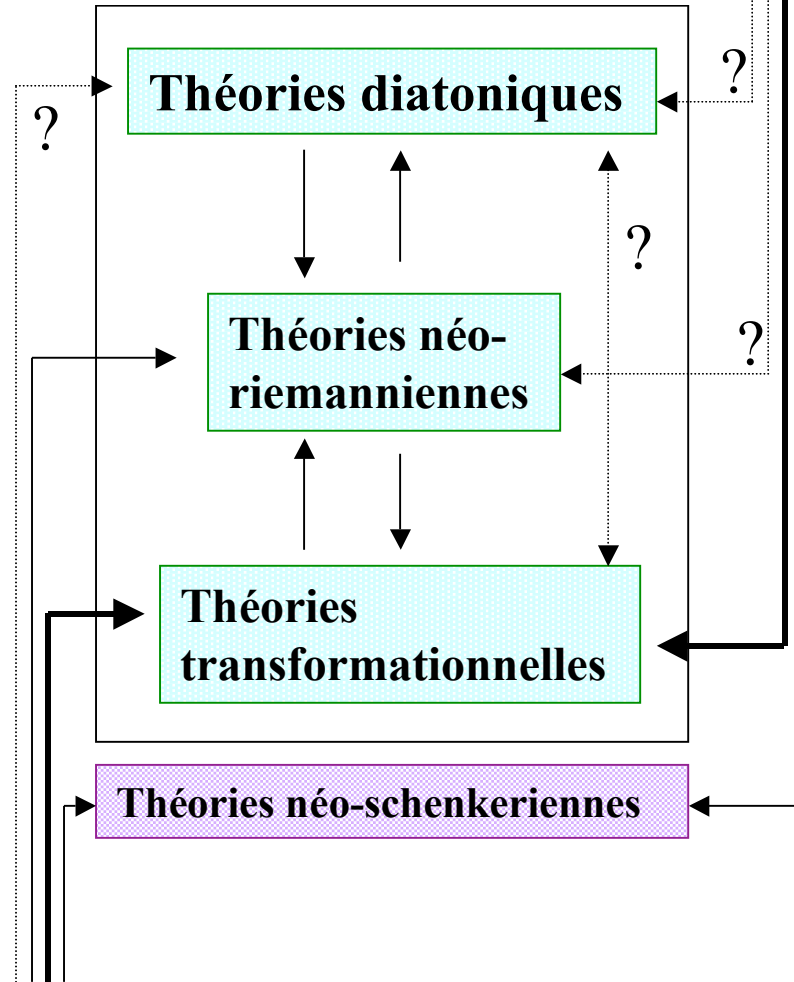
Lewin

$INJ(A,B)(T_i)$

=

$IFUNC(A,B)(i)$

Babbitt



« ...on peut remplacer entièrement le concept d'intervalle dans un GIS avec le concept de transposition dans un espace »

« ...on peut remplacer le concept même de GIS avec l'idée d'un espace S sur lequel on a un **groupe** d'opérations qui opère »

(David Lewin, *Generalized Musical Intervals and Transformations*, 1987)

GIS \updownarrow STRANS

Lewin

$INJ(A,B)(T_i)$

=

$IFUNC(A,B)(i)$

Cas particuliers de la fonction intervallique

D. Lewin: "Special cases of the IFUNC between X and Y", JMT 2003

$$\text{IFUNC}(X, Y) = (k, k, k, \dots) \quad \begin{array}{l} X = (0 \ 4 \ 8) \quad Y = (0 \ 3 \ 6 \ 9) \\ X = (0 \ 1 \ 6 \ 7) \quad Y = (0 \ 2 \ 4 \ 5 \ 7 \ 9) \end{array}$$

$$\text{IFUNC}(X, Y) = (m, n, m, n, \dots) \quad \begin{array}{l} X = (3 \ 9) \quad Y = (7 \ 10 \ 11) \\ X = (3 \ 9) \quad Y = (0 \ 2 \ 4) \end{array}$$

$$\text{IFUNC}(X, Y) = \text{IFUNC}(X, Z)$$

Théorème généralisé de l'hexacorde *Generalized Hexachord Theorem*

« *Un hexacorde et son complémentaire ont le même contenu intervallique* »

$$\text{IFUNC}(A, A)(i) = \text{IFUNC}(A', A')(i)$$

« *Un hexacorde et son complémentaire ont la même fonction d'injection par rapport à toute transformation bijective* »

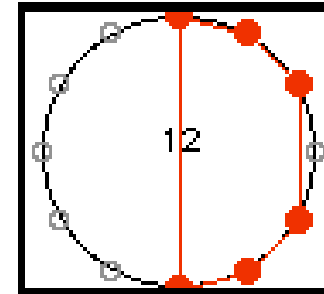
$$\text{INJ}(A, A)(f) = \text{INJ}(A', A')(f)$$

$$\text{INJ}(A, A')(f) = \text{INJ}(A', A)(f)$$

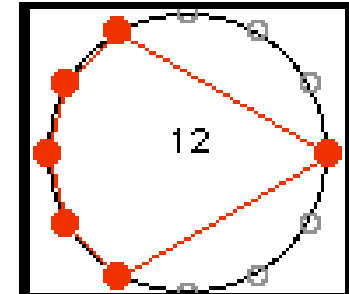
Théorème de l'hexacorde

(Wilcox, Ralph Fox (?), Chemillier, Lewin, Mazzola, Schaub, ..., Amiot [2006])

P
RP
IIP
RIIP



A



A'

« Un hexacorde et son complémentaire ont le même contenu intervallique »

$$IV(A) = [4, 3, 2, 3, 2, 1] = [4, 3, 2, 3, 2, 1] = IV(A')$$

« Un hexacorde et son complémentaire ont la même fonction d'injection par rapport à toute transformation bijective »

$$INJ(A, A')(f) = INJ(A', A)(f)$$

David Lewin's call for Fourier JMT, 1958

E. Amiot, T. Noll, M. Andreatta, C. Agon : « Oracles for Computer-Aided Improvisation », *ICMC*, New Orleans, novembre 2006

- The Interval Content of two chords A and B is the convolution product of their characteristic functions

$$IC_A(k) = \text{Card}\{(x, y) \in A \times A \mid x + k = y\}$$

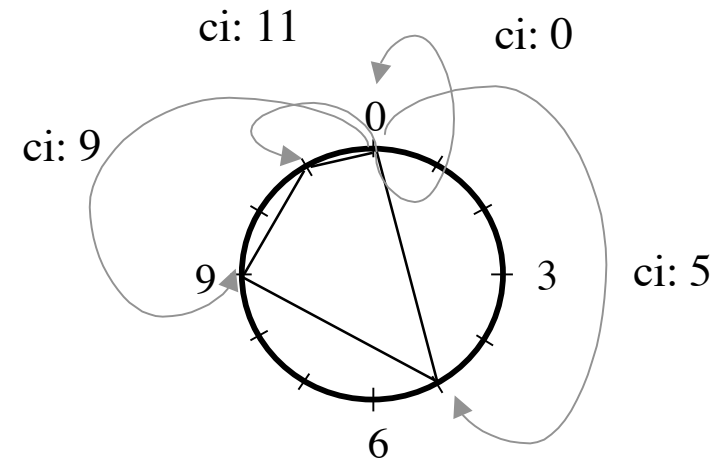
$$IC_A(k) = (1_A \star 1_{-A})(k)$$

$$1_A \star \tilde{1}_B(k) = \sum_i 1_A(i) \times 1_B(i - k) = \sum_{\substack{i \in A \\ i - k \in B}} 1$$

$$\mathcal{F}(1_A \star \tilde{1}_B) = \mathcal{F}(1_A) \times \mathcal{F}(\tilde{1}_B)$$

$$\mathcal{F}_A : t \mapsto \sum_{k \in A} e^{-2i\pi kt/c}$$

$$\forall k \mathcal{F}(IC_{\mathbb{Z}_c \setminus A})(k) = \mathcal{F}(IC_A)(k)$$



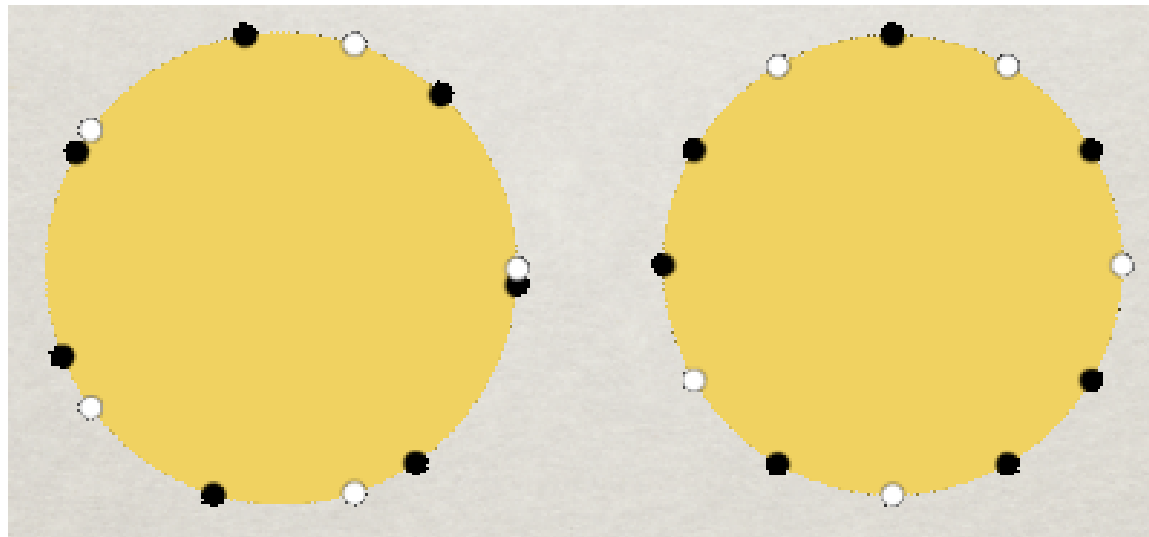
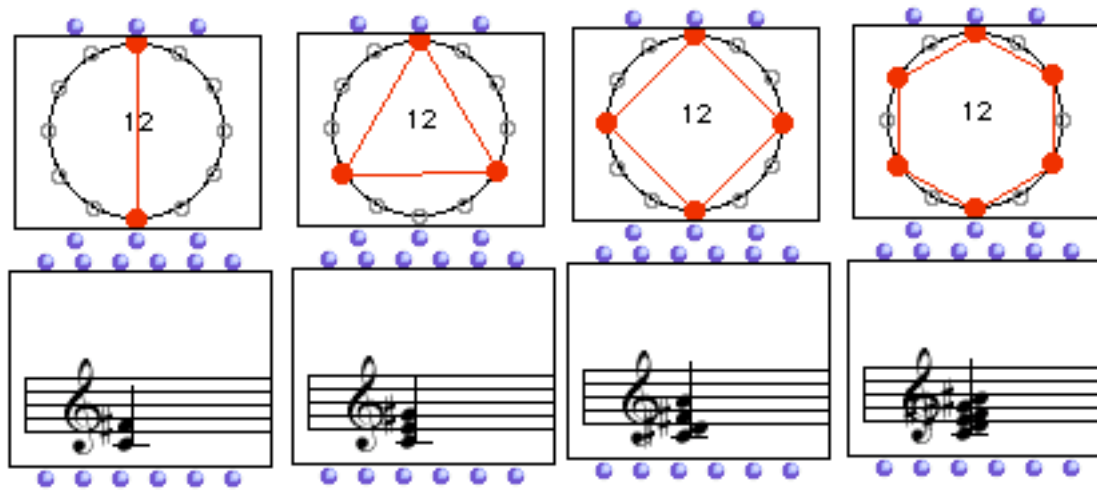
$$A = \{0, 5, 9, 11\}$$

$$IC_A(k) = 1 \quad \forall k = 1 \dots 11$$

(Hexachord Theorem)

Maximally Even Sets

Clough and Douthett



Diatonic scale :
{0, 2, 4, 5, 7, 9, 10}

Pentatonic scale :
{0, 2, 5, 7, 10}

Fourier Transform and ME-Sets

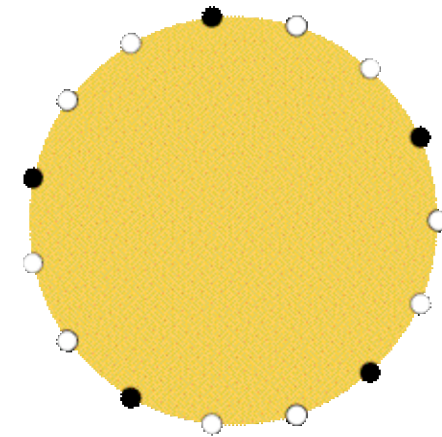
Definition (Clough-Myerson-Douthett) A set A with cardinality d in a given equal tempered space \mathbf{Z}_c is *maximally even* if $A = \{a_k\}$

$$a_k = J_{c,d}^\alpha(k) = \left\lfloor \frac{kc + \alpha}{d} \right\rfloor$$

where $\alpha \in \mathbf{R}$

$\lfloor x \rfloor$ is the integer part of x

Definition (Amiot, 2005) A set A with cardinality d in a given equal tempered space \mathbf{Z}_c is *maximally even* if $|F_A(d)| \geq |F_B(d)|$ for all subsets B of cardinality d in \mathbf{Z}_c .



$$F_A(5) = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$$

In general, $|F_A(t)| \leq \#A$

$$\mathcal{F}_A : t \mapsto \sum_{k \in A} e^{-2i\pi kt/c}$$

Klumpenhouver Networks (K-réseaux)

Ex. 1 - « Ladislaus Teleki » (*Historische ungarische Bildnisse* n° 4), mes. 1-7
Les agrégats dans la classification de Forte

Xavier Hascher:
« Liszt et les
sources de la
notion d'agrégat »,
Analyse Musicale,
43, 2002

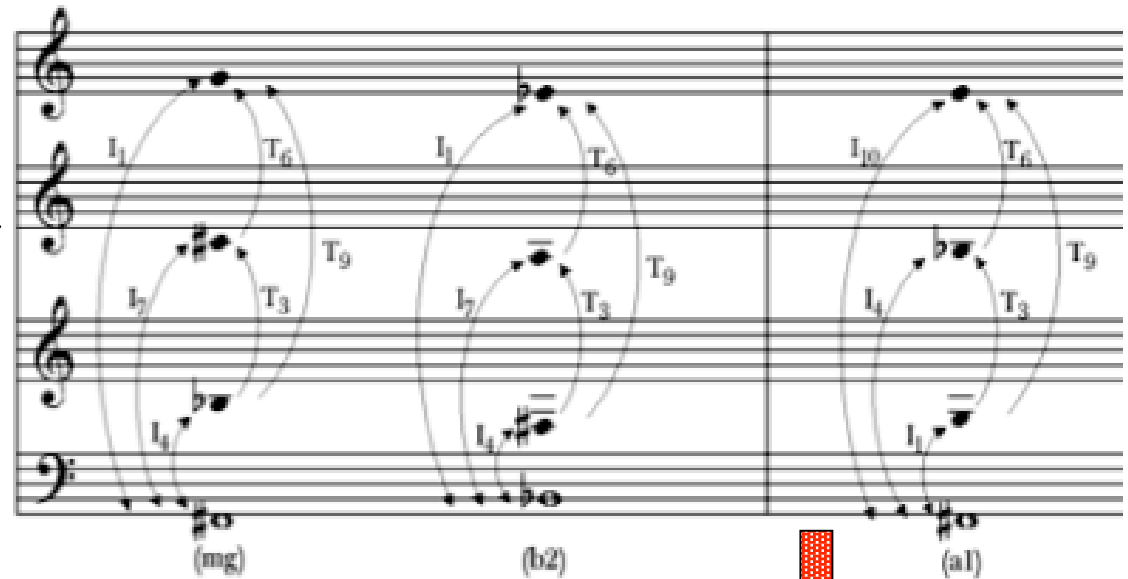
Ex. 2 - Formes premières des agrégats utilisés dans l'ex. 1

Klumpenhouver Networks (K-réseaux)

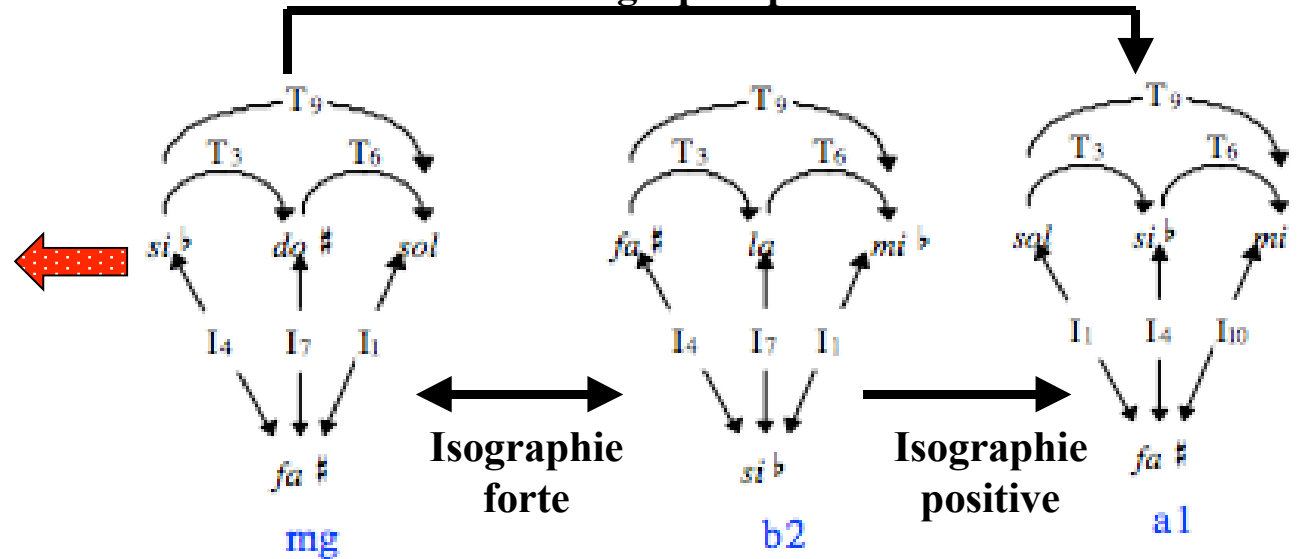
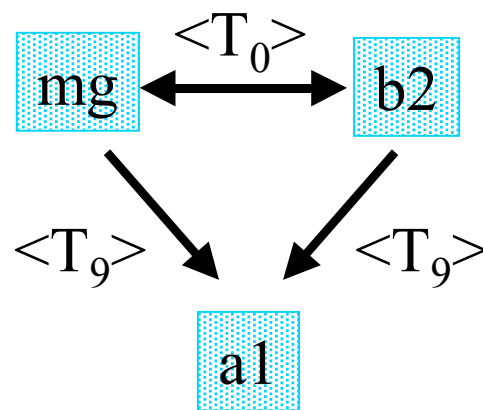
Xavier Hascher: « Liszt et les sources de la notion d'agrégat », *Analyse Musicale*, 43, 2002



Ex. 1 - « Ladislaus Teleki » (*Historische ungarische Bildnisse* n° 4), mes. 1-7
Les agrégats dans la classification de Forte



Isographie positive



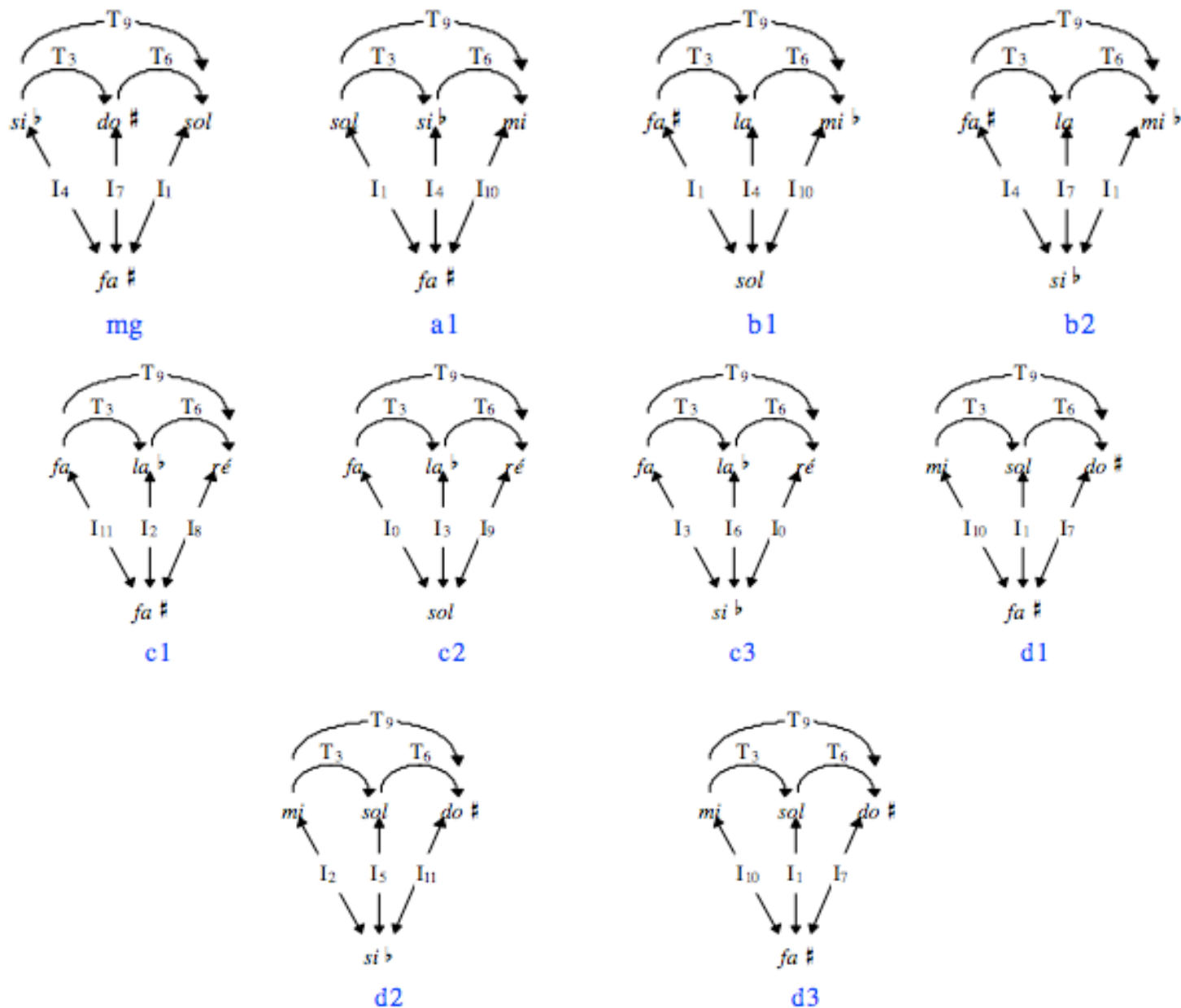
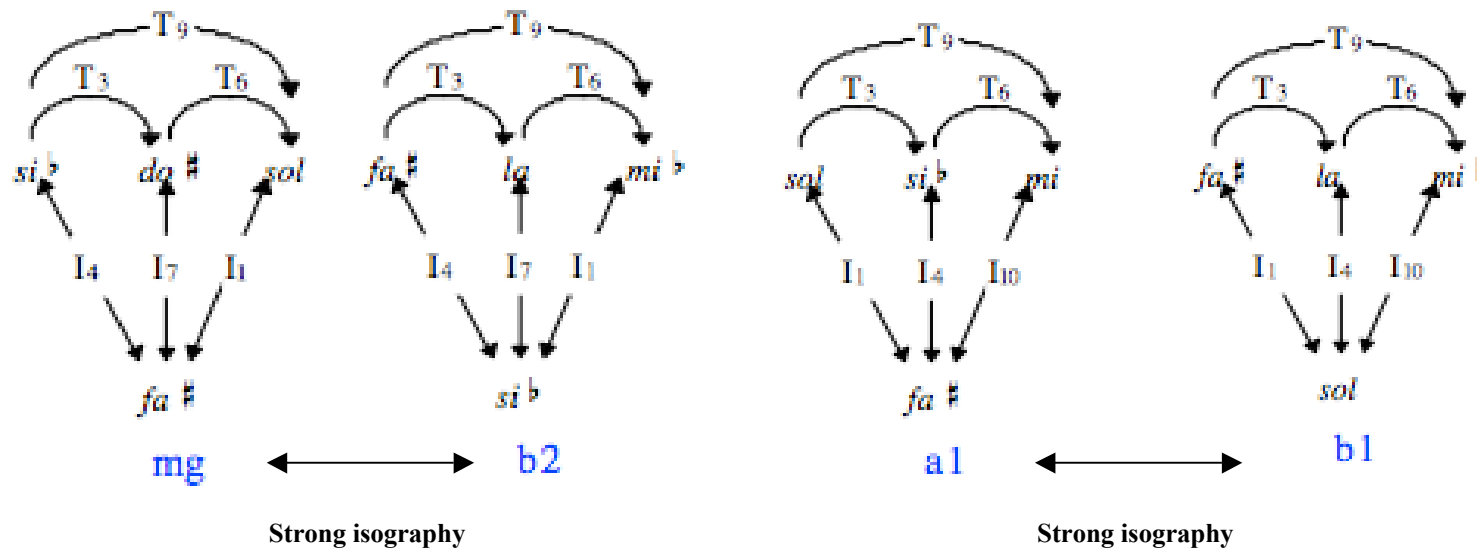


Fig. 1 - Les réseaux interprétant les dix agrégats de quatre sons de l'ex. 1

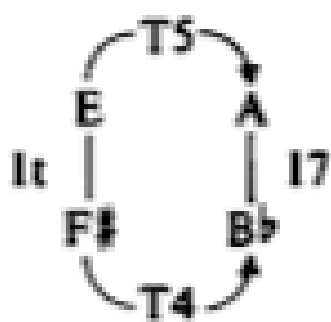


(mg) (b2) (a1) (b1)

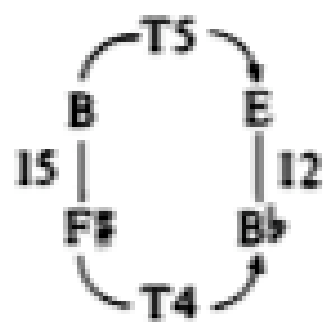
Ex. 3 - Les agrégats engendrant des réseaux en isographie forte

Klumpenhower Networks (K-réseaux)

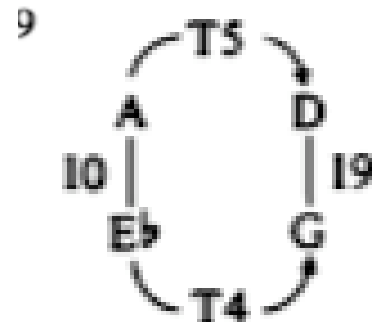
David Lewin: «A Tutorial on K-nets using the Chorale in Schoenberg's Op.11, N°2 », JMT, 1994



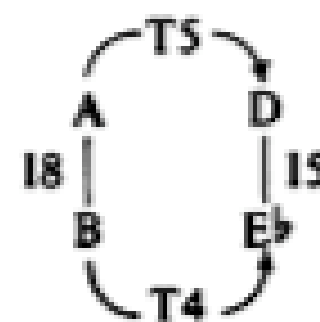
g1



g2



g3



g4



Isographie positive



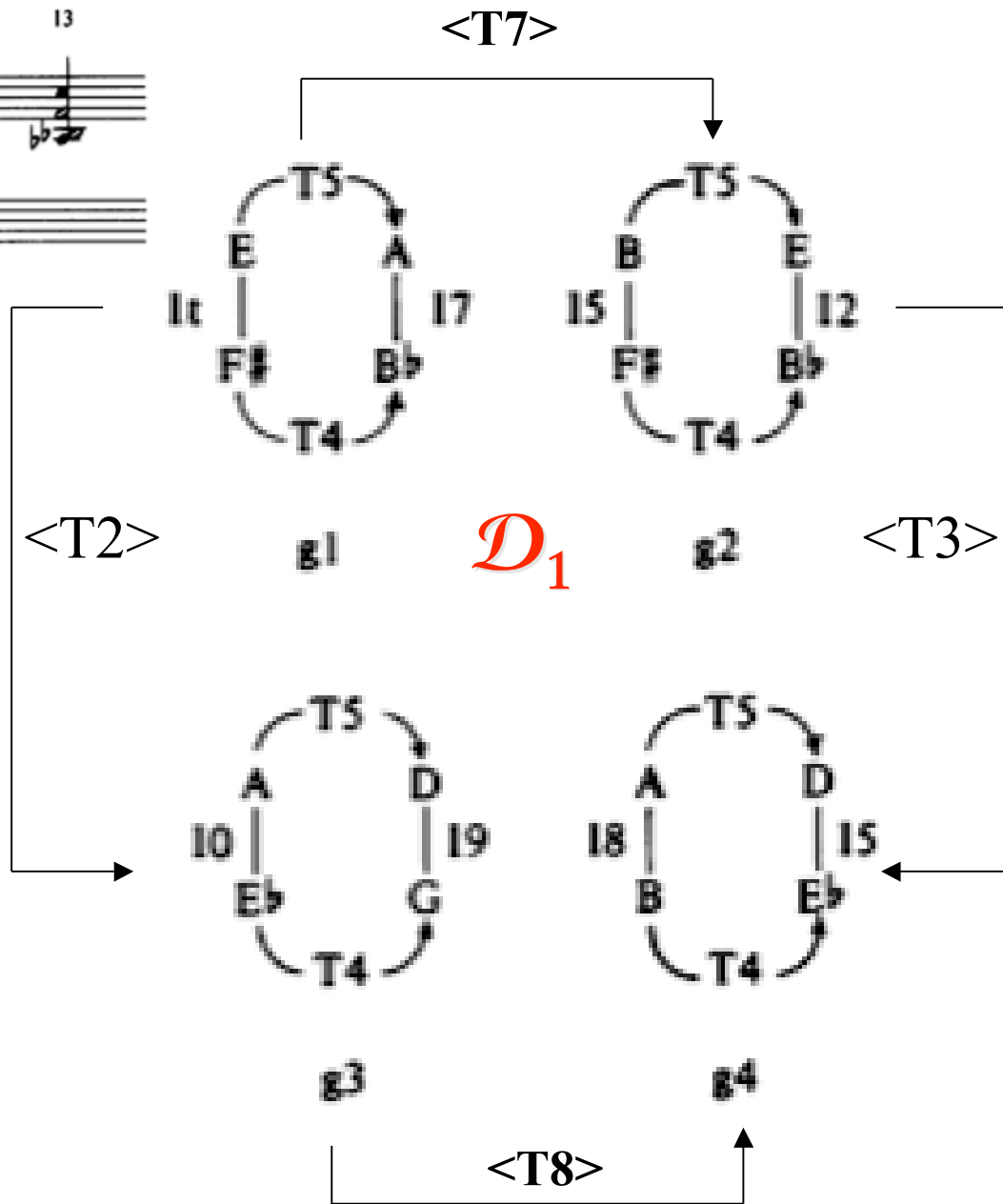
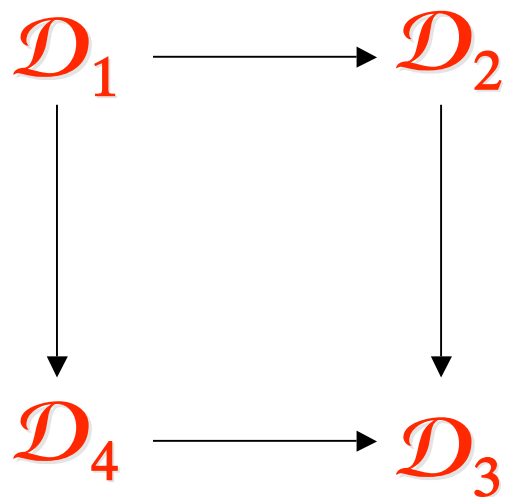
Isographie positive

Klumpenhower Networks (K-réseaux)

David Lewin: «A Tutorial on K-nets using the Chorale in Schoenberg's Op.11, N°2 », JMT, 1994



Example 9

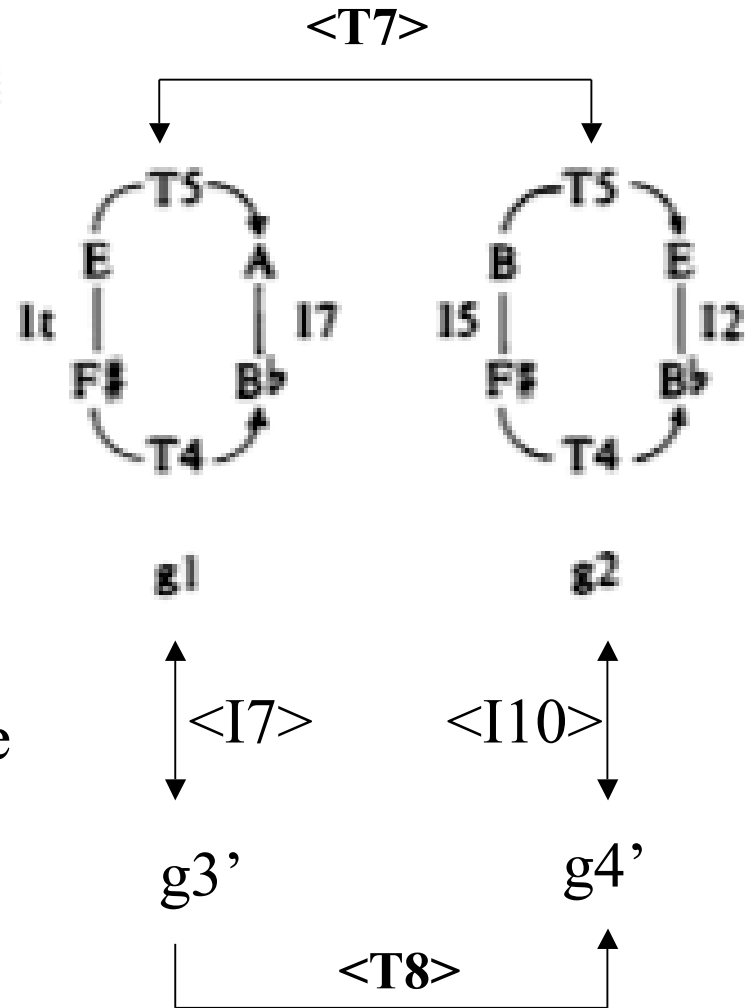
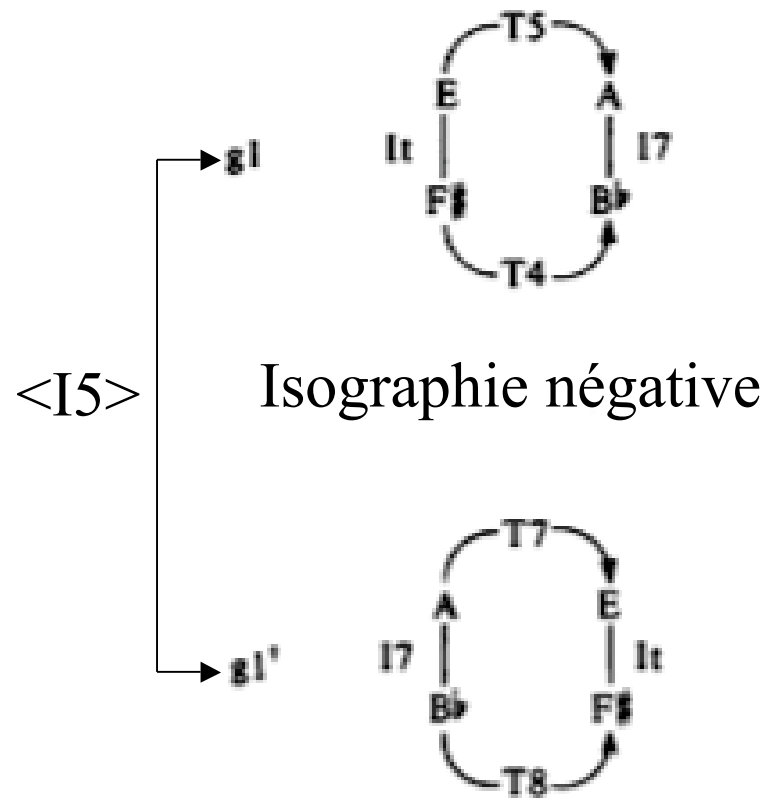


Klumpenhower Networks (K-réseaux)

David Lewin: «A Tutorial on K-nets using the Chorale in Schoenberg's Op.11, N°2 », JMT, 1994



Example 9

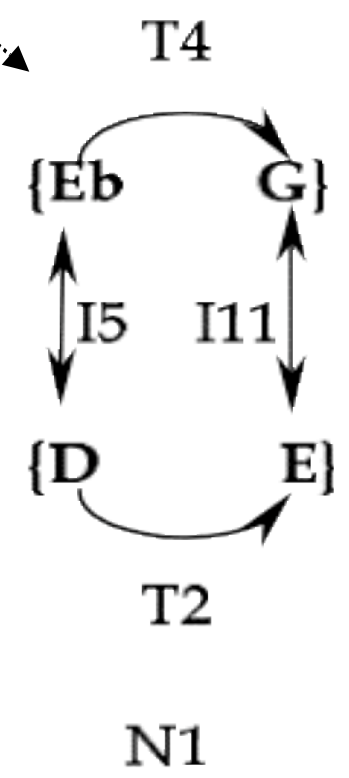
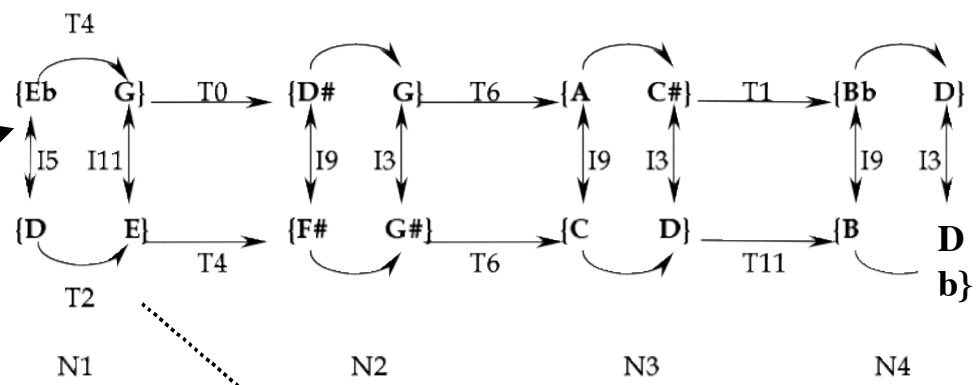


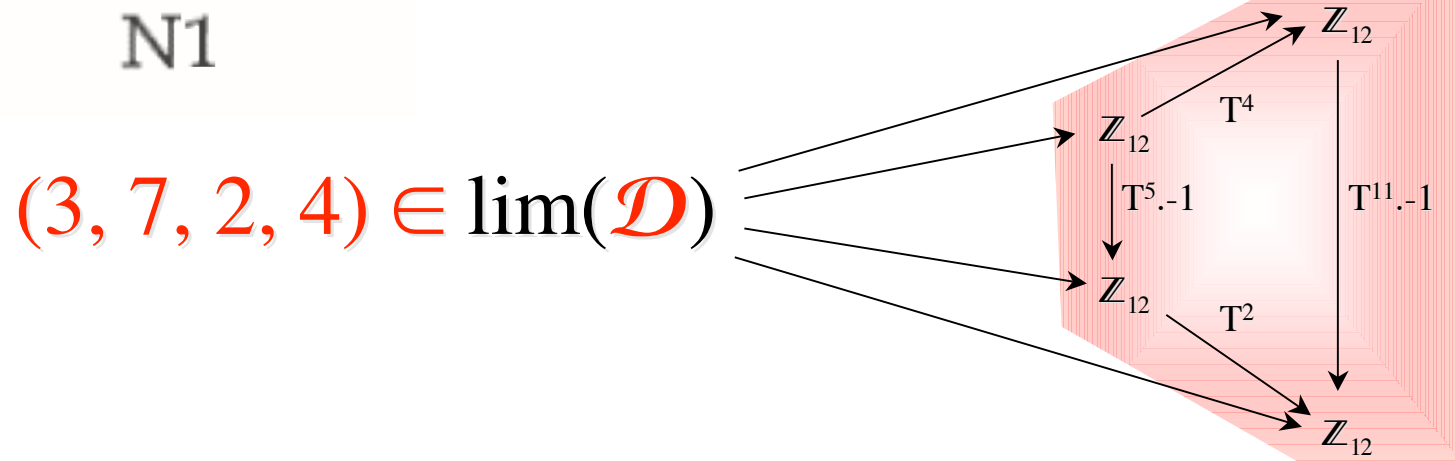
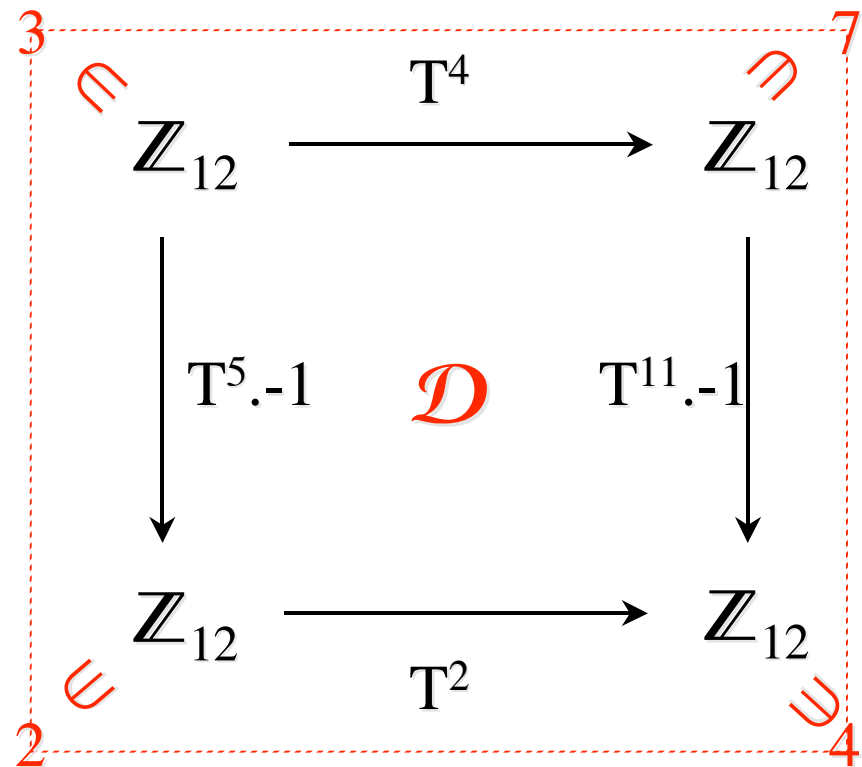
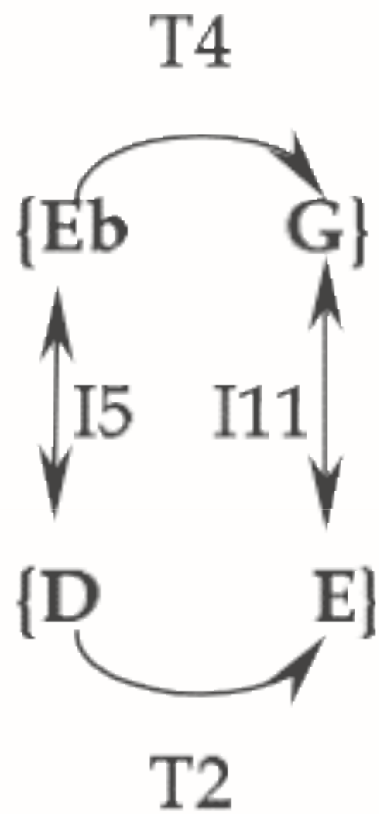
Henry Klumpenhouwer: *Deep Structure in K-net Analysis with Special Reference to Webern (Opus 16, n°4)*

J₁ [0125] J₂ [0125] J₃ [0125]
 Sehr lebhaft (♩ = ca 112)
 1 2 rit.
Gesang
 As - par - ges me, No -
Baß-Klarinette
fp

J₄ [0134] J₅ [0145] J₆ [0347] J₇ [0134]
 langsamer (♩ = ca 84)
 3 4 *sehr zart* tempo I. (♩ = ca 112)
 mi - ne, hys - so - po, et mun -
sehr zart *pp* *pp* *p*
Bkl.

J₈ [0125]
 5 6 *fp* *p*
 da - bor: la - va - bis me, et
Bkl. *fp* *p*





$$\mathcal{Z}_i = \mathbb{Z}_{12}$$

$$f_{ij}^t \in \mathcal{Z}_i @ \mathcal{Z}_j$$

$\text{lim}(\mathcal{D})$ = family of
strongly-isographic networks

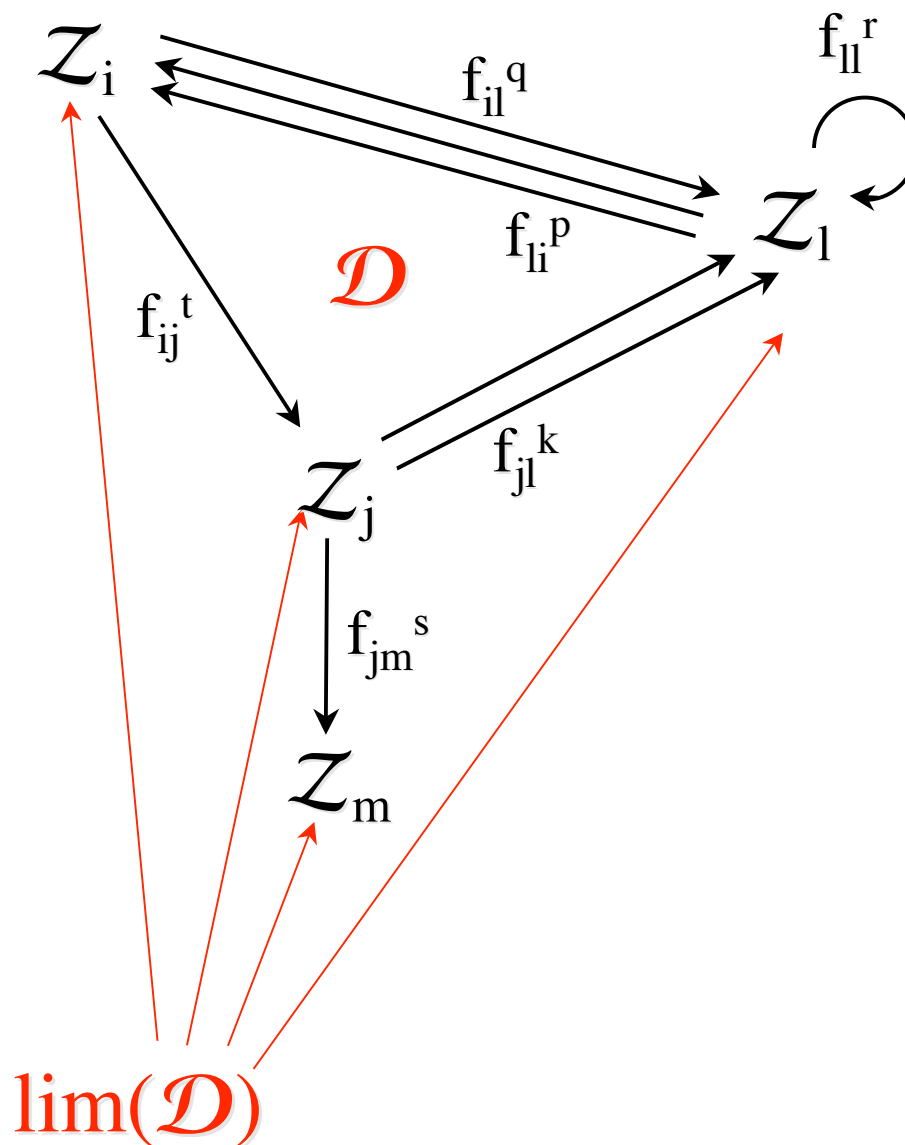
Z

Fact:

$$\text{lim}(\mathcal{D}) \approx U$$

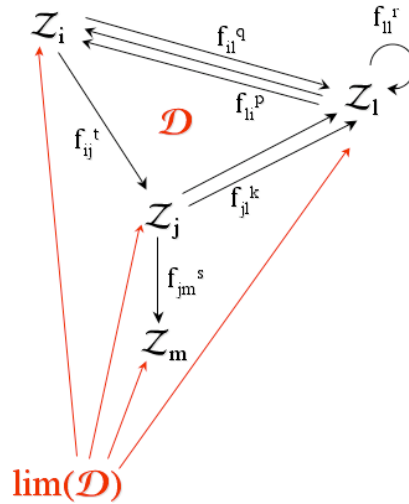
$U =$ (empty or)
subgroup of $(\mathbb{Z}_{12})^n$

If $f_{**}^* =$ isomorphisms
card (U) (= 0 or)
divides 12

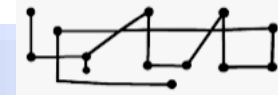


$$\mathcal{Z}_i = \mathbb{Z}_{12}$$

$$f_{ij}^t \in \mathcal{Z}_i @ \mathcal{Z}_j$$

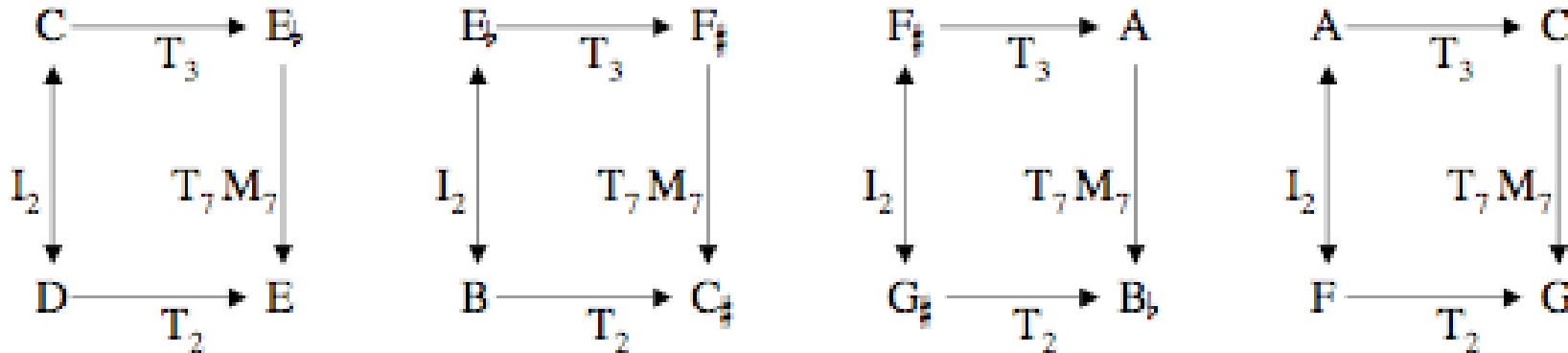


Fact:
 $\lim(\mathcal{D}) \approx U$



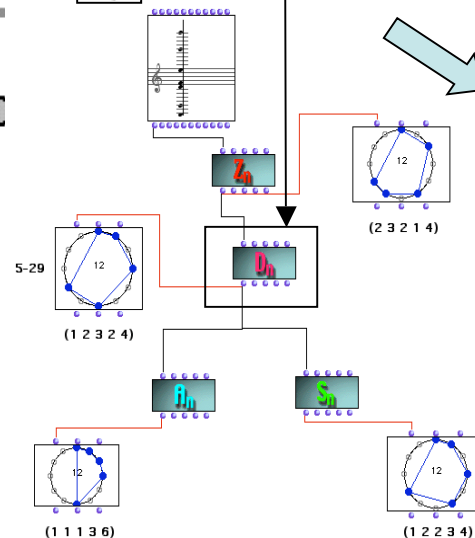
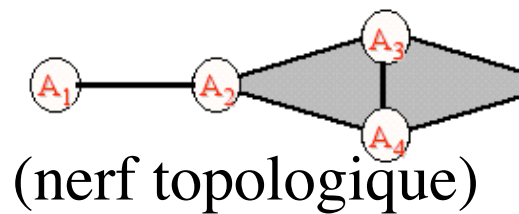
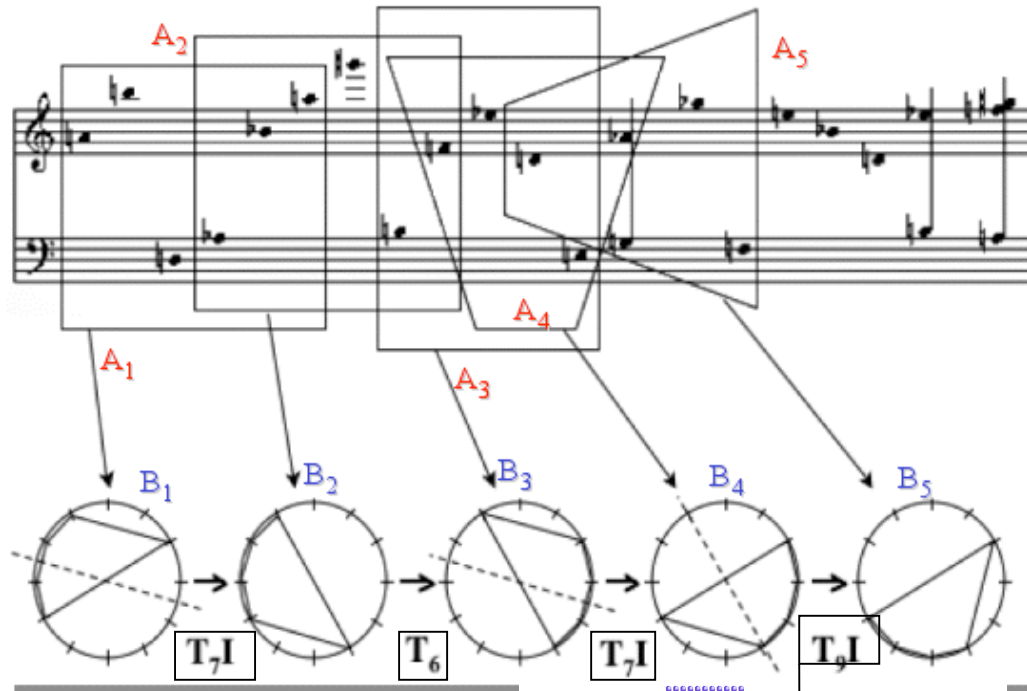
$U =$ (empty or)
 subgroup of $(\mathbb{Z}_{12})^n$

If $f_{**}^* =$ isomorphisms
 $\text{card}(U)$ (= 0 or)
 divides 12



EXAMPLE 6: THE FOUR SOLUTIONS (STRONGLY ISOGRAPHIC K-NETS) OF THIS DIAGRAM ILLUSTRATE THAT THE CARDINALITY OF THE SOLUTION SET IS A DIVISOR OF 12. HERE, THE OPERATOR M_7 DENOTES THE MULTIPLICATION BY 7

Retombées de l'analyse transformationnelle



Mathématiques

- Transformations et typologies d'accords

Épistémologie

- Segmentation
- Équivalence
- Transformations

Philosophie

- Dualité objet/opération
- Dualité local/global
- Les universaux

Les canons rythmiques chez Messiaen

The image displays two musical scores. The top score is for 'Harawi (1945)', featuring three staves (treble, alto, and bass clefs) with a tempo marking of quarter note = 40. The bottom score is for 'Visions de l'Amen (1943)', consisting of three staves in 2/4 time, showing a rhythmic canon with overlapping patterns.

Harawi (1945)



A rhythmic diagram consisting of two staves. The top staff has seven blue dots, and the bottom staff has seven black dots, illustrating a rhythmic relationship between the two pieces.

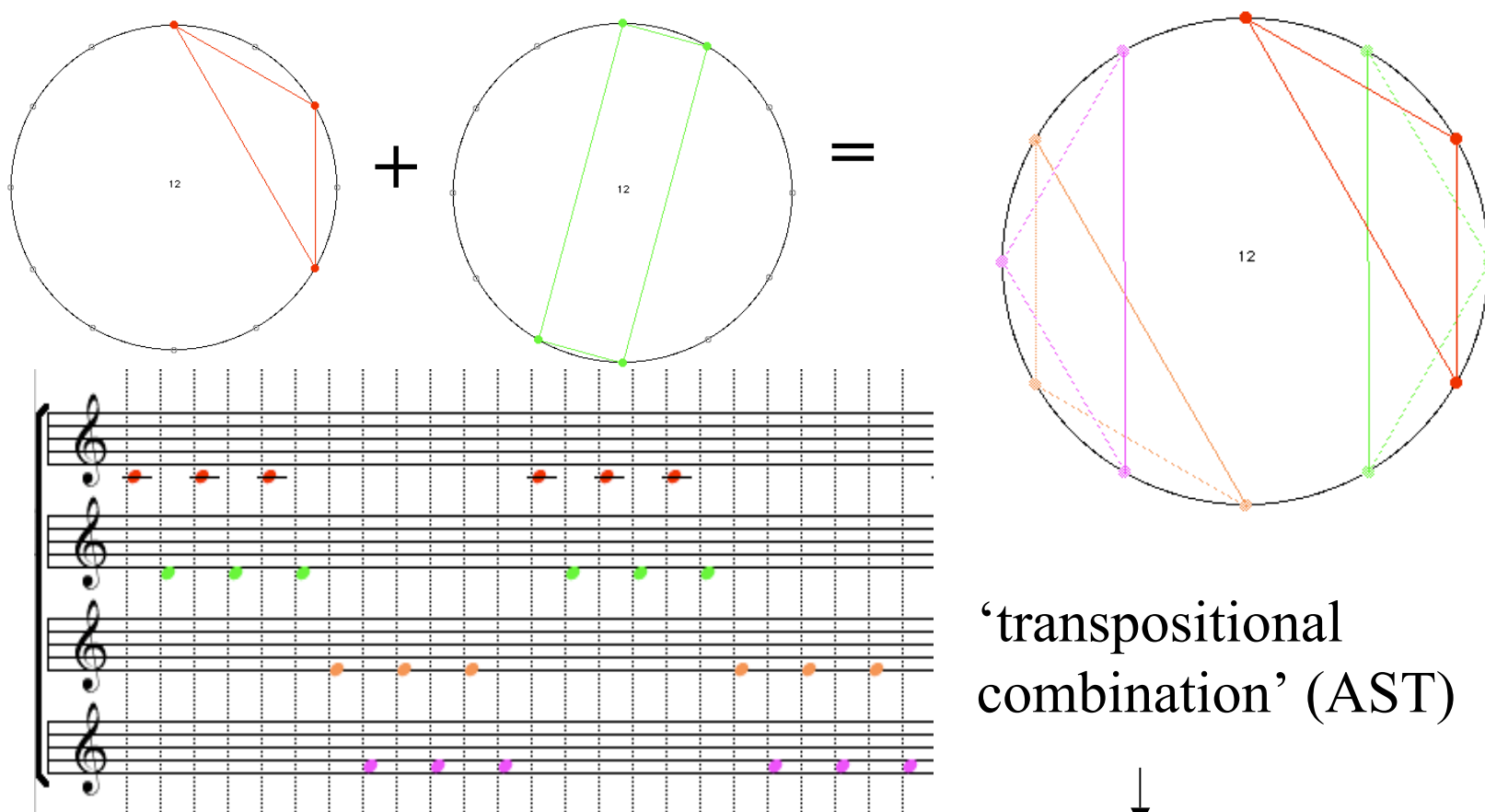


*Visions de
l'Amen* (1943)

« ...il résulte de tout cela que les différentes sonorités se mélangent ou s'opposent de manières très diverses, **jamais au même moment ni au même endroit [...]. C'est du désordre organisé** ».

O. Messiaen : *Traité de Rythme, de Couleur et d'Ornithologie*,
tome 2, Alphonse Leduc, Editions Musicales, Paris, 1992.

Factorisation et canons rythmiques mosaïques

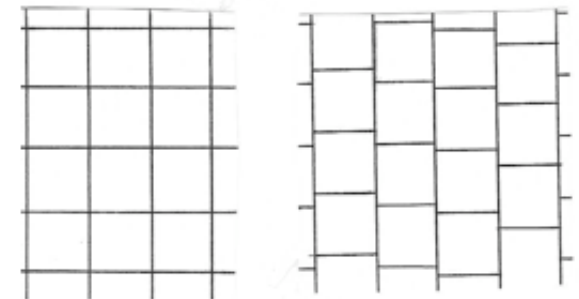
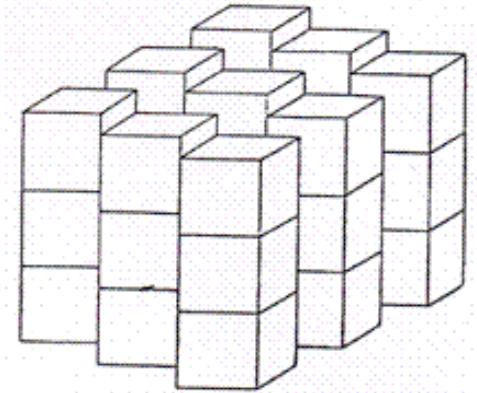


$$\{0,2,4\} \oplus \{0,1,6,7\} = \mathbf{Z}_{12} = (2 \ 2 \ 8) \bullet (1 \ 5 \ 1 \ 5)$$

Un des facteurs est un mode à transposition limitée

Conjectures mathématiques et pavages rythmiques

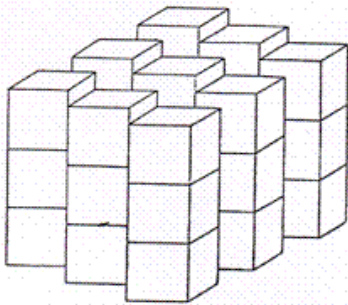
- La conjecture de Minkowski (version géométrique, 1907)
- La solution algébrique de Hajos (1942)
- Le modèle algébrique de Vieru/Vuza (1991-)
- Le lien Vuza/Hajos (Andreatta, 1997)
- Le modèle informatique en *OpenMusic* et premières généralisations (avec Carlos Agon et Thomas Noll, 1999-)
- Applications compositionnelles (F. Lévy, G. Bloch, T. Johnson)
- L'énumération des solutions (Fripertinger, Amiot, Noll, Tangian, Jedrzejewski...)
- Les canons cyclotomiques (Amiot) et le lien avec la Conjecture de Fuglede
- Le(s) modèle(s) informatique(s) en *OpenMusic* (Andreatta, Agon, Zuber)



Conjecture de Minkowski (1896/1907)

Dans un pavage simple [simple lattice tiling] d'un espace à n dimensions par des cubes unités, il y a au moins un couple de cubes qui ont en commun une face entière de dimension $n-1$.

Conjecture de Minkowski et théorème de Hajós



Conjecture de Minkowski (1896/1907)

Dans un pavage simple [simple lattice tiling] d'un espace à n dimensions par des cubes unités, il y a au moins un couple de cubes qui ont en commun une face entière de dimension $n-1$.

Théorème de Hajós (1942)

Soit G un groupe abélien fini et soient a_1, a_2, \dots, a_n n éléments de G . Si l'on suppose que le groupe admet comme factorisation la somme directe des sous-ensembles $A_1 \dots A_n$

$$A_1 = \{1, a_1, \dots, a_1^{m_1-1}\}, A_2 = \{1, a_2, \dots, a_2^{m_2-1}\}, \dots, A_n = \{1, a_n, \dots, a_n^{m_n-1}\}$$

avec $m_i > 0$ pour tout $i=1, 2, \dots, n$, alors un des A_i est un groupe

Théorème de Redei (1965)

Soit G un groupe abélien fini et soient A_1, A_2, \dots, A_n n sous-ensembles de G , chacun contenant l'élément neutre du groupe et chacun ayant un nombre premier d'éléments et supposons que le groupe admette comme factorisation la somme directe des sous-ensembles $A_i, i=1, \dots, n$.

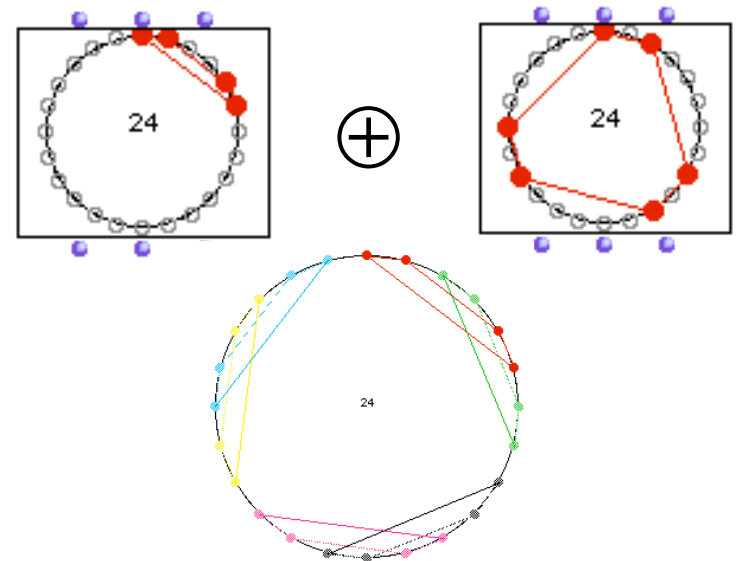
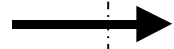
Alors, un des sous-ensembles A_i est **périodique**

Cf. S. Stein, S. Szabó : *Algebra and Tiling. Homomorphisms in the service of Geometry*, Carus Math. Monographs, 1994.

Groupes de Hajós et périodicité locale

Un groupe G est “ groupe de Hajós ” si pour toute factorisation du groupe en somme directe de ses sous-ensembles A_1, A_2, \dots, A_k , au moins un des facteurs est périodique.

Rédei 1947	(p, p)
Hajós 1950	\mathbf{Z}
De Brujin 1953	$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ avec $n=p^\alpha$
Sands 1957	(p^α, q) (p, q, r) (p^2, q^2) (p^2, q, r) (p, q, r, s)

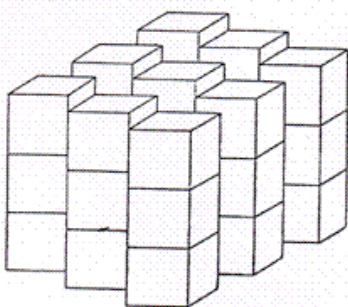


Sands 1959	$(2^2, 2^2)$ $(3^2, 3)$ $(2^n, 2)$
Sands 1962	$(p, 3, 3)$ $(p, 2^2, 2)$ $(p, 2, 2, 2, 2)$ $(p^2, 2, 2, 2)$ $(p^3, 2, 2)$ $(p, q, 2, 2)$
Sands 1964	\mathbf{Q} $\mathbf{Z}+\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ $\mathbf{Q}+\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$

Groupes non-Hajós (bad groups)

72
108 120 144 168 180
200 216 240 252 264 270 280 288
300 312 324 336 360 378 392 396
400 408 432 440 450 456 468 480
500 504 520 528 540 552 560 576 588 594
600 612 616 624 648 672 675 680 684 696
700 702 720 728 744 750 756 760 784 792
800 810 816 828 864 880 882 888...

Conjecture de Minkowski et théorème de Hajos



Conjecture de Minkowski (1896/1907)

Dans un pavage simple [simple lattice tiling] d'un espace à n dimensions par des cubes unités, il y a au moins un couple de cubes qui ont en commun une face entière de dimension $n-1$.

Théorème de Hajós (1942)

Soit G un groupe abélien fini et soient a_1, a_2, \dots, a_n n éléments de G .
Si l'on suppose que le groupe admet comme factorisation la somme directe des sous-ensembles A_1, A_2, \dots, A_n suivants :

$$A_1 = \{1, a_1, \dots, a_1^{m_1-1}\}, A_2 = \{1, a_2, \dots, a_2^{m_2-1}\}, \dots, A_n = \{1, a_n, \dots, a_n^{m_n-1}\}$$

avec $m_i > 0$ pour tout $i=1, 2, \dots, n$, alors un des facteurs A_i est un groupe

Théorème de Redei (1965)

Soit G un groupe abélien fini et soient A_1, A_2, \dots, A_n n sous-ensembles de G , chacun contenant l'élément neutre du groupe et chacun ayant un nombre premier d'éléments et supposons que le groupe admette comme factorisation la somme directe des sous-ensembles $A_i, i=1, \dots, n$. Alors, un des sous-ensembles A_i est périodique

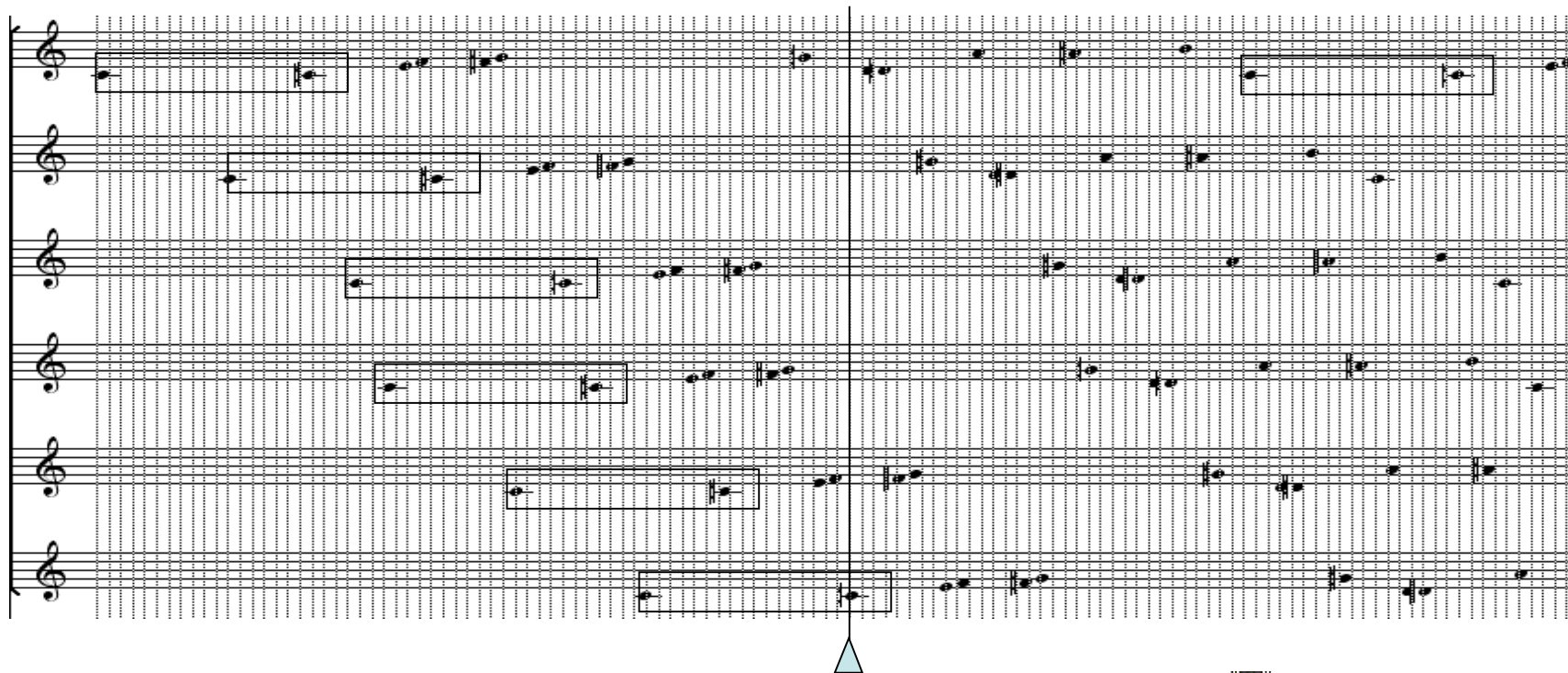
Groupes de Hajós et canons de pavage

Un groupe G est “ groupe de Hajós ” si pour toute factorisation du groupe en somme directe de ses sous-ensembles A_1, A_2, \dots, A_k , au moins un des facteurs est périodique.

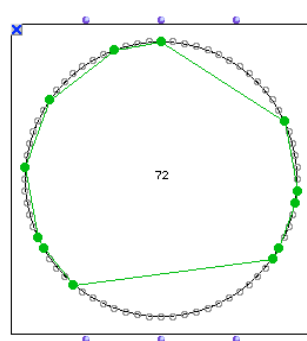
Rédei 1947	(p, p)		
Hajós 1950	\mathbf{Z}		
De Brujin 1953	$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ avec $n = p^\alpha$	\longleftrightarrow $n \notin$	<div style="border: 1px dashed black; padding: 5px;"> <p>72 108 120 144 168 180 200 216 240 252 264 270 280 288 300 312 324 336 360 378 392 396 400 408 432 440 450 456 468 480 500 504 520 528 540 552 560 576 588 594 600 612 616 624 648 672 675 680 684 696 700 702 720 728 744 750 756 760 784 792 800 810 816 828 864 880 882 888 900 912 918 920 936 945 952 960 968 972 980 984 1000 ...</p> </div>
Sands 1957	(p^α, q) (p, q, r) (p^2, q^2) (p^2, q, r) (p, q, r, s)		
Sands 1959	$(2^2, 2^2)$ $(3^2, 3)$ $(2^n, 2)$		
Sands 1962	$(p, 3, 3)$ $(p, 2^2, 2)$ $(p, 2, 2, 2, 2)$ $(p^2, 2, 2, 2)$ $(p^3, 2, 2)$ $(p, q, 2, 2)$		
Sands 1964	\mathbf{Q} $\mathbf{Z} + \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ $\mathbf{Q} + \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$		

Structures remarquables en musique

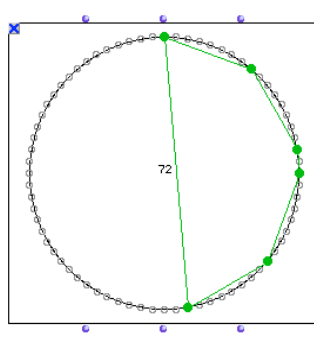
‘Bad groups’ et canons de Vuza



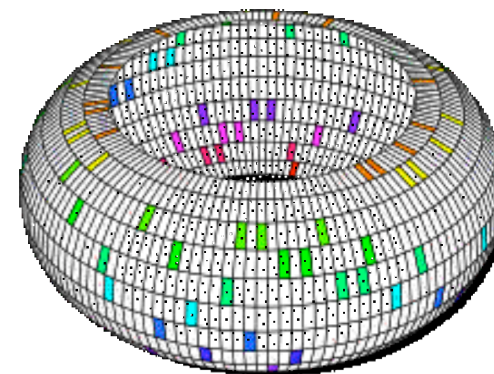
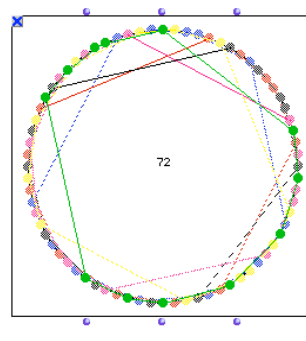
A musical score consisting of six staves, each with a treble clef. The score is divided into two main sections by a vertical line. In the first section, various phrases of notes are enclosed in rectangular boxes. In the second section, the notes continue, with some phrases also boxed. A small blue triangle is positioned below the vertical line.



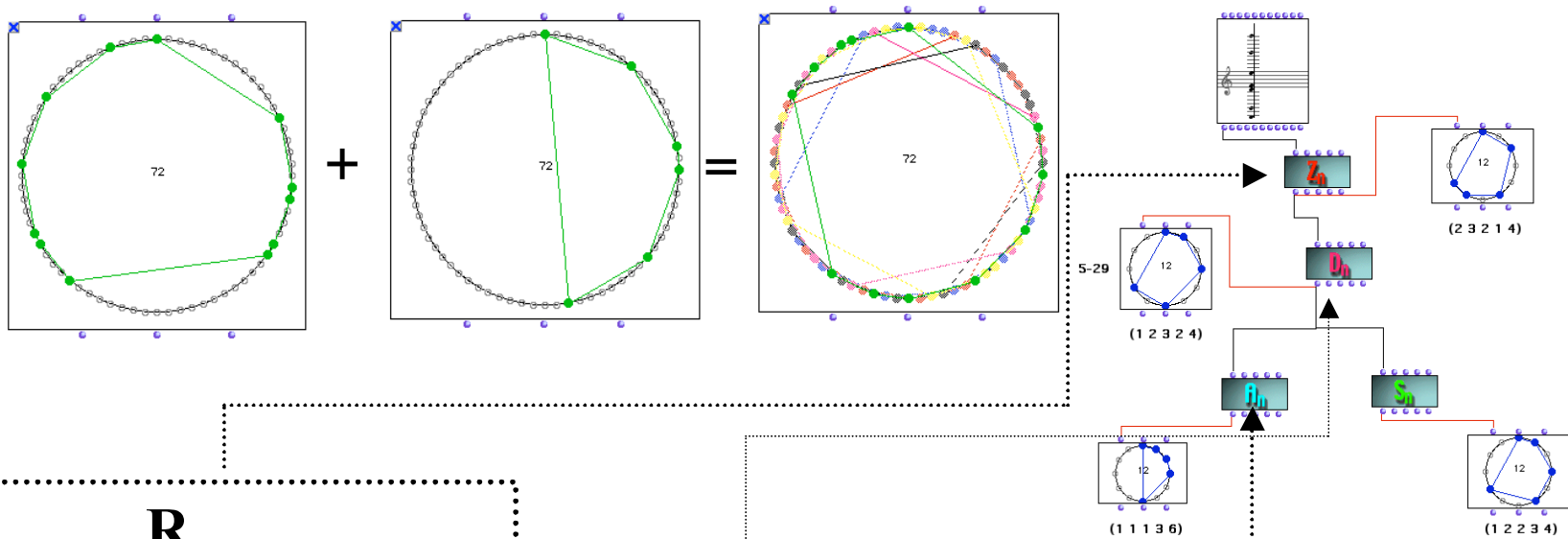
+



=



La classification paradigmatique des canons de Vuza



R	R	R
(1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20) (20 3 1 5 6 9 4 11 6 3 3 1) (1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6) (6 13 4 7 6 6 1 4 19 1 4 1) (1 5 15 4 5 6 6 3 4 17 3 3) (3 3 17 4 3 6 6 5 4 15 5 1)	(1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20) (1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6) (1 5 15 4 5 6 6 3 4 17 3 3)	(1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)
(8 8 2 8 8 38) (16 2 14 2 16 22) (14 8 10 8 14 18)	(8 8 2 8 8 38) (16 2 14 2 16 22) (14 8 10 8 14 18)	(14 8 10 8 14 18)
S	S	S

Georges Bloch (2001-2004)

Stratégies compositionnelles nouvelles à partir du modèle formel

- Organisation métrique d'un canon mosaïque
- Réduction d'un canon en canons auto-similaires
- Modulation métrique entre canons
- *Transformation* d'un canon rythmique en « texture »

- *Projet Beyeler* (2001)
- *Projet Hitchcock*
- *Visite des tours de la cathédrale de Reims*
- *Noël des Chasseurs*
- *Canons à marcher*
- *Canon à eau*
- *Harawun* (2004)
- *L'homme du champ* (2005)

harawun $\text{♩} = 50$

GB

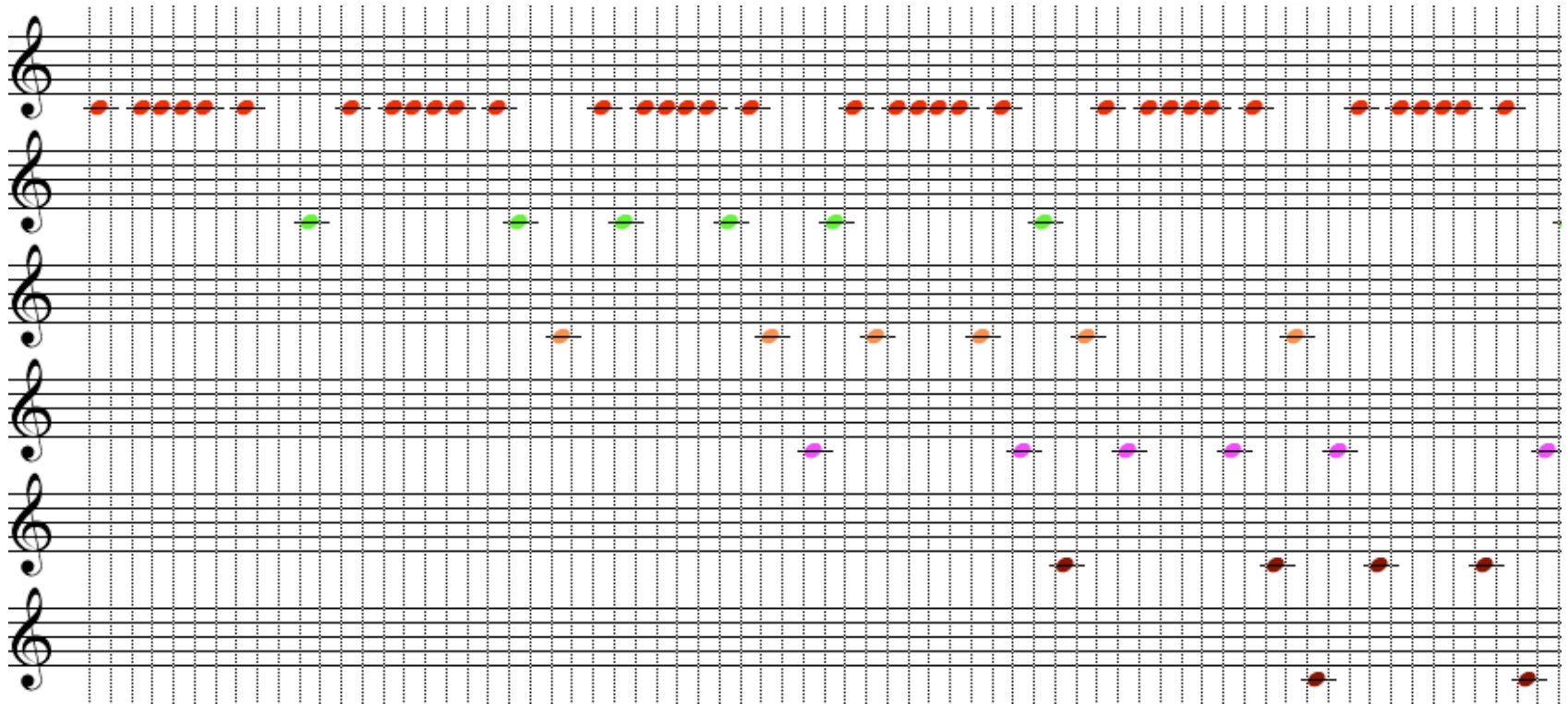
Piano 1 *mf*

Piano 2 *p* *f* *mf*

Cymbale *pp*

Harawun: L'entrée d'un canon de Vuza modélisé sur *Harawi*

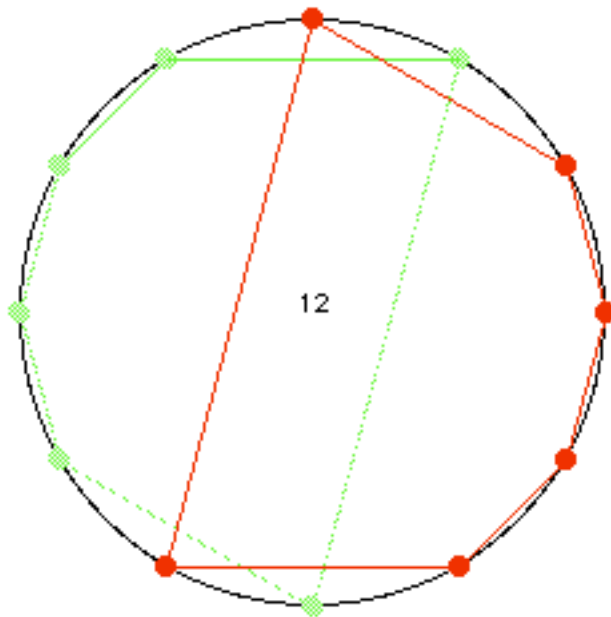
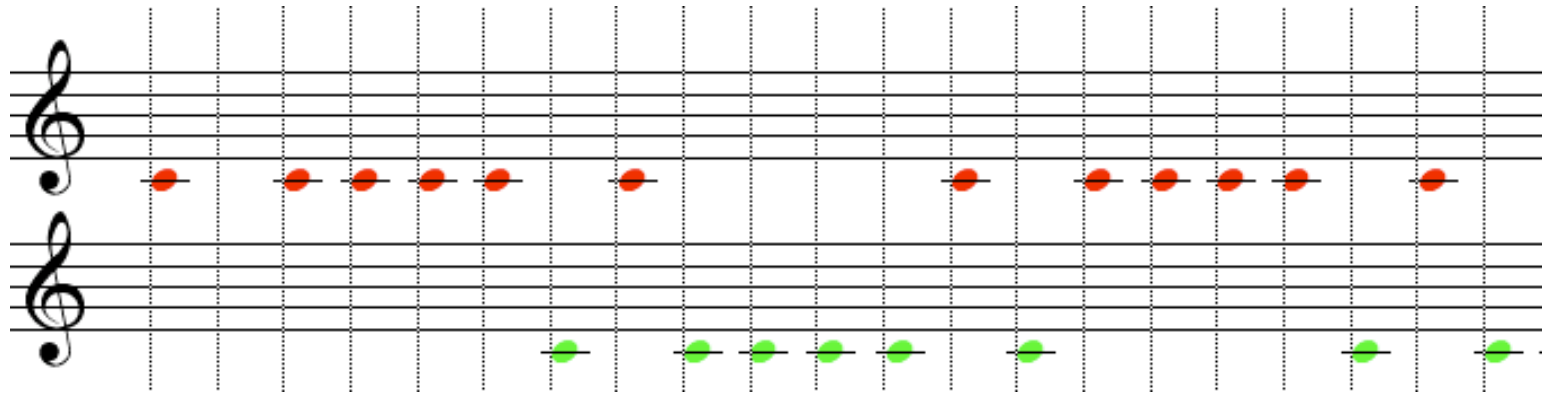
Premières généralisations : les canons augmentés



- T. Noll, M. Andreatta, C. Agon, G. Assayag: « The Geometrical Groove: rhythmic canons between Theory, Implementation and Musical Experiment », *JIM*, Bourges, 2001, pp.93-98.

<http://www-classes.usc.edu/engr/ise/599muscog/2004/assignments.html>

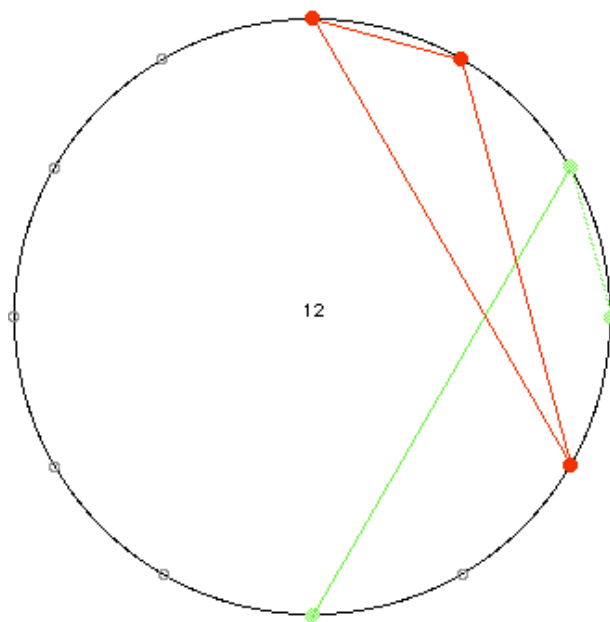
Généralisations : les canons augmentés



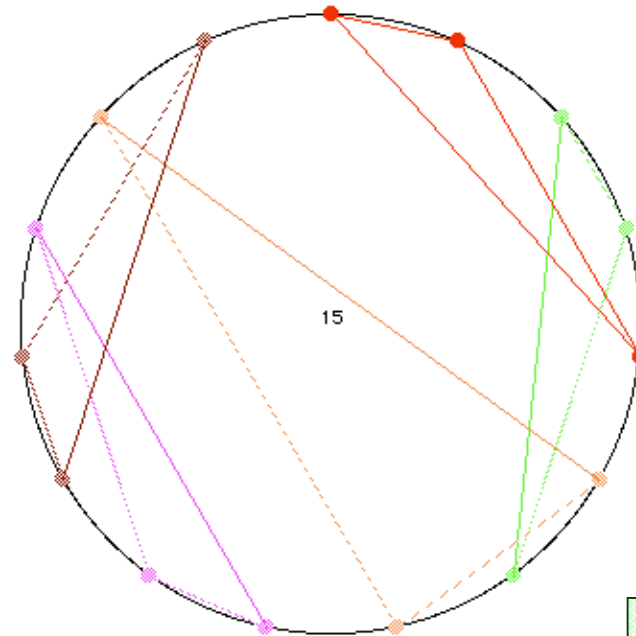
$(((\emptyset 1 2 3 4 6) ((1 11))))$
 $((\emptyset 1 2 3 4 5) ((1 11) (1 1))))$
 $((\emptyset 1 2 3 5 7) ((1 11) (1 7)))$
 $((\emptyset 1 3 4 7 8) ((1 5)))$
 $((\emptyset 1 2 3 6 7) ((1 11)))$
 $((\emptyset 1 3 4 6 9) ((1 11) (1 5)))$
 $((\emptyset 1 3 6 7 9) ((1 11) (1 5)))$
 $((\emptyset 1 2 6 7 8) ((1 11) (1 7) (1 5) (1 1)))$
 $((\emptyset 1 4 5 8 9) ((1 11) (1 7) (1 5) (1 1)))$
 $((\emptyset 1 2 5 6 7) ((1 7) (1 5)))$
 $((\emptyset 2 3 4 5 7) ((1 11) (1 7) (1 5) (1 1)))$
 $((\emptyset 1 4 5 6 8) ((1 11) (1 7)))$
 $((\emptyset 1 2 4 5 7) ((1 5)))$
 $((\emptyset 1 3 4 5 8) ((1 5) (1 1)))$
 $((\emptyset 1 2 4 5 8) ((1 11)))$
 $((\emptyset 1 2 4 6 8) ((1 11) (1 7)))$
 $((\emptyset 2 3 4 6 8) ((1 11)))$
 $((\emptyset 2 4 6 8 10) ((1 11) (1 7) (1 5) (1 1)))$

Évolutions récentes: le pavage de la ligne

- Tom Johnson (2001): pavage de la ligne avec un pattern rythmique donné
 - ex. (0 1 4). Est-qu'il pave? Avec des augmentations? Avec quelle période ?
- Andranik Tangian (2001): Représentation polynomial
 - $J(X) = 1 + X + X^4$ (**JOHNSON's polynomial**).
- Emmanuel Amiot (2002): A solution to Johnson-Tangian conjecture
 - **Théorème** : *Tout pavage de la ligne avec le pattern (0 1 4) et ses augmentations est périodique et la période est un multiple de 15.*



$n = 12$



$n = 15$

Racines de l'unité et polynômes cyclotomiques

Racines n -ièmes de l'unité : $z^n = 1$

$$n=3 \longrightarrow \left\{ 1, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right\}$$

$$n=4 \longrightarrow \{1, +i, -1, -i\}$$

Les racines n -ièmes de l'unité peuvent s'écrire sous la forme :

$$e^{\frac{2k\pi i}{n}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \quad (k, n \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq k < n)$$

Elles sont exactement les racines du polynôme : $P(X) = X^n - 1$

Les racines n -ièmes primitives de l'unité : $e^{\frac{2ki\pi}{n}} \quad (n,k)=1$

Elles sont exactement les racines du polynôme cyclotomique :

$$\Phi_n(X) = \prod_{k=1}^{\varphi(n)} (X - z_k) \quad \longleftrightarrow \quad X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X).$$

Pavage de la ligne et polynômes cyclotomiques

$$\Phi_n(X) = \prod_{k=1}^{\varphi(n)} (X - z_k) \longleftrightarrow X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X).$$

$\Phi_1(X) = X - 1$	\longleftrightarrow	$(-1, 1)$
$\Phi_2(X) = 1 + X$	\longleftrightarrow	$(1, 1)$
$\Phi_3(X) = 1 + X + X^2$	\longleftrightarrow	$(1, 1, 1)$
$\Phi_4(X) = 1 + X^2$	\longleftrightarrow	$(1, 0, 1)$
$\Phi_5(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4$	\longleftrightarrow	$(1, 1, 1, 1, 1)$
$\Phi_6(X) = 1 - X + X^2$	\longleftrightarrow	$(1, -1, 1)$

$$\Delta_n = 1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1} = \prod_{\substack{d|n \\ d \neq 1}} \Phi_d(X)$$

$$\Delta_4 = 1 + X + X^2 + X^3 = \Phi_2(X) \times \Phi_4(X)$$

$$A(x) \times B(x) = (A \oplus B)(x) \equiv 1 + x + \dots + x^{n-1} \pmod{X^n - 1}.$$

Bonnes et mauvaises factorisations

$$\Delta_n = 1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1} = \prod_{\substack{d \mid n \\ d \neq 1}} \Phi_d(X)$$

$\Phi_2(X) = 1 + X$	←-----→	(1, 1)
$\Phi_3(X) = 1 + X + X^2$	←-----→	(1, 1, 1)
$\Phi_4(X) = 1 + X^2$	←-----→	(1, 0, 1)
$\Phi_6(X) = 1 - X + X^2$	←-----→	(1, -1, 1)

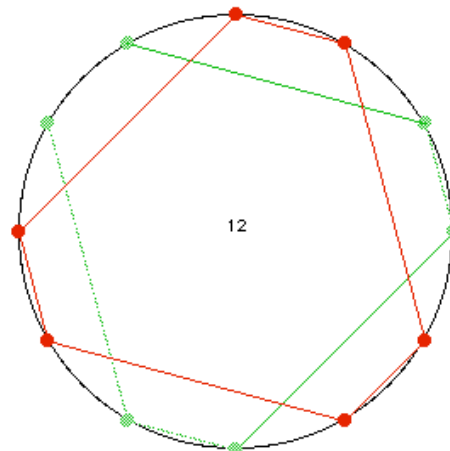
$$\Delta_{12} = 1 + X + \dots + X^{11} = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_4 \times \Phi_6 \times \Phi_{12}$$

$$A(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_6 \times \Phi_{12} = 1 + X + X^4 + X^5 + X^8 + X^9$$

$$B(X) = \Phi_4 = 1 + X^2$$

$$S = \{0, 2\}$$

$$R = \{0, 1, 4, 5, 8, 9\}$$



$$A^*(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_{12}$$

$$B^*(X) = \Phi_4 \times \Phi_6$$

Cette décomposition ne marche pas

Les conditions de Coven-Meyerowitz

- E. Coven & A. Meyerowitz : “Tiling the integers with translates of one finite set”, *J. Algebra*, 212, pp.161-174, 1999

There is no loss of generality in restricting attention to translates of a finite set A of *nonnegative* integers. Then $A(x) = \sum_{a \in A} x^a$ is a polynomial such that $\#A = A(1)$. Let S_A be the set of prime powers s such that the s -th cyclotomic polynomial $\Phi_s(x)$ divides $A(x)$. Consider the following conditions on $A(x)$.

(T1) $A(1) = \prod_{s \in S_A} \Phi_s(1)$.

(T2) If $s_1, \dots, s_m \in S_A$ are powers of distinct primes, then $\Phi_{s_1 \dots s_m}(x)$ divides $A(x)$.

Theorem A. *If $A(x)$ satisfies (T1) and (T2), then A tiles the integers.*

Theorem B1. *If A tiles the integers, then $A(x)$ satisfies (T1).*

Theorem B2. *If A tiles the integers and $\#A$ has at most two prime factors, then $A(x)$ satisfies (T2).*

Corollary. *If $\#A$ has at most two prime factors, then A tiles the integers if and only if $A(x)$ satisfies (T1) and (T2).*

Les conditions de Coven-Meyerowitz

(T1) $A(1) = \prod_{s \in S_A} \Phi_s(1)$.

(T2) If $s_1, \dots, s_m \in S_A$ are powers of distinct primes, then $\Phi_{s_1 \dots s_m}(x)$ divides $A(x)$.

Theorem A. *If $A(x)$ satisfies (T1) and (T2), then A tiles the integers.*

$$A(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_6 \times \Phi_{12} = 1 + X + X^4 + X^5 + X^8 + X^9$$

$$\Phi_2(X) = 1 + X$$

$$\Phi_3(X) = 1 + X + X^2$$

(T1) $A(1) = 6 = \Phi_2(1) \times \Phi_3(1) = 2 \times 3$

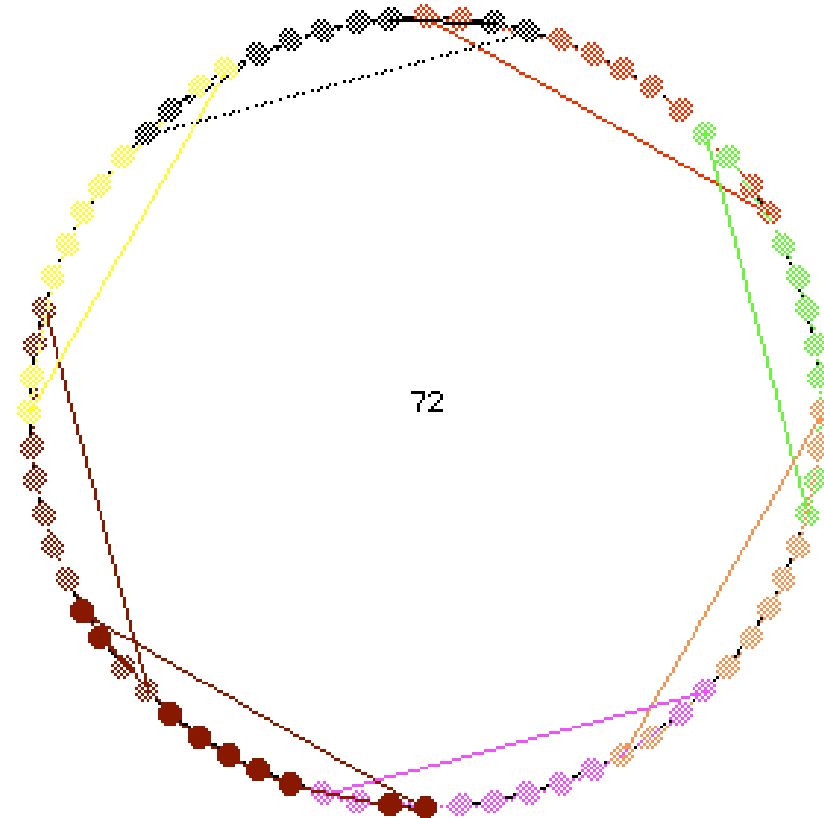
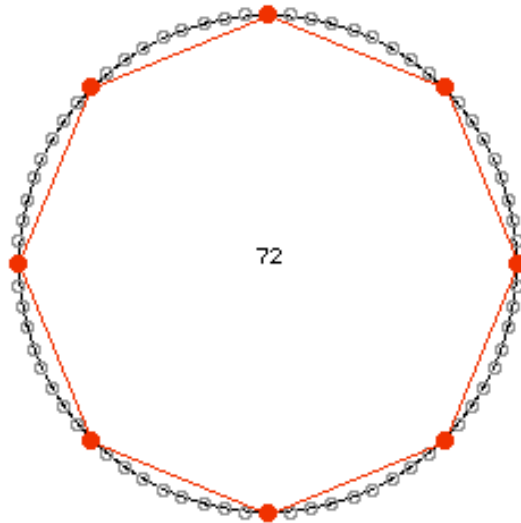
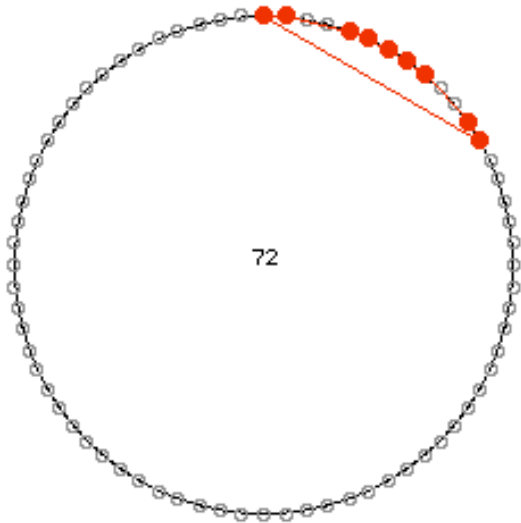
(T2) $\Phi_2 \mid A(X)$ et $\Phi_3 \mid A(X) \Rightarrow \Phi_{2 \times 3} \mid A(X)$

Theorem B1. *If A tiles the integers, then $A(x)$ satisfies (T1).*

$$A^*(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_{12} = 1 + 2X + 2X^2 - X^3 - X^4 + X^5 + 2X^6 + X^7$$

$$A^*(1) = 7 \neq \Phi_2(1) \times \Phi_3(1) = 6$$

La classes des « canons cyclotomiques »



- E. Amiot, M. Andreatta, C. Agon: « Tiling the (musical) line with polynomial: some theoretical and implementational aspects », *ICMC*, Barcelona, 2005, pp.227-230.

Canons rythmiques et conjecture de Fuglede

- E. Coven & A. Meyerowitz : “Tiling the integers with translates of one finite set”, *J. Algebra*, 212, pp.161-174, 1999

T1 + T2 \Rightarrow pave

Pave \Rightarrow T1

- I. Laba : “The spectral set conjecture and multiplicative properties of roots of polynomials”, *J. London Math society*, 65, pp.661-671, 2002

T1 + T2 \Rightarrow spectral

T2 \Rightarrow spectral

spectral \Rightarrow T1

- E. Amiot : “A propos des canons rythmiques”, *Gazette des Mathématiciens*, n°106, Octobre 2005.

Si A pave mais A n'est pas spectral \Rightarrow A est le pattern rythmique d'un canon de Vuza

Conjecture de Fuglede, CV conditions et Vuza canon

WOLFRAM RESEARCH

mathworld.wolfram.com

Fuglede's Conjecture

CONTRIBUTE
TO THIS ENTRY

Portions of this entry contributed by [Emmanuel Amiot](#)

Fuglede (1974) conjectured that a domain Ω admits an [operator spectrum](#) iff it is possible to tile \mathbb{R}^d by a family of [translates](#) of Ω . Fuglede proved the conjecture in the special case that the tiling set or the spectrum are lattice subsets of \mathbb{R}^d and Iosevich *et al.* (1999) proved that no smooth symmetric convex body Ω with at least one point of nonvanishing [Gaussian curvature](#) can admit an orthogonal basis of exponentials.

Using complex [Hadamard matrices](#) of orders 6 and 12, Tao (2003) constructed counterexamples to the conjecture in some small Abelian groups, and lifted these to counterexamples in \mathbb{R}^5 or \mathbb{R}^{11} .

However, the conjecture has been proved in a great number of special cases (e.g., all convex bodies) and remains an open problem in small dimensions. For example, it has been shown in dimension 1 that a nice algebraic characterization of finite sets tiling \mathbb{Z} indeed implies one side of Fuglede's conjecture (Coven-Meyerowitz 1998). Furthermore, it is sufficient to prove these conditions when the tiling gives a factorization of a non-Hajós cyclic group (Amiot).

La dualité son/intervalles

$$Df(x) = f(x) - f(x-1).$$

Séquences périodiques et différences finies

$$\begin{aligned}
 f &= 7 \ 11 \ 10 \ 11 \ 7 \ 2 \ 7 \ 11 \ 10 \ 11 \ 7 \ 2 \ 7 \ 11 \dots \\
 Df &= 4 \ 11 \ 1 \ 8 \ 7 \ 5 \ 4 \ 11 \ 1 \ 8 \ 7 \ 5 \ 4 \ 11 \dots \\
 D^2 f &= 11 \ 7 \ 2 \ 7 \ 11 \ 0 \ 11 \ 7 \ 2 \ 7 \ 11 \ 0 \dots \\
 D^3 f &= 1 \ 8 \ 7 \ 5 \ 4 \ 11 \ 1 \ 8 \ 7 \ 5 \ 4 \ 11 \dots \\
 D^k f &= \dots\dots
 \end{aligned}$$

dolcissimo
mf *mp* *pp* *mp* *p* *mf* *mp* *pp* *pp*

V	0	3	8	7	11	0	11	10	6	9	0	9	1	2	9	8	4	3	6
VIII	0	0	0	0	3	3	7	2	0	0	0	6	3	3	3	4	8	0	0
IV	3	3	4	4	1	11	11	8	3	3	9	4	1	7	11	8	11	3	9
IX	0	0	0	0	0	3	6	(1)	3	3	3	3	9	0	3	6	[10]	6	6
IV	0	10	3	9	10	0	9	7	0	6	7	9	6	4	9	3	4	6	3

Zone d'oubli pour alto (1973)

Actualité de la démarche algébrique

Séquences périodiques et résultats 'structuraux'

$$\begin{array}{rcl}
 f & = & 11 \ 6 \ 7 \ 2 \ 3 \ 10 \ 11 \ 6 \ \dots \\
 Df & = & \begin{array}{ccccccc}
 & \swarrow & \searrow & & & & \\
 7 & & 1 & 7 & 1 & 7 & 1 & 7 & 1 \dots
 \end{array} \\
 D^2 f & = & \begin{array}{ccccccc}
 & \swarrow & \searrow & & & & \\
 & 6 & & 6 & 6 & 6 & 6 \dots
 \end{array} \\
 D^3 f & = & \begin{array}{ccccccc}
 & \swarrow & \searrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 \dots
 \end{array}
 \end{array}$$

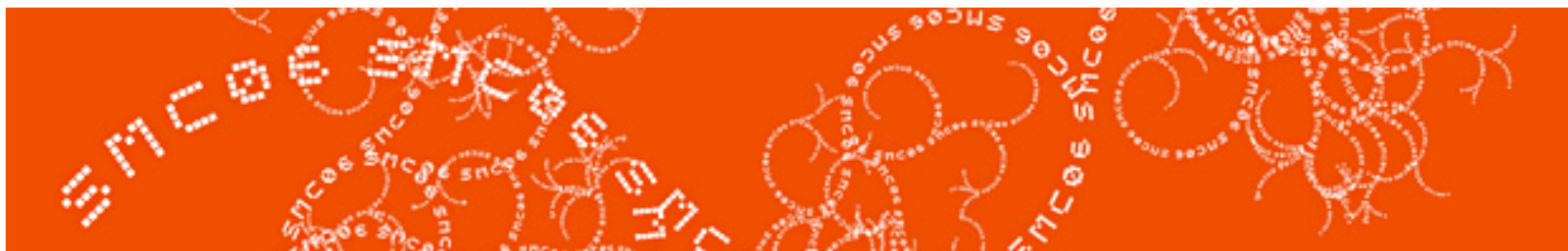
$Df(x) = f(x) - f(x-1)$.

Séquences réductibles :
 $\exists k \geq 1$ t.q. $D^k f = 0$

$$\begin{array}{rcl}
 f & = & 7 \ 11 \ 10 \ 11 \ 7 \ 2 \ 7 \ 11 \ \dots \\
 Df & = & \begin{array}{ccccccc}
 & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & & \\
 4 & 11 & 1 & 8 & 7 & 5 & 4 & 11 \ \dots
 \end{array} \\
 D^2 f & = & \begin{array}{ccccccc}
 & \swarrow & \searrow & & & & \\
 11 & 7 & 2 & 7 & 11 & 0 & 11 & 7 \ \dots
 \end{array} \\
 D^3 f & = & \begin{array}{ccccccc}
 & \swarrow & \searrow & & & & \\
 & 1 & 8 & 7 & 5 & 4 & 11 & 1 & 8 \ \dots
 \end{array} \\
 D^4 f & = & 7 \ 11 \ 10 \ 11 \ 7 \ 2 \ 7 \ 11 \ \dots
 \end{array}$$

Séquences reproductibles :
 $\exists k \geq 1$ s.t. $D^k f = f$

Théorème de décomposition: Toute suite périodique à valeurs dans un groupe cyclique $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est décomposable (de façon unique) en une somme d'une suite réductible et d'une suite reproductible (Vuza/Andreatta, 2001)

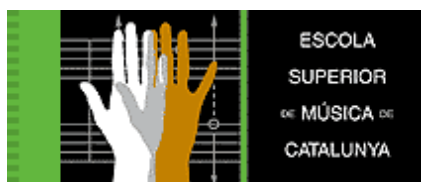


COMPUTER-AIDED TRANSFORMATIONAL ANALYSIS WITH TONE SIEVES

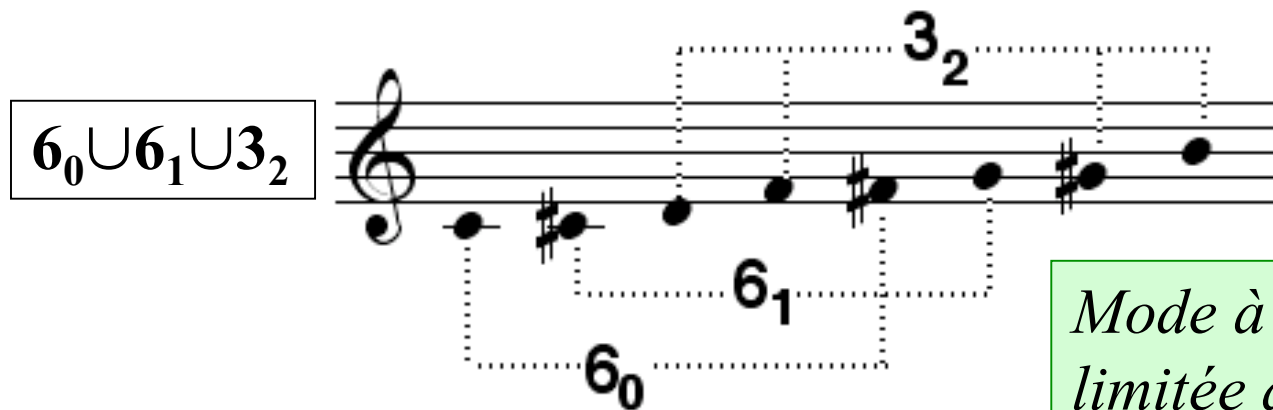
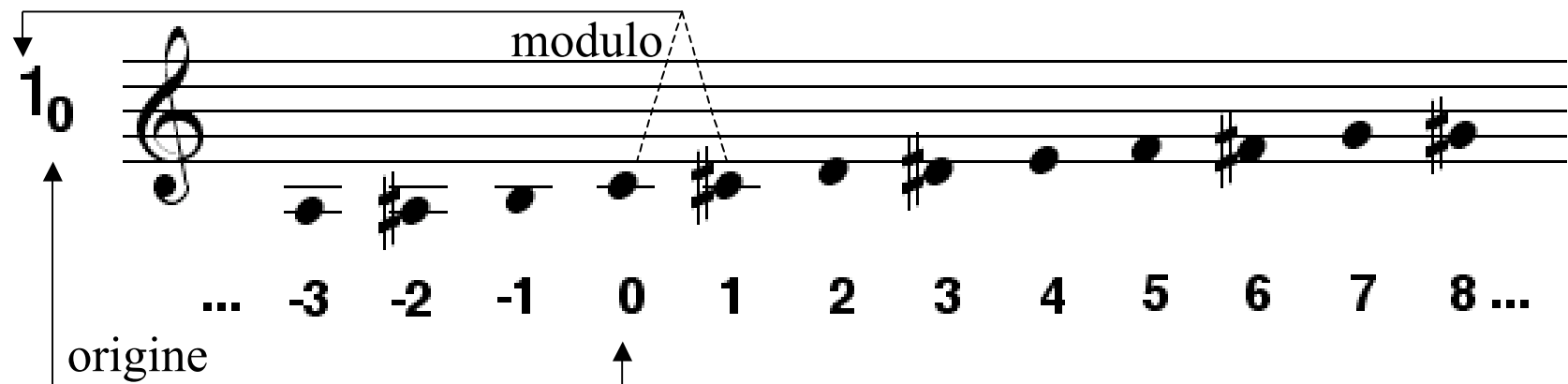
T. Noll
ESMuC
Edifici L'Auditori
08013 Barcelona

M. Andreatta, C. Agon
IRCAM/CNRS
1, place I. Stravinsky
75004 Paris

E. Amiot
CPGE
39, av. Julien Panchot
66028 Perpignan



Théorie des cribles: algèbre et structures ordonnées



Mode à transposition limitée de Messiaen

- Gammes traditionnelles (diatoniques, Modes de Messiaen, ...)
- Gammes micro-tonales et non octaviantes (*Nomos Alpha*, ...)
- Cribles comme généralisation de rythmes (*Psappha*, ...)
- Cribles comme outil de modélisation des partitions (Riotte&Mesnage)

Pitch/Rhythm Isomorphism (Xenakis)

« [With the sieve theory] one can build very complex *rhythmic architectures* which can simulate the stochastic distribution of points on a line if the period is big enough »

(« Redécouvrir le temps », éditions de l'Université de Bruxelles, 1988)

$$A = (13_3 \cup 13_5 \cup 13_7 \cup 13_9)^c$$

$$B = 11_2$$

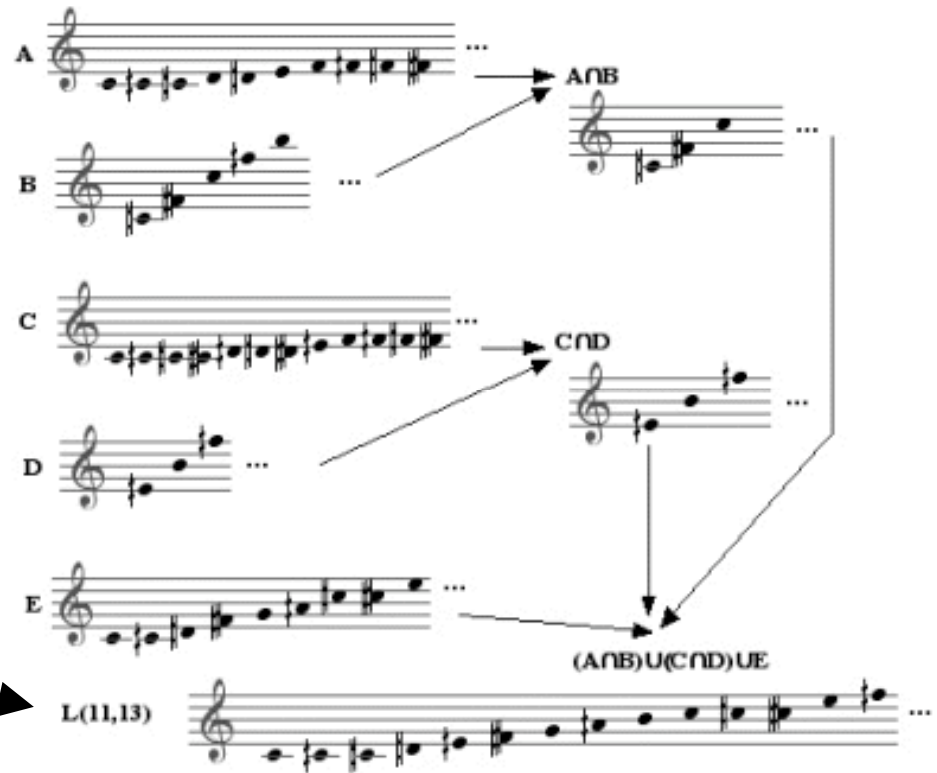
$$C = (11_4 \cup 11_8)^c$$

$$D = 13_9$$

$$E = 13_0 \cup 13_1 \cup 13_6$$

(*Nomos Alpha*, 1966)

$$(A \cap B) \cup (C \cap D) \cup E$$



1 1 4 3 4 1 5 3 2 2 1 5 3 4 1 5 7 1 5 3 4 1 5 7 1 5 3 3 1 1 5 3 1 3 1 5 2 1 4 1...

Axiomatique et théorie des groupes en musique

« La musique peut [...] être définie comme une organisation d'**opérations** et de **relations** élémentaires entre des êtres ou entre des fonctions d'êtres sonores. Nous comprenons la place de choix qui revient à la **théorie des ensembles**, non seulement pour la **construction** d'œuvres nouvelles, mais aussi pour l'**analyse** et la meilleure compréhension des œuvres du passé. Ainsi, même une construction stochastique ou une investigation de l'histoire à l'aide de la stochastique ne peuvent être exploitées sans l'aide de la reine des sciences et même des arts, dirais-je, qu'est la logique ou sa forme mathématique l'**algèbre** »

I. Xenakis : « La musique stochastique : éléments sur les procédés probabilistes de composition musicale » 1961.

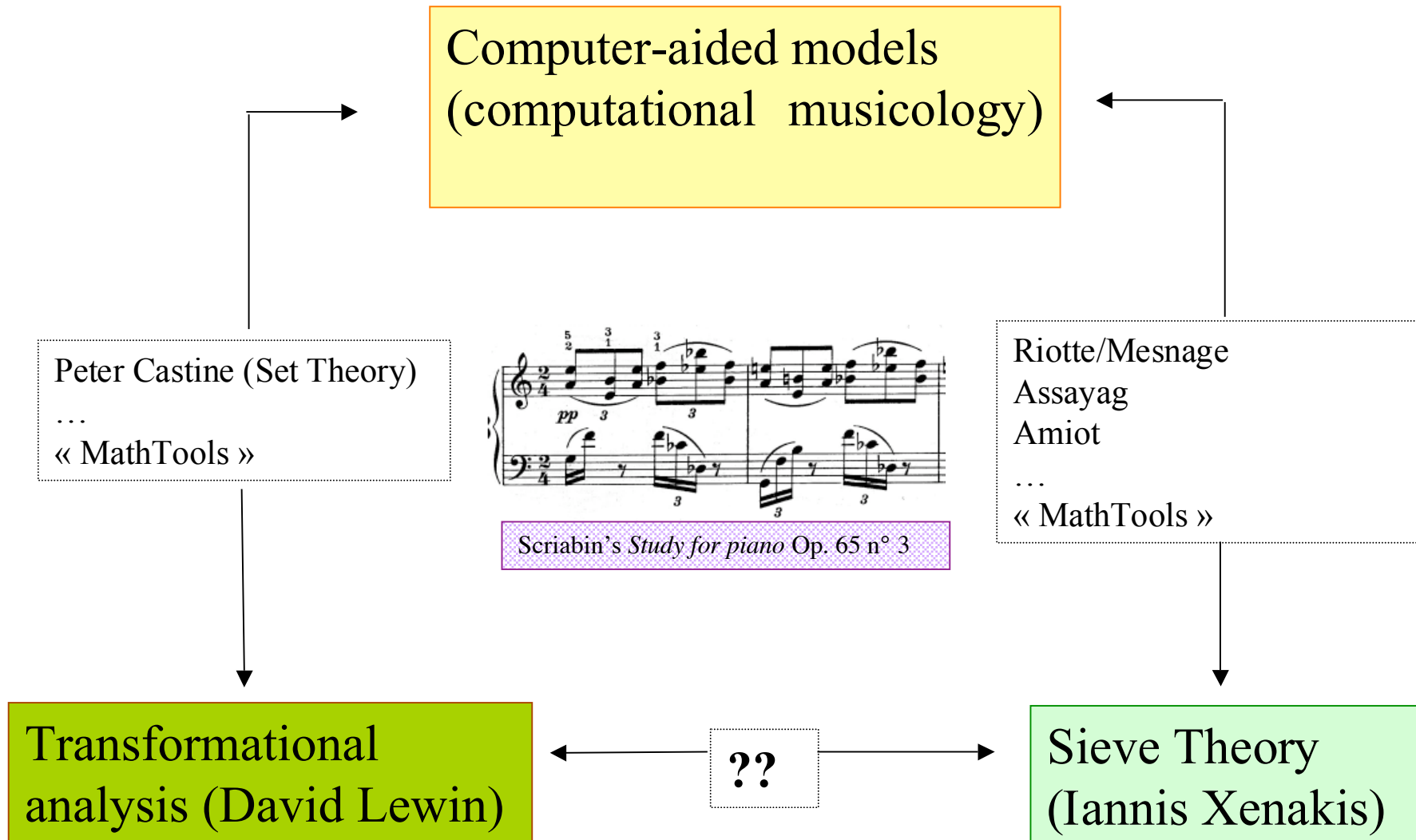
« La **formalisation** et l'**axiomatisation** constituent en réalité un guide processionnel plus adapté à la pensée moderne en général. Elle permet de placer d'emblée sur un terrain plus **universel** l'art des sons... »

I. Xenakis : *Musiques formelles*, 1963

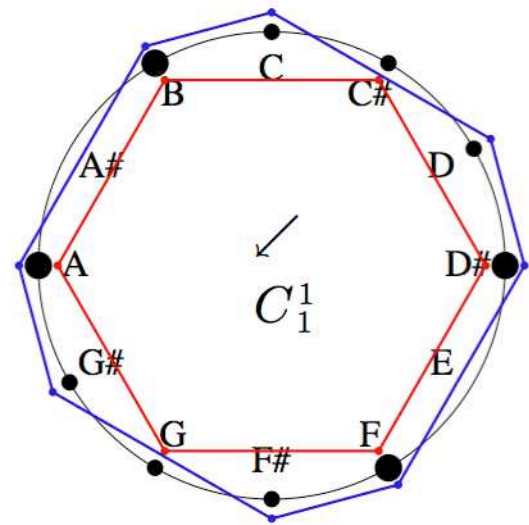
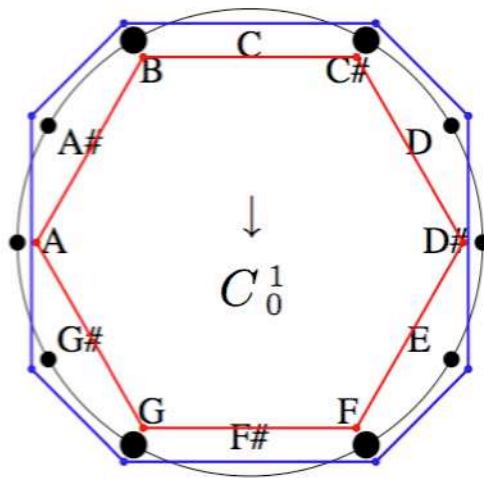
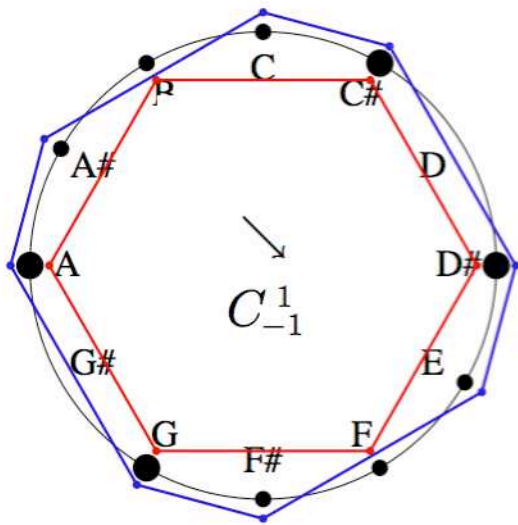
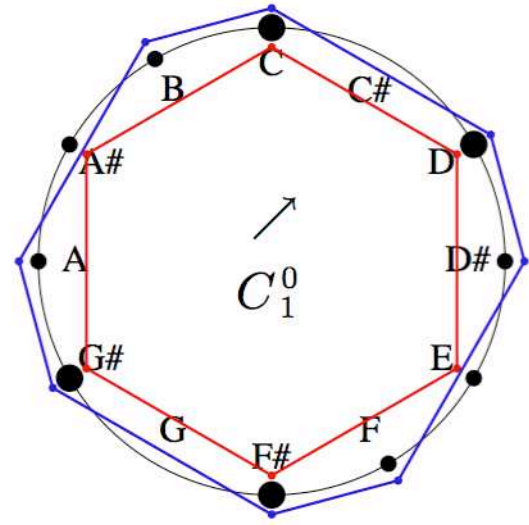
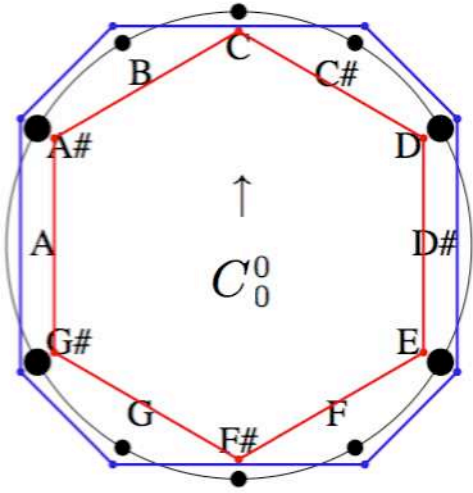
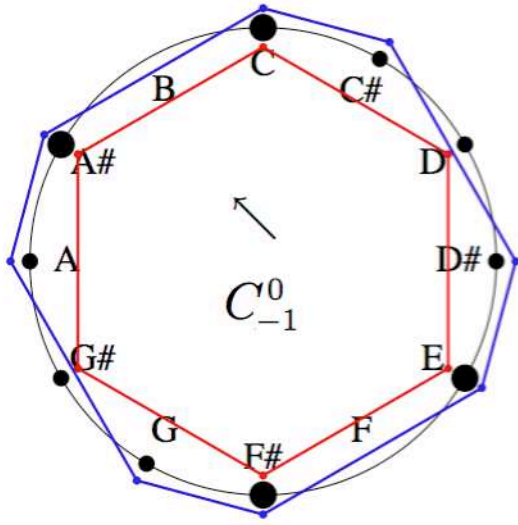
« Aujourd'hui, on peut affirmer qu'avec les vingt-cinq siècles d'évolution musicale, on aboutit à une **formulation universelle** en ce qui concerne la **perception** des hauteurs, qui est la suivante: l'ensemble des intervalles mélodiques est muni d'une structure de **groupe** avec comme loi de composition l'**addition** »

I. Xenakis : « La voie de la recherche et de la question », 1965

Computer-aided transformational analysis with tone sieves



Tone Sieves for Scriabin's Study for piano Op. 65 n° 3



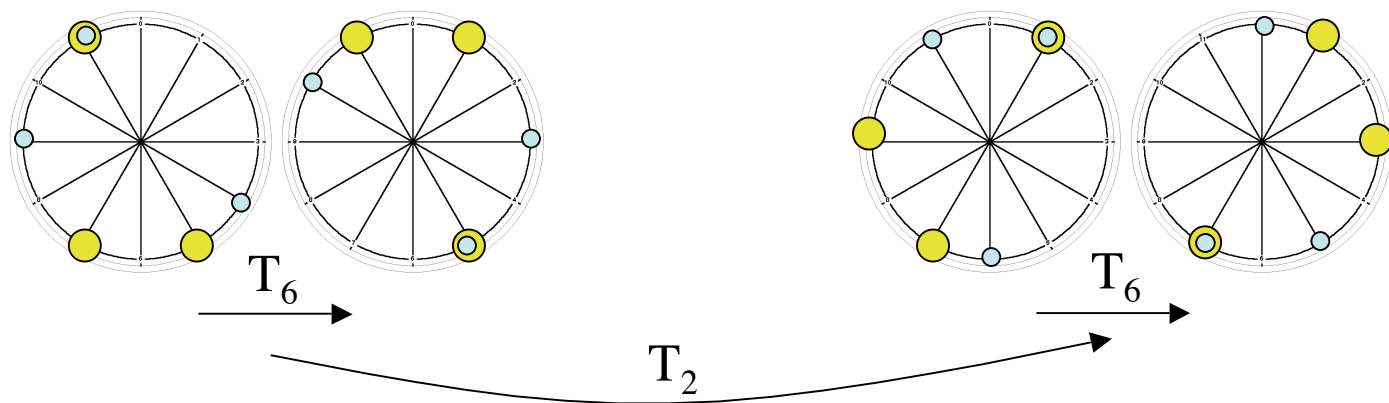
Musical score in 2/4 time, featuring a treble and bass staff. The score includes dynamic markings *pp* and *cresc.*, and articulation like slurs and accents. Fingerings are indicated by numbers 1-5. Chord diagrams are provided for both hands in light blue and yellow boxes.

Light Blue Chord Diagrams (Treble Staff):

- Measure 1: $\begin{matrix} 4 & 11 \\ 9 & 4 \end{matrix}$
- Measure 2: $\begin{matrix} 5 & 10 \\ 10 & 3 \end{matrix}$
- Measure 3: $\begin{matrix} 4 & 11 \\ 9 & 4 \end{matrix}$
- Measure 4: $\begin{matrix} 5 & 10 \\ 10 & 3 \end{matrix}$
- Measure 5: $\begin{matrix} 6 & 1 \\ 11 & 6 \end{matrix}$
- Measure 6: $\begin{matrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{matrix}$

Yellow Chord Diagrams (Bass Staff):

- Measure 1: $\begin{matrix} 7 & 5 \end{matrix}$
- Measure 2: $\begin{matrix} 5 & 11 & 1 \end{matrix}$
- Measure 3: $\begin{matrix} 7 & 5 & 11 \end{matrix}$
- Measure 4: $\begin{matrix} 5 & 11 & 1 \end{matrix}$
- Measure 5: $\begin{matrix} 9 & 7 & 1 \end{matrix}$
- Measure 6: $\begin{matrix} 7 & 1 & 3 \end{matrix}$



1 - 3

4

5 - 8

9 - 11

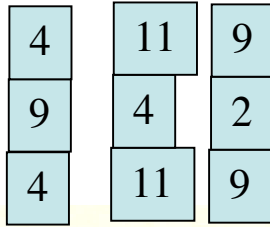
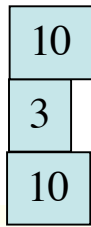
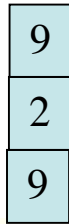
12

13 - 16

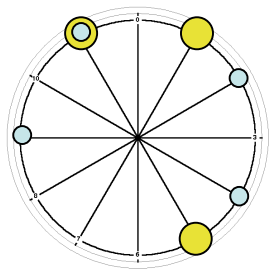
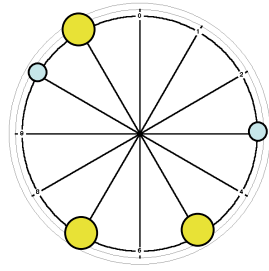
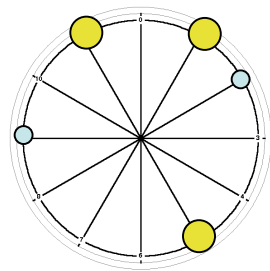
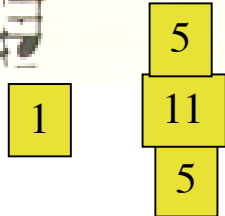
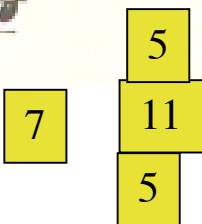
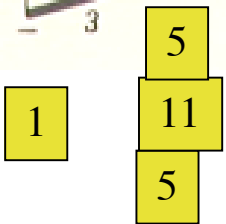
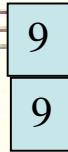
A musical score for piano, consisting of two staves (treble and bass clefs). The score is divided into measures, with some measures grouped together. Above the staves, there are labels: "1 - 3", "4", "5 - 8", "9 - 11", "12", and "13 - 16". Below the staves, there are four curved arrows labeled T_2 , each pointing from a measure to the next. A large curved arrow labeled T_8 spans across the entire score, indicating a transformation of 8 measures. Below the T_8 arrow, there is an equals sign (=) and a dotted line that encloses the entire score, suggesting an equivalence between the original score and a transformed version.

T_8

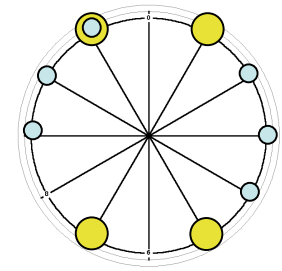
=

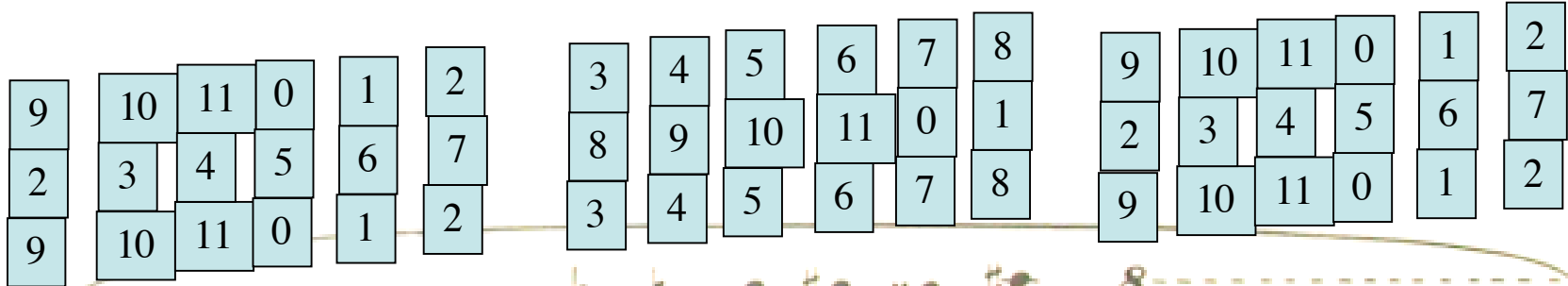
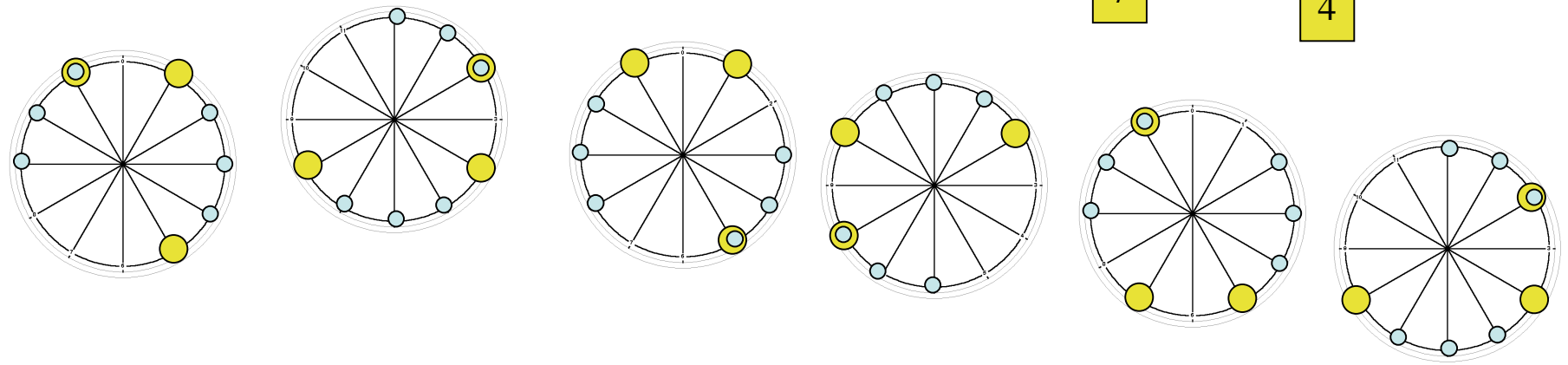
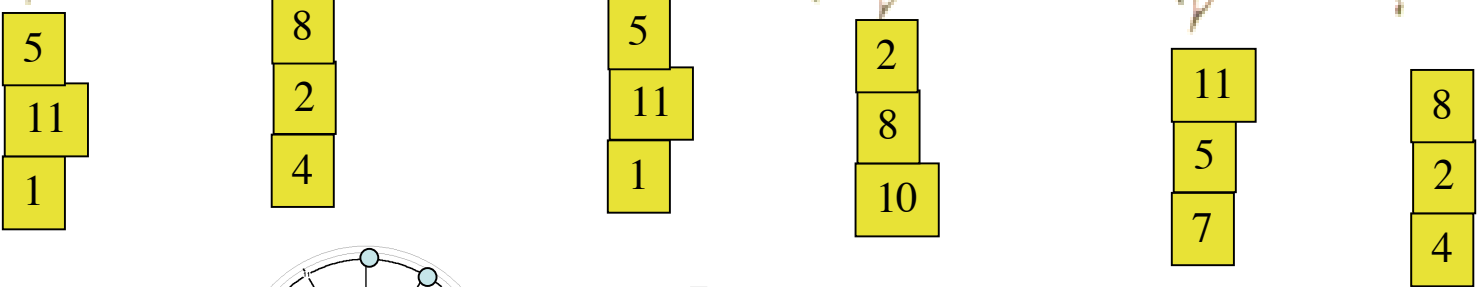


Impérieux ♩ = 100



Summary



17/25 18/26 19/27 20/28 21/29 22/30 23-24

Musical score for measures 17-24. The score is written for two staves: a treble clef staff and a bass clef staff. The key signature is two sharps (F# and C#). The time signature is 3/4. The music consists of chords and single notes. A first ending bracket labeled '1.' spans measures 23 and 24. A double bar line is located between measures 22 and 23.

T₃

Musical score for measures 31-38. The score is written for two staves: a treble clef staff and a bass clef staff. The key signature is two sharps (F# and C#). The time signature is 3/4. The music consists of chords and single notes. A second ending bracket labeled '2.' spans measures 31, 32, and 33. A triplet bracket labeled '3' is present in measures 31 and 33. A double bar line is located between measures 33 and 34.

39 40 41 42 43 44

T_2

45 - 46 47 48 49 - 50 51 52

T_3

45 - 46

47

48

49 - 50

51

52

Musical score for measures 45-52. The piano part (bottom) features a steady bass line with a triplet of eighth notes in measures 45, 49, and 50. The vocal line (top) consists of eighth and sixteenth notes with various accidentals (sharps, flats, naturals).

T₂

=

T₂

53 - 54

55

56

57

58

59

60

61 - 62

Musical score for measures 53-62. The piano part (bottom) features a steady bass line with a triplet of eighth notes in measures 53, 57, and 59. The vocal line (top) consists of eighth and sixteenth notes with various accidentals (sharps, flats, naturals). A double bar line is present at the end of measure 62.

22

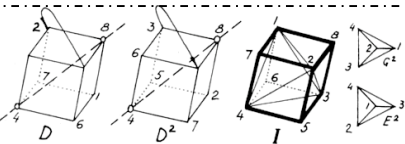
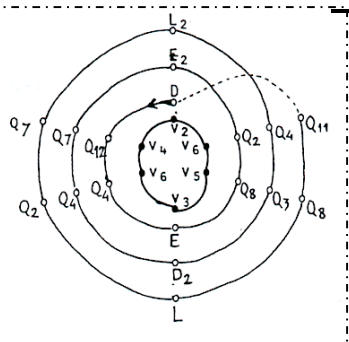
Analysis in terms of a “sieve counterpoint”

The image displays a musical score analysis in two systems. The first system covers measures 1 to 31, and the second system covers measures 65 to 95. Each system consists of two staves. The top staff in each system contains a melodic line with notes and slurs. The bottom staff contains notes with arrows pointing up or down, indicating transformations. In the first system, the bottom staff has arrows pointing down, up, and down. In the second system, the bottom staff has arrows pointing down, up, and down, and a diagram of a hand with fingers pointing up and down.

This “counterpoint” is a quasi-musical representation of the transformations between the whole-tone-scale-components (displayed as a “tenor voice”) and the octatonic-scale-components (displayed as a “discant voice”).

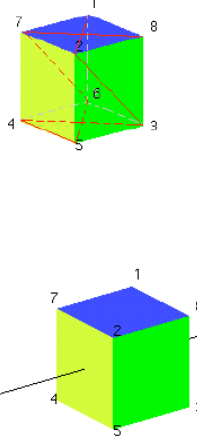
These tones do not refer to tones of the actual music in Scriabin’s piece.

Nomos Alpha (1966)

manual
loop
play
stop
clear

	I	A	B	C	D	D^2	E	E^2	G	G^2	L	L^2	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	
I																									
A																									
B																									
C																									
D																									
D^2																Q3									
E																Q8									
E^2															Q7										
G																									
G^2																									
L																Q8									
L^2																							Q7		
Q1																									
Q2																				L	E^2				
Q3								Q11																	
Q4																			D^2				E		
Q5																									
Q6																									
Q7									Q4				Q2												
Q8									Q2				Q11												
Q9																									
Q10																									
Q11																			L^2			D			
Q12								Q4																	





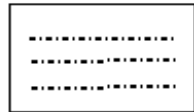
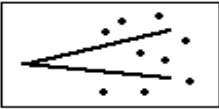
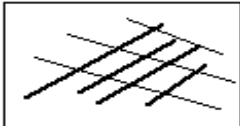

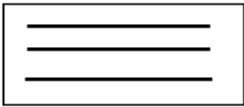
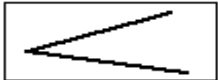
```

q11 (8 5 6 7 4 1 2 3)
q8 (7 5 8 6 3 1 4 2)
l (1 3 4 2 5 7 8 6)
q2 (7 6 5 8 3 2 1 4)
q7 (8 7 5 6 4 3 1 2)
l^2 (1 4 2 3 5 8 6 7)
q11 (8 5 6 7 4 1 2 3)
q3 (8 6 7 5 4 2 3 1)
d^2 (3 1 2 4 7 5 6 8)
q4 (6 7 8 5 2 3 4 1)
q7 (8 7 5 6 4 3 1 2)
e^2 (4 1 3 2 8 5 7 6)
q2 (7 6 5 8 3 2 1 4)
q8 (7 5 8 6 3 1 4 2)
e (2 4 3 1 6 8 7 5)
q4 (6 7 8 5 2 3 4 1)
q12 (5 6 8 7 1 2 4 3)
d (2 3 1 4 6 7 5 8)
            
```

« Musique **symbolique** pour violoncelle seul, possède une architecture « hors-temps » fondée sur la théorie des groupes de transformations. Il y fait usage de la théorie des cribles, théorie qui annexe les congruence modulo n et qui est issue d'une **axiomatique** de la structure **universelle** de la musique »

Nomos Alpha : implémentation en OM

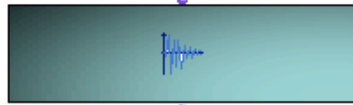
Complexes sonores

- | | | |
|----|---|---|
| S1 |  | Nuage ataxique de sons pontuels |
| S2 |  | Nuage relativement ordonné, ascendant ou descendant, de sons ponctuels |
| S3 |  | Nuage relativement ordonné, ni ascendant ni descendant de sons ponctuels |
| S4 |  | Atome ionisé, représenté au violoncelle par des interférences d'un quasi-unisson accompagnés de pizzicati |
| S5 |  | Champ ataxique de sons glissés |
| S6 |  | Champ relativement ordonné, ascendant ou descendant, de sons glissés |
| S7 |  | Champ relativement ordonné, ni ascendant ni descendant, de sons glissés |
| S8 |  | Champ représenté au violoncelle par des interférences d'un quasi-unisson |

Nomos Alpha : implémentation en OM

Complexe sonore n. 2 (section Beta)

D S2



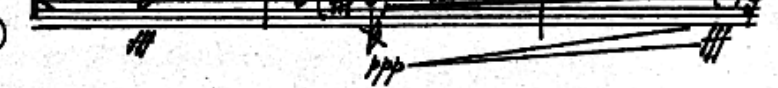
β
 $\Lambda(41,13)$

mes. 1

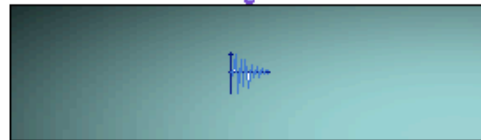
D S2

$d = 75 \text{ MM}$

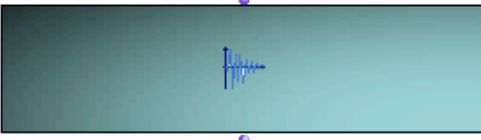
pizz



Q12 S2



Q4 S2



Nuage relativement ordonné, ascendant ou descendant, de sons ponctuels

mes. 38



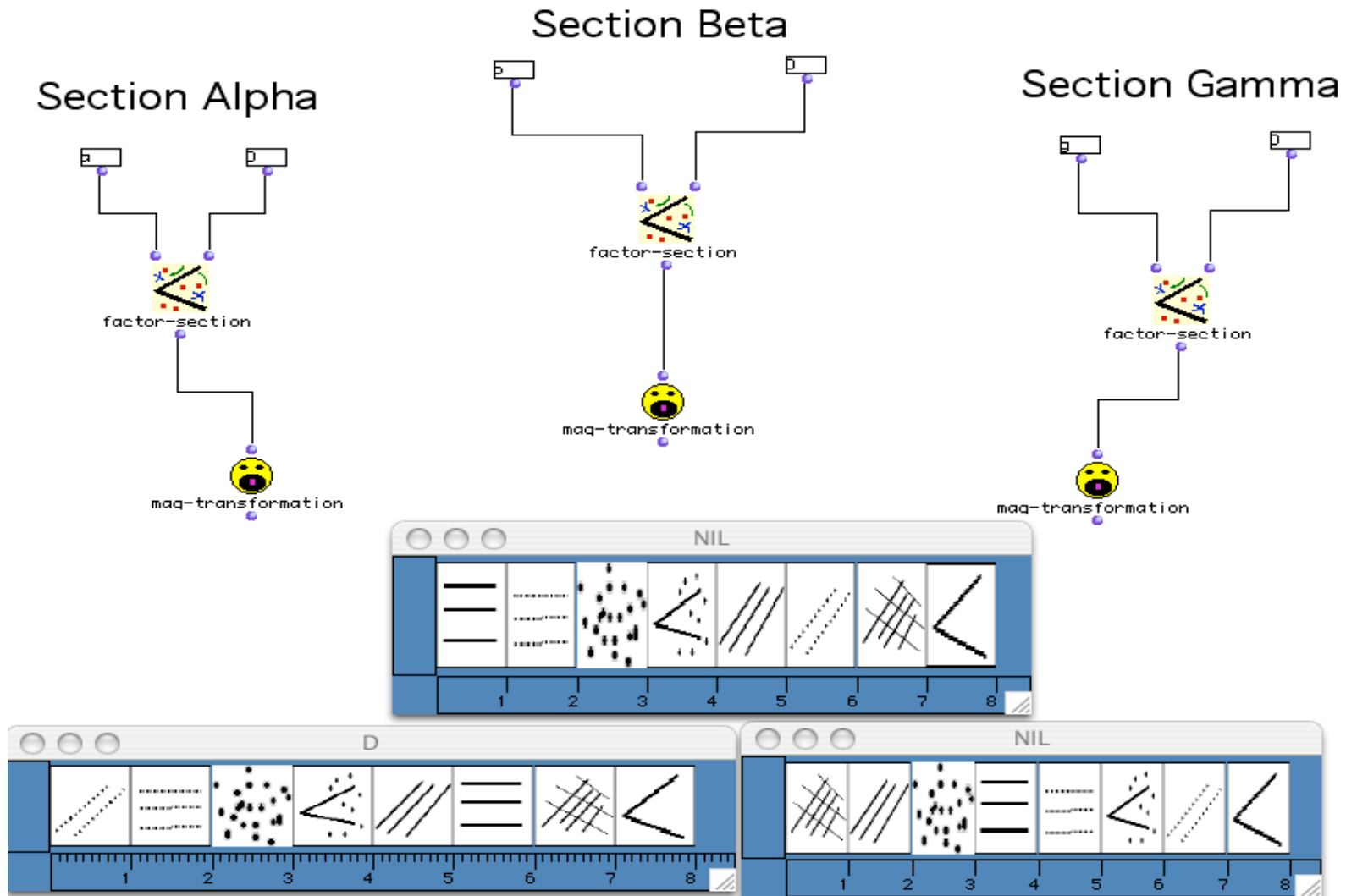
(Cf. R. Peck: "Toward an interpretation of Nomos Alpha", PNM, 41(1), 106-157, 2003)

Nomos Alpha : implémentation en OM

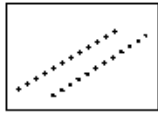


Changement de section

(permutation des indices des complexes sonores)



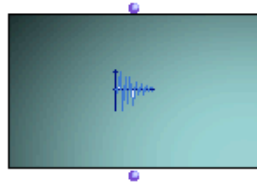
Nomos Alpha : implémentation en OM



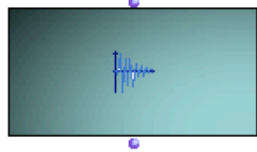
Complexe sonore n. 2

Nuage relativement ordonné, ascendant ou descendant, de sons ponctuels

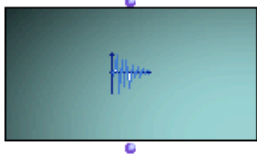
E S5



Q8 S5



Q2 S5



(section Gamma) ==>

$$\kappa^{\alpha_1} = 1 \cdot \underline{mf} \cdot 2 \rightarrow = 2 \underline{mf} \rightarrow$$

$$\kappa^{\alpha_2} = 1 \cdot \underline{fff} \cdot 4.5 = 4.5 \underline{fff} \rightarrow$$

$$\kappa^{\alpha_3} = 2.5 \cdot \underline{fff} \cdot 4.5 = 11.25 \underline{fff} \rightarrow$$

$$\kappa^{\alpha_4} = 2.5 \cdot \underline{mf} \cdot 2 = 5 \underline{mf} \rightarrow$$

$$\kappa^{\alpha_5} = 1.5 \cdot \underline{f} \cdot 2.62 = 3.93 \underline{f} \rightarrow$$

$$\kappa^{\alpha_6} = 1.5 \cdot \underline{ff} \cdot 3.44 = 5.15 \underline{ff} \rightarrow$$

$$\kappa^{\alpha_7} = 2.0 \cdot \underline{ff} \cdot 3.44 = 6.88 \underline{ff} \rightarrow$$

$$\kappa^{\alpha_8} = 2.0 \cdot \underline{f} \cdot 2.62 = 5.24 \underline{f} \rightarrow$$

☐

$$\kappa^{\beta_1} = 0.5 \cdot \underline{mf} \cdot 2 = 1 \underline{mf} \rightarrow$$

$$\kappa^{\beta_2} = 0.5 \cdot \underline{fff} \cdot 4.5 = 2.25 \underline{fff} \rightarrow$$

$$\kappa^{\beta_3} = 5 \cdot \underline{fff} \cdot 4.5 = 22.5 \underline{fff} \rightarrow$$

$$\kappa^{\beta_4} = 5.0 \cdot \underline{mf} \cdot 2 = 10.0 \underline{mf} \rightarrow$$

$$\kappa^{\beta_5} = 1.08 \cdot \underline{f} \cdot 2.62 = 2.83 \underline{f} \rightarrow$$

$$\kappa^{\beta_6} = 1.08 \cdot \underline{ff} \cdot 3.44 = 3.72 \underline{ff} \rightarrow$$

$$\kappa^{\beta_7} = 2.32 \cdot \underline{ff} \cdot 3.44 = 7.98 \underline{ff} \rightarrow$$

$$\kappa^{\beta_8} = 2.32 \cdot \underline{f} \cdot 2.62 = 6.08 \underline{f} \rightarrow$$

☐

$$\kappa^{\gamma_1} = 1 \cdot \underline{mf} \cdot 2 = 2 \underline{mf} \quad \square$$

$$\kappa^{\gamma_2} = 1 \cdot \underline{fff} \cdot 2 \rightarrow = 2 \underline{fff} \quad \square$$

$$\kappa^{\gamma_3} = 4.0 \cdot \underline{fff} \cdot 4.5 = 18.0 \underline{fff} \quad \square$$

$$\kappa^{\gamma_4} = 4.0 \cdot \underline{mf} \cdot 2.0 = 8.0 \underline{mf} \quad \square$$

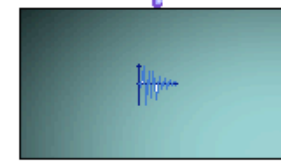
$$\kappa^{\gamma_5} = 2.0 \cdot \underline{f} \cdot 2.62 = 5.24 \underline{f} \quad \square$$

$$\kappa^{\gamma_6} = 2.0 \cdot \underline{ff} \cdot 3.44 = 6.88 \underline{ff} \quad \square$$

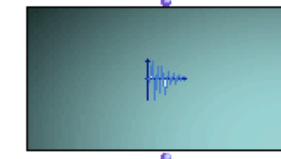
$$\kappa^{\gamma_7} = 3.0 \cdot \underline{ff} \cdot 3.44 = 10.32 \underline{ff} \quad \square$$

$$\kappa^{\gamma_8} = 3.0 \cdot \underline{f} \cdot 2.62 = 7.86 \underline{f} \quad \square$$

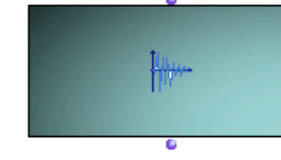
<=== (section Alpha)



E^2 S7



Q7 S7

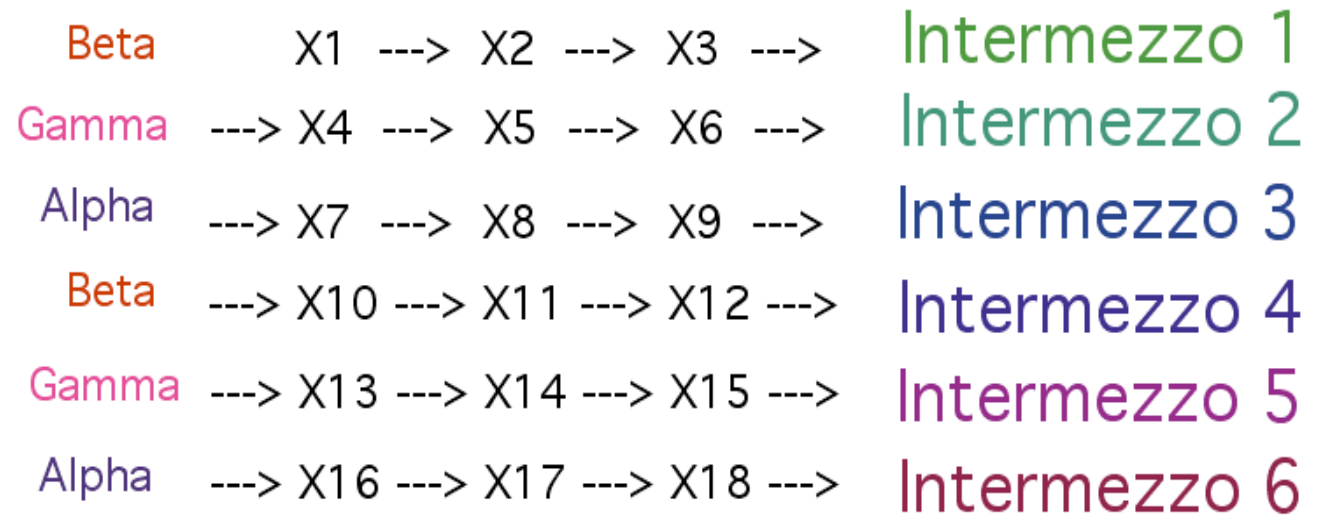


Q4 S7

Nomos Alpha : implémentation en OM

Label	Order of Vertices
I	12345678
A	21436587
B	34127856
C	43218765
D	23146758
D ²	31247568
E	24316875
E ²	41328576
G	32417685
G ²	42138657
L	13425786
L ²	14235867
Q ₁	78653421
Q ₂	76583214
Q ₃	86754231
Q ₄	67852341
Q ₅	68572413
Q ₆	65782134
Q ₇	87564312
Q ₈	75863142
Q ₉	58761432
Q ₁₀	57681324
Q ₁₁	85674123
Q ₁₂	56871243

Structure de la pièce



(Théorie des cribles)

(Théorie des cribles)

+

(Théorie des groupes)

Nomos Alpha : implémentation en OM

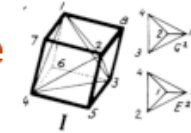


Label	Order of Vertices
I	12345678
A	21436587
B	34127856
C	43218765
D	23146758
D ²	31247568
E	24316875
E ²	41328576
G	32417685
G ²	42138657
L	13425786
L ²	14235867
Q ₁	78653421
Q ₂	76583214
Q ₃	86754231
Q ₄	67852341
Q ₅	68572413
Q ₆	65782134
Q ₇	87564312
Q ₈	75863142
Q ₉	58761432
Q ₁₀	57681324
Q ₁₁	85674123
Q ₁₂	56871243

Groupe de rotations du cube dans l'espace

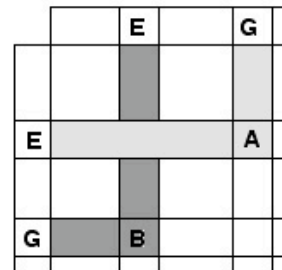
isomorphe au groupe des permutations de 4 éléments S₄

isomorphe au groupe des symétries du tétraèdre

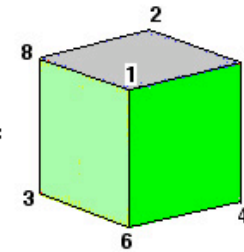


<===

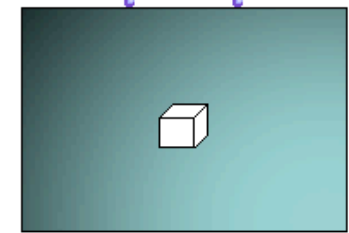
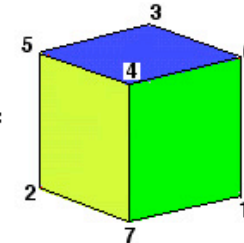
<===



E(G) = A =



G(E) = B =



$$(24316875) \circ (32417685) = (21436587)$$

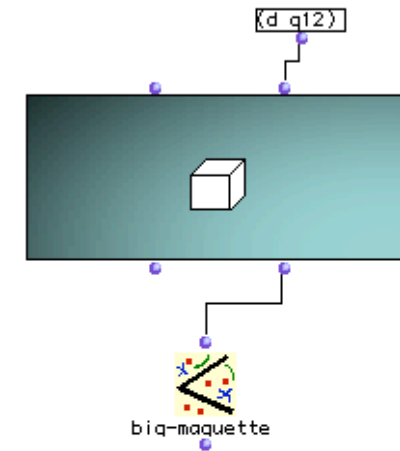
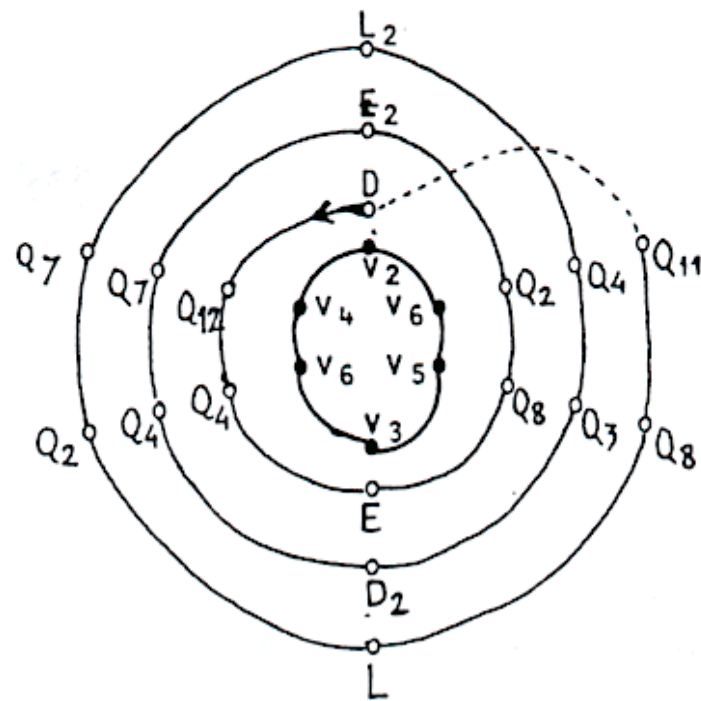
$$= (12)(34)(56)(78)$$

<====>

- 1-->2
- 2-->1
- 3-->4
- 4-->3
- 5-->6
- 6-->5
- 7-->8
- 8-->7

Nomos Alpha : implémentation en OM

Processus de Fibonacci généralisé



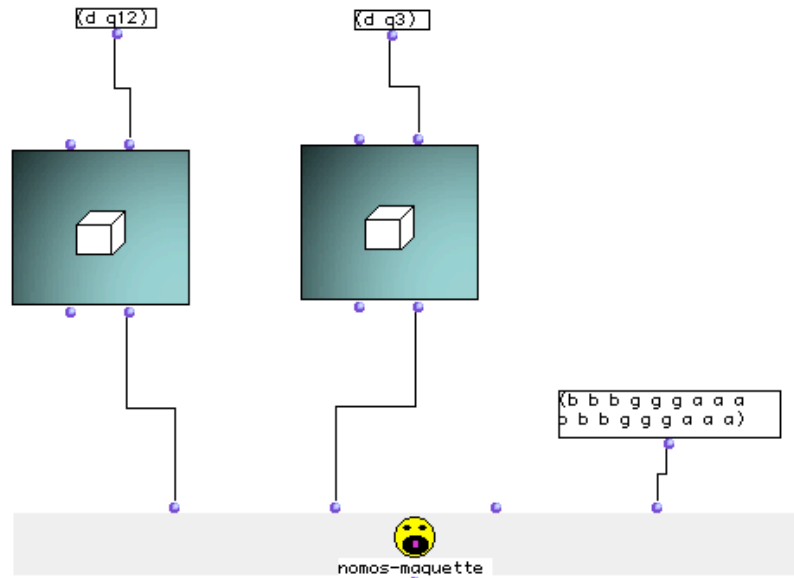
- Caractère cyclique
- Longueur maximale = 18
- Degré maximal = 13

Nomos Alpha : implémentation en OM



Deux processus de Fibonacci en parallèle

- S1
- S2
- S3
- S4
- S5
- S6
- S7
- S8



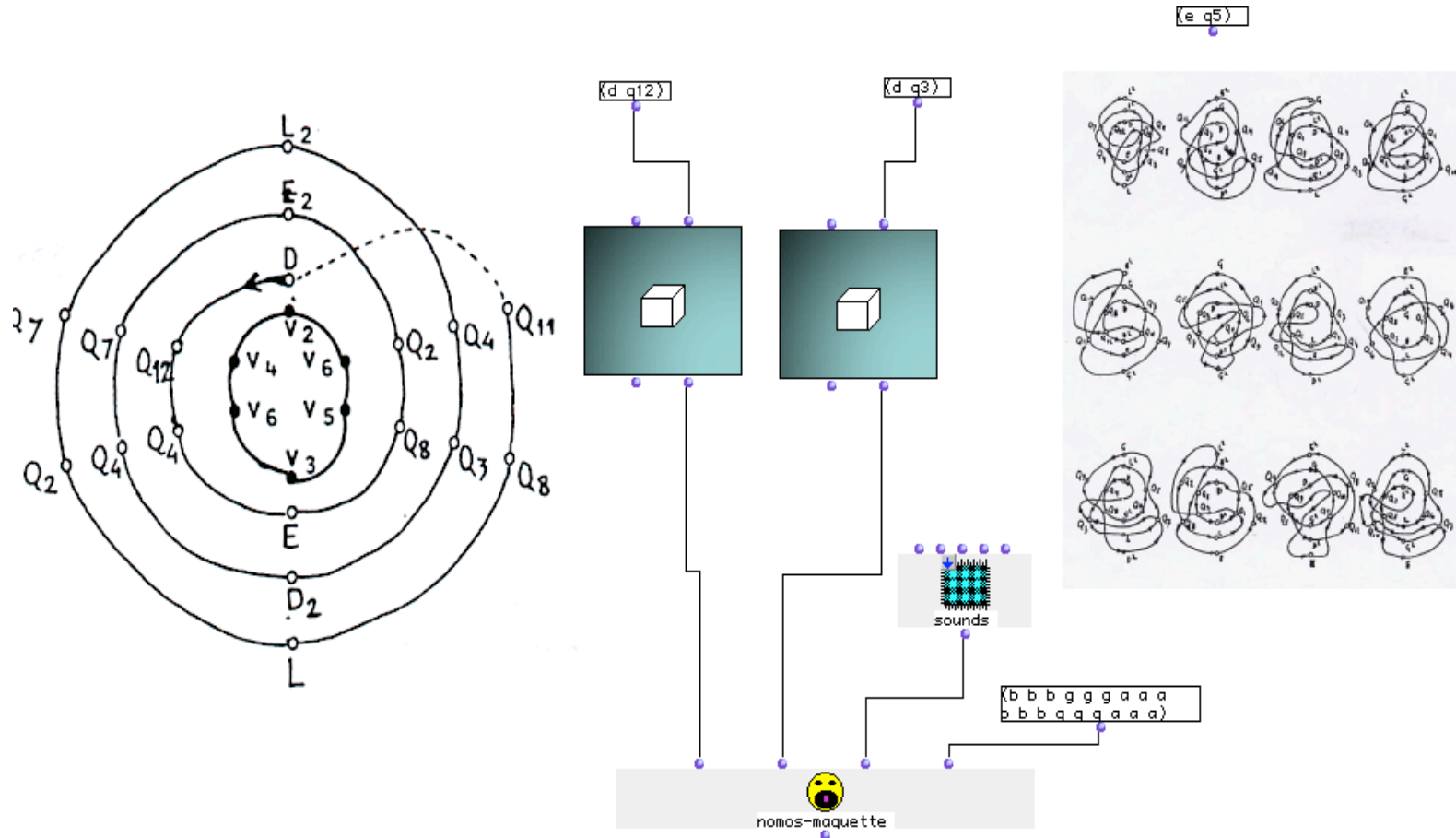
$$\begin{aligned} \kappa^{\sigma_1} &= 1 . mf . 2 \rightarrow = 2 mf \rightarrow \\ \kappa^{\sigma_2} &= 1 . fff . 4.5 = 4.5 . fff \rightarrow \\ \kappa^{\sigma_3} &= 2.5 . fff . 4.5 = 11.25 . fff \rightarrow \\ \kappa^{\sigma_4} &= 2.5 . mf . 2 = 5 mf \rightarrow \\ \kappa^{\sigma_5} &= 1.5 . f . 2.62 = 3.93 f \rightarrow \\ \kappa^{\sigma_6} &= 1.5 . ff . 3.44 = 5.15 ff \rightarrow \\ \kappa^{\sigma_7} &= 2.0 . ff . 3.44 = 6.88 ff \rightarrow \\ \kappa^{\sigma_8} &= 2.0 . f . 2.62 = 5.24 f \rightarrow \\ \square \\ \kappa^{\beta_1} &= 0.5 . mf . 2 = 1 mf \rightarrow \\ \kappa^{\beta_2} &= 0.5 . fff . 4.5 = 2.25 . fff \rightarrow \\ \kappa^{\beta_3} &= 5 . fff . 4.5 = 22.5 . fff \rightarrow \\ \kappa^{\beta_4} &= 5.0 . mf . 2 = 10.0 mf \rightarrow \\ \kappa^{\beta_5} &= 1.08 . f . 2.62 = 2.83 f \rightarrow \\ \kappa^{\beta_6} &= 1.08 . ff . 3.44 = 3.72 ff \rightarrow \\ \kappa^{\beta_7} &= 2.32 . ff . 3.44 = 7.98 ff \rightarrow \\ \kappa^{\beta_8} &= 2.32 . f . 2.62 = 6.08 f \rightarrow \\ \square \\ \kappa^{\gamma_1} &= 1 . mf . 2 = 2 mf \square \\ \kappa^{\gamma_2} &= 1 . fff . 2 \rightarrow = 2 . fff \square \\ \kappa^{\gamma_3} &= 4.0 . fff . 4.5 = 18.0 . fff \square \\ \kappa^{\gamma_4} &= 4.0 . mf . 2.0 = 8.0 mf \square \\ \kappa^{\gamma_5} &= 2.0 . f . 2.62 = 5.24 f \square \\ \kappa^{\gamma_6} &= 2.0 . ff . 3.44 = 6.88 ff \square \\ \kappa^{\gamma_7} &= 3.0 . ff . 3.44 = 10.32 ff \square \\ \kappa^{\gamma_8} &= 3.0 . f . 2.62 = 7.86 f \square \end{aligned}$$

Nomos Alpha : implémentation en OM



La pièce...

... et ses variantes



Horizons philosophique d'une démarche structurale en musique

G.-G. Granger et la dualité de l'objectal et de l'opérateur

- « Pygmalion. Réflexions sur la pensée formelle », 1947
- *Pour la connaissance philosophique*, 1988
- *Formes, opérations, objets*, 1994

« [C'est la notion de groupe qui] donne un sens précis à l'idée de structure d'un ensemble [et] permet de déterminer les éléments efficaces des transformations en réduisant en quelque sorte à son schéma opératoire le domaine envisagé. [...] L'objet véritable de la science est le **système des relations** et non pas les termes supposés qu'il relie. [...] Intégrer les résultats - symbolisés - d'une **expérience** nouvelle revient [...] à créer un canevas nouveau, un **groupe de transformations** plus complexe et plus compréhensif »

G.-G. Granger : « Pygmalion. Réflexions sur la pensée formelle », 1947

Horizons philosophique d'une démarche structurale en musique

J. Piaget: de la théorie des groupes à la théorie des catégories

- *Le structuralisme*, 1968
- *Morphismes et Catégories. Comparer et transformer* (avec G. Henriques, E. Ascher 1990)

« ...**attitude relationnelle**, selon laquelle ce qui compte [sont] les relations entre les éléments, autrement dit les procédés ou processus de composition [...] La structure [de **groupe**] se referme sur elle-même, mais cette fermeture ne signifie en rien que la structure considérée ne peut pas entrer à titre de sous-structure dans une structure plus large »

« De même qu'en mathématique le structuralisme des Bourbaki est déjà doublé par un mouvement faisant appel à des **structures plus dynamiques** (les « catégories » [...]) de même toutes les formes actuelles du structuralisme [...] sont certainement grosses de développements multiples... »

Quelques traits caractéristiques du positivisme logique

James A. Davis : *Positivist Philosophy and the Foundation of Atonal Music Theory*, 1993

- Empiricisme rigide qui mène à une émulation de la science dans sa méthodologie et sa terminologie
- Utilisation de l'analyse linguistique et logique (en particulier le recours à la logique formelle).
- Principe de vérification et reconstruction rationnelle
- Refus de l'interprétation subjective et rejet/élimination de la métaphysique

« There is no field of experience which cannot, in principle, be brought under some form of scientific law, and no type of speculative knowledge about the world which is, in principle, beyond the power of science to give [...] **The propositions of philosophy are not factual, but linguistic in character** – that is, they do not describe the behavior of physical, or even mental, objects ; they express definitions, or the formal consequences of definitions. Accordingly, we may say that **philosophy is a department of logic.** » [AYER, 1952]

« Ce qui caractérise le néopositivisme logistique [...] est la réduction de la philosophie à l'étude syntaxique des énoncés scientifiques »

Albert Lautman : *Les mathématiques, les idées et le réel physique*, Vrin 2006 (en particulier le compte-rendu du Congrès International de philosophie des sciences, 1935)

Le transfert des idées du positivisme logique en musique

- Empiricisme rigide qui mène à une émulation de la science dans sa méthodologie et sa terminologie

- Rejet ou élimination de la métaphysique

- Utilisation de l'analyse linguistique et logique (en particulier le recours à la logique formelle).
Principe de vérification

- Refus de l'interprétation subjective

« For the essential elements of the above characterizations, involving the correlations of the syntactic and semantic domains, the notion of analysis, and – perhaps most significantly – the requirements of linguistic formulation and the differentiation among predicate types, beyond strongly suggesting that the proper object of our assigned investigation may be – in the light of these criteria – a vacuous class, and strongly reminding us of the systematic obligations attending our own **necessarily verbal presentation** and discussion of the presumed subject, provide the important reminder that **there is but one kind of language, one kind of method for the verbal formulation of ‘concepts’ and the verbal analysis of such formulations : ‘scientific’ language and ‘scientific’ method** »

M. Babbitt : « Past and Present Concepts », 1961

Le transfert des idées du positivisme logique en musique

- Empiricisme rigide qui mène à une émulation de la science dans sa méthodologie et sa terminologie

- Rejet ou élimination de la métaphysique

- Utilisation de l'analyse linguistique et logique (en particulier le recours à la logique formelle).
Principe de vérification

- Refus de l'interprétation subjective

« Progressively from the concept to the law (synthetic generality) we arrive at the deductively interrelated system of laws that is a *theory*, statable as a **connected set of axioms, definitions, and theorems, the proof of which are derived by means of an appropriate logic**. A *musical theory* reduces, or should reduce, to such a **formal theory** when uninterpreted predicates and operations are substituted for the terms and operations designating musical observables »

M. Babbitt : « Past and Present Concepts », 1961

Cf. M. Andreatta : « Mathématiques, musique et philosophie dans la tradition américaine : la filiation Babbitt/Lewin » (Séminaire *MaMuPhi*, ENS, 18 Novembre 2006)
www.diffusion.ens.fr/index.php?res=conf&idconf=1560

Retombées perceptives de la théorie transformationnelle

La question de la **ressemblance perceptive** entre différentes transpositions d'un même profil mélodique est liée « *à un problème beaucoup plus général, un problème qui concerne les mathématiques abstraites* »

E. Cassirer : « The concept of group and the theory of perception », 1944

« *Le caractère singulier de l'expérience musicale est dû en partie aux structures particulières de **groupe** que la musique rend accessible à l'auditeur* »

G. Balzano : « The group-theoretic description of 12-fold and microtonal pitch systems », 1980

« *Group Theory has emerged as a powerful tool for analyzing cognitive structure. The number of cognitive disciplines using group theory is now enormous. The power of group theory lies in its ability to identify organization, and to express organization in terms of generative actions that structure a space* »

Michael Leyton, The International Society for Group Theory in Cognitive Science