

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PAVIA

FACOLTA DI SCIENZE MM. FF. NN.

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA



**MODELLI MATEMATICI PER L'ANALISI E LA COMPOSIZIONE MUSICALE:
UNO STUDIO SUL TONNETZ E SULLE TEORIE NEO-RIEMANNIANE**

Relatore:

Dott. S. Antonini

Tesi di Laurea Specialistica
di Giovanni Albini

Anno Accademico 2007/2008

Indice

Introduzione	1
Capitolo 1	3
1.1 Ragione del legame tra musica e matematica	3
1.2 Teoria musicale e matematica combinatoria	6
1.3 Matematica e composizione: una breve panoramica	7
Capitolo 2	9
2.1 Il sistema degli intervalli generalizzato	10
2.2 Insiemi di altezze e di intervalli; triadi	13
2.3 Il gruppo $T-I$	15
2.4 Il gruppo- PLR	19
2.5 Relazioni tra $T-I$ e il gruppo- PLR	21
2.6 Insiemi di altezze diatonici	23
2.7 Alcune riflessioni conclusive	24
Capitolo 3	27
3.1 Eulero e la trattatistica musicale	27
3.2 Altezze e gradi di consonanza nel <i>Tentamen</i> di Eulero	28
3.3 Il genere diatonico-cromatico	30
3.4 Il Tonnetz di Eulero	33
3.5 Il Tonnetz di Oettingen e Riemann	34
3.6 Teorie neo-riemanniane	36

Capitolo 4	37
4.1 Costruzione del Tonnetz	37
4.2 Reti di altezze e transitività per vertici	40
4.3 Costruzione del duale del Tonnetz	42
4.4 Cicli in $D(Ton)$	45
 Capitolo 5	 55
5.1 Un esempio di ciclo hamiltoniano nella 'Nona' di Beethoven	55
5.2 Paul Glass - 'Corale I per Margaret'	58
5.3 Giovanni Albini - 'Musica Ciclica'	60
5.4 Jeremy Vaughan - 'Violin Sonata'	64
 Capitolo 6	 67
6.1 Trasformazioni triadiche uniformi	67
6.2 Le UTT come gruppo	68
6.3 UTT riemanniane: il <i>gruppo-PLR</i>	70
 Conclusioni	 71
 Bibliografia	 73

Introduzione

Il **Tonnetz** (in tedesco: 'rete di altezze') è un particolare grafo utile alla rappresentazione di specifiche relazioni tra altezze¹. Benché si possano far risalire le sue origini ad Eulero, e appaia in varie forme e con scopi differenti nei lavori di alcuni autori dell'Ottocento², viene definitivamente formalizzato e studiato solo negli ultimi due decenni all'interno di un ormai abbastanza vasto campo di ricerche nell'ambito della musicologia sistematica che cade sotto il nome di **teorie neo-riemanniane**.³

Uno studio approfondito del Tonnetz e delle strutture ad esso collegate non è interessante solo nel contesto in cui nasce, e cioè in un'ottica analitica, che cerca di spiegare il linguaggio sotteso ad una certa musica triadica e post-tonale che si affaccia sulla scena occidentale al concludersi del secolo corso con metodi diversi da quelli dell'analisi armonica tradizionale. Esso è utile anche e soprattutto a formalizzare (e quindi di conseguenza a comprendere con più chiarezza) specifiche trasformazioni e relazioni tra una particolare categoria di oggetti della teoria musicale, le triadi, che caratterizzano buona parte della musica occidentale degli ultimi cinquecento anni. Questo nell'ottica di una teoria musicale matematica, che studia gli oggetti della teoria musicale mediante mezzi formali.

Mantenendo sempre il Tonnetz come centro focale del discorso, e alternando capitoli discorsivi e di matrice epistemologica, storica o musicale (1, 3 e 5) a capitoli di una più rigorosa trattazione formale (2, 4 e 6), si introdurranno nel primo capitolo le ragioni del contatto tra musica e matematica, dando di fatto i presupposti dell'intero lavoro, e si

¹ Un'introduzione del concetto di altezza nei termini della teoria musicale e da un punto di vista formale è presente nel paragrafo 2.1.

² Nel presente lavoro ci si riferirà al Tonnetz di Oettingen e Riemann, ma anche altri autori, come Weber, hanno presentato nei loro trattati strutture affini.

³ Per tutta la tesi quando si farà riferimento a Riemann, si intenderà sempre il musicologo e teorico della musica Hugo Riemann (1849-1919). In nessun modo rientrerà nella trattazione del presente lavoro l'omonimo matematico tedesco Georg Friedrich Bernard Riemann. Il termine 'neo-riemanniano' è relativamente recente, e appare per la prima volta in [COHN 1996] per distinguere l'approccio trasformatore con la prospettiva di Riemann.

definiranno quindi nel secondo capitolo alcune strutture limitatamente alla formalizzazione del parametro delle altezze, fornendo alcuni risultati rilevanti per le triadi. Si tratterà poi nel terzo capitolo una breve storia del Tonnetz, lasciando al quarto capitolo una sua introduzione formale dal punto di vista della teoria dei grafi, uno studio della sua struttura e della struttura del suo duale⁴, e la proposta di alcuni risultati e di alcune considerazioni originali in particolare legati alla soluzione di problemi combinatori nel suo duale. Nel quinto capitolo si mostrerà l'utilità analitica dei risultati dei capitoli precedenti e l'applicazione di alcuni risultati del capitolo quarto alla composizione; al sesto sono invece lasciati cenni di estensioni delle teorie presentate relativamente alle trasformazioni di triadi.

Un allievo di Eulero, in un elogio al matematico, descrive il *Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae* (primo testo in cui appare un esempio di Tonnetz) come «un'opera profonda, piena di nuove idee presentate da un punto di vista originale, [che] ciononostante non ha goduto di grande popolarità, poiché contiene troppa geometria per i musicisti, e troppa musica per i matematici.»

Sperando di non compiere lo stesso errore, ho ritenuto opportuno non soffermarmi troppo a lungo su definizioni di teoria musicale, spesso ritenendole conosciute o lasciandole in note a piè di pagina, preferendo per snellezza concentrarmi su formalizzazioni, risultati e commenti degli stessi. La mia speranza è che questo sia risultato alla fine un lavoro leggibile a chiunque in possesso di un'infarinatura di base di teoria musicale.

NOTA SULLE CITAZIONI: tutte le citazioni correnti, in quanto immerse nel fluire del discorso, sono tradotte dall'Autore per facilitare la lettura (lasciando a volte l'originale in una nota a piè di pagina). Nel caso di citazioni consistenti o per le quali si ritiene importante mantenere la lingua originale si va a capo, si mantiene la lingua del testo di riferimento, e si propone una traduzione dell'Autore a piè di pagina.

⁴ Il termine duale è per tutta la tesi riferito al concetto della teoria dei grafi di duale topologico, così come definito al paragrafo 4.3.

Capitolo 1

1.1 RAGIONI DEL LEGAME TRA MUSICA E MATEMATICA

La convinzione che tra la Musica e la Matematica ci sia un profondo contatto è tanto diffusa nel pensiero comune quanto è estesa l'assenza di risposte sulle sue ragioni. Le difficoltà di approccio ad entrambe le discipline possono rendere difficile la comprensione di tale legame e possono costringere ad un'immagine superficiale e parziale delle sue spiegazioni. In particolare contribuisce in questo senso la vaghezza nel definire i limiti della Matematica nella storia del pensiero; Fisica (e Meta-Fisica), Scienze Naturali e Filosofia si sono intrecciate con la Matematica prima che questa, alla fine del diciannovesimo secolo, proclamasse coscientemente e definitivamente la sua indipendenza, le sue metodologie e i suoi limiti. Il suo definirsi come disciplina formale è un fatto ancora non completamente assodato nei non addetti ai lavori. Questo, forse, perché ad un livello elementare la Matematica si studia attraverso le sue applicazioni e si apprende aiutandosi con rappresentazioni intuitive, senza raggiungere sempre una visione più generale della materia. Così, se ad esempio Matematica e Musica si incontrano nell'Acustica, non è comunemente chiaro che ciò avviene in modo del tutto indiretto: l'Acustica, infatti, indaga e rappresenta i fenomeni naturali mediante modelli matematici; la Matematica ha quindi un ruolo strumentale, e i suoi modelli non sono sfruttati per rappresentare direttamente gli oggetti musicali, ma piuttosto la loro manifestazione fenomenica come suono.⁵

Occorre specificare quindi che con la parola Musica non si intende semplicemente un particolare aggregato di suoni, ma piuttosto una loro percezione e conseguente interpretazione e categorizzazione da parte dell'uomo: quando si ascolta della Musica la si scompone in configurazioni familiari attraverso le quali ci si immerge in un gioco sintattico di aspettative. Tali capacità di categorizzazione dipendono sia dal soggetto sia dal contesto che comporta uno specifico apprendimento, ovviamente sulla base di

⁵ Riguardo questa distinzione si rimanda ad un'interessante proposta di un'ontologia della Musica presente in [MAZZOLA 1998].

attitudini innate e comuni. A questo proposito un'analogia interessante è stata proposta da John A. Slodoba:

Per un maestro di scacchi, la rappresentazione mentale di una posizione non è una copia della scacchiera come si presenta fisicamente, quanto piuttosto una descrizione più astratta, strutturale, dei rapporti significativi tra gruppi di pezzi. Con anni di esperienza, egli ha acquistato dei meccanismi percettivi automatici che sono in grado di cogliere [...] le configurazioni strategiche che si presentano più spesso. [...] La maggior parte del materiale musicale può essere raggruppata in configurazioni strutturate quanto le posizioni degli scacchi. Vi sono idiomi specifici entro cui si incontrano regolarmente molte configurazioni (come gli accordi, le scale, gli arpeggi e in generale gli oggetti di ogni Teoria Musicale), e una persona che è esposta a quell'idioma si familiarizzerà rapidamente con le configurazioni relative.⁶

Percezione e memoria musicale agiscono quindi come astrazione del fenomeno fisico: concludendo la Musica si trasmette nella realtà fisica come suono, ma prende vita in quanto tale in una sua specifica rappresentazione. «Ciò che apprendiamo sono le strutture che utilizziamo per rappresentare la Musica.»⁷ O, per dirla con Riemann: «l'ascolto musicale non è semplicemente un processo passivo dell'orecchio, ma una manifestazione delle sviluppate funzioni logiche dell'intelletto.»⁸

D'altra parte sembra ragionevole affermare che ogni discorso musicale sia impostato e giocato sulla dialettica tra invarianza e diversità, ammettendo le innumerevoli relazioni che si delineano sull'asse di questa opposizione e che cadono sotto il concetto di trasformazione. In effetti la nostra cultura intende la Musica come la disciplina delle relazioni tra suoni, o, più in generale, tra oggetti più o meno astratti che in qualche modo fanno riferimento al sonoro; oggetti che vengono spontaneamente o consapevolmente alienati e incastrati in forme e organizzazioni che siamo portati a definire musicali. Ciò lo si ricorda per sottolineare che in effetti le componenti categorica e relazionale sono presenti sempre nell'atto di ascoltare, ma appaiono sublimati in strutture specifiche e di estrema profondità e complessità nella Musica (sia essa ascoltata o solamente concepita). Il secondo capitolo sarà proprio dedicato all'introduzione delle strutture di base legate al parametro delle altezze.

Ritornando quindi alle ragioni del rapporto tra Matematica e Musica appare evidente che esse risiedano in primo luogo proprio nelle modalità di categorizzazione del materiale musicale. Esperimenti di Psicologia Cognitiva hanno sottolineato come anche nell'ascolto i processi di categorizzazione si basino principalmente su una dimensione relazionale. Ad esempio è stato mostrato come comunemente le melodie non vengano ricordate in termini di altezze e durate assolute, ma di rapporti tra di esse, rapporti

⁶ [SLOBODA 1998].

⁷ Ibid.

⁸ [RIEMANN 1914-1915].

astratti discretizzati dal continuum sonoro nel quale vengono percepiti.⁹ Appare perciò evidente che ogni cultura musicale si configura su un corpo finito di strutture che determinano i presupposti generativi di ogni composizione, e queste strutture sono proprio gli oggetti di ogni Teoria Musicale. Questo aspetto relazionale è sicuramente il motivo più evidente del legame tra Matematica e Musica, ed è stato sempre presente nella storia della Musica.

Infatti, le difficoltà nello stabilire processi di significazione per la Musica sono la principale causa di una forte concentrazione dell'attenzione delle tecniche compositive sulle relazioni tra oggetti musicali astratti. Benché il concetto assolutista di una musica che esprime solo se stessa sia relativamente recente, e faccia riferimento a quella rivoluzione hanslickiana¹⁰ che ha origine nella seconda metà dell'ottocento, e benché un'ottica referenzialista permei l'intera cultura musicale occidentale e non, è vero che i riferimenti extramusicali riguardano sempre discorsi 'intorno' alla musica piuttosto che 'sulla' musica, offrendo solo un sostrato (o una giustificazione) a codici e sistemi musicali specifici, complessi, e indipendenti. Ciò appare evidente fin dal mondo antico, dalla concezione metafisica della musica dei pitagorici, a quella etica nel pensiero aristotelico, con una netta separazione tra un'astratta speculazione attorno alla Musica e una meno nobile pratica musicale. All'atto pratico, difatti, la Musica si configura come l'applicazione di regole, di codici, processi, automatismi, e sistemi che lasciano trasparire le strutture su cui si fonda, e che evidentemente suggeriscono un legame con la Matematica. Si trova testimonianza di ciò nelle parole di importanti pensatori di ogni tempo: «La musica è una disciplina che riguarda i numeri.» (Cassiodoro); «La musica è un segreto esercizio aritmetico, e la persona che a essa si dedica non si accorge di manipolare dei numeri.» (G. W. Leibniz); «La musica è una scienza che deve avere delle regole certe; queste devono essere estratte da un principio evidente che non può essere conosciuto senza l'aiuto della Matematica.» (J. P. Rameau); etc.

Gli sviluppi razionalizzanti della Composizione che caratterizzano il ventesimo secolo hanno comportato poi un'attenzione particolare all'aspetto formale del processo compositivo, conducendo ad un approccio matematico allo stesso. Ciò, insieme a quanto detto sulle contemporanee ricerche di Psicologia Cognitiva, ha portato nell'ambito della musicologia sistematica alla necessità di un'impostazione della Teoria Musicale da un punto di vista matematico per ragioni analitiche, consentendo poi l'inquadramento di una vera e propria Teoria Musicale Matematica. In linea molto generale si può pensare ad

⁹ [ATTNEAVE E OLSON 1971], [LOCKE E KELLAR 1973].

¹⁰ Musicologo e critico musicale di origini austriache, Eduard Hanslick [1825-1904], con il suo testo più celebre *Il Bello Musicale* (1854) propose l'idea di una Musica che non rimanda ad altro al di fuori di sé, in netto contrasto con l'estetica romantica che la individuava come mezzo assoluto per esprimere emozioni. Scrisse lo stesso Hanslick nell'opera citata: «L'effetto della musica sul sentimento non possiede né la necessità, né l'esclusività, né la costanza che un fenomeno dovrebbe presentare per poter costituire la base per un principio estetico.» Per primo, quindi, svincola l'estetica musicale da rapporti assoluti con componenti extramusicali, e argomenta un'estetica di stampo formalista.

essa come la disciplina che si propone di risolvere i problemi della Teoria Musicale attraverso uno studio formale dei suoi oggetti. La forza e la necessità della Matematica nella soluzione di problemi attinenti la Teoria Musicale scaturisce dalla precisione delle definizioni, dalla certezza dei risultati, e dalla capacità di evidenziare con precisione proprietà e relazioni a volte altrimenti invisibili. Ancora oggi gli ambiti di studio della Teoria Musicale Matematica appaiono come un repertorio di ricerche non unificato, per la varietà delle domande e dei contesti in cui nascono, e perché sorgono da una pragmatica ricerca di soluzioni a problemi specifici da parte di chi se ne occupa e di chi se ne è occupato, siano essi matematici, teorici della musica, informatici o compositori.

1.2 TEORIA MUSICALE E MATEMATICA COMBINATORIA

Come accennato nel paragrafo precedente, il fatto che ogni linguaggio musicale si fondi sulla definizione di automatismi e regole è stato, dopo il contatto mediato con l'Acustica, il motivo storicamente più forte della percezione di un legame tra Matematica e Musica. Fin dall'antichità la catalogazione e la parallela enumerazione degli oggetti delle varie teorie musicali ha occupato uno spazio preponderante nelle trattazioni, anche se una cosciente applicazione dei risultati dell'algebra combinatoria è un fatto relativamente recente. Malgrado abbia già affrontato nella mia tesi di triennio il problema del conteggio di alcune strutture legate al parametro delle altezze, ho ritenuto importante quantomeno ricordare in questa sede la generale importanza dei risultati combinatori nella Teoria Musicale, dovendocene occupare, seppure in misura più ristretta, anche in questo lavoro.

Sebbene infatti la definizione dei limiti di un alfabeto musicale possa in prima istanza sembrare in qualche modo limitante al processo creativo e riduttiva del margine di azione del compositore, la consapevolezza che in realtà quelli che si enumerano sono solo oggetti atomici e semplificati, e che anzi il loro conteggio è un pretesto per comprenderne le proprietà e le strutture sottese, non può che essere un ulteriore stimolo alla ricerca in questo senso. Perché difatti ad essere artistico non è tanto un alfabeto, quanto le sue innumerevoli possibilità di impiego, con quell'impalpabile, vivo e sfuggente corpo semantico che rimarrà sempre e comunque insondabile con mezzi formali. Con parole più suggestive aveva già espresso bene questi concetti Mario Garuti nella presentazione del mio lavoro sopracitato: «se avevo considerato la caducità della memoria come necessaria per il processo creativo, in quanto apertura naturale/forzata verso il "possibile", ora posso considerare questo percorso come determinato da un numero preciso di possibilità, anche se altrettanto immenso e meraviglioso.»

1.3 MATEMATICA E COMPOSIZIONE: UNA BREVE PANORAMICA

Guardando poi ai processi compositivi, può essere interessante analizzare in che modo la Matematica abbia consapevolmente influenzato la Composizione. È possibile in linea generale ridurre gli atteggiamenti per una applicazione della Matematica alla Composizione grosso modo in tre categorie¹¹, che non è detto che si escludano mutuamente (e di fatto molto spesso si sovrappongono).

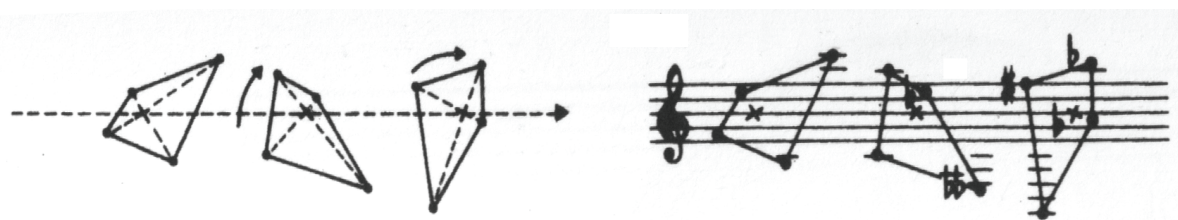
Il primo approccio si potrebbe definire **suggestivo**. La Matematica, con il fascino del suo linguaggio e dei suoi risultati, così astratti e spesso apparentemente impenetrabili, si configura come un suggestivo spunto programmatico, che spesso si innesta proprio sull'alone di mistero che sembra circondarla nel pensiero comune. Il linguaggio matematico può suggerire dei paesaggi concettuali che trascendono il suo significato. Questi possono esistere solo nell'atto compositivo, ma possono anche lasciare una traccia nel titolo, o in indicazioni programmatiche all'interno della composizione. Questa tipologia di approccio non riguarda necessariamente compositori senza nessuna conoscenza matematica. Conoscere la Matematica permette da un lato di legarla con coscienza ad eventuali procedimenti compositivi che possono essere eventualmente sfruttati e dichiarati (nell'ottica delle altre due tipologie di approccio che verranno presentate), e dall'altro di innestare cortocircuiti associativi e simbolici più complessi, suggestioni dall'interpretazione stratificata. Tra i tanti esempi si possono ricordare *Concavo/convesso* (1983) di Claudio Ambrosini, *Geometriche amnesie* (1990-1992) e *Cono in equilibrio sul suo vertice* (2000) di Mario Garuti, e, sotto certi aspetti, i miei *Estensioni libere - di parti connesse* (2005) e *Una teoria della prossimità* (2006).

Un secondo approccio si può definire **organizzativo**: formalizzate determinate relazioni tra gli elementi costitutivi di una composizione musicale, si operano scelte sulla loro selezione ed eventualmente sul loro impiego. La Matematica può avere in questo approccio una dimensione strumentale: fornisce i presupposti e i mezzi che permettono di formalizzare, relazionare, trasformare ed organizzare il materiale sonoro ad ogni livello. Questo atteggiamento può essere molto superficiale (o inconscio, emergendo nella sintassi di qualsiasi linguaggio musicale), o può essere portato alle estreme conseguenze come è accaduto nelle poetiche iperorganizzative strutturaliste (di cui dodecafonìa e serialità sono i precursori), oppure ancora automatizzato in un software. Il problema principale che può scaturire è la confusione tra il procedimento compositivo e il suo risultato, poiché la logica che permea il procedimento compositivo spesso non si riflette sulla composizione all'ascolto. Insomma: la Musica non dovrebbe essere un costrutto logico che può prescindere da un riferimento al sonoro e da tutta la produzione che la circonda. L'avvicinarsi ad un approccio organizzativo senza che si siano considerate problematiche cognitive, espressive e contestuali tipicamente musicali

¹¹ La proposta è dell'Autore.

comporta il rischio che l'intero processo compositivo si risolva all'ascolto in un effetto massivo e di superficie. In generale l'automatismo, di per sé, non basta al risultato estetico. Un esempio riuscito, ante litteram, è offerto dal contrappunto bachiano. Gli artifici imitativi e gli automatismi formali (che ad esempio nell'*Offerta musicale* toccano vette inarrivabili) sono perfettamente incastrati in una sintassi armonica conosciuta ed assodata nella cultura occidentale: lo sforzo nella combinazione dei linguaggi contrappuntistico e armonico è ancora oggi la palestra di molti giovani compositori. Alcuni degli storici esempi significativi di un'applicazione diretta della Matematica alla Composizione secondo un approccio organizzativo si trovano in molto di quella produzione che risente degli insegnamenti delle poetiche seriali, come, per citare alcuni autori, Pierre Boulez e Milton Babbitt, o come molte opere di Iannis Xenakis, che ha fondato un metodo compositivo che sfrutta rigide regole probabilistiche¹², ma anche, allontanandosi da estetiche strutturaliste, nell'impostazione formale fondata sulla sezione aurea della *Musica per archi percussioni e celesta* (1936) di Béla Bartók, nei metodi compositivi autolimitanti della musica di Paul Glass, che tanto hanno influenzato la mia stessa produzione, o nello scrupoloso controllo nella definizione del materiale compositivo in ogni suo aspetto e parametro che emerge dall'analisi delle opere di Witold Lutoslawski. E questo, appunto, solo per ricordarne alcuni.

Un terzo approccio, infine, di confine tra i due presentati, può essere definito **analogico**. Lo spunto offerto dalla Matematica non si limita ad una suggestione, ma influenza in qualche misura il processo compositivo, pur senza il rigore logico e sistematico di un approccio organizzativo. Un buon esempio è il metodo compositivo descritto da Mauricio Kagel in [KAGEL 1960]. Quest'ultimo è basato su un'analogia che si può costruire tra la figure descritte dalle note su una partitura e le figure geometriche. Ciò porta all'applicazione di trasformazioni come rotazioni e traslazioni delle figure per la stesura della partitura. È evidente che tali processi di trasformazione, pur evidenti e ben definiti in termini visuali, non hanno risultati diretti e attendibili sulle altezze e sulle durate. Certamente è inutile ricordare che l'eventuale bontà della composizione rimane sempre e comunque mediata dal gusto e dall'esperienza del compositore.



Esempio da [KAGEL 1959].

¹² Illustrato in [XENAKIS 1992].

Capitolo 2

La modularità del parametro delle altezze è un aspetto indiscutibile della nostra cultura musicale: banalmente il ripetersi del nome delle note in ottave diverse stabilisce una relazione (appunto quella di ottava) privilegiata tra le altezze. La nostra categorizzazione del continuo dello spettro dell'udibile non si limita quindi a discretizzarlo, ma opera un'ulteriore semplificazione attraverso la classificazione delle altezze e degli intervalli. In termini matematici si quozientano i due insiemi.

Benché per la formalizzazione di classi di altezze e di intervalli si faccia in genere riferimento alle opere di Allen Forte¹³ e David Lewin¹⁴, si possono trovare esempi che precedono notevolmente gli autori citati pur presentandone già alcuni aspetti fondamentali, ed in particolare la struttura di gruppo, di cui si discuterà in questo capitolo l'importanza e la peculiarità, in quanto sotteso alla percezione di specifiche relazioni e trasformazioni. Verranno presentati quindi alcuni modelli significativi, sottolineandone proprietà e potenzialità, basandosi sul **Generalized Interval System**¹⁵ (o più semplicemente **GIS**) di David Lewin, modello che, per la sua generalità e bontà, verrà sfruttato come presupposto formale della trattazione dei capitoli successivi.

Si presenteranno poi alcune fondamentali strutture per la rappresentazione di trasformazioni di altezze e di aggregati di altezze, ne verranno studiate le proprietà, le particolarità, e le mutue relazioni soffermandosi sulla formalizzazione di una particolare classe di insiemi di altezze: le triadi.

Seguiranno infine riflessioni sull'applicazione del concetto di azione di gruppo nella formalizzazione di oggetti della teoria musicale, e cenni storici su tale formalizzazione.

¹³ [FORTE 1973].

¹⁴ [LEWIN 1987].

¹⁵ O **sistema degli intervalli generalizzato**. Il termine inglese, la sua traduzione italiana e il suo acronimo saranno utilizzati nel corso della trattazione come sinonimi.

2.1 IL SISTEMA DEGLI INTERVALLI GENERALIZZATO

Si propone il GIS così come definito in [LEWIN 1987]:

DEFINITION: A Generalized Interval System (GIS) is an ordered triple $(S, IVLS, int)$, where S , the space of the GIS, is a family of elements, $IVLS$, the group of intervals for the GIS, is a mathematical group, and int is a function mapping $S \times S$ into $IVLS$, all subject to the two conditions (A) and (B) following.

(A): For all r, s , and t in S , $int(r,s)int(s,t) = int(r,t)$.

(B): For every s in S and every i in $IVLS$, there is a unique t in S which lies the interval i from s , that is a unique t which satisfies the equation $int(s, t) = i$.

[...]

THEOREM: In any GIS, $int(s,s) = e$ and $int(t,s) = int(s,t)^{-1}$.¹⁶

Ricordando che si dice che un gruppo G agisce su un insieme X se esiste una funzione φ definita su $G \times X$ e a valori in X tale che per qualsiasi x appartenente a X :

1. $\varphi(e,x) = x$ con e elemento neutro di G ;
2. $\varphi(g,\varphi(h,x)) = \varphi(gh,x)$ per qualsiasi g e h appartenenti a G ;

e ricordando che l'azione di un gruppo si definisce semplicemente transitiva¹⁷ se per ogni coppia z, w di elementi di X esiste esattamente un elemento j del gruppo G che porta il primo nel secondo, cioè tale che $\varphi(j,z) = w$, è banale dimostrare che la definizione di Lewin equivale alla seguente.

DEFINIZIONE Si definisce **sistema degli intervalli generalizzato** la coppia (X, G) , dove X è un insieme detto delle **altezze**, e G è un gruppo abeliano detto degli **intervalli** che agisce in modo semplicemente transitivo su X .

Si noti che non si effettua a priori nessuna ipotesi né sulle dimensioni di X né sulle dimensioni di G , né tantomeno sulla natura di G al di fuori della commutatività. In effetti è proprio in questa generalità che risiede la bontà del modello, che permette di rappresentare ogni temperamento sia ad un livello fisico (e quindi di frequenze), che mentale (e quindi di altezze percepite). Volendo in questa sede limitarsi al sistema temperato se ne presentano i due GIS ad un livello sia fisico che mentale.

¹⁶ [LEWIN 1987]. *DEFINIZIONE:* Un Sistema degli Intervalli Generalizzato (GIS) è una tripla ordinata $(S, IVLS, int)$, dove S , lo spazio del GIS, è un insieme, $IVLS$, il gruppo degli intervalli per il GIS, è un gruppo nel senso matematico, e int è una funzione definita in $S \times S$ a valori in $IVLS$, e tale da rispettare le seguenti due condizioni (A) e (B):

(A) Per ogni r, s e t appartenenti a S si ha $int(r,s)int(s,t) = int(r,t)$.

(B) Per ogni s appartenente ad S ed ogni i appartenente a $IVLS$, esiste un unico t appartenente ad S che giace ad una distanza data dall'intervallo i da s , cioè esiste un unico t che soddisfa l'equazione $int(s,t) = i$.

[...]

TEOREMA: In ogni GIS, $int(s,s) = e$ e $int(t,s) = int(s,t)^{-1}$.

¹⁷ O, equivalentemente, libera e transitiva.

ESEMPIO 2.1.1 In termini fisici le altezze del sistema temperato sono date da tutte le frequenze generate da un diapason di riferimento e dalla sua moltiplicazione per tutte le potenze intere della $\sqrt[12]{2}$. Quindi fissata una costante reale d detta diapason, $A = \{d(\sqrt[12]{2})^n, n \in \mathbb{Z}\}$, e I è il gruppo moltiplicativo generato da $\sqrt[12]{2}$.

ESEMPIO 2.1.2 Riguardo invece la loro categorizzazione si consideri l'insieme infinito di tutte le altezze della scala cromatica, dove la non finitezza (presente anche nell'esempio precedente) è data dall'inclusione per generalità di ultrasuoni e infrasuoni. Risulta evidente che il più piccolo intervallo è il semitono, con il quale (proprio perché si sta trattando il sistema del temperamento equabile) è possibile generare tutti gli altri possibili intervalli. Il gruppo degli intervalli sarà allora un gruppo isomorfo al gruppo additivo degli interi \mathbb{Z} con semitono ed unità che si corrispondono. Un intervallo sarà infatti rappresentato da un elemento di \mathbb{Z} , numero intero che conta i semitoni in esso contenuti.

DEFINIZIONE Si indica con **A** l'insieme delle altezze temperate (in sostanza quindi le note di una scala cromatica infinita) e con **In** il gruppo degli intervalli temperati come appena definiti nell'Esempio 2.1.2.

Avendo limitato la trattazione al sistema temperato non si rischia confusione nell'omettere nel loro nome il riferimento al temperamento equabile.

E' di interesse sottolineare che è proprio l'azione degli intervalli che permette di ordinare le altezze su un asse dal grave all'acuto. Definita infatti per ogni GIS una relazione d'ordine sugli intervalli è possibile ricavare dalla stessa una relazione d'ordine sulle altezze secondo le seguenti definizioni.

DEFINIZIONE Dati due intervalli g e h di In si dice che g è **più ampio** di h e si scrive $g >_{In} h$ se e soltanto se il valore assoluto dell'intero che rappresenta g nell'isomorfismo con \mathbb{Z} è maggiore del valore assoluto dell'intero h .

Ad esempio l'intervallo di quinta giusta ascendente (che in In si rappresenta con l'intero 7) è più ampio dell'intervallo di quarta giusta discendente (che in In si rappresenta con l'intero -5), in quanto evidentemente $|7| > |-5|$.

DEFINIZIONE Date due altezze qualsiasi x e y di A , si scrive $x >_A y$ e si dice che x è **più acuto** di y se e soltanto se $g^{-1} >_{In} g$ con $\varphi(x, g) = y$.

A questo punto è interessante costruire un GIS (verrà direttamente ricavato da quelli appena presentati) che risponda di quella modularità del parametro della altezze a cui si faceva riferimento nell'introduzione al capitolo. Essendo l'intervallo di ottava la relazione più semplice tra due altezze, e, in quanto tale, l'unico intervallo fissato in ogni temperamento, come è venuto naturale nello storico definirsi della teoria musicale occidentale fissare il nome delle note a meno di tale intervallo, sembra ragionevole (e si rivelerà efficace) stabilire una relazione di equivalenza sull'insieme delle altezze nel seguente modo.

DEFINIZIONE Due altezze x e y di A si dicono **uguali a meno di ottava**, e si scrive $x \equiv_{12} y$, se e soltanto se $\varphi(x, 12n) = y$, con $n \in \mathbb{Z}$, dove, con riferimento all'isomorfismo tra \ln e \mathbb{Z} descritto nell'Esempio 2.1.2, con 12 si intende evidentemente proprio l'elemento di \ln che indica l'intervallo di ottava.¹⁸

Ciò permette quindi di considerare le altezze di A a meno di intervallo di ottava, all'interno di classi rappresentative. Allo stesso modo è possibile stabilire una relazione di equivalenza sugli elementi del gruppo degli intervalli \ln .

DEFINIZIONE Due elementi g e h di \ln si dicono **equivalenti a meno di ottava** e si scrive $g \approx_{12} h$ se e soltanto se $g = 12n + h$, con n intero.

Ci sono ora tutti gli strumenti per definire quello che si stava cercando.

DEFINIZIONE Si definisce **insieme delle classi di altezze A_{\equiv}** l'insieme quoziente ottenuto da A per mezzo della relazione di equivalenza \equiv_{12} .

DEFINIZIONE Si definisce **gruppo delle classi di intervalli \ln_{\approx}** il gruppo quoziente $\ln/12\mathbb{Z}$.

Evidentemente \ln_{\approx} è isomorfo a $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, e su di esso rimane ragionevolmente definita la relazione d'ordine $>_{\ln}$, mentre non ha più alcun senso considerare la relazione $>_A$ su A_{\equiv} . Si introduce quindi il seguente importante risultato.

¹⁸ Questo permette peraltro di chiarire, se ancora fosse necessario, l'isomorfismo tra \ln e \mathbb{Z} che mappa l'intervallo nell'intero che conta i semitoni che lo formano. Gli elementi di \ln (e poi dei suoi quozienti) saranno quindi in seguito indicati sempre con tali interi.

LEMMA 2.1.1 La coppia $(A_{\equiv}, \text{In}_{\approx})$ è un GIS.

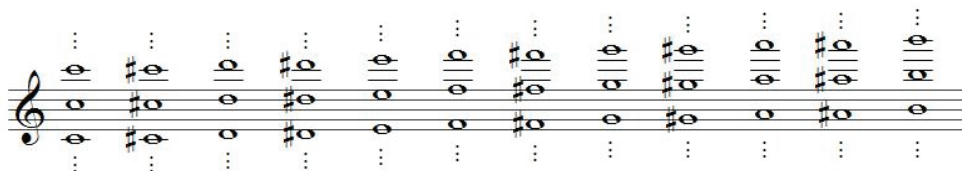
DIMOSTRAZIONE. Basta mostrare che i dodici elementi del gruppo delle classi di intervalli agiscono in modo semplicemente transitivo sui dodici elementi di A_{\equiv} , ma ciò è diretta conseguenza dell'azione libera e transitiva di In su A e della definizione dei loro quozienti. •

Nelle figure che seguono si riportano A e A_{\equiv} :¹⁹

$$A = \{ \dots, \text{Do}_3, \text{Do}\#_3, \text{Re}_3, \text{Re}\#_3, \text{Mi}_3, \text{Fa}_3, \text{Fa}\#_3, \text{Sol}_3, \text{Sol}\#_3, \text{La}_3, \text{La}\#_3, \text{Si}_3, \text{Do}_4, \text{Do}\#_4, \dots \}$$



$$A_{\equiv} = \{ \text{Do}, \text{Do}\#, \text{Re}, \text{Re}\#, \text{Mi}, \text{Fa}, \text{Fa}\#, \text{Sol}, \text{Sol}\#, \text{La}, \text{La}\#, \text{Si} \}$$



2.2 INSIEMI DI ALTEZZE E DI INTERVALLI; TRIADI

E' di interesse a questo punto considerare aggregati di altezze e loro sovrastrutture.

DEFINIZIONE Si definiscono **insiemi di classi di altezze** tutti i sottoinsiemi di A_{\equiv} . Tutti gli insiemi di classi di altezze costituiscono quindi l'insieme delle parti di A_{\equiv} .

DEFINIZIONE Si definiscono **insiemi di classi di altezze ordinati**²⁰ tutti i sottoinsiemi ordinati di A_{\equiv} .²¹

¹⁹ Per evitare confusione si indicheranno dove possibile altezze e classi di altezze enarmonicamente utilizzando solamente i diesis. Solo quando si tratteranno le triadi, per sottolineare le relazioni di quinta e terza e per evitare doppi diesis e doppi bemolle, si favorirà la tonalità con il minor numero di armature in chiave.

²⁰ Si indicheranno sempre con le parentesi quadre i sottoinsiemi ordinati.

²¹ L'ordinamento non avviene necessariamente secondo la relazione $>_A$ o $>_{\text{In}}$ definite nel paragrafo precedente. Infatti gli insiemi ordinati di altezze sono utili per rappresentare incisi melodici, scale o serie, e per tali rappresentazioni l'ordinamento è da darsi di volta in volta in virtù di una specifica esigenza. Si ricorda che comunque nell'ambito del presente lavoro non saranno presi in considerazione sottoinsiemi con ripetizione (che consentirebbero ad esempio di trattare intere melodie). In ogni caso per una completa trattazione degli insiemi di altezze (e di intervalli) si rimanda a [FORTE 1973].

DEFINIZIONE Si definiscono **insiemi di classi di intervalli ordinati**²² tutti i sottoinsiemi ordinati degli elementi di \ln_{\approx} .

Ad esempio $\{Do, Sol, La\}$ è un insieme di classi di altezze, e, non essendo ordinato, si può scrivere equivalentemente in tutte le sei possibili permutazioni dei suoi elementi ($\{Sol, Do, La\}, \{Do, La, Sol\}, \dots$). $[Do, Sol, La]$ è invece un insieme di classi di altezze ordinato, e $[7, 2]$ è l'insieme di classi di intervalli ordinato che si dice associato a tale insieme, in quanto $\varphi(Do,7)=Sol$ e $\varphi(Sol,2)=La$.

Ad ogni insieme di classi di altezze ordinato di ordine n è allora sempre associabile un unico insieme di classi di intervalli ordinati di ordine $n-1$. Si introduce ora un oggetto analogo per gli insiemi di classi di altezze non ordinati.

DEFINIZIONE Si definiscono **vettori intervallari** tutti gli insiemi ordinati di interi che contano le ricorrenze delle classi di intervalli a meno di rivolto considerando tutte le possibili coppie non ordinate di un insieme di classi di altezze di A_{\approx} secondo la seguente convenzione: si indica con $\langle k, v, w, z, y, x \rangle$ dove x è il numero di tritoni, y di quarte (o quinte), z di terze maggiori (o seste minori), w di terze minori (o seste maggiori), v di seconde maggiori (toni o settime minori), k i semitoni (o settime maggiori).

Non trattando il caso di insiemi di altezze con ricorrenze (cioè tali che le classi di altezze si possono ripetere) non ha senso contare gli unisoni. Evidentemente ad ogni insieme di altezze è associato un unico vettore intervallare²³, e il numero delle ricorrenze (quindi la somma degli elementi del vettore) sarà sempre uguale a $n(n-1)/2$, con n uguale alla cardinalità dell'insieme.

Si consideri a titolo di esempio ancora l'insieme di classi di altezze $\{Do, Sol, La\}$: il vettore intervallare associato sarà quindi $\langle 0, 1, 1, 0, 1, 0 \rangle$, in quanto, verificando ogni coppia possibile (l'ordine, per definizione, è indifferente, poiché si tiene il rivolto più piccolo), $\varphi(Do,7)=Sol$, $\varphi(Sol,2)=La$ e $\varphi(Do,9)=La$. Si consideri sempre a titolo di esempio il seguente insieme di classi di altezze $\{Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si\}$. Nel paragrafo 2.6 verrà definito formalmente attraverso il concetto di insieme di altezze diatonico, per ora basti notare che è l'insieme che corrisponde alla scala di Do maggiore (i tasti bianchi del pianoforte). Il suo vettore intervallare è $\langle 2, 5, 4, 3, 6, 1 \rangle$. Si noti che ogni intervallo ha un numero differente di occorrenze, e questa è una proprietà di ogni insieme di altezze diatonico.

Il vettore intervallare permette di definire formalmente una particolare categoria di classi di altezze.

²² I **basic interval patterns** o **BIP** in [FORTE 1973].

²³ Nel prossimo paragrafo si vedrà invece quanti insiemi di altezze sono invece associati allo stesso vettore intervallare.

DEFINIZIONE Si definiscono **triadi** gli insiemi di classi di altezze di tre elementi il cui vettore intervallare è $\langle 0, 1, 1, 1, 0, 0 \rangle$. L'insieme delle triadi si indica con **S**.

Si definisce quindi infine un particolare ordinamento per gli insiemi di classi di altezze.

DEFINIZIONE Si dice che un insieme di classi di altezze è ordinato secondo un **ordine normale** se l'ordinamento è tale che la somma²⁴ degli intervalli che ci sono tra le coppie distinte e consecutive è minima rispetto agli altri ordinamenti, ossia se è l'ordinamento che minimizza la somma degli elementi dell'insieme degli intervalli ordinato associato.

Si consideri ad esempio il seguente insieme di altezze $\{Re, Si, Do\}$, i sei ordinamenti possibili sono $[Re, Si, Do]$, $[Re, Do, Si]$, $[Do, Si, Re]$, $[Do, Re, Si]$, $[Si, Do, Re]$ e $[Si, Re, Do]$, i cui insiemi degli intervalli ordinati associati sono rispettivamente $[9, 1]$, $[10, 11]$, $[11, 3]$, $[2, 9]$, $[1, 2]$ e $[3, 10]$. Evidentemente $[Si, Do, Re]$ è l'unico insieme ordinato secondo un ordine normale.

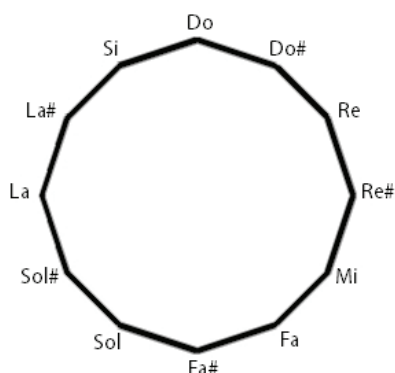
2.3 IL GRUPPO T-I

Nella definizione del GIS l'azione del gruppo di intervalli su un insieme di altezze esprime una relazione tra gli elementi di tale insieme, e permette di stabilire principi per ordinarle. E' possibile però anche interpretare l'azione del gruppo degli intervalli come una trasformazione su tutto l'insieme delle altezze. Limitando sempre la trattazione ad A_{\cong} si può quindi proporre la seguente definizione.

DEFINIZIONE Si definisce **gruppo delle trasposizioni** o **T** il gruppo che agisce su A_{\cong} in modo identico a In_{\cong} e i cui elementi si indicano con T_g con g elemento di In_{\cong} la cui azione è identica a quella di T_g .

Può sembrare ridondante definire un gruppo identico a quello degli intervalli, ma è importante distinguere una relazione tra altezze da una trasformazione che porta altezze in altezze. Si visualizzino ora le altezze sui vertici di un dodecagono come indicato dalla seguente figura.

²⁴ Somma, evidentemente, nei naturali e non in $Z/12Z$!



Evidentemente le trasposizioni appena definite corrispondono alle rotazioni nell'analogo geometrico appena definito.

DEFINIZIONE Si definisce **inversione** o **I** il gruppo che agisce su A_{\equiv} generato dall'elemento di ordine 2 che fissa Do e Fa# e scambia Si e Do#, La# e Re, La e Re#, Sol# e Mi, Sol e Fa.

DEFINIZIONE Si chiama **T-I** il gruppo generato dagli elementi di T e di I.²⁵

LEMMA 2.3.1 T-I è isomorfo al gruppo diedrale di ordine ventiquattro.

DIMOSTRAZIONE. Le dodici traslazioni con l'identità dell'inversione corrispondono alle rotazioni del dodecagono. L'inversione corrisponde alla simmetria assiale con asse che passa per i vertici corrispondenti a Do e Fa#, e quindi con le dodici traslazioni da le sei simmetrie assiali che fissano due punti e le sei simmetrie assiali che fissano due lati del dodecagono. •

Essendo gli elementi del gruppo T-I trasformazioni che nell'analogo geometrico conservano la rigidità del dodecagono e conseguentemente delle figure inscritte (che corrispondono agli insiemi di classi di altezze) viene spontaneo chiedersi cosa conservi in termini musicali l'azione del gruppo T-I su A_{\equiv} .

LEMMA 2.3.2 L'azione di ogni elemento di T-I su un insieme qualsiasi di classi di altezze ne conserva sempre il vettore intervallare associato.

DIMOSTRAZIONE. T-I ha due generatori: a, la traslazione di semitono (o settima maggiore, quinta, o quarta) e b l'inversione che fissa Do e Fa# (il generatore del gruppo I). Mostrare che

²⁵ In letteratura il gruppo T-I è usualmente indicato come T/I. Si è scelto di sostituire il simbolo / con il simbolo - per evitare confusione con la simbologia usuale di gruppo quoziente.

entrambi conservano il vettore intervallare assicura che tutto il gruppo lo conservi. Per a è banale. Per b basta invece far vedere che la sua azione conserva l'intervallo tra ogni coppia di altezze x e y . Si presentano tre casi: 1) le due altezze sono i due punti fissi (cioè Do e $Fa\#$), 2) una è un punto fisso l'altra no, 3) entrambe non sono punti fissi. Per 1) è evidente. Per 2) è sufficiente notare che b manda sempre l'altezza x , che supponiamo non essere il punto fisso, in un'altra w tale che l'intervallo tra x e w è uguale al rivolto dell'intervallo tra x e y . Il vettore intervallare infatti conta le ricorrenze degli intervalli a meno di rivolto. 3) segue direttamente da 2) considerando una tripla formata da due altezze diverse da un punto fisso x e y , e un punto fisso k . L'inversione b , per 2), manderà x e y rispettivamente in due altezze w e z tali che l'intervallo tra loro e k sarà uguale al rivolto rispettivamente di quello tra x , y e k . Allora anche l'intervallo tra w e z sarà uguale al rivolto dell'intervallo tra x e y , quindi il vettore intervallare si conserva. •

Siccome l'inversione scambia gli intervalli con il loro rivolto, si potrebbe mostrare allo stesso modo che solo il sottogruppo delle trasposizioni conserva un ipotetico vettore intervallare esteso²⁶, che considera le ricorrenze di tutti gli intervalli di In_{∞} (e non è quindi limitato agli intervalli di In_{∞} a meno di rivolto).

E' interessante considerare due particolari categorie di insiemi di altezze, ossia quelli che si dicono a **trasposizione limitata** e ad **inversione limitata**.

DEFINIZIONE Si definisce a **trasposizione limitata** un insieme di altezze tale che esiste un elemento diverso dall'identità del gruppo delle trasposizioni T che lo trasforma in sé stesso.

DEFINIZIONE Si definisce ad **inversione limitata** un insieme di altezze tale che esiste un elemento di $T-I$ dato dalla composizione dell'inversione che fissa Do e $Fa\#$ con una qualche trasposizione che lo trasforma in sé stesso.

Ad esempio la scala esatonale espressa dall'insieme di altezze $\{Do, Re, Mi, Fa\#, Sol\#, La\#\}$ è sia a trasposizione che ad inversione limitata: infatti tutti i T_n con n pari e con l'inversione che fissa Do e $Fa\#$ lo trasformano in sé stesso. In generale non è però detto che dati due insiemi di altezze con lo stesso vettore intervallare esista un elemento del gruppo $T-I$ che manda il primo nel secondo, e se tale trasformazione non esiste la relazione tra i due si definisce **relazione-Z**. Un esempio di relazione-Z, mostrato già in **[FORTE 1973]**, è dato dai due insiemi di altezze $\{Do, Do\#, Mi, Fa\#\}$ e $\{Do, Do\#, Re\#, Sol\}$, entrambi caratterizzati dal vettore intervallare $\langle 1, 1, 1, 1, 1, 1 \rangle$, ma tali che non esiste elemento di $T-I$ che mappa il primo nel secondo.

²⁶ Il vettore intervallare esteso avrà quindi undici elementi ordinati dalla settima maggiore al semitono.

Seguono un lemma e due corollari interessanti per lo studio delle triadi.

LEMMA 2.3.3 *Gli insiemi di altezze di cardinalità maggiore di 2 e tali che il vettore intervallare associato contiene solo 0 e 1 non sono a trasposizione o inversione limitata.*

DIMOSTRAZIONE. Per assurdo. Si consideri un insieme di altezze di cardinalità maggiore di 2 che sia a trasposizione o inversione limitata e il cui vettore associato contenga solo 0 e 1. Allora, deve esistere un elemento g di $T-I$ diverso dall'identità che manda tale insieme in sé stesso. Siccome g è diverso dall'identità esisterà un elemento x dell'insieme di altezze che g non manda in sé stesso, e tale quindi che $g(x)=y$ con $y \neq x$ e ancora appartenente a tale insieme. Si presentano quindi due possibilità. 1) $g(y) \neq x$. Ne consegue che $g(y)=z$ con z ancora nell'insieme di altezze considerato e tale che l'intervallo tra x e y è uguale all'intervallo tra y e z , perché sappiamo che l'azione di ogni elemento di $T-I$ conserva gli intervalli tra ogni coppia di altezze. Allora tale intervallo dovrà essere contato almeno due volte nel vettore intervallare: assurdo. 2) $g(y)=x$. Quindi, siccome per ipotesi l'insieme considerato non è un bicordo, esisterà un ulteriore elemento w tale che $w \neq x$ e $w \neq y$. Ma poiché l'intervallo tra w e x è uguale all'intervallo tra $g(w)$ e $g(x)$, e, siccome $g(w) \neq x$ (perché g manda già y in x) le due coppie di punti sono sicuramente diverse, e si ha quindi un altro intervallo che dovrà essere contato almeno due volte: assurdo. •

COROLLARIO 2.3.3A *L'orbita di un insieme di altezze di cardinalità maggiore di due e con vettore intervallare contenente solo 0 e 1 rispetto all'azione di $T-I$ ha esattamente 24 elementi. •*

COROLLARIO 2.3.3B *L'orbita di una triade rispetto all'azione di $T-I$ ha esattamente 24 elementi. •*

Quindi, siccome già Allen Forte in [FORTE 1973] ha mostrato che non esistono insiemi di altezze di tre elementi con relazione- Z , in virtù del Corollario 2.3.3B si è certi che al vettore intervallare $\langle 0, 1, 1, 1, 0, 0 \rangle$ che definisce le triadi sono associati esattamente ventiquattro insiemi di altezze di tre elementi, che sono proprio le 24 triadi maggiori e minori. Nel caso delle triadi, si ha un ordine normale quando la triade è in stato fondamentale: le **triadi maggiori** sono allora accomunate dall'insieme di intervalli orientato associato $[4, 3]$, le **triadi minori**, invece, dall'insieme $[3, 4]$. Si noti infine che ogni triade maggiore si può ottenere per mezzo di un'inversione da una triade minore. Le prime formano l'insieme S^+ , le seconde l'insieme S^- . Le triadi saranno indicate in seguito con il corrispondente insieme di altezze in ordine normale oppure con il nome della fondamentale seguito da un + per le triadi maggiori o da un - per le minori.

Evidentemente quindi il gruppo $T-I$, agendo su tutti gli insiemi di classi di altezze, agisce anche sulle triadi, trasformando triadi in triadi. Si introduce nel prossimo paragrafo un interessante gruppo di trasformazioni la cui azione è limitata all'insieme di tutte le triadi. Mentre l'azione delle trasposizioni è di facile calcolo, quella dell'inversione può essere più ardua. Si riporta quindi nel seguente schema l'azione dell'inversione che fissa Do e $Fa\#$ su tutte le triadi maggiori e minori.

Do+	↔	Fa-
Do#+	↔	Mi-
Re+	↔	Re#-
Re#+	↔	Re-
Mi+	↔	Do#-
Fa+	↔	Do-
Fa#+	↔	Si-
Sol+	↔	La#-
Sol#+	↔	La-
La+	↔	Sol#-
La#+	↔	Sol-
Si+	↔	Fa#-

2.4 IL GRUPPO-PLR

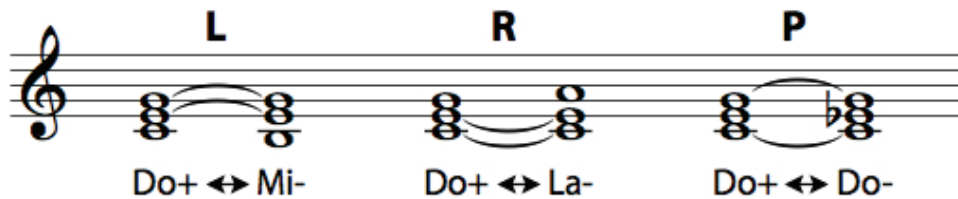
DEFINIZIONE Il **gruppo-PLR**, il cui nome è determinato dalle iniziali dei nomi inglesi dei suoi tre suoi elementi fondamentali **P (Parallel)**, **L (Leading Tone Exchange)**, **R (Relative)**, è il gruppo che agisce sulle triadi generato dalla composizione di tre elementi la cui azione è così definita: **P** porta una triade minore (maggiore) nella triade maggiore (minore) parallela, **R** porta una triade nel relativo (maggiore o minore), **L** porta una triade maggiore nella triade minore una terza maggiore sopra, o, viceversa, una triade minore in una triade maggiore una terza maggiore sotto.²⁷

Si notino le tre seguenti fondamentali proprietà che accomunano P , L e R : 1) tutti e tre gli elementi sono l'inverso di se stessi, 2) e portano sempre triadi minori in triadi maggiori o triadi maggiori in triadi minori; 3) ognuna delle tre trasformazioni agisce fissando due elementi delle tre altezze coinvolte dalla triade e spostando il restante in modo da avere ancora una triade²⁸: di un tono (R) o di un semitono (P e L). Rispettando 3)

²⁷ Proposte per una definizione formale e generalizzata delle trasformazioni appena descritte sono presenti nel quinto capitolo. Per ora, poiché si stanno gettando le basi per la trattazione del quarto capitolo, si è deciso di limitarsi ad un approccio più intuitivo e sempre mediato dal significato musicale.

²⁸ Nel prossimo capitolo si vedrà come storicamente la proprietà 3) sia stata il punto chiave dell'attenzione su questa classe di trasformazioni.

le tre trasformazioni esauriscono tutte le possibilità: P mette in relazione le triadi che hanno in comune le altezze a distanza di una quinta, L le altezze a distanza di una terza minore, R di una terza maggiore. La seguente figura, che mostra l'azione delle tre trasformazioni sulla triade di Do maggiore, ha lo scopo di togliere ogni eventuale dubbio sul gruppo appena presentato.



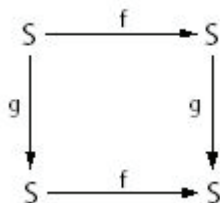
Il seguente lemma chiarisce la struttura del gruppo-PLR.

LEMMA 2.4.1 *Il gruppo-PLR è isomorfo al diedrale di ventiquattro elementi.*

DIMOSTRAZIONE. *Si ricorda che per dimostrare che un gruppo è isomorfo al diedrale di ventiquattro elementi è sufficiente trovare due generatori, a e b , rispettivamente di ordine 2 e 12, e mostrare che vale la seguente uguaglianza: $aba=b^{-1}$. Si scelgono quindi due elementi, $a=L$ e $b=LR$, e si mostra innanzitutto che sono due generatori del gruppo; in questo caso, vista la definizione del gruppo-PLR, che è generato dalla composizione degli elementi P , L e R , basta mostrare che P e R possono essere ottenuti da una qualche composizione di L e LR : infatti $P=(LR)^8L$ e $R=(LR)^{11}L$. Quindi si procede evidenziando il loro ordine: per definizione L ha ordine 2; per LR basta constatare che la sua azione sulle triadi è identica a quella di T_7 , che ha ordine 12. Resta solo da mostrare che vale $aba=b^{-1}$. Infatti $L(LR)L=LLRL=RL=(LR)^{11}=(LR)^{-1}$.*

2.5 RELAZIONI TRA T-I E IL GRUPPO-PLR

Se si visualizzano $T-I$ e il gruppo-PLR come sottogruppi del gruppo simmetrico di ordine 24 (ossia del gruppo delle permutazioni delle 24 triadi maggiori e minori) emerge una relazione interessante tra i due: il diagramma che segue, con f elemento di $T-I$ e g elemento del gruppo-PLR, commuta.



Ciò lo si mostra attraverso il seguente teorema.

TEOREMA 2.5.1 $T-I$ e il gruppo-PLR sono uno il centralizzatore²⁹ dell'altro.

DIMOSTRAZIONE. Si considerino i due generatori di $T-I$, a e b come definiti nel lemma 2.3.2, e i due generatori del gruppo-PLR, $c=LR$ e $d=L$. Si mostra innanzitutto che le quattro possibili coppie commutano: quindi che a commuta con c e d e che b commuta con c e d . Per le due coppie a, c e a, d è facile siccome a è il trasporto di un semitono, c si comporta come il trasporto di una quinta giusta, e d mappa le triadi minori in maggiori e quelle minori in maggiori ad intervalli prefissati. Si mostra quindi esaurientemente che b e d commutano per tutte le triadi:

Do+ ↔ ^L Mi- ↔ ^L Do#+	Do- ↔ ^L Sol#+ ↔ ^L La-
Do+ ↔ ^L Fa- ↔ ^L Do#+	Do- ↔ ^L Fa+ ↔ ^L La-
Re+ ↔ ^L Fa#- ↔ ^L Si+	Do#- ↔ ^L La+ ↔ ^L Sol#-
Re+ ↔ ^L Re#- ↔ ^L Si+	Do#- ↔ ^L Mi+ ↔ ^L Sol#-
Re#+ ↔ ^L Sol- ↔ ^L La#+	Re- ↔ ^L La#+ ↔ ^L Sol-
Re#+ ↔ ^L Re- ↔ ^L La#+	Re- ↔ ^L Re#+ ↔ ^L Sol-
Mi+ ↔ ^L Sol#- ↔ ^L La+	Re#- ↔ ^L Si+ ↔ ^L Fa#-
Mi+ ↔ ^L Do#- ↔ ^L La+	Re#- ↔ ^L Re+ ↔ ^L Fa#-
Fa+ ↔ ^L La- ↔ ^L Sol#+	Mi- ↔ ^L Do+ ↔ ^L Fa-
Fa+ ↔ ^L Do- ↔ ^L Sol#+	Mi- ↔ ^L Do#+ ↔ ^L Fa-
Fa#+ ↔ ^L La#- ↔ ^L Sol+	La#- ↔ ^L Fa#+ ↔ ^L Si-
Fa#+ ↔ ^L Si- ↔ ^L Sol+	La#- ↔ ^L Sol+ ↔ ^L Si-

²⁹ Si ricorda che si definisce centralizzatore di un sottogruppo, il sottogruppo di elementi che commutano con ogni elemento di esso.

Lo stesso si potrebbe dettagliatamente mostrare per la coppia b, c . Quindi, siccome tutti gli elementi di $T-I$ possono essere espressi nella forma $a^i b^j$ (con i compreso tra 1 e 12 e j tra 1 e 2), e tutti gli elementi del gruppo-PLR possono essere espressi nella forma $c^h d^k$ (con h compreso tra 1 e 12 e k tra 1 e 2), si dimostra facilmente da quanto appena mostrato per ogni possibile coppia di generatori che due elementi qualsiasi dei due gruppi commutano. •

Il teorema appena dimostrato permette di dimostrare facilmente che i due gruppi sono diversi.

TEOREMA 2.5.2 $T-I$ e il gruppo-PLR sono diversi.

DIMOSTRAZIONE. Direttamente dal fatto che non sono abeliani e sono uno il centralizzatore dell'altro. •

Interessante è anche la loro intersezione.

TEOREMA 2.5.3 $T-I$ e il gruppo-PLR hanno in comune 12 elementi. In particolare il gruppo delle trasposizioni T è un sottogruppo del gruppo-PLR.

DIMOSTRAZIONE. LR , che si può scrivere anche come $(RL)^{11}$, si comporta in modo identico a T^7 , generatore del gruppo delle trasposizioni.³⁰ Quindi T è un sottogruppo anche del gruppo-PLR ed è nell'intersezione non può avere 24 elementi (i due gruppi sono diversi), ma è tale, in quanto sottogruppo di entrambi, che la sua cardinalità è un divisore di 24, da cui la tesi. •

Non è un caso che, essendo uno il centralizzatore dell'altro, $T-I$ e il gruppo-PLR condividano il loro sottogruppo abeliano massimale.

E' possibile inoltre mostrare direttamente con l'ausilio di un esempio che il gruppo I e il gruppo-PLR hanno in comune solo l'identità (corollario del teorema appena dimostrato): infatti l'inversione agisce sulle triadi diversamente da qualsiasi elemento del gruppo-PLR. Per verificarlo basta considerare due triadi, ad esempio, $Sib+$ e $Do+$, e mostrare che l'inversione le manda rispettivamente in $Sol-$ e $Fa-$, e che non esiste nessun elemento del gruppo-PLR che agisce allo stesso modo, in quanto solo l'elemento R (o $L(RL)^{11}$) porta $Sib+$ in $Sol-$, e solo l'elemento $R(LR)^4$ ($L(RL)^7$) porta $Do+$ in $Fa-$.

Riassumendo, si è dimostrato che $T-I$ e il gruppo-PLR sono entrambi isomorfi al diedrale di ordine ventiquattro (Lemma 2.3.1 e Lemma 2.4.1), sono uno il centralizzatore dell'altro (Teorema 2.5.1), sono diversi (Teorema 2.5.2), e che il gruppo delle trasposizioni T è un sottogruppo di entrambi e forma la loro intersezione (Teorema 2.5.3).

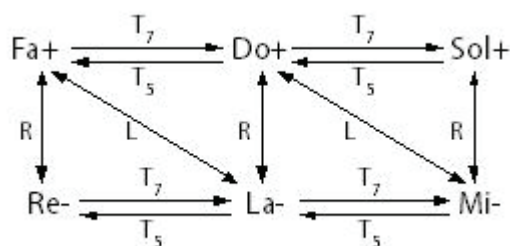
³⁰ Nel definire gli elementi del gruppo-PLR si può scegliere se sfruttare la rappresentazione che comincia con L o con R per ogni elemento, allo stesso modo in cui per gli elementi del gruppo delle trasposizioni T è possibile considerare potenze negative ($T^5 = T^7$).

2.6 INSIEMI DI ALTEZZE DIATONICI

Il risultato dimostrato nel paragrafo precedente aiuta a visualizzare notevoli relazioni tra le 6 triadi generate da un insieme di altezze diatonico³¹, che aprono ad interessanti considerazioni di natura armonica.

DEFINIZIONE Si definiscono **insiemi di altezze diatonici** gli insiemi di altezze di sette elementi ordinabili per quinte.

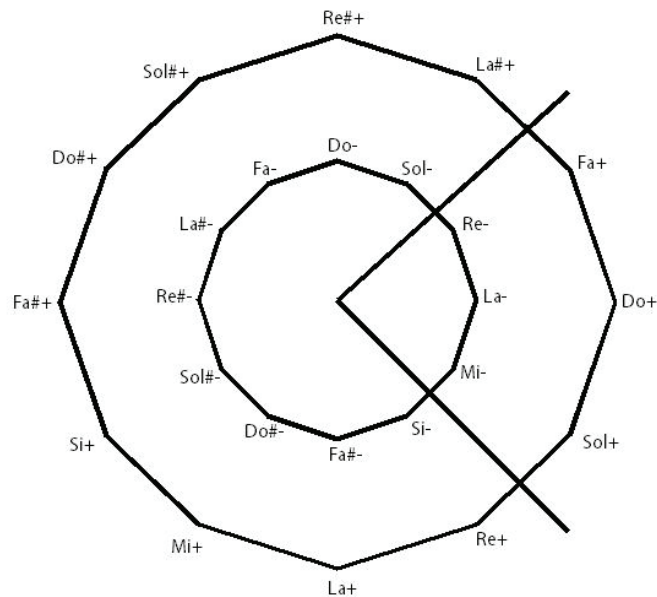
Si consideri quindi ad esempio la scala di Do maggiore (La minore), evidentemente ad essa è associato il seguente insieme di altezze diatonico ordinato $[Fa, Do, Sol, Re, La, Mi, Si]$ i cui elementi definiscono le 6 seguenti triadi: $Fa+$, $Do+$, $Sol+$, $Re-$, $La-$, $Mi-$. Si riporta in seguito un diagramma che le relaziona secondo alcuni elementi del gruppo T -I e del gruppo-PLR.



Si noti innanzitutto come le uniche trasformazioni che si sono utilizzate nel diagramma siano T_7 (o il suo inverso T_5), e L e R (che sono l'inverso di se stessi), e come lo stesso diagramma sottolinei le seguenti uguaglianze tra alcuni elementi dei due gruppi (la prima era già emersa nella dimostrazione del lemma 2.4.1): $LR = T_7$ e $RL = T_5$.

P non avrebbe potuto ovviamente esserci nel diagramma perché determinerebbe un'incertezza modale incompatibile con il sistema diatonico. Inoltre si noti la limpidezza della struttura con tre triadi maggiori ordinate per quinte e le relative minori a loro volta ordinate per quinte. Si noti infine che come gli insiemi di altezze diatonici si possono definire come insiemi di altezze ordinabili per quinte, e lo spostamento ad una tonalità alla distanza di una quinta implica necessariamente una rotazione dell'insieme sul circolo delle quinte, così allo stesso modo avviene per le triadi generate da una scala diatonica, su due circoli delle quinte concentrici, su uno le tonalità maggiori sull'altro le tonalità minori, accoppiando i relativi, come rappresentato nella figura che segue.

³¹ Evidentemente la triade costruita sulla sensibile non rientra nella nostra trattazione in quanto diminuita.



Da quanto detto si intuisce anche qualcosa di più sul significato delle uguaglianze $L = RT_7 = T_7R$ e sulla loro relazione con gli insiemi diatonici. Si associ infatti ad ogni triade (sia essa maggiore e minore) l'insieme di altezze diatonico di cui è la tonica. Evidentemente ad ogni insieme diatonico sono associate due triadi, una minore e una maggiore, la cui relazione è espressa da R che quindi conserva le alterazioni in chiave. Per le uguaglianze appena riportate inoltre L aggiunge o toglie un'alterazione in chiave come T_7 e T_5 .

2.7 ALCUNE RIFLESSIONI CONCLUSIVE

Un passaggio delicato nella trattazione del capitolo è sicuramente la definizione del gruppo delle trasposizioni, che agisce in modo identico a quello degli intervalli sull'insieme di classi di altezze. Il significato della necessità di dare due nomi diversi a due strutture identiche risiede nel fatto che l'azione del gruppo degli intervalli esprime una relazione tra le altezze, permettendo peraltro una relazione d'ordine sulle stesse, mentre l'azione del gruppo delle trasposizioni esprime invece una trasformazione di altezze e di insiemi di altezze. Inoltre, in un GIS, il concetto di altezza è indissolubilmente legato al concetto di intervallo, essendo esso definito come una coppia nella quale le due strutture si necessitano e si definiscono vicendevolmente. Tale caratteristica rispetta proprio quell'aspetto relazionale della percezione, categorizzazione e memoria del parametro delle altezze di cui si diceva nel primo capitolo.

Nella letteratura precedente la definizione del GIS, e anche in alcuni testi posteriori, è abitudine rappresentare le altezze come interi, e quindi le classi di altezze direttamente come gli elementi del gruppo $Z/12Z$. Ciò, pur permettendo un'immagine intuitivamente semplice delle relazioni intervallari tra le altezze, comporta enormi errori concettuali,

caricando le altezze di una dimensione quantitativa, e permettendogli di operare tra loro come elementi di un gruppo. Questa scorrettezza è giustificata quindi solamente dal fatto che i testi interessati sono destinati a musicisti e compositori, e che tale rappresentazione è formalmente più accessibile.

Infine è interessante sottolineare come tutte le trasformazioni determinate dall'azione dei gruppi $T-I$ e PLR conservino qualcosa (nello specifico l'invariante è il vettore intervallare), allo stesso modo in cui le trasformazioni del gruppo diedrale, a cui sono isomorfi, secondo una visualizzazione geometrica, trasformano rigidamente una figura in se stessa. Questo può aprire a notevoli considerazioni su come la nostra percezione e categorizzazione dei parametri del suono sia affine alla nostra percezione e categorizzazione visiva, rispondendo a nostre capacità generali di rapportarci al mondo che ci circonda. Ha sintetizzato ed esteso bene questo concetto Cassirer, riallacciandosi al pensiero di Leibniz.

The object of geometry is the study of a particular "group" of transformations; the general group-concept, however, "preexists" in our minds, at least potentially. It is, as Leibniz would say, a concept of intellectus ipse: "it is imposed on us not as a form of our sensibility, but as a form of our understanding."³²

O, per dirla con Riemann:

In this fashion, the hearing of changes in pitch level is transformed into a vision of changes in location, and we already have a presentiment of the ultimate identification of the essence of visual and aural imagination.³³

In effetti non potevano che essere delle strutture legate agli intervalli, che per primi esprimono una relazione tra le altezze, a determinare criteri di invarianza per le stesse.

³² [CASSIRER 1944]. *Lo scopo della geometria è lo studio di un particolare "gruppo" di trasformazioni; il concetto di gruppo, comunque, "preesiste" nelle nostre menti, almeno potenzialmente. E', come avrebbe detto Leibniz, un concetto dello stesso intelletto: "ci è imposto non come una forma del nostro sentire, ma come una forma del nostro capire."*

³³ [RIEMANN 1914-1915]. *In quest'ottica, l'ascolto di cambiamenti nelle altezze è interpretato come spostamenti percepibili visivamente, e noi avevamo già un presentimento dell'identificazione dell'essenza delle rappresentazioni visive e uditive.*

Capitolo 3

Si presenterà la storia del Tonnetz, dal sistema di accordatura introdotto da Eulero che ne precede la definizione al suo impiego nelle teorie di Arthur von Oettingen e Hugo Riemann fino ad una breve panoramica del suo impiego nelle moderne teorie neo-riemanniane.



Eulero in un ritratto del 1737.

3.1 EULERO E LA TRATTATISTICA MUSICALE

Il primo esempio di Tonnetz risale al *Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae* [EULERO 1739], scritto da Eulero nel 1731 all'età di ventiquattro anni e pubblicato solo otto anni dopo, quando il matematico era a San Pietroburgo, membro della sezione di medicina e fisiologia dell'Accademia istituita pochi anni prima da Caterina I. Il suo interesse per la teoria musicale non è limitato all'opera sopracitata, del 1727 è una tesi sul suono pubblicata a Basilea alla quale seguono: *Exposition de quelques nouvelles vues mathématiques dans la théorie de la musique* (1760), *Conjecture de la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique*, *Tentamen de sono campanarum* (tutti del 1764), e *De harmoniae veris principiis perspeculum musicum repraesentatis* (1774). Inoltre i primi decenni del diciottesimo secolo rivelano una particolare attenzione da parte di famosi matematici e fisici a

problemi legati alla teoria musicale, certamente ancora influenzati dal retaggio culturale medioevale del 'quadrivium', e al tempo stesso stimolati dagli sviluppi delle scienze fisiche e dal loro contatto con la disciplina musicale. Cartesio, Keplero, Leibniz, Galileo e Mersenne sono tra i nomi noti della storia della scienze matematiche e fisiche che dedicano parte della loro opera alla teoria musicale.

3.2 ALTEZZE E GRADI DI CONSONANZA NEL TENTAMEN DI EULERO

Nel suo *Tentamen* Eulero discute innanzitutto il concetto di consonanza, fondandolo sul confronto tra le frequenze tra due suoni³⁴:

*Duobus sonis propositis percipiemus eorum relationem, si intelligamus rationem, quam pulsuum eodem tempore editorum numeri inter se habent; ut si alter eodem tempore 3 pulsus perficiat, dum alter 2, eorum relationem adeoque ordinem cognoscimus observantes hanc ipsam rationem sesquialteram. Similique modo plurium sonorum mutuam relationem comprehendimus, si omnes rationes, quas singulorum sonorum numeri vibrationum eodem tempore editarum inter se tenent, cognoscemus.*³⁵

Seguendo la tradizione³⁶, per cui un rapporto tra due altezze è tanto più consonante tanto più semplice è il rapporto tra le frequenze associate, Eulero sviluppa il concetto di grado di consonanza.

*...si ratio 1:p ad gradum, cuius index sit m, referatur, rationem 1:2p ad gradum m + 1 pertinere, 1:4p ad gradum m + 2 et 1:2ⁿp ad gradum m + n. Multiplicato enim numero p per 2 ad rationis perceptionem requiritur praeter perceptionem rationis 1:p bisectio aut duplicatio, qua ut simplicissima operatione gradus suavitatis unitate evehitur. Simili modo determinare licet gradum suavitatis rationis 1:pq, si p et q fuerint numeri primi; nam ratio 1:pq eo magis est composita quam 1:p, quo 1:q magis est composita quam 1:1. Ergo rationis 1:pq gradus cum p, q et 1 debet proportionem arithmetica constituisse, unde erit igitur p + q - 1.*³⁷

³⁴ Ciò è evidentemente in linea con la tradizione pitagorica, in cui il rapporto tra due altezze era espresso come rapporto tra le due lunghezze del monocordo che le genera. È interessante notare però come nel suo *Conjecture de la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique* del 1764 Eulero ammetta che l'orecchio tolleri piccole variazioni nel rapporto percepito tra due altezze, anticipando risultati di psicoacustica e mostrando una mentalità non offuscata dalla rigidità del modello matematico nelle sue applicazioni.

³⁵ [EULERO 1739]. *Dati due suoni sapremo la relazione tra di essi se avremo il rapporto tra il loro numero di vibrazioni nello stesso tempo. Se ci fossero 3 vibrazioni per il primo e 2 per il secondo sapremo la loro relazione e il loro ordine osservando il loro rapporto. Allo stesso modo possiamo dedurre la mutua relazione tra più suoni, se conosciamo il numero di vibrazioni nello stesso tempo per ognuno dei suoni interessati.*

³⁶ Gioseffo Zarlino nel suo *Istitutioni harmoniche* del 1558 costruisce una 'scala naturale' mediante l'impiego esclusivo di rapporti semplici.

³⁷ [EULERO 1739]. *Se il rapporto 1:p è di grado m, il rapporto 2:p è di grado m+1, il rapporto 4:p è di grado m+2, e il rapporto 1:2ⁿp è di grado m+n. La moltiplicazione di p per 2 comporta una relazione tra i rapporti di doppio o metà, che è la più semplice operazione che esprime il passaggio di un grado di consonanza. Allo stesso modo è possibile determinare il grado di consonanza del rapporto 1:pq, supponendo p e q primi, siccome 1:pq è più complesso di 1:p, come 1:q è più complesso di 1:1. Perciò il grado di consonanza del rapporto 1:pq deve formare con i gradi 1, p e q una proporzione aritmetica ed essere quindi uguale a p+q-1.*

Riassumendo, dato un rapporto $1:p$ con p primo, la consonanza è di grado p , dato un rapporto $1:pq$ con p e q primi, la consonanza tra le altezze è di grado $p+q-1$. Infine considerato un rapporto $1:p$ di grado m , $1:2^n p$ sarà di grado $m+n$. Per quanto riguarda invece il caso in cui $m:n$ (con m e n nel caso generale non primi), si dividono m e n per il loro massimo divisore comune k (definito 'esponente'), si considera il minimo comune multiplo h di $m:k$ e $n:k$ e il grado di $m:n$ è il grado di $1:h$.

Evidentemente il grado più semplice è quello che si ha in presenza di due altezze uguali (rapporto $1:1$ o unisono: consonanza massima) al quale segue il rapporto di ottava ($1:2$), i rapporti di dodicesima ($1:3$) e di quindicesima ($1:4$), entrambi di grado tre secondo costruzione. Tutti i gradi che seguono si possono costruire secondo il sistema descritto.

Segue una tabella da [EULERO 1739] che riassume la classificazione dei primi gradi di consonanza.

I.	1.
II.	2.
III.	3; 4.
IV.	6; 8.
V.	5; 9; 12; 16.
VI.	10; 18; 24; 32.
VII.	7; 15; 20; 27; 36; 48; 64.
VIII.	14; 30; 40; 54; 72; 96; 128.
IX.	21; 25; 28; 45; 60; 80; 81; 108; 144; 192; 256.
X.	42; 50; 56; 90; 120; 160; 162; 216; 288; 384; 512.
XI.	11; 35; 63; 75; 84; 100; 112; 135; 180; 240; 243; 320; 324; 432; 576; 768; 1024.
XII.	22; 70; 126; 150; 168; 200; 224; 270; 360; 480; 486; 640; 648; 864; 1152; 1536; 2048.
XIII.	13; 33; 44; 49; 105; 125; 140; 189; 225; 252; 300; 336; 400; 405; 448; 540; 720; 729; 960; 972; 1280; 1296; 1728; 2304; 3072; 4096.
XIV.	26; 66; 88; 98; 210; 250; 280; 378; 450; 504; 600; 672; 800; 810; 896; 1080; 1440; 1458; 1920; 1944; 2560; 2592; 3456; 4608; 6144; 8192.
XV.	39; 52; 55; 99; 132; 147; 175; 176; 196; 315; 375; 420; 500; 560; 567; 675; 756; 900; 1008; 1200; 1215; 1344; 1600; 1620; 1792; 2160; 2187; 2880; 2916; 3840; 3888; 5120; 5184; 6912; 9216; 12288; 16384.
XVI.	78; 104; 110; 198; 264; 294; 350; 352; 392; 630; 750; 840; 1000; 1120; 1134; 1350; 1512; 1800; 2016; 2400; 2430; 2688; 3200; 3240; 3584; 4320; 4374; 5760; 5832; 7680; 7776; 10240; 10368; 13824; 18432; 24576; 32768.

Lo stesso sistema usato per calcolare il grado di consonanza di un rapporto $m:n$ si sfrutta nel metodo di Eulero per derivare il grado di consonanza di un accordo di n altezze nella forma generale $m_1:m_2: \dots :m_n$. A questo proposito è interessante fornire a titolo di esempio un caso particolare. Si consideri l'accordo maggiore, rappresentabile dal rapporto $4:5:6$, e il seguente accordo: $1:2:3:4:5:6:10:12:15:20:30:60$. Segue, per semplificare la lettura, una rappresentazione di entrambi ponendo come altezza di riferimento Do_1 .

Do₁, Do₂, Sol₂, **Do₃**, **Mi₃**, **Sol₃**, Mi₄, Sol₄, Si₄, Mi₅, Si₅, Si₆
 1 : 2 : 3 : **4** : **5** : **6** : 10 : 12 : 15 : 20 : 30 : 60

Secondo il metodo di Eulero i due accordi hanno lo stesso grado di consonanza (in entrambi i casi il minimo comune multiplo è 60 , e di conseguenza il grado è 9), anche se intuitivamente (e ad un primo ascolto) ciò sembra difficile a credersi! In realtà involontariamente Eulero allaccia la sua teoria allo studio di circa un secolo dopo dei suoni armonici o parziali, essendo i suoni da Do_2 a Sol_3 parziali di Do_1 e quelli che seguono delle parziali comuni. La giustificazione è quindi, a posteriori, di natura squisitamente acustica.

3.3 IL GENERE DIATONICO-CROMATICO

Il Tonnetz fa la sua apparizione nel capitolo nono di [EULERO 1739] intitolato *De genere diatonico-chromatico*. Nel capitolo che lo precede, *De generibus musicis*, si prendono in esame quegli strumenti (come quelli a tastiera) che nell'ambito di un'ottava possono produrre un numero limitato di altezze, comportando delle scelte nella loro accordatura che determina un particolare 'genere'.

Specificato che, per equivalenza a meno di ottava³⁸, i generi hanno esponente della forma $2^m A$, Eulero si sofferma sui generi il cui esponente è della forma $2^m 3^n 5^p$.

Tale scelta è giustificata dalla volontà di ridurre a rapporti semplici gli intervalli tra le altezze riducendosi all'uso combinato di ottave, quinte e terze, e si riallaccia ad un'argomentazione più ampia (e quasi olistica) di Leibniz:

*Nos in Musica non numeramus ultra quinque, similes illis populis, qui etiam in Arithmetica non ultra ternarium progrediebantur, et in quibus phrasis Germanorum de homine simplice locum haberet: Er kan nicht über drey zählen.*³⁹

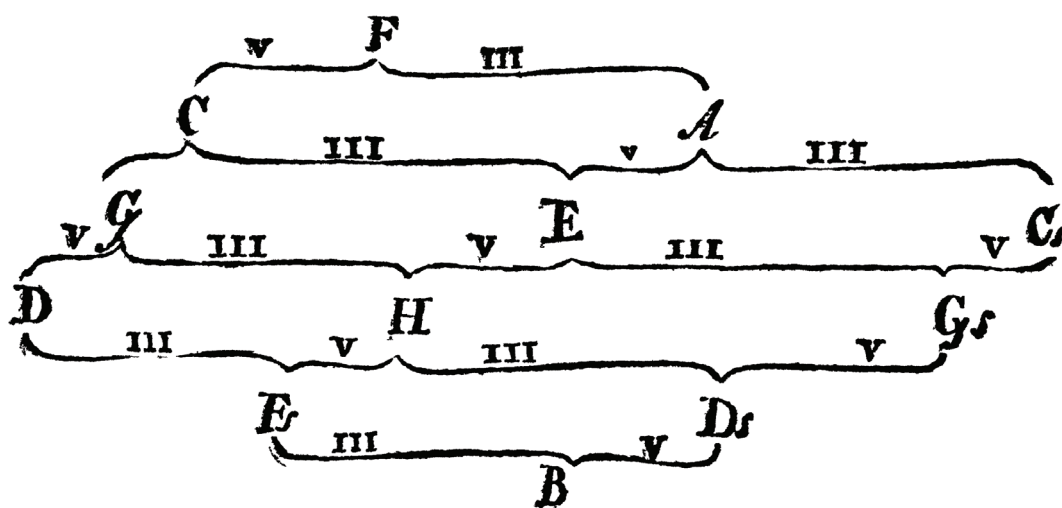
³⁸ Si pensi ad esempio alla tastiera del pianoforte la cui disposizione dei tasti (e quindi i rapporti interni tra le altezze) si ripete uguale ad ogni ottava. Di fatto questa assunzione è l'antenata dell'equivalenza delle classi di altezze (*pitch class equivalence*) della moderna Set-theory.

³⁹ [EULERO 1739]. *Noi in musica non superiamo il cinque, come quei popoli che nell'aritmetica non vanno oltre il numero tre, e in ciò sta l'origine della massima tedesca sull'uomo semplice: che non sa contare oltre al numero tre.*

Infine, a sostegno della sua scelta, argomenta che intervalli ottenuti da rapporti che contengono primi superiori al cinque sono troppo duri e dissonanti.

*Atque sane difficile esset in musicam praeter hos tres numeros alium, puta 7, introducere, cum consonantiae, in quarum exponentes septinarius ingrederetur, nimis dure sonarent harmoniamque turbarent.*⁴⁰

Eulero costruisce quindi diciotto generi, li analizza e in dettaglio e si sofferma sul diciottesimo, il genere diatonico-cromatico, di esponente $2^m 3^3 5^2$. E' proprio nella sua descrizione, che occupa interamente il nono capitolo, che compare la seguente immagine, prima rappresentazione di un Tonnetz.



Prima di proseguire occorre una precisazione: guardando l'immagine salta all'occhio l'intervallo di terza maggiore posto tra F_s e B ($F\#$ e Sib), che invece è una quarta diminuita. Viene spontaneo chiedersi perché Eulero non abbia indicato A_s al posto di B . In realtà, per una convenzione che facilitò la lettura e il confronto tra i generi, Eulero tratta le dodici altezze della scala cromatica enarmonicamente (e tratta tutte le alterazioni come diesis), ed era a tale proposito inutile introdurre un'ulteriore alterazione laddove i tedeschi adottavano già una lettera per indicare quell'altezza.

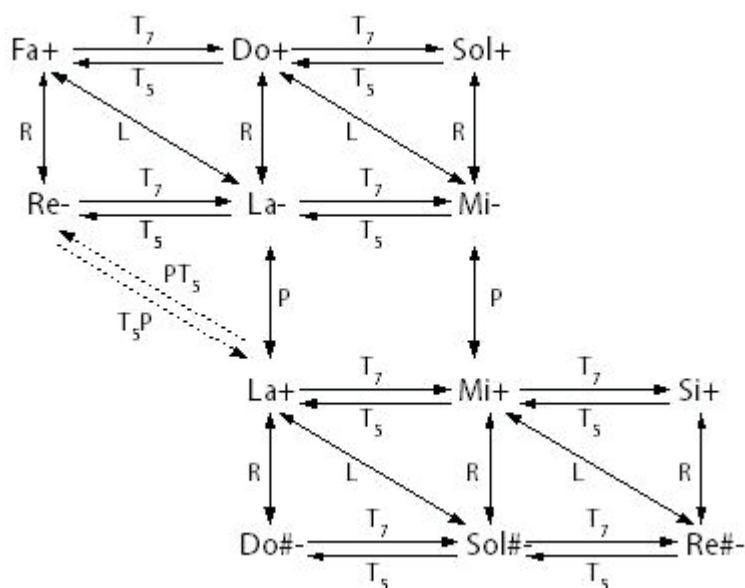
Eulero si sofferma a lungo nel suo trattato sul genere diatonico-cromatico per due principali motivi. Innanzitutto, come emerge proprio dalla figura, il diciottesimo genere consente una praticità nell'accordatura che è garantita dal processo di generazione delle altezze (metà di esse si possono ottenere attraverso percorsi differenti), come spiegato dallo stesso Eulero.

⁴⁰ [EULERO 1739]. Sarebbe certo difficile introdurre in musica rapporti ottenuti da numeri superiori ai tre indicati, siccome un altro, ad esempio il 7, comporterebbe intervalli troppo duri che disturberebbero l'armonia.

Scrive infatti:

*Cum ergo soni E, H, Gs, Fs, Ds et B duplici modo tum per quintas tum per tertias determinentur, ex hoc non contemnendum obtinebitur subsidium in temperandis instrumentis, cum error qui forte sit commissus, statim percipi et corrigi queat.*⁴¹

In secondo luogo Eulero ritiene che sia il più adatto alla musica del suo tempo, in quanto è l'unico dei diciotto generi della forma $2^m 3^n 5^p$ a contenere tutte le dodici altezze della scala cromatica⁴², consentendo, sempre secondo il matematico, ogni modulazione. In realtà solo dodici triadi, di cui 6 maggiori e 6 minori, sono interamente costituite da terze minori e maggiori e da quinte giuste naturali, e, in riferimento a quanto introdotto nel paragrafo 2.6, fanno completamente riferimento ai due insiemi di altezze diatonici a cui sono associate le scale di Do maggiore (La minore) e Mi maggiore (Sol# minore). Le dodici triadi interessate sono raffigurate nel seguente schema. Si noti che il rapporto dominante-tonica è espresso dall'azione su una triade maggiore di T_5 o di T_5P .



Armonicamente, in tali tonalità (Do maggiore, Mi maggiore e relativi minori), sembrerebbe quindi che la consonanza dell'armonia naturale delle triadi sia effettivamente garantita.

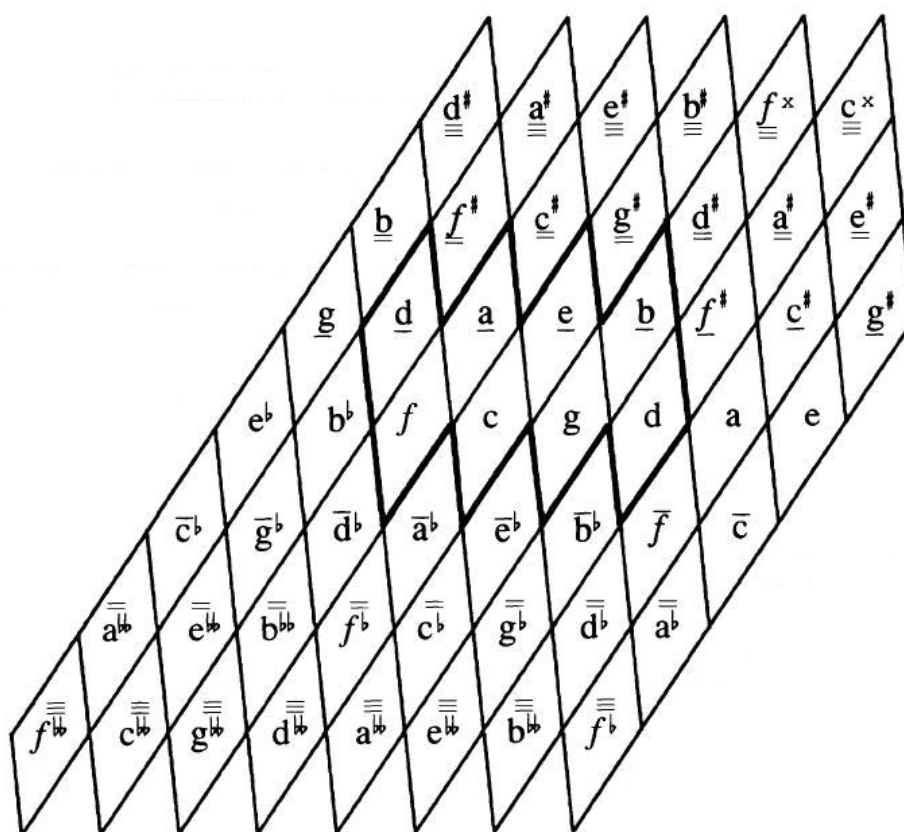
⁴¹ [EULERO 1739]. Quindi i suoni Mi, Si, Sol#, Re# e Si si possono determinare in due modi, sia per intervallo di quinta che per intervallo di terza, e della tal cosa non si può non notare la praticità nell'accordatura degli strumenti, essendo possibile percepire e correggere un errore che sia stato commesso per caso.

⁴² E ciò è garantito da deviazioni trascurabili dal sistema temperato verificate dallo stesso Eulero.

3.4 IL TONNETZ DI EULERO

Così come presentata da Eulero, la figura che precede la definizione del Tonnetz non è ancora uno spazio di altezze nel senso che verrà spiegato nei prossimi paragrafi e nel prossimo capitolo; il suo fine è semplicemente quello di rappresentare determinati rapporti intervallari per generare il totale cromatico a meno di ottava, e ciò avviene con il fine preciso dell'accordatura.

La figura del capitolo nono però, indipendentemente dall'impiego successivo di Oettingen e di Riemann, acquista interesse se rapportata alla biografia di Eulero: solo cinque anni dopo la stesura del *Tentamen* la sua soluzione del problema dei ponti di Königsberg getta le basi della teoria dei grafi e della topologia, come se interamente nella sua produzione si gettassero i presupposti delle moderne teorie neo-riemanniane.



Esempio di Tonnetz in [Riemann 1914-1915].

3.5 IL TONNETZ DI OETTINGEN E RIEMANN

Arthur von Oettingen in [OETTINGEN 1866] e poi, con maggiore chiarezza, Hugo Riemann in [RIEMANN 1914-1915] definiscono una tavola di relazioni tonali che richiama il moderno Tonnetz, una rete di altezze che ne esplicita specifiche relazioni, seppure con intenti diversi, nella descrizione di sistemi armonici. Le due figure (nella pagina precedente si riporta quella che compare nel testo del secondo autore) condividono la costruzione che segue nella descrizione di Riemann:

The well-known table of tonal relationship [...] displays synoptically a large number of varying tone designations through ascending fifths (right), descending fifths (left), ascending thirds (up) and descending thirds (down). All major chords are in the area Δ , all minor chords in the area ∇ (root and fifth are in the same row; over-third is in the next higher row, under-third in the next lower one).⁴³

E' da sottolineare che nella trattazione di Oettingen e di Riemann il Tonnetz si estende su un piano infinito (si vedrà come le teorie neo-riemanniane limitandosi al sistema temperato comportino una topologia diversa), ma anche Riemann, come Eulero, sente la necessità di chiarire le capacità di approssimazione dell'orecchio, suggerendo di fatto l'estensione delle sue teorie al sistema temperato, e riconoscendo peraltro il limite di tale approssimazione nel comma sintonico.

On the one hand, the implementation of pure tuning would complicate significantly the instruments and methods of practical music making, and render their use a near impossibility. On the other hand, our organ of hearing fortunately is so disposed that absolutely pure intonation is definitely not a matter of necessity for it. [...] This enharmonic identification of acoustical values that differ by a syntonic comma is simply indispensable to our musical hearing.⁴⁴

Nel Tonnetz di Riemann inoltre compaiono tutti gli elementi sui quali si fondano le teorie neo-riemanniane, e questa è in effetti l'ovvia ragione del nome di tali teorie. Infatti Riemann sfrutta il Tonnetz per mostrare particolari relazioni tra le triadi nei termini di altezze in comune che permettono di semplificare relazioni tra le stesse triadi. Questo evidentemente getta le basi delle già presentate trasformazioni P , L e R .

⁴³ [RIEMANN 1914-1915]. *La nota tabella delle relazioni tonali [...] mostra sinotticamente un largo numero di variazioni di tono attraverso quinte ascendenti (destra), quinte discendenti (sinistra), terze ascendenti (sopra) e terze discendenti (sotto). Tutti gli accordi maggiori sono della forma Δ , i minori della forma ∇ (fondamentale e quinta sulla stessa riga, la terza su quella superiore o inferiore).*

⁴⁴ [RIEMANN 1914-1915]. *Da un lato, l'implementazione dell'accordatura naturale complicherebbe significativamente gli strumenti e i metodi della musica, e rende il loro impiego quasi impossibile. D'altro canto il nostro organo dell'udito è fortunatamente tale che l'accordatura naturale non è una necessità. [...] Questa identificazione enarmonica delle altezze che differiscono di un comma sintonico è semplicemente indispensabile per l'ascolto.*

Per Riemann infatti la mente è facilitata nel rappresentare e interpretare le strutture musicali per mezzo di relazioni semplici:

*Let attention be drawn here to the definite inclination of the interpreting mind to find its way easily through the confusion of endless possibilities of tonal combinations (in melody and harmony) by means of preferring simple relationship over more complicated ones. This Principle of Greatest Possible Economy for the Musical Imagination moves directly toward the rejection of more complicated structures.*⁴⁵

La visione di Riemann è estramamente moderna, e si può dire che prepari tutti i presupposti epistemologici della teoria musicale matematica. Lo stesso Riemann l'ha perfettamente riassunta in una frase:

*Music listening is not merely a passive processing of the ear but, on the contrary, a highly evolved manifestation of the logical functions of the human intellect.*⁴⁶



Hugo Riemann.



Arthur von Oettingen.

⁴⁵ [RIEMANN 1914-1915]. Si concentri ora l'attenzione sul fatto che la mente preferisce relazioni semplici rispetto a quelle complicate quando tenta di orientarsi nella confusione delle infinite possibilità delle combinazioni tonali (nella melodia e nell'armonia). Questo Principio della Più grande Economia Possibile per l'Immaginazione Musicale deriva direttamente e proprio dal rifiuto di strutture complicate.

⁴⁶ [RIEMANN 1914-1915]. L'ascolto musicale non è semplicemente un processo passivo dell'orecchio, ma al contrario una manifestazione altamente sviluppata delle funzioni logiche dell'intelletto umano.

3.6 TEORIE NEO-RIEMANNIANE

Gli anni Ottanta del secolo scorso vedono una matematizzazione delle idee presentate da Oettingen e Riemann, e un particolare interesse alla limitazione al caso del sistema temperato, per ovvie ragioni di evoluzione del linguaggio musicale e, implicitamente, anche per quelle ragioni già anticipate dagli stessi Eulero e Riemann. Tali studi nascono in particolare dalla necessità di analizzare alcuni passaggi della musica post-tonale e triadica della fine dell'Ottocento, difficili da studiare nel contesto della tradizionale armonia tonale. A tale proposito tornano utili anche i mezzi della musicologia sistematica ed in particolare le ricerche nell'ambito della set-theory inizialmente mirati allo studio e alla formalizzazione dei linguaggi atonali. Opere come [FORTE 1973] gettano quindi i presupposti metodologici per l'introduzione di uno studio formale delle funzioni tonali per la prima volta proposta in [LEWIN 1982] e per le già citate generalizzazioni proposte in [LEWIN 1987]. In [HYER 1989] si limiterà per la prima volta l'interesse alle relazioni P , L e R (presentate nel presente lavoro nel secondo capitolo) e si studieranno tali relazioni nel duale topologico del Tonnetz. L'interesse per le teorie riemanniane si estende quindi negli anni a seguire; in [COHN 1998], in cui si introducono tali teorie da una prospettiva storica, se ne riassumono bene le intenzioni e le potenzialità:

These interrelated branches of mathematics provide a productive conceptual framework for characterizing many nineteenth-century ideas about harmony, as well as an efficient technology and descriptive language for making and communicating new discoveries about the properties of triads and related structures, and the relational systems in which they participate.⁴⁷

Il capitolo quarto raccoglie, aggiusta, riordina ed estende alcuni dei risultati nell'ambito di queste teorie con i mezzi della teoria dei grafi e dell'algebra.

⁴⁷ [COHN, 1998]. Queste teorie provvedono ad una fertile struttura concettuale per caratterizzare molte idee riguardo all'armonia del diciannovesimo secolo, così come un efficiente tecnica e un efficiente linguaggio descrittivo per produrre e comunicare nuove scoperte riguardo le proprietà delle triadi e delle strutture ad esse correlate, e i sistemi relazionali che li riguardano.

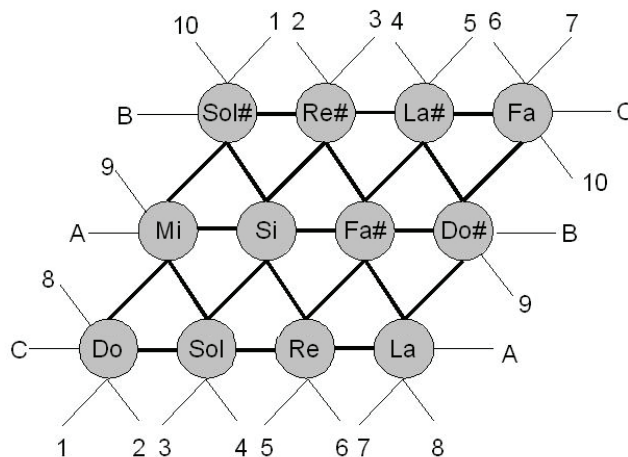
Capitolo 4

Si definiranno e si studieranno dal punto di vista della teoria dei grafi il Tonnetz nel caso temperato e il suo duale topologico, si analizzeranno i loro gruppi di automorfismi e li si relazionerà con i gruppi introdotti nel secondo capitolo. Si presenterà quindi il problema combinatorio del conteggio dei circuiti hamiltoniani nel duale del Tonnetz. Le applicazioni alla composizione e all'analisi musicale dei risultati presentati nel presente capitolo sono interamente lasciati al quinto capitolo.

4.1 COSTRUZIONE DEL TONNETZ

DEFINIZIONE Si definisce **Tonnetz** (e si indicherà con **Ton**) il grafo semplice⁴⁸ 6-regolare ed etichettato di 12 vertici che si ottiene mediante la seguente costruzione: ad ognuno dei dodici vertici si associa una delle dodici classi di altezze di $A_{=}$, e due altezze sono adiacenti secondo gli intervalli a meno di rivolto di quinta (o quarta), terza minore e terza maggiore (sesta maggiore e sesta minore).

Il grafo che si costruisce è riportato nella seguente figura (le lettere non contenute in un cerchio sono sfruttate per indicare le adiacenze e non riguardano l'etichettamento):



⁴⁸ Senza punti adiacenti a sé stessi.

Si noti come seguendo i cammini dati dalle relazioni di quinta (nella rappresentazione appena proposta tali adiacenze sono espresse da linee orizzontali) si ottenga un intero circolo delle quinte (quindi un 12-ciclo), e come invece seguendo quelli dati dalle relazioni di terza minore e maggiore (linee oblique da destra a sinistra e da sinistra a destra) quattro 3-cicli disgiunti e tre 4-cicli disgiunti (che sono i 3 accordi di settima diminuita).

Ton inoltre è planare⁴⁹ se immerso in un toro, e ammette 24 facce triangolari delimitate tutte da 3-cicli. Ciò è interessante perché permette di definirne il duale topologico che, come si vedrà nel prossimo paragrafo, rappresenta oggetti importanti ai fini del presente lavoro.

Per comprendere a fondo la struttura di *Ton* è interessante a questo punto studiare il suo gruppo di automorfismi **Aut(*Ton*)**, cioè il gruppo di trasformazioni che mappa vertici in vertici mantenendo le relazioni di adiacenza. La sua struttura è esplicitata dal teorema che segue.

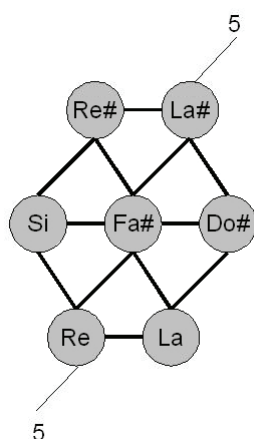
TEOREMA 4.1.1 *Il gruppo Aut(*Ton*) di automorfismi di *Ton* ha esattamente 24 elementi e 2 generatori.*

DIMOSTRAZIONE. *Si è certi che *Ton* contiene almeno 24 elementi, che considerato l'etichettamento corrispondono all'azione degli elementi del gruppo T-I. Infatti nella dimostrazione del Lemma 2.3.2 si è già mostrato che la loro azione conserva l'intervallo a meno di rivolto tra ogni coppia di altezze, e di conseguenza l'adiacenza in *Ton*.*

*Si vuole quindi mostrare che essi sono gli unici. Si chiama quindi f una qualsiasi trasformazione di Aut(*Ton*) che sposta il vertice etichettato come Fa# in un vertice diverso. Esiste sicuramente una qualche trasposizione T_i che composta ad f riporta il vertice Fa# in sé stesso, in quanto si è certi che tutte le trasposizioni sono contenute in Aut(*Ton*). Si chiama allora g l'elemento di Aut(*Ton*) dato dalla composizione di T_i con f e tale che $g(\text{Fa}\#) = \text{Fa}\#$. Se si mostra che g può essere solo l'identità o l'unica inversione che fissa Fa#, si è certi che ogni trasformazione g che fissa il vertice Fa# è un elemento di T-I, e che ogni trasformazione f che lo sposta è ancora per chiusura un elemento di tale gruppo, in quanto è data dalla composizione di due elementi dello stesso T-I. Ripetendo poi il procedimento che segue per ognuno dei 12 vertici di *Ton* si mostra la tesi.*

*Rimane quindi da mostrare che un elemento g di Aut(*Ton*) che fissa Fa# o è l'identità (ovvio) o corrisponde alla composizione del generatore del gruppo I con una qualche trasposizione. Si nota quindi che siccome gli elementi di Aut(*Ton*) mantengono le adiacenze tra i vertici, se si considera il sottografo di *Ton* riportato nella figura che segue e che considera tutte e sole le adiacenze tra i sette vertici Fa#, Re#, La#, Do#, La, Re, Si e Re#, g dovrà sicuramente mandare vertici adiacenti in vertici adiacenti.*

⁴⁹ Quindi è tale che due linee non si intersichino.



Oltre all'identità ci sono solo tre trasformazioni che soddisfano tale proprietà e sono: quelle che scambiano Re e La#, che sono gli unici vertici in tale sottografo di grado 4 e che sono adiacenti, la prima trasformazione scambiando Re# con La e Si con Do#, la seconda, invece, scambiando Re# con Si e Do# con La, e la trasformazione che fissa Re, Fa# e La#, e che scambia Do# con Re# e Si con La. Occorre a questo punto mostrare 1) che la trasformazione che fissa i sette vertici che sono stati isolati fissa necessariamente tutti i vertici di Ton, e corrisponde quindi all'identità; 2) che la trasformazione che scambia Re e La#, Re# con Si e Do# con La non può appartenere al gruppo degli automorfismi, e che 3) nemmeno la trasformazione che fissa Re, Fa# e La# e che scambia Do# con Re# e Si con La può appartenere a tale gruppo; 4) che la rimanente, quella che scambia Re con La#, Re# con La e Si con Do#, determina i restanti vertici in modo unico, ed è quindi la trasformazione g cercata. La dimostrazione si concluderà sottolineando che g agisce sui vertici come il generatore del gruppo I . Si dimostrano quindi nell'ordine i quattro punti sopracitati.

1) Fa, che è adiacente a La# e Do# rimane fisso, in quanto, oltre a Fa#, è l'unico vertice adiacente ad entrambi. Lo stesso dicasi per Sol, che oltre a Fa# è l'unico vertice adiacente sia a Si che a Re, per Mi, che sempre oltre a Fa# è l'unico vertice sia a La che a Do#, e per Sol#, che oltre a Fa# è l'unico vertice adiacente sia a Si che a Re#. Do, essendo stati fissati tutti gli altri vertici, non può che rimanere fisso.

2) Fa, che è adiacente a La# e Do# rimane fisso in quanto oltre a Fa# è l'unico vertice adiacente ad entrambe le loro immagini. Ma anche Sol, adiacente a Si e Re, rimane fisso, in quanto è l'unico vertice oltre a Fa# adiacente alle loro immagini. Mi, che è adiacente a Sol e Si, deve essere mappato in un vertice adiacente alle loro immagini, ossia a Sol e Re#, e tale punto può essere solo Do. Do che è adiacente sia a Sol che a Mi deve essere mappato in un vertice adiacente alle loro immagini, ossia Sol e Do, e tale punto può essere solo Mi. Rimane Sol#, che, siccome tutti i punti restanti sono stati o scambiati o fissati, può solo rimanere fisso, ma ciò è impossibile, perché non conserverebbe l'adiacenza con l'immagine di Do# che è La.

3) Sol#, che è adiacente sia a Re# che a Si, non può che essere mappato in Mi (che è adiacente alle loro immagini Do# e La). Mi, a sua volta, non può che essere mappato in Sol# (si ricorda infatti che Re# e Do#, e Si e La, si scambiano): quindi Mi e Sol# non possono che scambiarsi. Ciò però è impossibile, perché entrambi sono adiacenti a Do#, che è stato mappato in Re#, che non è adiacente ad entrambi.

4) Fa, essendo adiacente sia a La# che a Do#, non può che essere scambiato con Sol (che è adiacente ai vertici con cui si scambiano La# e Do#: rispettivamente Re e Si) e Sol#, seguendo lo stesso ragionamento, essendo adiacente sia a Si che a Re#, non può che essere scambiato con Mi. Infine Do, che è adiacente a Mi, Sol, Re#, Sol#, Fa e La non può che rimanere fissato. •

COROLLARIO 4.1.1 Il gruppo $Aut(Ton)$ di automorfismi di Ton è isomorfo al diedrale di ordine 24.

DIMOSTRAZIONE. *Direttamente dall'isomorfismo tra Ton e $T-I$.*⁵⁰ •

Il fatto che il gruppo degli automorfismi $Aut(Ton)$ agisca sul grafo Ton come il gruppo $T-I$ su A_{\equiv} lascia intendere una relazione particolare tra Ton e il GIS $(A_{\equiv}, In_{\rightarrow})$, relazione che verrà esplicitata nelle generalizzazioni proposte nel paragrafo successivo.

4.2 RETI DI ALTEZZE E TRANSITIVITA' PER VERTICI

Ricordando che un grafo si definisce transitivo per vertici se per qualsiasi coppia di vertici esiste un elemento del gruppo di automorfismi che mappa il primo nel secondo, e sottolineando che un grafo di tale tipo è tale che, a meno di etichettamento, due vertici sono indistinguibili, è banale dimostrare il risultato che segue:

TEOREMA 4.2.1 Il grafo Ton è transitivo per vertici.

DIMOSTRAZIONE. *Direttamente dal fatto che i dodici elementi t, t^2, \dots, t^{12} di $Aut(Ton)$ sono per definizione tali da mappare ognuno dei dodici vertici distinti in tutti gli altri: t li mappa tutti nei vertici etichettati una quinta sopra, t^2 due quinte sopra, e così via chiudendo il circolo delle quinte. Si può mostrare anche, alternativamente, con i dodici elementi it, it^2, \dots, it^{12} .* •

Questo risultato in effetti è imputabile anche direttamente alla struttura di un generico GIS (e non è quindi limitato al caso di $(A_{\equiv}, In_{\rightarrow})$, caso che si sta trattando): imponendo che ad agire sulle altezze sia un gruppo di intervalli, si dimostrerà che ogni grafo che rappresenta una generale rete di altezze⁵¹ come il grafo Ton , e che quindi associa ad ogni elemento di un insieme di altezze distinto un vertice distinto e che impone condizioni di adiacenza su relazioni intervallari, sarà sempre transitivo per vertici (teorema 4.2.2).

⁵⁰ Si indicheranno con t e i i generatori di $Aut(Ton)$ rispettivamente di ordine 12 e 2 e che agiscono sull'etichettamento come T_7 e l'inversione che fissa Do e $Fa\#$.

⁵¹ E Tonnetz, in tedesco, significa proprio rete di altezze.

In effetti un grafo di tale costruzione rappresenta parzialmente (o completamente, nel caso di un grafo completo) le strutture del GIS che è implicitamente coinvolto, rappresentando con vertici gli elementi dell'insieme delle altezze e con linee relazioni espresse da elementi del gruppo di intervalli. Questo permette in effetti di generalizzare il concetto di Tonnetz, e di estendere il risultato del teorema 4.1.2 al caso generale. Ciò può essere effettuato attraverso due definizioni (di fatto due generalizzazioni di concetti già introdotti), un lemma e un teorema.

DEFINIZIONE Dato un GIS si definisce **rete di altezze** un grafo etichettato che ha per vertici tutti e soli gli elementi distinti dell'insieme delle altezze del GIS, e, scelti degli elementi a meno di inversione del gruppo degli intervalli (anche nessuno o tutti), è tale che due vertici sono adiacenti se le altezze che li etichettano sono in relazione mediante l'azione di uno di tali elementi. Si dirà che la rete di altezze è **costruita** sul GIS dato.

Si noti il termine 'rete' nella definizione appena proposta: benché nel grafo costruito non si siano etichettate anche le linee, è evidente che un loro etichettamento è implicito nella costruzione stessa della rete di altezze, e come si possa scegliere poi, e ai fini degli studi che si vogliono effettuare, se tenere o meno tale etichettamento. Ad esempio si vedrà che sarà utile per il duale di *Ton* considerare l'etichettamento delle linee, le quali rappresenteranno una relazione particolarissima. In generale, in una rete di altezze, le linee sono invece etichettabili con intervalli a meno di rivolto.

Nel paragrafo 2.3 è stato introdotto il gruppo delle trasposizioni per il GIS (A_{\equiv}, I_n) ; è possibile generalizzarne la definizione.

DEFINIZIONE Dato un GIS qualsiasi si definisce **gruppo delle trasposizioni** il gruppo che agisce sull'insieme delle altezze in modo identico al gruppo degli intervalli, e i cui elementi si indicano con T_g con g elemento del gruppo degli intervalli la cui azione è identica a quella di T_g .

Tutte le considerazioni effettuate nel secondo capitolo su questo gruppo di trasformazioni sono valide evidentemente anche nel caso generale, ed in particolare le considerazioni relative alla distinzione tra il gruppo delle trasposizioni e il gruppo degli intervalli.

LEMMA 4.2.1 Dato un GIS qualsiasi, e costruita su di esso una rete di altezze, il gruppo delle trasposizioni è sempre un sottogruppo del gruppo di automorfismi della rete di altezze.

DIMOSTRAZIONE. T evidentemente mappa sempre vertici adiacenti in vertici adiacenti. •

TEOREMA 4.2.2 *Una rete di altezze è sempre un grafo transitivo per vertici.*

DIMOSTRAZIONE. *Per il lemma 4.2.1 il gruppo delle trasposizioni è sempre un sottogruppo del gruppo di automorfismi della rete di altezze. Inoltre il gruppo delle trasposizioni, agendo in modo identico al gruppo degli intervalli (la cui azione è liberamente transitiva), è tale che per ogni coppia ordinata di altezze esiste un elemento del gruppo che mappa la prima nella seconda. Allora, per via dell'etichettamento, per ogni coppia ordinata di vertici esiste un elemento del gruppo degli automorfismi che mappa il primo nel secondo: ciò equivale proprio a dire che il grafo interessato è transitivo per vertici. •*

Si noti infine come per la dimostrazione del teorema 4.2.2 sia stato fondamentale che l'azione del gruppo di intervalli sull'insieme delle altezze sia transitiva, condizione che caratterizza la struttura del GIS, e, come si è appena dimostrato, che caratterizza anche una struttura su di essa costruita in un analogo geometrico attraverso il concetto di transitività per vertici.

4.3 COSTRUZIONE DEL DUALE DEL TONNETZ

L'immersione di *Ton* nel toro permette di considerarne il duale topologico, che, come si vedrà, permette di visualizzare con estrema semplicità relazioni tra triadi. Come già era emerso in [RIEMANN 1914-1915] le facce di *Ton* rappresentano triadi se si considerano elementi delle stesse i tre vertici che delimitano la faccia interessata. Siccome il duale topologico di un grafo è un grafo che ha per vertici le facce del primo, ed è tale che due vertici sono adiacenti se le due facce hanno una linea in comune, sembra ragionevole, e sarà efficace, etichettare i vertici del duale con gli elementi dell'insieme *S* delle triadi definito nel paragrafo 2.2.

DEFINIZIONE *Si indica con $D(Ton)$ il duale topologico di *Ton*, e lo si etichetta con gli elementi distinti di *S* in modo tale che a un vertice in $D(Ton)$ corrisponda una triade di *S* se la faccia corrispondente in *Ton* è delimitata dai vertici il cui etichettamento è tale che le tre altezze formino la triade interessata.*

Si noti che: 1) $D(Ton)$ ha ventiquattro vertici, evidentemente uno per ogni faccia di *Ton*, etichettati in modo tale che ad ognuno corrisponda una triade distinta di *S*, e che quindi i vertici corrispondano a tutte le ventiquattro triadi maggiori e minori; 2) due triadi sono adiacenti in $D(Ton)$ se per definizione hanno una linea, e quindi due vertici (altezze), in comune, quindi $D(Ton)$ è 3-regolare ed è tale che ogni vertice è adiacente ad altri 3 secondo una relazione espressa dall'azione sulle triadi che li etichettano data dagli elementi *P*, *L* e *R* del gruppo-*PLR* presentato nel paragrafo 2.4;⁵² 3) $D(Ton)$ è bipartito, ed in

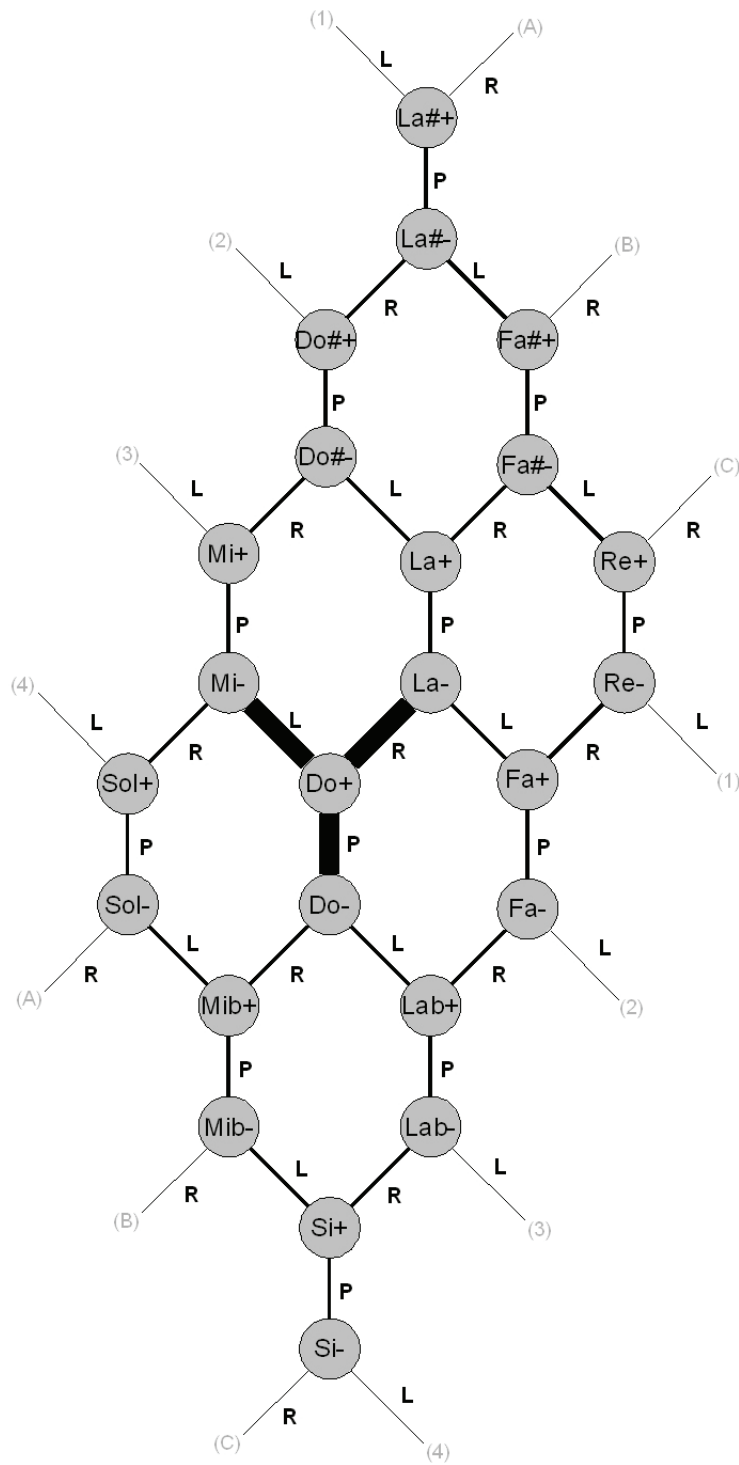
⁵² Ciò si allaccia a quanto accennato nel paragrafo precedente sul fatto che è ragionevole rappresentare $D(Ton)$ come una rete: etichettando anche le linee sarà decisamente più comodo studiare cammini e cicli.

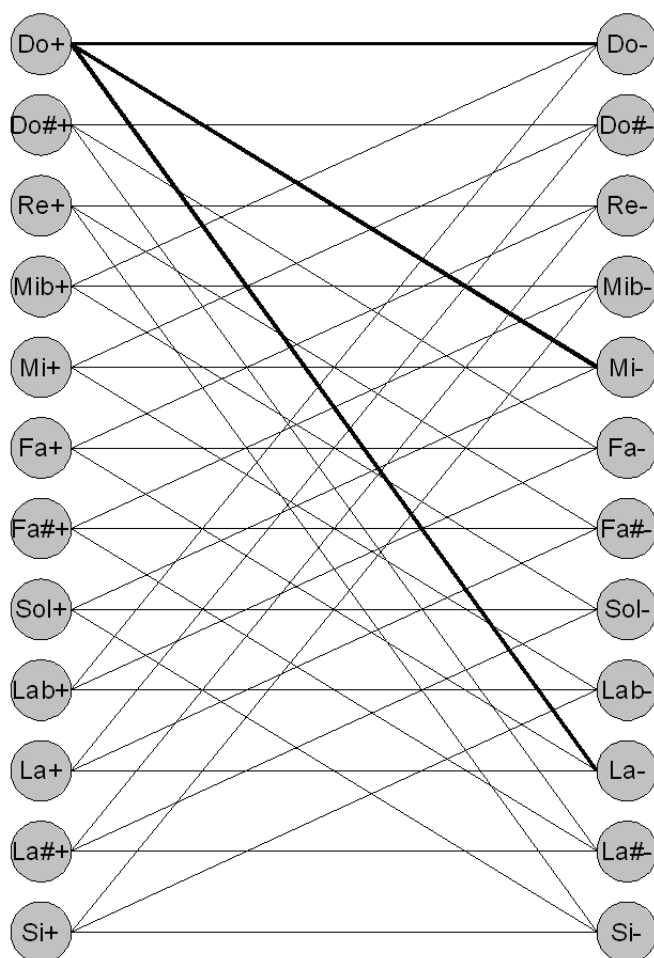
particolare l'insieme dei vertici è partizionato in triadi minori e triadi maggiori, ciò segue direttamente da 2) e dal fatto che le trasformazioni P, L e R sono l'inverso di sé stesse e mappano triadi maggiori in triadi minori e triadi minori in triadi maggiori; 4) $D(Ton)$ è come Ton planare se immerso in un toro e le sue dodici facce corrispondono ai 12 vertici di Ton .⁵³

Si presentano due rappresentazioni grafiche di $D(Ton)$, la prima che ne mette in luce la planarità nel toro, la seconda la bipartizione.⁵⁴

⁵³ Nel paragrafo che segue verrà dato un significato particolare alle 12 facce di $D(Ton)$.

⁵⁴ Le lettere e i numeri in grigio sono sfruttati per indicare adiacenze e non riguardano l'etichettamento.





4.4 CICLI IN $D(TON)$

Si nota facilmente anche dalla sola osservazione del grafo che non ci sono cicli di ordine inferiore a 6, e che ci sono esattamente 16 6-cicli, 12 che delimitano le 12 facce nell'immersione di $D(Ton)$ nel toro, e 4 tra loro disgiunti caratterizzati dalla successione di trasformazioni $PLPLPL$.⁵⁵ Ciò, sul piano musicale, significa che non esistono successioni di triadi distinte in numero inferiore a 6 che attraverso l'impiego delle trasformazioni P , L e R costituiscono un ciclo. Di particolare interesse sono inoltre i 12 cicli che delimitano le facce nell'immersione nel toro: le 6 triadi coinvolte condividono infatti l'altezza in Ton corrispondente alla faccia nel suo duale. Si noti infine l'analogia tra i 4 6-cicli disgiunti di $D(Ton)$ e i 4 3-cicli disgiunti in Ton di cui si faceva cenno nel paragrafo 4.1, e, allo stesso modo, l'analogia tra i 3 8-cicli disgiunti $PRPRPRPR$ in $D(Ton)$ e i 3 4-cicli disgiunti in Ton .

⁵⁵ In seguito si rappresenterà sempre la struttura di un ciclo con l'etichettamento delle linee che lo caratterizzano nella rete. Questo permette appunto una visualizzazione strutturale dello stesso.

Come verrà esplicitato negli esempi del capitolo successivo, un problema interessante è lo studio dei cicli hamiltoniani in $D(\text{Ton})$, e quindi di quei cicli massimali che passano una e una sola volta per tutti i punti; musicalmente ciò corrisponde a trovare quelle successioni di triadi che cambiando una sola altezza ad ogni passo passano per tutte le tonalità maggiori e minori costituendo un ciclo. Osservazioni ulteriori su tali cicli dal punto di vista della teoria musicale sono interamente lasciate al capitolo quinto.

Il problema combinatorio del conteggio dei cicli hamiltoniani in un grafo è citato in [HARARY E PALMER 1973] tra i problemi irrisolti, ed è dimostrato invece in [GAREY E JOHNSON 1983] che il problema è NP-Completo, e che quindi in generale è di difficile soluzione solo attraverso una ricerca esaustiva. In effetti $D(\text{Ton})$ è un grafo con proprietà decisamente particolari, che lascerebbero intravedere semplificazioni nella soluzione del problema combinatorio in termini generali. Data l'importanza di conoscere i cicli hamiltoniani in questo caso specifico, si è deciso di procedere mediante l'impiego del calcolatore con una ricerca esaustiva.⁵⁶

Il risultato sono i 62 cicli hamiltoniani riportati nella tabella nella pagina che segue. Sono stati numerati nell'ordine di output del calcolatore.

⁵⁶ Si è utilizzato il programma *Groups and Graphs* di William Kocay e Christian Palmer nella versione 3.2 (2006) per Mac OSX.

A questo punto è interessante contare i cicli hamiltoniani a meno dell'azione degli elementi del gruppo di automorfismi, e studiarli quindi in termini di cicli di successioni di trasformazioni piuttosto che di successioni di triadi. Le successioni di trasformazioni, infatti, rappresentano la struttura stessa del ciclo come un insieme di intervalli ordinato rappresenta la struttura di un insieme di altezze.⁵⁷ Per farlo occorre innanzitutto conoscere la struttura del gruppo di automorfismi di $D(\text{Ton})$.

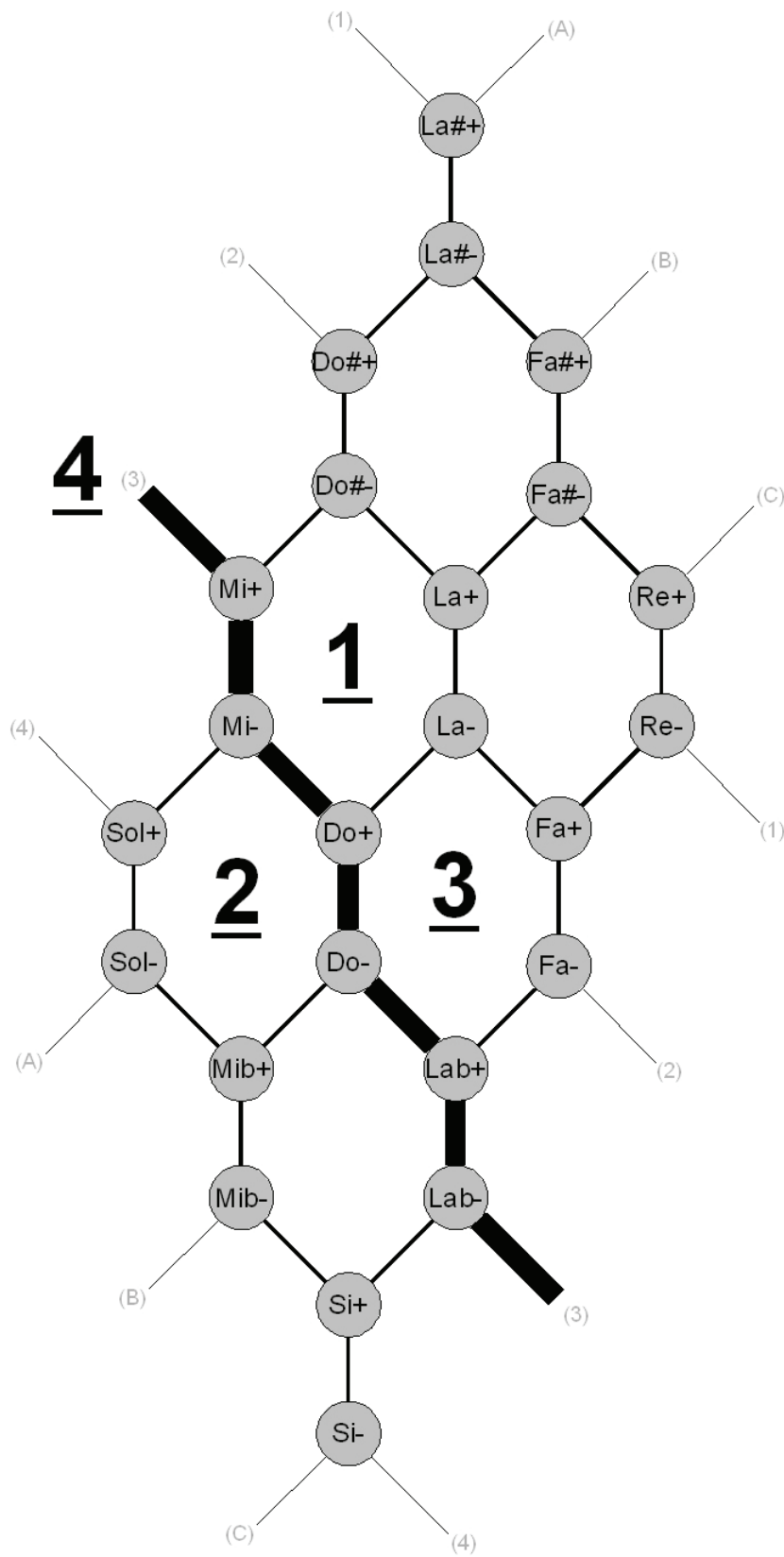
La definizione di duale topologico e le considerazioni effettuate nel paragrafo 4.1 sulle facce di Ton per la definizione del suo gruppo di automorfismi suggeriscono che anche il gruppo di automorfismi di $D(\text{Ton})$ sia isomorfo al diedrale di ordine ventiquattro. Questo risultato si può quindi dimostrare in modo analogo a quanto effettuato per il teorema 4.1.1.

TEOREMA 4.4.1 *Il gruppo $\text{Aut}(D\text{Ton})$ di automorfismi di $D\text{Ton}$ è isomorfo al diedrale di ordine ventiquattro.*

DIMOSTRAZIONE. *Il procedimento è simile a quello del Teorema 4.1.1. Si è certi che $\text{Aut}(D\text{ton})$ contiene almeno 24 elementi che agiscono sui vertici di $D\text{Ton}$ come T-I agisce sul loro etichettamento. Questo inoltre garantisce che $D\text{Ton}$ è transitivo per vertici. Basta quindi considerare un vertice qualsiasi, ai fini della dimostrazione si scelga $\text{Do}+$, e una generica trasformazione f di $\text{Aut}(D\text{Ton})$ che non lo lascia fisso. Esiste allora un elemento di T-I che riporta il trasformato di $\text{Do}+$ in $\text{Do}+$, e si chiama g la composizione di f con tale elemento. Se si mostra che g può essere solo l'identità, si è dimostrato il teorema, in quanto f , essendo l'inverso di un elemento di T-I, non può che essere un elemento di tale gruppo. Rimane quindi da mostrare che non esistono altre trasformazioni in $\text{Aut}(D\text{Ton})$ al di fuori dell'identità che fissano un punto. $\text{Do}+$ è adiacente a $\text{Do}-$, $\text{La}-$ e $\text{Mi}-$. Occorre quindi verificare che nessuna delle permutazioni di queste tre triadi diverse dall'identità permette di conservare le adiacenze tra tutti i vertici di $D\text{Ton}$. L'isomorfismo di $\text{Aut}(D\text{ton})$ con il diedrale di ordine 24 sarà quindi conseguenza diretta dell'isomorfismo con T-I.*

Prima di procedere nella dimostrazione ed analizzare caso per caso le sei permutazioni (nei punti da 1) a 5) verranno considerate le cinque diverse dall'identità, e nel punto 6) si mostrerà che se $\text{Do}-$, $\text{La}-$ e $\text{Mi}-$ rimangono fissi allora tutti i vertici sono fissati), si noti che per il punto fisso $\text{Do}+$ passano esattamente quattro 6-cicli, che saranno indicati con i simboli 1, 2, 3 e 4 come evidenziato nella figura della pagina che segue. Evidentemente un elemento di $\text{Aut}(D\text{Ton})$, che deve conservare le adiacenze, manderà 6-cicli che passano per $\text{Do}+$ in 6-cicli che passano per $\text{Do}+$, e proprio questo, insieme al fatto che $\text{Do}+$ è fissato, aiuterà a mostrare che nessuna delle sei permutazioni permette di conservare le adiacenze tra tutti i vertici di $D\text{Ton}$.

⁵⁷ A tale proposito è anche interessante l'analogia con i modi a trasposizione limitata.



1) Do- rimane fissato, mentre Mi- e La- si scambiano.

Il 6-ciclo 1 non può che essere mappato in sé stesso, fissando Do#- e scambiando, oltre a Mi- e La-, Mi+ e La+. Per quanto riguarda il ciclo 4 tre vertici sono già determinati, in quanto Do+ rimane fisso e Mi- e Mi+ sono stati mappati rispettivamente in La- e La+: non esiste però nessuna mappatura di Lab+ e Lab- che permetta di chiudere il ciclo, e quindi di conservare le adiacenze.

2) Mi- rimane fissato, mentre Do- e La- si scambiano.

Il 6-ciclo 3 non può che essere mappato in sé stesso, fissando Fa- e scambiando Do- e Lab+ rispettivamente con La- e Fa+. Del 6-ciclo 4 si è già determinata la mappatura dei vertici Mi-, Do+ e Do- rispettivamente mappati in Mi-, Do+ e La-. Tale 6-ciclo può allora solo essere mappato nel 6-ciclo 1 fissando Mi+ e portando Lab- e Lab+ rispettivamente in Do#- e La+. Quindi rimane il 6-ciclo 2 che, non potendo essere mappato in 4, perché il suo vertice Do- è stato mappato in La- che non appartiene al 6-ciclo 4, può solo essere mappato in qualche modo in sé stesso, ma ciò è allo stesso modo impossibile perché l'immagine di Do- non appartiene neanche al 6-ciclo 2.

3) La- rimane fissato, mentre Do- e Mi- si scambiano.

Si presentano due casi possibili. 3.1) Il 6-ciclo 4 viene mappato in sé stesso, fissando Lab- e mappando Mi+ in Lab+. Il 6-ciclo 1, può solamente essere mandato nel 6-ciclo 3, mappando Do#- in Fa- e La+ in Fa+, e il 6-ciclo 2, può solo essere mandato in sé stesso, scambiando Sol+ e Mib+ e fissando, oltre ovviamente a Do+, Sol-. Il problema emerge se si considera l'8-ciclo che passa per Do+, definito dai vertici Do+, La-, La+, Fa#-, Fa#+, Mib-, Mib+ e Do-; esso dovrebbe essere mappato in un altro 8-ciclo sempre passante per Do+, ma ciò, considerate le mappature di cinque dei suoi vertici, La+, La-, Do+, Do- e Mib+, mappati rispettivamente in Fa+, La-, Do+, Mi- e Sol+, è impossibile. 3.2) Il 6-ciclo 4 viene mappato nel 6-ciclo 2, portando Mi+, Lab+ e Lab- rispettivamente in Mib+, Sol+ e Sol-. Il problema si presenta per il 6-ciclo 1, che non può essere mappato in sé stesso, perché Mi- è stato mappato in Do-, ma nemmeno può essere mappato in 3, perché Mi+ è stato mappato in Mib+.

4) Mi-, La- e Do- sono mappati rispettivamente in La-, Do- e Mi-.

Il 6-ciclo 1 può solamente essere mappato nel 6-ciclo 3, mappando Mi+, La+ e Do#- rispettivamente in Fa+, Lab+ e Fa-. Del 6-ciclo 4 si è già determinata l'immagine di quattro vertici: Mi+, Mi-, Do+ e Do- mappati rispettivamente in Fa+, La-, Do+, Mi-. Non esistono però 6-cicli che passano per tutti e quattro i vertici di tale immagine, e quindi non si riesce a mappare in nessun modo Lab+ e Lab- conservando le adiacenze.

5) Mi-, La- e Do- sono mappati rispettivamente in , Do-, Mi- e La-.

Si presentano due casi possibili. 5.1) Il 6-ciclo 1 viene mappato nel 6-ciclo 2, mappando Mi+, La+ e Do#- rispettivamente in Mib+, Sol+ e Sol-. Del 6-ciclo 4 si è già determinata l'immagine di quattro vertici: Mi+, Mi-, Do+ e Do- mappati rispettivamente in Mib+, Do-, Do+, La-. Non esistono però 6-cicli che passano per tutti e quattro i vertici di tale immagine, e

quindi non si riesce a mappare in nessun modo Lab^+ e Lab^- conservando le adiacenze. 5.2) Il 6-ciclo 1 viene mappato nel 6-ciclo 4, mappando Mi^+ , La^+ e $Do^\#$ rispettivamente in Lab^+ , Mi^+ e Lab^- . Quindi 4 può solo essere mappato in 3, mandando rispettivamente Lab^- e Lab^+ in Fa^- e Fa^+ . A questo punto però 3 non può essere mappato né in sé stesso né in 1 né in 2, essendo già stati mappati quattro dei suoi vertici, Lab^+ , Do^- , Do^+ e La^- , in altri quattro vertici, rispettivamente Fa^+ , La^- , Do^+ e Mi^- , che non appartengono né tutti a 1 né tutti a 2 né tutti a 3.

6) Rimane da dimostrare che se Do^- , La^- e Mi^- rimangono fissi allora tutti i vertici sono fissati. Ciò deriva direttamente dalla transitività per vertici di $D(Ton)$ congiuntamente a quanto è appena stato dimostrato nei punti da 1) a 5), ossia che se una trasformazione di $Aut(Dton)$ fissa un punto, allora fissa i punti ad esso adiacenti. •

Si chiameranno dt e di i due generatori di $D(Ton)$, con dt che corrisponde alle rotazioni nel diedrale e mappa tonalità maggiori in tonalità maggiori e tonalità minori in tonalità minori trasportandole di una quinta ascendente, e di che invece mappa tutte le tonalità maggiori in una triade minore e tutte le tonalità minori in una triade maggiore in modo tale che le altezze della triade siano mappate mediante l'azione dell'inversione del gruppo $T-I$. Si può dire che intuitivamente dt 'trasli' il grafo in sé stesso sul toro, mentre di operi un 'rovesciamento' dello stesso. Appare allora evidente che $Aut(DTon)$ agisce sulle facce di $Dton$ come $Aut(Ton)$ agisce sui vertici di Ton . Inoltre $Aut(DTon)$ agisce sui punti di $D(Ton)$, che sono triadi, come $T-I$ agisce sulle triadi.

Si noti quindi che dato un ciclo hamiltoniano (o più genericamente un qualsiasi cammino) in $D(Ton)$ l'azione di un elemento di $Aut(DTon)$ trasforma cicli hamiltoniani in cicli hamiltoniani, dove in particolare l'azione di una potenza di dt trasporta tutte le triadi del ciclo, mentre l'azione della composizione di di con alcune potenze di dt comporta la lettura del ciclo in senso contrario. Quindi due successioni di trasformazioni cicliche saranno uguali se presentano la stessa successione in una delle due direzioni di lettura.

Nella pagina che segue si riportano i cicli hamiltoniani presentati nello stesso ordine della pagina precedente ma come cicli di trasformazioni. Le trasformazioni sono ordinate lungo le righe in modo che si possano riconoscere nella tabella precedente: la prima trasformazione è quella che porta la triade nella prima colonna nella triade della seconda, la seconda quella che porta la seconda nella terza, ... , l'ultima quella che porta la ventiquattresima nella prima. In grassetto si sono sottolineati dei modelli che si ripetono.

#41	L	R	L	R	L	R	L	R	L	R	L	R	L	R	L	R	L	R	L	R
#62	L	P	L	P	L	R	L	P	L	P	L	R	L	P	L	P	L	R	L	P
#13	P	L	R	L	P	L	P	L	R	L	P	L	P	L	R	L	P	L	R	L
#4	P	L	P	L	R	L	P	L	P	L	R	L	P	L	P	L	R	L	P	L
#58	L	P	L	P	L	R	L	P	L	P	L	R	L	P	L	P	L	R	L	P
#19	P	R	L	P	L	P	L	R	P	L	P	L	P	R	P	L	P	L	R	P
#7	P	L	P	R	L	P	L	P	L	R	P	L	P	L	P	R	P	L	P	L
#27	P	L	P	L	P	R	L	P	L	P	L	R	P	L	P	L	P	R	P	L
#21	P	R	P	L	P	L	P	R	L	P	L	P	L	R	P	L	P	L	R	P
#8	P	L	P	R	P	L	P	L	P	R	L	P	L	P	L	R	P	L	P	L
#30	P	L	P	L	P	R	P	L	P	L	P	R	L	P	L	P	L	R	P	L
#22	P	R	P	L	P	L	P	R	P	L	P	L	P	R	P	L	P	L	R	P
#10	P	L	P	R	P	L	P	L	P	R	P	L	P	L	P	R	P	L	P	L
#31	P	L	P	L	P	R	P	L	P	L	P	R	P	L	P	L	P	R	P	L
#9	P	L	R	P	L	P	L	P	R	P	L	P	L	P	R	P	L	P	L	P
#6	P	L	P	L	R	P	L	P	L	P	R	P	L	P	L	P	R	P	L	P
#33	P	R	P	R	P	R	L	R	P	R	P	R	P	R	L	R	P	R	P	R
#44	L	R	P	R	P	R	P	R	L	R	P	R	P	R	P	R	L	R	P	R
#40	P	R	L	R	P	R	P	R	P	R	L	R	P	R	P	R	P	R	L	R
#38	P	R	P	R	L	R	P	R	P	R	P	R	L	R	P	R	P	R	L	R
#34	P	R	P	R	L	R	L	R	P	R	P	R	L	R	L	R	P	R	L	R
#42	L	R	P	R	P	R	L	R	L	R	P	R	P	R	L	R	L	R	P	R
#43	L	R	L	R	P	R	P	R	L	R	L	R	P	R	P	R	L	R	L	R
#39	P	R	L	R	L	R	P	R	P	R	L	R	L	R	P	R	P	R	L	R
#50	L	R	L	P	L	R	L	P	R	L	R	L	P	L	R	L	P	R	L	R
#37	P	R	L	R	L	P	L	R	L	P	R	L	R	L	P	L	R	L	P	R
#25	P	L	R	P	R	L	R	L	P	L	R	L	P	R	L	R	L	P	L	R
#16	P	R	P	L	R	P	R	L	R	L	P	L	R	P	L	R	L	P	L	R
#23	P	L	P	R	P	L	R	P	R	L	R	L	P	L	R	L	P	L	R	P
#1	P	L	R	P	L	P	R	P	L	R	P	R	L	R	L	P	L	R	L	P
#59	L	P	L	R	P	L	P	R	P	L	R	P	R	L	R	L	P	L	R	L
#48	L	R	L	P	L	R	P	L	P	R	L	R	L	P	L	R	L	P	L	R
#18	P	R	L	R	L	P	L	R	P	L	P	R	L	R	L	P	L	R	L	P
#60	L	P	R	L	R	L	P	L	R	L	P	R	L	R	L	P	L	R	L	P
#2	P	L	R	L	P	R	L	R	L	P	L	R	L	P	R	L	R	L	P	L
#53	L	P	L	R	L	P	R	L	R	L	P	L	R	L	P	R	L	R	L	P
#32	P	R	L	R	P	R	L	R	P	R	L	R	P	R	L	R	P	R	L	R
#45	L	R	P	R	L	R	P	R	L	R	P	R	L	R	P	R	L	R	P	R
#29	P	L	R	L	P	L	R	L	P	L	R	L	P	L	R	L	P	L	R	L
#49	L	R	P	L	R	L	P	L	R	L	P	L	R	L	P	L	R	L	P	L
#11	P	L	R	L	R	P	L	R	L	P	L	R	L	R	P	L	R	L	P	L
#54	L	P	L	R	L	R	P	L	R	L	P	L	R	L	R	P	L	R	L	P
#14	P	R	L	P	L	R	L	R	P	L	R	L	P	L	R	L	R	P	L	R
#24	P	L	P	R	L	P	L	R	L	P	L	R	L	P	L	R	L	P	L	R
#20	P	R	P	L	P	R	L	P	L	R	L	P	L	R	L	P	L	R	L	P
#55	L	P	R	L	R	L	P	L	R	L	P	L	R	L	R	L	P	L	R	L
#36	P	R	L	P	R	L	P	R	L	P	L	R	L	P	R	L	P	L	R	L
#47	L	R	P	R	L	P	R	L	P	L	R	L	P	L	R	L	P	L	R	L
#5	P	L	R	L	R	P	R	L	P	R	L	P	L	R	L	R	P	L	R	L
#57	L	P	L	R	L	R	P	R	L	P	L	R	L	R	P	L	R	L	P	L
#3	P	L	R	P	L	P	R	L	P	L	R	P	L	R	P	L	R	P	L	R
#61	L	P	L	R	P	L	P	R	L	P	L	R	L	P	L	R	P	L	R	P
#56	L	P	R	L	R	P	R	L	R	L	P	L	R	L	P	L	R	L	P	L
#35	P	R	L	R	P	L	R	L	P	L	R	L	P	R	L	P	L	R	L	P
#15	P	R	L	P	L	R	L	P	R	L	R	P	L	R	L	P	L	R	P	L
#12	P	L	R	L	P	R	L	R	P	L	R	L	P	L	R	L	P	L	R	L
#26	P	L	P	R	L	P	L	R	L	P	L	R	L	P	L	R	L	P	L	R
#17	P	R	L	R	P	L	R	L	P	L	R	L	P	L	R	L	P	L	R	L
#51	L	R	P	L	R	L	P	L	R	L	P	L	R	L	P	L	R	L	P	L
#52	L	P	L	R	L	P	L	R	L	P	L	R	L	P	L	R	L	P	L	R
#46	L	R	P	R	L	R	P	L	R	L	P	L	R	L	P	L	R	L	P	R
#28	P	L	R	L	P	L	R	L	P	L	R	L	P	L	R	L	P	L	R	L

Dato un ciclo hamiltoniano, se n elementi di $Aut(DTon)$ lo trasformano in sé stesso, allora ci sono esattamente $24/n$ cicli hamiltoniani distinti con la stessa struttura. In tutto ci sono quindi esattamente otto modelli di successioni di trasformazioni per i cicli hamiltoniani, che si indicheranno con $H1, \dots, H8$:

- **H1:** solo il ciclo #41.
La successione è caratterizzata dal modello di due trasformazioni LR , ed è tale che ogni elemento di $Aut(DTon)$ trasformi il ciclo in sé stesso. Per questo un solo ciclo ammette la sua struttura.
- **H2:** solo i due cicli #32 e #45.
E' caratterizzata dal modello di 4 trasformazioni $PRLR$, e 12 elementi di $Aut(DTon)$ li trasformano in sé stessi.
- **H3:** i cicli #4, #13 e #62.
E' caratterizzata dal modello di 6 trasformazioni $LPLPLR$. 8 elementi trasformano i cicli in sé stessi.
- **H4:** i quattro cicli #33, #38, #40 e #44.
E' caratterizzata dal modello di 8 trasformazioni $PRPRPRLR$. 6 elementi li trasformano in sé stessi.
- **H5:** i quattro cicli #34, #39, #42 e #43.
E' caratterizzata dal modello di 8 trasformazioni $PRPRLRLR$. 6 elementi li trasformano in sé stessi.
- **H6:** i dodici cicli #6, #7, #8, #9, #10, #19, #21, #22, #27, #30, #31 e #58.
Il ciclo è $LPLPLRPLPLPRPLPLPRPLPLPR$. Solo due elementi di $Aut(DTon)$ li portano in sé stessi.
- **H7:** i dodici cicli #3, #12, #15, #17, #26, #28, #35, #46, #51, #52, #56 e #61.
Il ciclo è $PLRPLPRLPLRLPRLRPRLRPLRL$. Solo due elementi di $Aut(DTon)$ li portano in sé stessi.
- **H8:** i ventiquattro cicli rimanenti.
Il ciclo è $LRLPLRLPRLRLPLRPLPRPLRPR$. Solo l'identità di $Aut(DTon)$ li trasforma in sé stessi.

Capitolo 5

Si presenteranno alcuni esempi di applicazioni delle trasformazioni P , L e R alla composizione, che saranno spunto di alcune riflessioni sulle loro caratteristiche su un piano estetico.

E' interessante sottolineare come solo per la composizione dell'Autore di questo testo ci sia stata una consapevolezza delle teorie neo-riemanniane e delle loro implicazioni all'atto della composizione, e questo, forse, garantisce una certa naturale e spontanea efficacia delle suddette trasformazioni per il raggiungimento di specifici scopi armonici e strutturali. Tutti e quattro gli esempi presentati sono caratterizzati infatti da intenti radicalmente diversi, e, cosa altrettanto curiosa, benché l'Autore sia stato allievo di Paul Glass (nato nel 1934), che in qualche modo ha potuto influenzarne lo stile e interessarlo inconsapevolmente ai presenti studi ed esiti compositivi, Jeremy Vaughan (nato nel 1988) è stato studente dell'Autore solo dopo aver concluso la composizione che verrà presentata nell'ultimo paragrafo di questo capitolo, ignorando completamente quanto esposto nel presente lavoro.⁵⁸ Infine è di particolare interesse l'estratto del secondo tempo della *Nona Sinfonia* di Ludwig Van Beethoven (1770-1827) che verrà presentato nel paragrafo 5.1, che, oltre ad offrire un esempio di ciclo hamiltoniano nei termini esposti nel paragrafo 4.4, permette di visualizzare quelle proprietà degli insiemi di altezze diatonici presentate nel paragrafo 2.6.

5.1 UN ESEMPIO DI CICLO HAMILTONIANO NELLA 'NONA' DI BEETHOVEN

Il ciclo hamiltoniano caratterizzato dal modello LR , che nel paragrafo 4.4 è stato etichettato come $H1$, è indiscutibilmente il ciclo più semplice che si possa costruire, ed è anche musicalmente il più interessante, non solo perché è invariante rispetto all'azione di ogni elemento del gruppo degli automorfismi del duale del Tonnetz, ma anche perché possiede alcune inaspettate proprietà legate agli insiemi diatonici.

Se si prendono in esame i due diagrammi introdotti nel paragrafo 2.6 ci si accorge che l'intero ciclo permette di passare per tutte le ventiquattro triadi maggiori e minori

⁵⁸ Ed ogni altra teoria formale e applicazione su argomenti affini.

muovendosi nei dodici insiemi di altezze diatonici attraverso lo spostamento più graduale possibile, rendendo quasi impercettibile il passaggio ad insiemi differenti. Infatti il movimento avviene passando sempre attraverso tutte le triadi in comune (4 su 6) di insiemi diatonici che si distinguono per una sola altezza (o, in termini di tonalità, per una sola alterazione). Una gradualissima modulazione quindi, e nel senso etimologico del termine, completamente svincolata da cadenze e relazioni strettamente tonali.

Ludwig Van Beethoven, tra le misure 143 e 176 del secondo tempo della sua *Nona Sinfonia*, comincia un ciclo del modello *H1* dopo una cadenza perfetta su Do maggiore, interrompendosi dopo ben 18 trasformazioni (e quindi dopo aver toccato 19 triadi): comincia con *Do+* e conclude con *La+*, esce poi dal meccanismo con un passaggio cromatico all'unisono e inizia una sezione in Mi minore.

Si riportano in seguito le misure interessate.

The image displays a page of a musical score for the second movement of Beethoven's Ninth Symphony, specifically measures 143 to 176. The score is arranged in a standard orchestral format with multiple staves. The instruments listed on the left are Flute (Fl.), Oboe (Ob.), Clarinet (Cl.), Bassoon (Fag.), Trumpet (Cor. D.), Trombone (Cor. B.), Violin (Vcl.), and Bass (Basso). The music is written in 3/4 time and features a gradual modulation through diatonic triads. Dynamics are marked as pianissimo (pp) and 'sempre pp' (always pianissimo). The score shows a complex texture with many overlapping lines and a prominent melodic line in the upper strings.

Fl.
Ob.
Cl.
Fag.
Cor. D.
Cor. B.

cresc.
cresc.
cresc.
cresc.
cresc.
cresc.

Fl.
Ob.
Cl.
Fag.
Cor. D.
Cor. B.
Tr.

f
ff
f
ff
ff
ff
ff

Ritmo di tre battute.
p
p
p
p
pizz.
pizz.
pizz.
pizz.
p

5.2 PAUL GLASS - 'CORALE I PER MARGARET'

Una caratteristica di buona parte della produzione di Paul Glass è l'utilizzo di tecniche e di materiali provenienti dalla tradizione, con un'attenzione particolare a quelli attinenti al parametro delle altezze, incastrati in regole e meccanismi che li conducono su percorsi inconsueti e inaspettati, garantendo al tempo stesso alla composizione coerenza ed organicità.⁵⁹ Il suo *Corale I per Margaret*, per orchestra d'archi (1995), merita in questa sede un'attenzione particolare, avendo il compositore limitato l'intera composizione all'uso di triadi e, quasi completamente, all'impiego delle trasformazioni *P*, *L* e *R*.

La composizione si articola in dodici sezioni, tutte che si concludono con una corona e separate da una pausa generale. Tali dodici sezioni sono suddivisibili in due gruppi da 6 che poi si ripetono retrogradi nella struttura armonica (seppur notevoli, non interessano il presente lavoro i dettagli di orchestrazione). La composizione ha infatti una struttura palindroma. Tutte le sezioni presentano lo stesso modello di trasformazioni, esplicitato nella figura che segue che riporta la riduzione della prima sezione.

The figure shows a musical staff with a treble clef. Above the staff, the letters P, L, P, -, -, R, P, L, P are placed above specific chords. Below the staff, the chords are labeled with their constituent notes: Sol+, Sol-, Mi>+, Mi<-, Si<-, Re>+, Re<-, La+, La-. The chords are represented by groups of three notes on the staff, with some notes having accidentals (sharps, flats, naturals) and some having stems pointing up or down.

Merita una spiegazione il quinto accordo, non trattandosi di una triade, e non potendo quindi essere studiato nei termini trasformazionali definiti in questa tesi. La conclusione più ragionevole è che si tratti di un ritardo al contrario, che, quando la successione, per la struttura palindroma della composizione, verrà presentata in forma retrograda acquisterà il suo sapore tradizionale.

Le prime 6 sezioni cominciano da una triade maggiore (nell'ordine: *Sol+*, *Mib+*, *Si+*, *Re+*, *Sib+*, *Fa#+*) e concludono su una triade minore un tono sopra la triade iniziale (quindi: *La-*, *Fa-*, *Do#-*, *Mi-*, *Do-*, *Sol#-*); le ultime 6 invece cominciano da una triade minore (con alcune introduzioni, sempre triadiche, all'ottava, nona, undicesima e dodicesima sezione che spezzano il gioco), presentando in ordine contrario quelle su cui si concludevano le prime 6 sezioni, e, seguendo il modello in forma retrograda, concludendo su una triade maggiore un tono sotto la triade iniziale. La composizione quindi si apre e si conclude sulla triade di *Sol+*. Si noti inoltre come il primo gruppo di 6 sezioni (il secondo è solo uno specchio con alcune varianti introduttive) preveda in tutto 6 triadi maggiori di apertura e

⁵⁹ Non si dimentichi che Paul Glass ha studiato tra il 1957 e il 1962 a Varsavia con Witold Lutoslawski, per il quale, seppur in logiche strutturali per l'epoca avanguardiste, il parametro delle altezze costituiva sempre e comunque l'elemento principe di definizione formale di una composizione, e a Princeton con Roger Sessions che lo ha contemporaneamente interessato ad un approccio formale alle tecniche atonali.

6 triadi minori di chiusura, tutte su tonica diversa: insomma come se il compositore avesse voluto coprire il totale cromatico anche per le toniche delle triadi. In effetti se si prendono in esame le trasposizioni del modello ci si accorge che tra la prima sezione e la seconda c'è una terza maggiore discendente, e così tra la seconda e la terza, la quarta e la quinta, la quinta e la sesta: il compositore ha certamente voluto effettuare il ricoprimento del totale cromatico attraverso i quattro cicli distinti di terze maggiori (che sono modi a trasposizione limitata).

Infine si noti l'intelligente uso delle trasformazioni *P*, *L* e *R*: evidentemente il sapore all'ascolto cambia moltissimo se si comincia da una tonalità maggiore o da una tonalità minore, e in effetti sono state definite specificando la trasformazione in entrambi i sensi. Nel modello di successione di trasformazioni Paul Glass si assicura che ogni trasformazione sia data in un senso solo (*P* è solo da triade maggiore a triade minore, *L* da minore a maggiore; *R* da minore a maggiore) così che quando il modello si presenterà al contrario presenterà una sonorità differente invertendo il senso delle trasformazioni, e presentandole in un verso non ancora apparso (e al tempo stesso non facendo più sentire quello che caratterizza le 6 sezioni precedenti). Un esempio bellissimo di ripetizione e novità.

5.3 GIOVANNI ALBINI - 'MUSICA CICLICA'

Nell'ultimo paragrafo del quarto capitolo si è considerato il problema del conteggio dei cicli hamiltoniani in $DTon$; un problema affine e altrettanto interessante potrebbe essere il conteggio dei cammini hamiltoniani nello stesso grafo.

Nel secondo tempo del suo *Musica Ciclica*, per ensemble con violino solista (2008), l'Autore copre interamente un cammino hamiltoniano, cominciando da $Mi+$, concludendo su $Sol-$, e passando, attraverso le trasformazioni P , L e R , per tutte le rimanenti triadi maggiori e minori una sola volta. Essendo il primo tempo incentrato attorno all'altezza Mi , e il terzo interamente costruito su un pedale sull'altezza Sol , di fatto il secondo tempo costituisce solo un ponte, un passaggio tra il primo e il terzo tempo, con lo scopo di essere completamente triadico seppure mai tonale e solo localmente modale. Un procedimento, questo, non molto diverso nel principio dalla tecnica dodecafonica, che permette di conferire ad ogni altezza la stessa importanza, organizzandole però in un ordine preciso, la serie, che diventa il fuoco della composizione caratterizzata dalle sue relazioni interne, invariante nelle sue possibili trasformazioni. Così l'utilizzo di cicli e cammini hamiltoniani annulla allo stesso modo ogni gerarchia strutturata tra le triadi, e il sapore armonico della composizione dipende globalmente soltanto dal modello di trasformazioni scelto, e localmente dal rimando illusorio a relazioni dell'armonia tradizionale a cui il nostro orecchio sempre e comunque tende per la sua formazione. Il modello di trasformazioni utilizzato, che come si può notare non è invariante rispetto a nessun elemento di $Aut(DTon)$ al di fuori dell'identità (e assomiglia molto ad un ciclo $H1$ 'spezzato' da due sorprese, due trasformazioni di tipo P) è il seguente: $LRLRLPLRLRLRLRLRLPLRLRL$.

Nelle pagine che seguono si riporta il tempo per intero.

8

a Giorgio e Rosangela

2.

come un Adagio espressivo $\text{♩} = 60$

$\frac{3}{4}$ $\frac{4}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{4}$ $\frac{3}{4}$

Flauto
Flauto in Sol
Clarineto in Sib
Clarineto Basso in Sib
Fagotto
Timpani
Fisarmonica
Violino
Viola
Violoncello
Contrabbasso

$\text{♩} = 60$

$\frac{3}{4}$ $\frac{4}{4}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{12}{8}$

Fl.
Fl. S.
Cl.
Cl. B.
Fag.
Fis.
Vino.
Vla.
Vc.
Cb.

Musical score for measures 16-18. The score includes parts for Flute (Fl.), Flute in C (Fl.S.), Clarinet (Cl.), Clarinet in Bass (Cl.B.), Bassoon (Fag.), Timpani (Timp.), Violin (Vno.), Viola (Vla.), Violoncello (Vc.), and Contrabasso (Cb.).

- Measures 16-18: Flute parts are marked *p*.
- Measures 16-18: Clarinet parts are marked *p*.
- Measures 16-18: Bassoon part is marked *p*.
- Measures 16-18: Timpani part is marked *p*.
- Measures 16-18: Violin part is marked *mp*.
- Measures 16-18: Viola part is marked *mf*.
- Measures 16-18: Violoncello part is marked *mf*.
- Measures 16-18: Contrabasso part is marked *mf*.
- Measures 16-18: A section of the score is marked *f cantando*.
- Measures 16-18: A section of the score is marked *fp subito*.

Time signature: 9/8.

Musical score for measures 19-21. The score includes parts for Flute (Fl.), Flute in C (Fl.S.), Clarinet (Cl.), Clarinet in Bass (Cl.B.), Bassoon (Fag.), Timpani (Timp.), Fisarmonica (Fis.), Violin (Vno.), Viola (Vla.), Violoncello (Vc.), and Contrabasso (Cb.).

- Measures 19-21: Flute parts are marked *ppp*.
- Measures 19-21: Flute in C part is marked *ppp*.
- Measures 19-21: Clarinet part is marked *ppp*.
- Measures 19-21: Clarinet in Bass part is marked *ppp*.
- Measures 19-21: Bassoon part is marked *ppp*.
- Measures 19-21: Timpani part is marked *mf*.
- Measures 19-21: Fisarmonica part is marked *f*.
- Measures 19-21: Violin part is marked *ppp subito*.
- Measures 19-21: Viola part is marked *ppp subito*.
- Measures 19-21: Violoncello part is marked *ppp subito*.
- Measures 19-21: Contrabasso part is marked *ppp subito*.
- Measures 19-21: A section of the score is marked *f*.
- Measures 19-21: A section of the score is marked *f*.
- Measures 19-21: A section of the score is marked *f*.
- Measures 19-21: A section of the score is marked *f*.

Time signature: 9/8 (measures 19-20) and 12/8 (measure 21).

Tempo markings: *poco acc.* and *poco Più mosso*.

10

Musical score for measures 22-24. The score includes parts for Flute (Fl.), Flute in C (Fl.S.), Clarinet (Cl.), Clarinet in Bass (Cl.B.), Bassoon (Fag.), Timpani (Timp.), Violin (Vno.), Viola (Vla.), Violoncello (Vc.), and Contrabasso (Cb.). The score features various dynamics such as *pp*, *p*, and *fp*, along with performance instructions like *subito, sciolto* and *appena*. A double bar line is present at the end of measure 24.

Musical score for measures 25-27. The score includes parts for Flute (Fl.), Flute in C (Fl.S.), Clarinet (Cl.), Clarinet in Bass (Cl.B.), Bassoon (Fag.), Violin (Vno.), Viola (Vla.), Violoncello (Vc.), and Contrabasso (Cb.). The score features a *rall. moltissimo* marking and various dynamics such as *ppp*, *p*, and *pp*, along with performance instructions like *subito*, *sciolto*, and *appena*. The instruction *(tutti liscio), stemperando* is written below the score.

5.4 JEREMY VAUGHAN - 'VIOLIN SONATA'

Se l'impiego delle trasformazioni P , L e R di Beethoven, Glass e Albini, seppur per ragioni e con riferimento a tecniche diverse, lascia sempre scoperta la triade, senza confonderla mai in armonie più complesse, un approccio diverso è stato tentato dal giovanissimo compositore americano Jeremy Vaughan nel primo tempo della sua *Violin Sonata*, per violino e pianoforte (2008). Definita una serie di 21 triadi caratterizzata da 15 trasformazioni di tipo P , L e R e 6, invece, tutte diverse tra loro e senza nessun riferimento a tali trasformazioni, il compositore inizia la composizione facendo cominciare la serie in modo ciclico nei due strumenti da momenti diversi della stessa (evidenziati in figura), creando un interessante sovrapposizione armonica.

Si noti inoltre che la serie, pur senza contenere tutte e 24 le tonalità maggiori e minori, è tale da non ripetere due volte una stessa triade. L'interesse del lavoro di Vaughan risiede nella volontà di nascondere l'unità generativa della composizione (la triade e la serie ciclica definita) in un gioco armonico più complesso e stratificato, che comunque è completamente caratterizzato dalla serie di triadi che viene proposta come un canone. Ciò viene fatto con una certa attenzione alle due triadi sovrapposte che aprono e chiudono la composizione ($Do+$ e $La-$), triadi che condividono ben due altezze, dando luogo a un accordo di 4 note decisamente consonante. In questo senso, con il meccanicismo del procedimento descritto, la composizione ha il sapore di una organica e scorrevole perturbazione di tale consonanza.

La serie e la prima pagina della composizione sono riportate nella pagina che segue.

L P L - P L P - - P - P R L P L - - R L (P)



Violin Sonata

Jeremy A. Vaughan

I.

Jaunty $\text{♩} = 160$

Violin *p*

Piano *p*



Capitolo 6

Si presenteranno le trasformazioni del *gruppo-PLR* e del gruppo delle trasposizioni T in un'ottica più generale, permettendo di introdurre e studiare il più vasto gruppo U delle UTT , o 'trasformazioni triadiche uniformi', al quale appartengono. Si farà in particolare riferimento alla trattazione di [Hook 2002].

6.1 TRASFORMAZIONI TRIADICHE UNIFORMI

Volendo inquadrare i gruppi di trasformazioni tra triadi in una trattazione più generale, ci si accorge che essi non potranno che essere sottogruppi del gruppo simmetrico che conta ben $24!$ elementi. Evidentemente non tutte queste trasformazioni (a dire il vero molto poche) hanno un qualche significato nella teoria musicale; nell'interessarsi al loro studio ha senso quindi richiedere alcune condizioni.

Una classe importante è quella definita in seguito.

DEFINIZIONE Si definiscono **trasformazioni triadiche uniformi** o UTT^{60} quelle trasformazioni tra triadi che soddisfano la seguente proprietà detta di **uniformità**: tutte le triadi maggiori (minori) sono trasformate o tutte in triadi maggiori (minori) o tutte in triadi minori (maggiori) ad un intervallo fissato che non deve essere necessariamente uguale per entrambe.

Una UTT si indica con una tripla $\langle s, m^+, m^- \rangle$ dove $s=\{+,-\}$ indica se la trasformazione è tale che le triadi cambiano tutte modo (-) o nessuna lo cambia (+), m^+ è l'elemento di \ln_{\approx} tale che per ogni triade maggiore a , se $s=+$ la trasformazione agisce in modo uguale a $T^{m^+}(a)$, e m^- è l'elemento di \ln_{\approx} tale che per ogni triade minore b la trasformazione agisce in modo uguale a $T^{m^-}(b)$, se $s=-$ agisce allo stesso modo ma mappando triadi minori in triadi maggiori (secondo m^-) e triadi maggiori in triadi minori (secondo m^+), con s che si dice **segno** della trasposizione e con m^+ e m^- che si dicono **livelli di trasposizione maggiore** e **minore**.

Si propongono alcuni esempi.

⁶⁰ **Universal triadic transformation.**

Gli elementi del gruppo delle trasposizioni T sono UTT , in particolare, mantenendo il segno ed essendo caratterizzati da livelli di trasposizione uguale per le triadi minori e maggiori, sono della forma: $\langle +, h, h \rangle$ con h appartenente a \mathbb{Z}_{12} .

Anche P, L e R sono delle UTT . In particolare: $P = \langle -, 0, 0 \rangle$; $R = \langle -, 9, 3 \rangle$ e $L = \langle -, 4, 8 \rangle$.

L'inversione che fissa Do e $Fa\#$ invece, evidentemente, non è una UTT . Infatti ad esempio mappa $Do+$ in $Fa-$ e $Do\#+$ in $Mi-$, ed è impossibile definire un livello di trasposizione.

Le UTT possibili sono in tutto 288, e il risultato si ottiene moltiplicando i possibili segni (2), per i possibili livelli di trasposizione (12×12).

6.2 LE UTT COME GRUPPO

Il seguente teorema ci assicura che l'insieme delle 288 UTT costituisce un gruppo.

TEOREMA 6.2.1 *Le UTT costituiscono un gruppo: \mathbf{U} .*

DIMOSTRAZIONE. *Si dimostra innanzitutto che la composizione di due UTT qualsiasi, che si indicheranno con $\langle s_1, m_1^+, m_1^- \rangle$ e $\langle s_2, m_2^+, m_2^- \rangle$, è ancora una UTT. Si presentano tre casi.*

1) *Le due UTT sono entrambe con segno positivo. La loro composizione sarà allora ancora una UTT con segno positivo, e con i livelli di trasposizione maggiore e minore dati dalla somma modulo 12 rispettivamente dei livelli di trasposizione maggiore e minore delle UTT componenti. La UTT risultante sarà allora determinata in questo caso attraverso la seguente legge di composizione: $\langle +, m_1^+, m_1^- \rangle \langle +, m_2^+, m_2^- \rangle = \langle +, m_1^+ + m_2^+, m_1^- + m_2^- \rangle$.*

2) *Le due UTT sono entrambe con segno negativo. La loro composizione sarà allora una UTT con segno positivo, in quanto la prima delle UTT componenti manda triadi maggiori in triadi minori, e la seconda manda triadi minori in triadi maggiori, ed è tale quindi che i livelli di trasposizione maggiore e minore sono dati dalla somma rispettivamente del livello di trasposizione maggiore della prima UTT applicata con il livello di trasposizione minore della seconda, e del livello di trasposizione minore della prima con il livello di trasposizione maggiore della seconda. La UTT risultante sarà allora determinata in questo caso attraverso la seguente legge di composizione: $\langle -, m_1^+, m_1^- \rangle \langle -, m_2^+, m_2^- \rangle = \langle +, m_1^+ + m_2^-, m_1^- + m_2^+ \rangle$.*

3) *Le due UTT hanno segno diverso. In questo caso è importante l'ordine di applicazione. La loro composizione sarà ancora una UTT ma con segno negativo, in quanto una manda triadi maggiori in triadi maggiori e minori in minori, mentre l'altra manda triadi maggiori in minori e triadi minori in maggiori. Infatti se la prima ha segno positivo e la seconda negativo la loro composizione avrà livello di trasposizione maggiore dato dalla somma del livello di trasposizione maggiore della prima e della seconda, mentre quello minore sarà dato dalla somma del livello di trasposizione minore della prima e della seconda. La UTT risultante sarà allora determinata in questo caso attraverso la seguente legge di composizione: $\langle +, m_1^+, m_1^- \rangle \langle -, m_2^+, m_2^- \rangle = \langle -, m_1^+ + m_2^+, m_1^- + m_2^- \rangle$. Se invece la prima UTT applicata ha segno negativo*

avviene il contrario, e la loro composizione avrà livello di trasposizione maggiore dato dalla somma del livello di trasposizione maggiore della prima e minore della seconda, mentre quello minore sarà dato dalla somma del livello di trasposizione minore della prima e maggiore della seconda. La UTT risultante sarà allora determinata in questo caso attraverso la seguente legge di composizione: $\langle -, m_1^+, m_1^- \rangle \langle +, m_2^+, m_2^- \rangle = \langle -, m_1^+ + m_2^-, m_1^- + m_2^+ \rangle$.

Dai tre casi specifici segue direttamente la legge generale di composizione del gruppo⁶¹: $\langle s_1, m_1^+, m_1^- \rangle \langle s_2, m_2^+, m_2^- \rangle = \langle s_1 s_2, m_1^+ + m_2^{s_1}, m_1^- + m_2^{-s_1} \rangle$.

Inoltre l'identità è uguale a $\langle +, 0, 0 \rangle$. Rimane solo da verificare l'esistenza dell'inverso, ossia che per ogni UTT esiste sempre un UTT tale che la loro composizione dia l'identità. Ma essa si ricava direttamente dalla legge di composizione del gruppo imponendo la seguente uguaglianza: $\langle s_1 s_2, m_1^+ + m_2^{s_1}, m_1^- + m_2^{-s_1} \rangle = \langle +, 0, 0 \rangle$. L'inverso del generico elemento $\langle s, m^+, m^- \rangle$ è quindi $\langle s, ((m^+)^{-1})^s, ((m^-)^{-1})^{-s} \rangle$. •

Ad esempio si verifichi la composizione tra L e R :

$$\langle -, 4, 8 \rangle \langle -, 9, 3 \rangle = \langle -, 4+3 \pmod{12}, 8+9 \pmod{12} \rangle = \langle +, 7, 5 \rangle.$$

Seguono tre corollari al teorema 6.2.1.

COROLLARIO 6.2.1A U è un sottogruppo del gruppo simmetrico di $24!$ elementi. •

COROLLARIO 6.2.1B Il gruppo delle trasposizioni T e il gruppo-PLR sono sottogruppi di U .

DIMOSTRAZIONE. Direttamente dalla loro definizione. •

COROLLARIO 6.2.1C Ogni u appartenente ad U tale che $s=-$ è tale che $u^2=T^n$ per qualche n . Quindi il quadrato di ogni UTT con segno negativo è sempre un elemento del gruppo delle trasposizioni.

DIMOSTRAZIONE. Direttamente dalla legge di composizione tra UTT. •

Evidentemente il Corollario 6.2.1C non è vero per una generica UTT di segno positivo: se infatti i livelli di trasposizione maggiore e minore sono diversi, essa non è sicuramente uguale ad una qualche trasposizione.

⁶¹ La moltiplicazione tra i segni è l'usuale moltiplicazione binaria: $++=+, +-=-+=-, --=+$.

6.3 UTT RIEMANNIANE: IL GRUPPO-PLR

Una particolare categoria di UTT è quella data dalla seguente definizione.

DEFINIZIONE Una UTT si definisce **riemanniana** se è tale che $m^+ + m^- = 0 \pmod{12}$.

Evidentemente P, L e R sono trasformazioni triadiche uniformi riemanniane. In totale ci sono 24 UTT riemanniane, 12 della forma $\langle +, h, -h \rangle$ e 12 della forma $\langle -, h, -h \rangle$, con h appartenente a In_{∞} . Anche l'identità e T^6 sono riemanniane. Inoltre:

TEOREMA 6.3.1 Le UTT riemanniane costituiscono un gruppo, detto **gruppo riemanniano** che corrisponde al gruppo-PLR.

DIMOSTRAZIONE. E' banale mostrare che $P = \langle -, 0, 0 \rangle$ e $\langle +, 1, 11 \rangle$ sono generatori del gruppo riemanniano. Le potenze del secondo generano tutte le UTT riemanniane della forma $\langle +, h, -h \rangle$, e il primo permette di scambiare i segni. Per dimostrare che il gruppo-PLR corrisponde al gruppo riemanniano basta quindi far vedere che $\langle +, 1, 11 \rangle$ si può esprimere come prodotto di L e R . Infatti $\langle +, 1, 11 \rangle = (RL)^5$. •

TEOREMA 6.3.2 Il quadrato di una UTT riemanniana di segno negativo è uguale all'identità.

DIMOSTRAZIONE. Il Corollario 6.2.1C ci garantisce che corrisponde ad una qualche trasposizione. Inoltre, in generale, il quadrato di una UTT di segno negativo corrisponde sempre ad una trasposizione di un numero di semitoni uguale alla somma dei due livelli di trasposizione. Ma nelle UTT i livelli di trasposizione sono uno l'opposto dell'altro, da cui la tesi. •

Il Teorema 6.3.1 ha permesso di riconoscere un'altra coppia di generatori per il gruppo, ossia P e $\langle +, 1, 11 \rangle$. Questo, insieme al fatto che P fissa due altezze nella triade, aiuta a comprendere un'ulteriore particolarità della trasformazione P , e una sua ulteriore affinità con L e R , collaborando a 'giustificare' la sua presenza nel nome del gruppo. Inoltre ha permesso di visualizzare da un punto di vista diverso gli elementi del gruppo-PLR rispetto a come sono stati presentati nel secondo capitolo, attraverso una rappresentazione che permette di esplicitare la proprietà di uniformità. Infine il Teorema 6.3.2 ha permesso di distinguere ed esplicitare la proprietà di un particolare insieme di elementi del gruppo-PLR a cui appartengono i tre storici generatori P, L ed R .

Conclusioni

Si sono proposte le basi epistemologiche di una teoria musicale affrontata da un punto di vista matematico, e si sono introdotte le strutture necessarie allo studio del Tonnetz e delle trasformazioni tra triadi. Dopo aver fornito alcune coordinate storiche sulla loro origine, si sono analizzati il Tonnetz e il suo duale topologico da un punto di vista della teoria dei grafi, e se ne sono studiate le proprietà per dedicarsi in particolare ai 62 cicli hamiltoniani sul duale topologico del Tonnetz. Tale risultato è stato raggiunto empiricamente mediante l'impiego del calcolatore, ma lo studio del gruppo degli automorfismi del grafo ha permesso all'Autore di interpretarlo, classificando i cicli in base ad 8 modelli.

Si è quindi studiato dal punto di vista algebrico il *gruppo-PLR* delle trasformazioni tra triadi, la cui azione è rappresentata graficamente dal duale del Tonnetz, e si sono dimostrati alcuni risultati sulle sue proprietà e sul suo rapporto con il gruppo delle trasposizioni e delle inversioni *T-I* e con gli insiemi di altezze diatonici. Si è mostrato che entrambi sono isomorfi al gruppo diedrale di ordine 24, pur essendo diversi e tali che uno è il centralizzatore dell'altro, e si è dimostrato inoltre che anche i gruppi degli automorfismi del Tonnetz e del suo duale sono isomorfi a tale insieme.

Si è poi studiato il problema generale delle trasformazioni tra triadi, e ci si è concentrati sulla categoria delle trasformazioni triadiche uniformi, e, al suo interno, delle trasformazioni riemanniane, che ha permesso di visualizzare da un punto di vista differente il *gruppo-PLR*, mostrandone ulteriori proprietà.

Infine si sono proposti alcuni esempi di applicazione dei risultati ottenuti all'analisi di alcune composizioni musicali, una delle quali composta utilizzando i risultati del presente lavoro.

La materia trattata in questa sede lascia aperti alcuni quesiti e possibili approfondimenti, sia matematici che di teoria musicale. Ritengo che sarebbe interessante infatti studiare e catalogare a meno dell'azione del gruppo degli

automorfismi anche i cammini hamiltoniani sul duale topologico del Tonnetz, o provare ad applicare gli stessi strumenti a reti di altezze differenti ma rappresentative di altre strutture musicali interessanti, cosa che è già stata fatta in alcuni casi particolari.

Inoltre sarebbe utile approfondire i risultati ottenuti in questa sede da un punto di vista strettamente musicale. Un esempio particolare è fornito dalle due tipologie di 6-cicli di *D_{Ton}* introdotte nel quarto capitolo, che presentano interessanti proprietà dal punto di vista musicale, proprietà che ho trovato utili in termini compositivi. Il modello *PLRPLR*, infatti, comporta un ciclo di sei triadi, tre maggiori e tre minori, tutte quante accomunate da un'altezza fissata, e tale che ovviamente si cambi una sola altezza ad ogni passaggio. Il modello *PLPLPL*, invece, consente un ciclo di sei triadi, ancora tre maggiori e tre minori, cambiando una sola altezza ad ogni passaggio in modo che ogni movimento sia semitonale e che nessuna altezza sia fissata. Le tre triadi allora si muoveranno su solo sei altezze, e ogni singola voce si sposterà all'interno del ciclo solo di un semitono. Ho utilizzato questi risultati nel mio *Musica Astratta, per coro* (2008), ma altri sono stati gli spunti emersi nella stesura di questa tesi che a mio avviso richiedono approfondimenti dal punto di vista della teoria musicale e che lasciano intavedere interessanti applicazioni nella composizione.

Infine credo che quanto emerso nel presente lavoro possa fornire spunti di riflessione anche per le scienze cognitive, mostrando come le strutture trasformazionali sottese alla categorizzazione di oggetti della teoria musicale mostrino punti in comune con quelle attinenti la categorizzazione di oggetti geometrici bidimensionali.

Bibliografia

[A.A.V.V. 2008]

A.S. Crans, T.M. Fiore e R. Satyendra, *Musical Actions of Dihedral Groups*, 2008, <http://arxiv.org/pdf/0711.1873>

[ATTNEAVE E OLSON 1971]

F. Attneave e R.K. Olson, *Pitch as a medium: a new approach to psychophysical scaling*, *Journal of American Psychology*, 84, pp. 66-84.

[ARTIN 1997]

M. Artin, *Algebra*, Bollati Boringhieri, 1997.

[BENSON 2007]

D. Benson, *Music a Mathematical Offering*, University of Aberdeen, Department of Mathematics, 2007.

[BONDY E MURTY 1982]

J.A. Bondy e U.S.R. Murty, *Graph theory with applications*, Department of Combinatorics and Optimization - University of Waterloo, Ontario, Canada, NORTH-HOLLAND, 1982.

[CASSIRER 1944]

E. Cassirer, *The concept of Group and the Theory of Perception*, *Philosophy and Phenomenological Research*, Vol. 5, No. 1, (Sep., 1944), pp. 1-36.

[CHILDS 1998]

A.P. Childs, *Moving beyond Neo-Riemannian Triads: Exploring a Transformational Model for Seventh Chords*, *Journal of Music Theory*, Vol. 42, No. 2, Neo-Riemannian Theory. (Autumn, 1998), pp. 181-193.

[COHN 1996]

R. Cohn, *Maximally Smooth Cycles, Hexatonic Systems, and the Analysis of Late-Romantic Triadic Progressions*, *Music Analysis*, Vol. 15, No. 1. (March, 1996), pp. 9-40.

[COHN 1997]

R. Cohn, *Neo-Riemannian Operations, Parsimonious Trichords, and Their "Tonnetz" Representations*, *Journal of Music Theory*, Vol. 41, No. 1. (Spring, 1997), pp. 1-66.

[COHN 1998]

R. Cohn, *Introduction to Neo-Riemannian Theory: A Survey and a Historical Perspective*, *Journal of Music Theory*, Vol. 42, No. 2, Neo-Riemannian Theory. (Autumn, 1998), pp. 167-180.

[DOUTHETT E STEINBACH 1998]

J. Douthett e P. Steinbach, *Parsimonious Graphs: A Study in Parsimony, Contextual Transformations, and Modes of Limited Transposition*, *Journal of Music Theory*, Vol. 42, No. 2, Neo-Riemannian Theory. (Autumn, 1998), pp. 241-263.

[EULERO 1739]

L. Eulero, *Tentamen Novae Theoriae Musicae*, Petropoli, ex Typographia Academiae Scientia, 1739. Versione digitale della biblioteca universitaria di Göttingen.

[FORTE 1973]

A. Forte, *The Structure of Atonal Music*, Yale University Press, 1973.

[GAREY E JOHNSON 1983]

M.R. Garey e D.S. Johnson, *Computer and intractability: a Guide to the Theory of NP-Completeness*, W.H. Freeman, 1983.

[GOLLIN 1998]

E. Gollin, *Some Aspects of Three-Dimensional "Tonnetze"*, *Journal of Music Theory*, Vol. 42, No. 2, Neo-Riemannian Theory. (Autumn, 1998), pp. 195-206.

[HARARY 1969]

F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley, 1969.

[HARARY E PALMER 1973]

F. Harary e E.M. Palmer, *Graphical Enumeration*, Academic Press, 1973.

[HOOK 2002]

J. Hook, *Uniform Triadic Transformations*, *Journal of Music Theory*, Vol. 46, No. 1/2, (Spring - Autumn, 2002), pp. 57-126.

[HYER 1989]

B. Hyer, *Tonal Intuitions in 'Tristan and Isolde'*, Ph.D. diss., Yale University, 1989.

[KAGEL 1960]

M. Kagel, *Translation - Rotation*, Die Reihe, 7, 1960.

[KIDD 2006]

M. Kidd, *An introduction to the practical use of music-mathematics*, University of Chicago, Department of mathematics, 2006.

[LEWIN 1982]

D. Lewin, *A Formal Theory of Generalized Tonal Functions*, Journal of Music Theory, Vol. 27, pp. 23-60.

[LEWIN 1987]

D. Lewin, *Generalized musical Intervals and Transformations*, Yale University Press, 1987.

[LOCKE E KELLAR 1973]

S. Locke e L. Kellar, *Categorical perception in a non-linguistic mode*, Journal of American Psychology, 9, pp. 355-369.

[MAZZOLA 2002]

G. Mazzola, *The Topos of Music – Geometric Logic of Concepts, Theory, and Performance*, Birkhäuser, 2002.

[NOLAN 2003]

C. Nolan, *Combinatorial Space in Nineteenth- and Early Twentieth-Century Music Theory*, Music Theory Spectrum, Vol. 25, No. 2. (Autumn, 2003), pp. 205-241.

[OETTINGEN 1866]

A. von Oettingen, *Harmoniesystem in dualer Entwicklung*, Verlag von W. Glaser, 1866.

[RAHN 1980]

J. Rahn, *Basic atonal theory*, Schirmer Books, 1980.

[REHDING 2003]

A. Rehding, *Hugo Riemann and the Birth of Modern Musical Thought*, Cambridge University Press, 2003.

[RIEMANN 1914-1915]

H. Riemann, *Ideas for a Study "On the Imagination of Tone"*, 1914-1915, versione tradotta in inglese in: *Journal of Music Theory*, Vol. 36, No. 1. (Spring, 1992), pp. 81-117.

[SLOBODA 1998]

J. A. Sloboda, *La mente musicale*, Il Mulino, 1998.