

# Formalisation algébrique des structures musicales à l'aide de la *Set-Theory* : aspects théoriques et analytiques.

Moreno Andreatta, Carlos Agon

Ircam, Centre George Pompidou, France

email: { andreatta, agon }@ircam.fr

## Résumé

Dans ce papier, nous présentons les idées de base de l'approche algébrique dans la formalisation des structures musicales, avec un regard particulier sur la *Set-Theory* américaine. Dans cette perspective, le catalogue d'accords proposé par Allen Forte n'est qu'un cas particulier d'une action d'une structure algébrique de groupe sur un ensemble. Nous montrons comment le changement du type de groupe opérant sur un ensemble de classes des hauteurs (ou *pitch-class set*, ECH en abrégé) est étroitement lié à la notion multiforme d'*équivalence* entre accords et conduit à des catalogues différents de structures intervalliques (dont l'interprétation traditionnelle concerne les hauteurs, mais pour lesquelles on peut proposer des applications intéressantes et nouvelles au niveau rythmique). Les opérations de base de la *Set-Theory* sont discutées à travers l'implémentation réalisée en *OpenMusic*, un langage de programmation pour l'analyse et la composition assistée par ordinateur qui permet une représentation et une manipulation graphique de ces outils théoriques.

## Mots clefs

Formalisation, représentation, algèbre, *Set-Theory*.

## 1 Introduction

Depuis les années soixantes, la recherche théorique en musique a trouvé dans l'approche algébrique une aide précieuse pour la formalisation des structures musicales. Plusieurs compositeurs, tels que Milton Babbitt aux Etats-Unis, Iannis Xenakis en Europe et Anatol Vieru en Europe de l'Est, ont employé de structures de groupe aussi bien pour ce qui concerne la théorisation des problèmes musicaux

classiques (formalisation des échelles et des structures rythmiques) que pour l'exploration de nouvelles stratégies compositionnelles. Cela est dû principalement à la généralité des concepts algébriques, qui peuvent trouver une application naturelle aussi bien au niveau des hauteurs que des rythmes. Cette double perspective caractérise constamment la réflexion des trois compositeurs/théoriciens précédents. Dans la présentation classique de la *Set-Theory*, comme on la trouve par exemple chez Allen Forte (Forte, 1973), il n'y a pas de formalisation algébrique à proprement parler. La notion de *congruence* modulo 12, permettant de définir le concept de *classe des hauteurs* comme classe d'équivalence d'une note donnée (modulo l'octave), n'est presque jamais mise en relation avec la structure algébrique du groupe cyclique  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$  d'ordre 12, qui représente pourtant l'espace naturel à la base de ce type de relation d'équivalence. De même, on peut constater que la représentation circulaire du tempérament égal (toujours modulo l'octave) est complètement absente de la démarche proposée par Allen Forte, à la différence d'autres approches plus algébriques qui caractérisent, par exemple, la théorie diatonique ou la nouvelle théorie néo-riemannienne.<sup>1</sup> Mais la théorie des groupes est présente dans d'autres textes de référence sur la *Set-Theory*, en particulier l'ouvrage pédagogique *Basic Atonal Theory* (Rahn, 1980), le traité de théorie et composition *Composition with Pitch-Classes* (Morris,

---

<sup>1</sup> Une bibliographie détaillée de la *Set-Theory*, théorie diatonique et théorie néo-riemannienne est disponible *online* sur la page web du Séminaire *MaMuX* (Mathématiques/Musique et relations avec d'autres disciplines) de l'Ircam : <http://www.ircam.fr/equipes/repmus/mamux>.

1987) et un *opus magnum* qui a révolutionné la pensée théorique et analytique aux Etats-Unis en ouvrant la voie à celle que l'on appelle désormais l'approche "transformationnelle" envers la théorie de la musique : *Generalized Musical Intervals and Transformations* (Lewin, 1987). Nous partageons la conviction qu'une approche algébrique envers la théorie de la musique, l'analyse et la composition peut permettre de présenter les concepts traditionnels de la *Set-Theory* américaine dans une forme à la fois très élégante et particulièrement adaptée à la généralisation et à l'implémentation dans un environnement d'analyse et composition assistée par ordinateur. Ces points seront discutés à l'aide de l'implémentation réalisée dans *OpenMusic*, le langage de programmation visuelle développé à l'Ircam (Assayag et al., 1999). Cette implémentation permet de choisir la structure de groupe la plus appropriée par rapport au type de relation d'équivalence employée. Chaque structure de groupe caractérise une librairie spécifique, l'idée principale étant que le fait de privilégier une librairie à une autre peut être considéré comme le choix d'un paradigme d'interprétation particulier dans le processus de formalisation des structures musicales. Dans le cas de la librairie  $Z_n$ , nous avons utilisé les propriétés algébriques du groupe cyclique  $Z/nZ$  d'ordre  $n$  et l'action de ce groupe sur la structure d'ensemble qu'il représente. Cela offre une formalisation algébrique du concept d'équivalence entre accords à une transposition près. Il s'agit, aussi bien historiquement que conceptuellement, du premier type de catalogue d'accords établi de façon complète. Deux théoriciens de L'Europe de l'Est sont en particulier responsables de ce résultat : le Polonais Maciej Zalewski (Zalewski, 1972) et le Roumain Anatol Vieru (Vieru, 1980). Ces deux théoriciens ont travaillé dans l'isolement presque total des pays de l'est pendant les années de l'après guerre et ils ont abouti au catalogue complet des structures d'accords à une transposition près, un catalogue dont les ramifications théoriques et mathématiques sont loin d'être épuisés.<sup>2</sup> Le catalogue

<sup>2</sup> Voir, par exemple la formalisation de l'approche de Zalewski à travers les concepts de l'algèbre universelle par Anna Romanowska (1974) et les études de Carmine Moscariello sur le catalogue de Zalewski par rapport au concept de consonance et de dissonance (Moscariello, 1995).

comprend 352 classes d'équivalences (si on inclut l'ensemble vide et la classe d'équivalence d'une note simple) qui sont représentées et étudiées, dans le deux cas, à l'aide de la notion de structure d'intervalle (ou structure intervallique)<sup>3</sup>. Rappelons qu'une structure d'intervalles permet de représenter tout accord d'un système tempéré divisé en 12 parties (ou  $n$  parties) avec un  $m$ -tuple  $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ , tel que  $a_1$  compte le nombre de demi-tons (ou des intervalles unitaires minimaux du système tempéré) entre la première et la deuxième note et ainsi de suite, avec la convention que la somme  $a_1 + a_2 + \dots + a_m$  soit égale à 12 (plus en général à  $n$ ). La représentation intervallique offre quelques avantages remarquables. Par exemple, elle permet de caractériser les renversement d'un accord par simple permutation circulaire (Fig.1) :

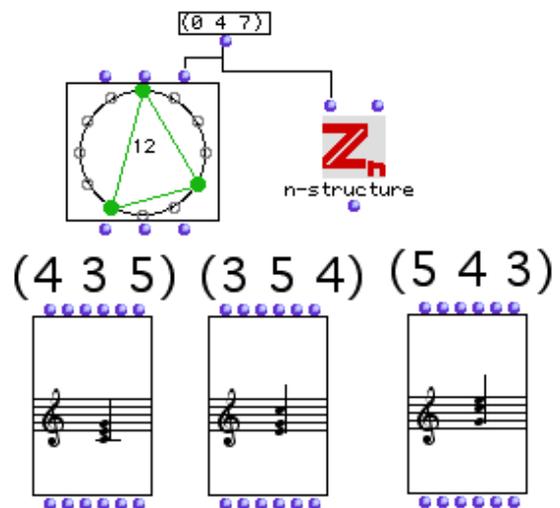


Fig.1 : Renversement d'accords et structure intervallique.

La structure intervallique permet aussi de mettre en évidence la symétrie interne d'un accord. Par exemple, tout mode à transposition limitée de Messiaen est donné par une structure intervallique ayant des périodicités internes, i.e. des sous-structures intervalliques qui se répètent (et vice-versa, toute structure intervallique ayant des sous-périodes correspondent musicalement à des modes à transpositions limitées de Messiaen). Cela permet donc d'obtenir facilement un catalogue exhaustif des

<sup>3</sup> À ne pas confondre avec les notions de vecteur d'intervalles (Forte) ou de fonction d'intervalle (Lewin) sur lesquelles nous reviendrons plus tard.

modes à transpositions limitées pour toute division de l'octave en  $n$ -parties égales. La figure suivante montre les deux modes à transpositions limitées qui avaient échappé à Messiaen, et ceci malgré sa conviction d'avoir répertorié toutes structures modales ayant cette propriété particulière :

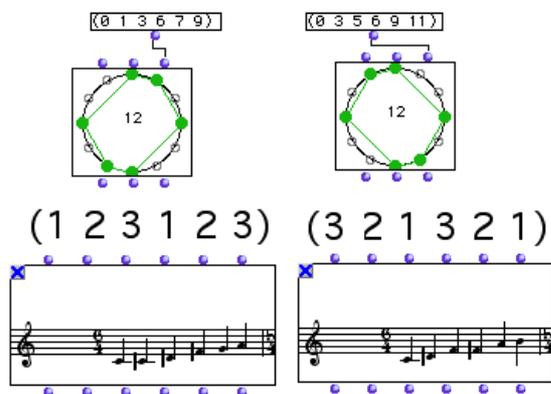


Fig.2 : Deux modes à transposition limitée et leur représentation intervallique.

Les deux gammes (ou bien les deux accords, si on les pense dans la verticalité) ne sont évidemment pas équivalentes à une transposition près, car les structures intervalliques correspondantes ne sont pas équivalentes à une permutation circulaire près. Autrement dit, une structure intervallique (et ses permutations circulaires) caractérise entièrement un accord et toutes ses transpositions (avec renversements). Mais l'exemple précédent nous offre la possibilité de comprendre une autre relation que l'on peut établir entre les deux accords. Les deux structures intervalliques sont, en effet, chacune la lecture rétrograde de l'autre. Musicalement cela s'exprime à travers l'opération d'inversion, en disant, par exemple, que le deuxième mode est une inversion du premier par rapport à une note fixe (dans ce cas-là le do=0 ou bien le fa#=6). Cette opération est à la base de la relation d'équivalence entre accords proposée par Allen Forte. Dans son catalogue, qui comprend 223 ensembles de classes de hauteurs (*pitch-class sets*)<sup>4</sup>, deux accords sont équivalents si l'un est une transposition ou une inversion de l'autre. En termes d'action d'un groupe sur un ensemble, on

est ainsi passé du groupe cyclique au groupe diédral opérant sur l'ensemble  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Cela correspond à un changement de paradigme et une analyse basée sur cette notion d'équivalence doit pouvoir en tenir compte. Une des conséquences les plus importantes du recours au groupe diédral est l'équivalence formelle entre l'accord majeur et l'accord mineur. Dans le catalogue de Forte, les deux accords sont identifiés, ce qui pose des problèmes lorsque ce type d'approche concerne l'analyse de la musique tonale. Autrement dit, le choix du paradigme diédral comme outil de classification d'accords conduit naturellement à privilégier l'analyse de la structure de la musique *atonale*, pour citer le titre de l'ouvrage de Forte, musique dans laquelle les deux notions de majeur et de mineur peuvent plus aisément être confondues.

Par voie de conséquence, l'utilisation de classes d'équivalence aussi bien dans l'analyse que dans la composition, est étroitement liée au paradigme algébrique sur lequel on s'appuie pour définir la notion d'équivalence entre accords. Cela nous semble particulièrement important dans le domaine de la musicologie computationnelle, dans lequel la manipulation des structures musicales assistée par ordinateur, en particulier comme outil d'analyse musicale, est nécessairement soumise à une réflexion épistémologique. Mais le concept de groupe, et celui d'action de groupe en particulier, est loin d'être simplement un outil technique de calcul. Selon le mathématicien Henri Poincaré, "le concept général de groupe préexiste dans notre esprit. Il s'est imposé à nous, non pas comme une forme de notre sensibilité, mais comme une forme de notre entendement" (Poincaré, 1905).

Dans la section suivante, nous résumons quelques concepts de base de la théorie des groupes. La troisième section décrit les classes d'équivalence d'accords (à une transposition près) en termes d'action de groupe. La quatrième section montre comment le même concept permet de formaliser les principes de base de la *Set-Theory* pourvu que l'on change le type de groupe opérant sur un ensemble donné. L'analogie entre classes d'équivalence d'accords et classes d'équivalence de rythmes ne sera pas discutée dans ce papier, car elle a déjà été traitée dans d'autres éditions des *Journées d'Informatique Musicale* (Andreatta et al., 1999 ; Andreatta et al. 2001).

<sup>4</sup> On a ajouté, comme dans le cas du catalogue des classes de transpositions d'accords, l'ensemble vide et l'ensemble formé d'une note seulement.

## 2 Quelques définitions de base

Cette section introduit quelques concepts de base de la théorie des groupes, dont on montrera une interprétation musicale dans la section suivante.

### 2.1 Définition d'un groupe

Par définition, un groupe est la donnée d'un ensemble  $G$  d'éléments et d'une opération binaire " $\bullet$ " vérifiant les quatre axiomes suivants sont satisfaits :

- *Clôture*:  $a \bullet b$  appartient à  $G$  pour tout  $a$  et  $b$  dans  $G$ .
- *Associativité*:  $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$  pour tout  $a, b, c$  éléments de  $G$ .
- *Identité* : Il existe un élément  $e$  dans  $G$  tel que  $a \bullet e = e \bullet a = a$  pour tout élément  $a$  dans  $G$ .
- *Inverse* : Pour tout élément  $a$  dans  $G$  il existe un seul élément  $a'$  dans  $G$  tel que  $a \bullet a' = a' \bullet a = e$

Nous nous concentrerons en particulier sur quatre groupes qui nous semblent avoir une application intéressante dans la musique : le groupe cyclique, le groupe diédral, le groupe affine et le groupe symétrique.

### 2.2 Groupes cycliques

Un groupe cyclique de  $n$  éléments (i.e. d'ordre  $n$ ) est un groupe  $(G, \bullet)$  dans lequel il y a (au moins) un élément  $g$  tel que toute élément de  $G$  est égal à  $g \bullet g \bullet \dots \bullet g$ , où la loi de groupe " $\bullet$ " est appliquée un nombre fini de fois. Autrement dit,  $G$  est engendré par l'élément  $g$  que l'on appelle aussi le générateur du groupe. En général un groupe cyclique d'ordre  $n$  est engendré par tout entier  $d$  relativement premier avec  $n$  (i.e. 1 est le seul diviseur commun de  $n$  et  $d$ ). Traditionnellement un groupe cyclique d'ordre  $n$  est représenté par l'ensemble  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  des entiers (modulo  $n$ ) et il est indiqué avec  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ . D'un point de vue géométrique, un groupe cyclique peut être représenté par un cercle, dans lequel les entiers  $0, \dots, 11$  sont distribués uniformément. On passe d'un entier à l'autre par rotation autour du centre du cercle d'un angle égal à un multiple de  $30^\circ$  (dans le cas  $n=12$ ). Musicalement, les rotations sont équivalentes aux transpositions, comme on verra dans la prochaine section.

### 2.3 Groupes diédraux

Un groupe diédral  $(D_n, \bullet)$  d'ordre  $2n$  est un group engendré par deux éléments  $a, b$  tels que:

1.  $a \bullet a \bullet \dots \bullet a = a^n = e$  où l'opération de groupe " $\bullet$ " est appliquée  $n$  fois et  $e$  est l'identité
2.  $b \bullet b = e$

Autrement dit, le groupe diédral  $D_n$  est formé des  $2n$  produits  $a^i \bullet b^j$  pour  $i$  compris entre 1 et  $n$  et  $j=1$  ou 2. Le nom "diédral" (two-faced) dérive du fait que d'un point de vue géométrique, ce groupe correspond au groupe des symétries d'un polygone régulier de  $n$  côtés dans le plan. Ces symétries sont de deux types : rotations et réflexions (ou miroirs par rapport à un axe). Musicalement, les réflexions sont des inversions par rapport à une note choisie comme pôle.

### 2.4 Groupes affines

Dans cette section nous limiterons l'étude du groupe affine au groupe des applications affines sur l'ensemble  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ . Par définition, une transformation affine de  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  est une fonction  $f$  qui transforme un élément  $x$  de  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  dans  $ax+b$  (modulo  $n$ ) où  $a$  est relativement premier avec  $n$  et  $b$  appartient à  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ . Dans le cas de  $n=12$ , le facteur multiplicatif  $a$  appartient à l'ensemble  $U=\{1,5,7,11\}$ . Une transformation affine se réduit à une simple transposition en prenant  $a=1$ . De même, les inversions sont des applications affines avec  $a=11$ . Le groupe affine sur  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  sera indiqué avec  $\mathbf{Aff}n$  et consiste en 48 permutations. En analogie avec le cas des groupes diédraux, on peut considérer le groupe affine  $\mathbf{Aff}12$  comme étant formé par les  $12 \times \varphi(12)$  produits  $a^i \bullet b^j \bullet c^k$  pour  $i$  compris entre 1 et  $n$ ,  $j=1$  ou 2 et  $k=1$  ou 2,  $\varphi$  étant l'indicateur d'Euler (ou Fonction indicatrice d'Euler), i.e. l'application qui à tout entier naturel  $m$  non nul associe le nombre d'entiers naturels inférieurs à  $m$  et relativement premiers avec  $m$ . Dans le cas du groupe  $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$  on a  $\varphi(12)=4$  et donc la cardinalité du groupe  $\mathbf{Aff}12$  est égale à 48. Musicalement, les éléments  $a, b$  et  $c$  correspondent respectivement aux *transpositions*, aux *inversions* (par rapport à un axe) et à l'application qui transforme le total chromatique dans la séquence des quintes (ou des quartes).

## 2.5 Groupes symétriques

Un groupe symétrique sur l'ensemble  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est le groupe des applications bijectives de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  dans lui-même i.e. des permutations des éléments  $\{0,1,\dots,n-1\}$  avec comme loi de composition interne la loi de composition entre deux permutations. Le groupe contient  $n!=1\times 2\times \dots\times n$  éléments et il sera dorénavant indiqué avec  $S_n$ .

## 2.6 L'action d'un groupe sur un ensemble

Par définition un groupe  $(G, \bullet)$  opère sur un ensemble  $X$  si il existe une application *ACTION* de  $G\times X$  dans  $X$  telle que les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1.  $ACTION(a\bullet b, x) = ACTION(a, ACTION(b\bullet x))$  pour tout  $a, b$  dans  $G$  et  $x$  dans  $X$ .
2.  $ACTION(e, x) = x$  pour tout  $x$  dans  $X$ , où  $e$  est l'identité de  $G$ .

La première propriété est une sorte de condition de compatibilité entre le concept d'action et la loi de groupe. La deuxième propriété garantie que "l'élément identité" de  $G$  opère comme "l'action identique" en laissant fixe tout élément de l'ensemble.

Deux éléments  $x, y$  dans l'ensemble  $X$  sont *conjugués* si l'un est l'image de l'autre sous l'action de  $G$  sur  $X$ , en d'autres termes s'il y a un élément  $a$  dans  $G$  tel que  $y = ACTION(a, x)$ . La conjugaison est une *relation d'équivalence* (i.e. elle est *réflexive, symétrique et transitive*). Les classes d'équivalence sont aussi appelées *orbites*. Musicalement, l'action du groupe cyclique sur l'ensemble des entiers de classes de hauteurs permet de définir les classes de transposition des accords. Les orbites par rapport à l'action du groupe diédral sont les ensembles de classes de hauteurs dans le sens de Forte (*pitch-class sets*). Le catalogue des classes équivalences d'accords à une application affine près a été établi de deux façons différentes par Robert Morris (Morris, 1987) et Guerino Mazzola (Mazzola, 1990). En ce qui concerne les orbites issues de l'action du groupe symétrique  $S_n$  sur  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , le catalogue se réduit à 77 classes d'équivalence, toujours en incluant la classe vide et l'orbite formée par une note. Le compositeur et théoricien mexicain Julio Estrada a proposé d'utiliser cette notion d'équivalence formelle pour contrôler la texture verticale des structures polyphoniques. Le choix d'un groupe spécifique qui opère sur un ensemble n'est donc pas qu'un problème

technique, mais il a des conséquences musicologiques intéressantes.  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ,  $D_n$ ,  $Aff_n$  et  $S_n$  offrent de véritables paradigmes à l'intérieur desquels il est possible de modéliser le concept d'équivalence musicale. Il faut remarquer que deux accords équivalents selon l'action de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  resteront équivalents sous l'action de chacun des groupes jusqu'ici considérés. Vice-versa, deux structures qui sont équivalentes à une permutation près (i.e. sous l'action du groupe symétrique  $S_n$  sur  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ) ne seront pas nécessairement équivalentes sous l'action d'autres groupes. Dans les sections suivantes, on donnera quelques exemples d'application musicale de ces quatre types d'action de groupe en privilégiant les outils informatiques développés pour l'analyse musicale à l'aide de la *Set-Theory*, aussi bien dans la formulation classique issue d'Allen Forte que dans les récents développements proposés par David Lewin.

## 3. Classes de transposition d'accords : l'action de $\mathbb{Z}_n$ sur $\mathbb{Z}_n$ .

Comme Xenakis l'a souligné à partir des années soixantes, "on peut affirmer qu'avec les vingt-cinq siècles d'évolution musicale, on aboutit à une formulation universelle en ce qui concerne la perception des hauteurs, qui est la suivante : l'ensemble des intervalles mélodiques est muni d'une structure de groupe avec comme loi de composition l'addition" (Xenakis, 1965; p. 69). Autrement dit, toute division de l'octave dans un nombre donné  $n$  de parties égales, peut être représentée par un groupe, plus précisément le groupe cyclique des entiers modulo  $n$ , par rapport à l'addition modulo  $n$ .

La figure suivante montre la représentation circulaire (ou cadran d'horloge) du système tempéré à 12 degrés dans laquelle on a mis en évidence l'intervalle générateur de "quarte juste".

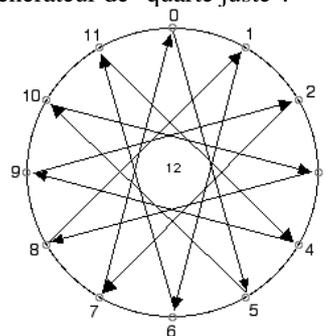


Figure 3. Cercle des quartes dans le système tempéré à 12 degrés.

Dans le cas de la division de l'octave en 12 parties égales, nous avons trois autres intervalles générateurs. Ils correspondent aux cercles des secondes mineures, des quintes justes et des septièmes majeures, engendrés respectivement par les entiers 1, 7 et 11 (i.e. tous et seuls les nombres relativement premiers avec 12). Comme nous avons déjà mentionné dans la section précédente, le groupe cyclique  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  peut être considéré comme engendré par des opérations plutôt que par des éléments. Soit  $T_k$  la transposition de  $k$  "demi-tons" (au sens de l'intervalle de base minimal pour une division de l'octave donnée). Pour tout entier  $k$  relativement premier avec  $n$ ,  $T_k$  engendre le groupe cyclique  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ . Par définition, étant données deux transpositions  $T_k$  et  $T_h$  on peut définir la loi de composition " $\bullet$ " de deux transpositions dans la façon suivante :

$$T_k \bullet T_h = T_{k+h}$$

où l'addition  $k+h$  est calculée modulo  $n$ .

Les axiomes qui permettent de définir une structure de groupe sont respectés. Cette opération a deux propriétés ultérieures par rapport à  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  en tant qu'ensemble :

1.  $(T_k \bullet T_h)(x) = T_k(T_h(x))$  pour toute transposition  $T_k, T_h$  et pour tout élément  $x$  dans  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ . Autrement dit, transposer un entier de classe de hauteur par  $h$  demi-tons et après par  $k$  demi-tons, est équivalent à transposer le même entier par  $h+k$  demi-tons (modulo  $n$ ).
2.  $T_0(x) = T_n(x) = x$  pour tout  $x$  dans  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ , où  $T_0$  (ou  $T_n$ ) est la transposition identique.

En vertu de la définition donnée dans la section 2.6, on peut conclure que la transposition musicale définit une *action* au sens mathématique du terme. L'énumération des classes des transpositions d'accords est donc équivalente à l'étude des orbites d'accords par rapport à l'action du groupe  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  sur lui-même. Un premier problème concerne l'énumération de toutes ces orbites pour un tempérament donné. La fonction `card` de la librairie  $\mathbf{Z}_n$  permet de calculer le nombre de classes de transposition d'un accord ayant  $k$  éléments. Le patch en Figure 4 montre la situation pour  $n=12$  et  $n=24$ . Il

y a, par exemple, 80 hexacordes ( $k = 6$ ) dans la division de l'octave en 12 parties, alors qu'il y en a plus de 5000 (précisément 5620) dans le système en quarts de ton. Cela donne déjà une bonne idée de la complexité combinatoire engendrée par des grandes valeurs de  $n$ .

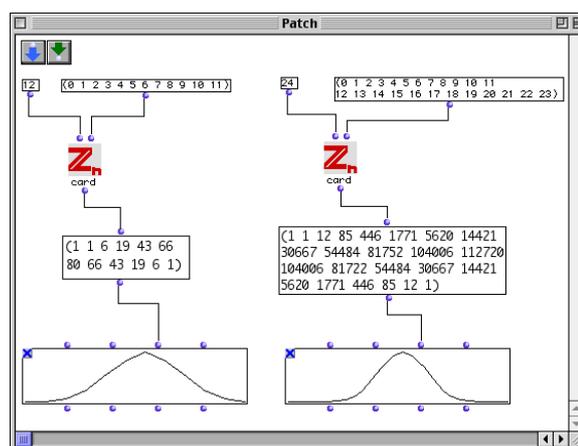


Figure 4 : Nombre de classes de transpositions d'accords dans le système tempéré à 12 et à 24 degrés.

#### 4. Ensembles de classes des hauteurs (pitch-class sets) ou l'action de $D_n$ sur $\mathbf{Z}_n$

Après l'ouvrage théorique d'Allen Forte (1973), plusieurs implémentations de la *Set-Theory* ont été proposées.<sup>5</sup> Dans le cas de la librairie  $D_n$ , nous avons commencé par adapter en *OpenMusic* une implémentation en lisp réalisée par Janusz Podrazik. Nous avons par la suite ajouté d'autres outils algébriques, en incluant certaines constructions théoriques proposées par David Lewin (Lewin, 1987). Comme pour le cas précédent, nous voulons obtenir un catalogue complet d'ECH pour toute division de l'octave en  $n$  parties. Pour cette raison nous avons utilisé le concept d'action du groupe diédral sur l'ensemble  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ . Cette action détermine

<sup>5</sup> Par exemple Castine (1994). Voir aussi la section 11.5.2.3 de Mazzola (2002) pour une discussion sur les outils informatiques de la *Set-Theory*.

les classes d'équivalence d'accords à une transposition et une inversion près. La figure 5 représente une relation d'équivalence compatible avec l'action du groupe diédral sur  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ . Un accord de do majeur est transformé en accord de do mineur par une inversion (par rapport à l'axe qui passe par les points 0 et 6) suivie par une transposition (d'une quinte).

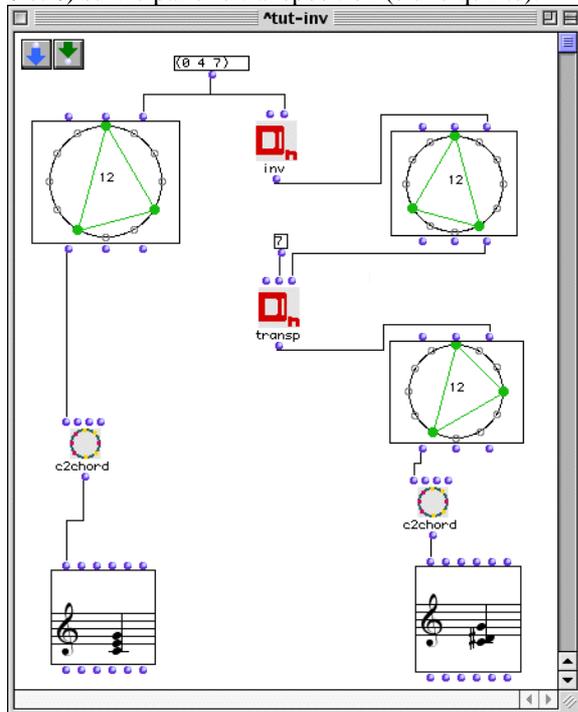


Figure 5 : équivalence majeur/mineur dans le paradigme  $D_n$ .

Notons que le groupe n'est pas commutatif, i.e. le changement d'ordre dans les opérations donne un résultat différent (en fait  $a \bullet b = b \bullet a'$  où  $a'$  est l'inverse de  $a$ ). Avec la fonction  $D_n\text{-card}$  on peut calculer pour tout  $n$  et  $k$  le nombre d'ECH 'généralisées' ayant cardinalité  $k$ . La figure suivante (Figure 6) offre une énumération comparative pour le système tempéré à 12 et à 24 degrés.

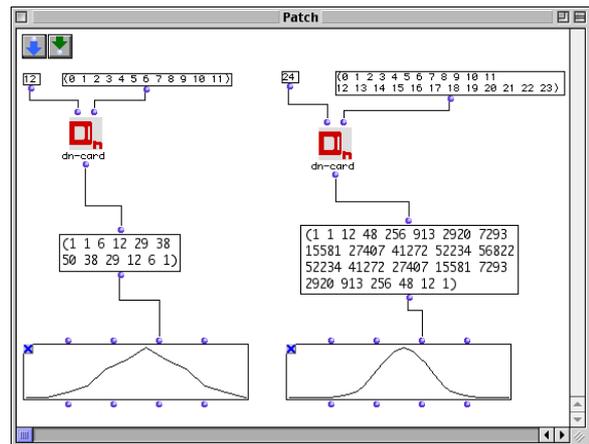


Figure 6 : Distribution du nombre d'orbites sous l'action de  $D_n$  dans le cas de la division de l'octave en 12 et en 24 parties égales.

Comme dans le cas du groupe cyclique  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , on peut remarquer la propriété d'invariance de la fonction  $D_n\text{-card}$  entre les orbites ayant  $k$  et  $n-k$  éléments, ce qui suggère que l'on peut restreindre la classification aux classes d'équivalences ayant cardinalité  $k$  inférieure ou égale à  $n/2$  sans perte de généralité.

Une fois le nombre d'orbites calculé, le problème se pose de les énumérer en ayant un critère d'ordonnement cohérent, pour éviter de répéter des structures musicales qui sont équivalentes mais dont on peut avoir plusieurs représentations. Dans la littérature américaine, la représentation canonique d'une orbite s'appelle *forme primaire* (*prime form*) d'un ECH. Elle est obtenue en choisissant parmi les possibles permutations cycliques ou inversions d'une structure intervallique donnée celle qui minimise la distance entre la première note et toutes les autres, avec une transposition finale qui fait correspondre la première note à l'entier 0. Dans le cas où l'orbite est dans la forme la plus compacte mais ne commence pas par 0, on dit qu'elle est dans un *ordre normal* (*normal order*)<sup>6</sup>. La figure suivante (Figure 7) montre le processus de réduction à l'ordre normal et à la forme primaire d'un hexacorde généré d'une façon aléatoire.

<sup>6</sup> Plus précisément, le processus que l'on vient de décrire conduit aux *formes primaires* du catalogue de Forte. D'autres théoriciens, tels que John Rahn (1980) ou Robert Morris (1987) utilisent un algorithme d'ordonnement différent.

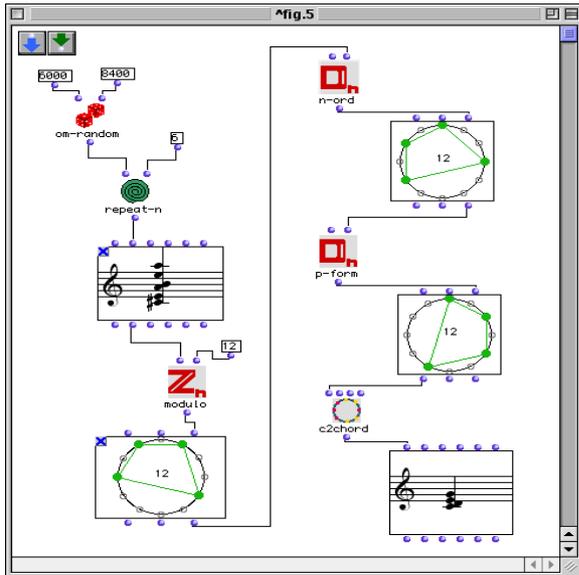


Figure 7: Ordre normal et forme primaire d'un hexacorde engendré d'une façon aléatoire.

La fonction *pc-set* (figure 8) opère sur un ECH représenté dans le catalogue de Forte par deux nombres séparés par un trait d'union (le premier nombre correspondant à la cardinalité de l'ECH et le deuxième correspondant à la position de l'ECH dans le catalogue des formes primaires de Forte). L'ECH peut être représenté sous trois formes (*types*) :

- La représentation par entiers des classes des hauteurs (*integer mode*). Elle est donnée par une collection ordonnée d'entiers entre 0 et 11 qu'on appelle aussi les "résidus".
- Le vecteur d'intervalles (*vector mode*). Cette représentation est donnée à travers un 6-tuplet dont le premier élément compte le nombre d'intervalles de seconde mineure à l'intérieur de l'accord, le deuxième élément compte le nombre d'intervalles de seconde majeure et ainsi de suite, jusqu'au dernier élément du 6-tuplet, qui compte le nombre d'intervalles de quarte augmentée (triton).
- La représentation symbolique traditionnelle pour ce qui concerne les hauteurs (*pitch mode*). Par convention, 0=C=do, 1=C#=do#=Db=réb, ..., 11=B=si.

L'ECH dans la représentation par résidus peut facilement être convertie dans la représentation intervallique déjà introduite, grâce à la fonction générique *n-structure*, où l'entier *n* indique l'ordre du groupe cyclique dans lequel se trouve la structure intervallique (Figure 8).

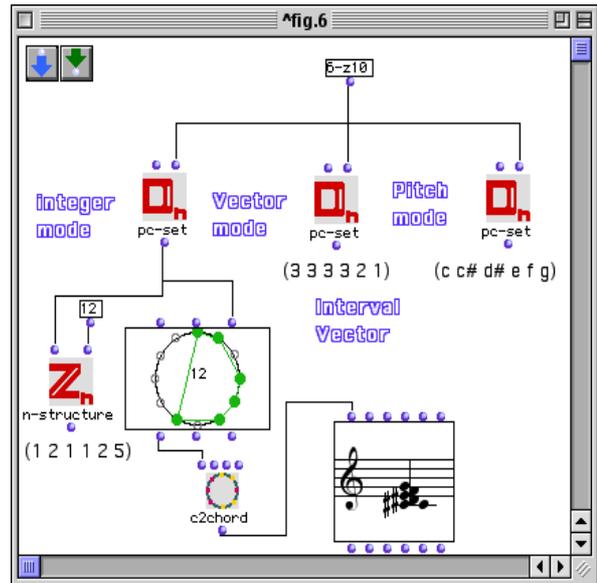


Figure 8 : Les fonctions *pc-set* et *n-structure*.

Comme Forte et Lewin l'ont bien montré, le *vecteur d'intervalles* ne détermine pas un ECH d'une façon unique. Autrement dit, il y a des ECH qui ont le même vecteur d'intervalles mais qui ne sont pas équivalents dans le paradigme *Dn*, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas liés par des transpositions ou des inversions. D'après Forte, cette relation est appelée la *relation Z*. Un exemple d'ensemble en relation Z avec l'ECH 6-z10 de la figure précédente est montré dans la Figure 9 :

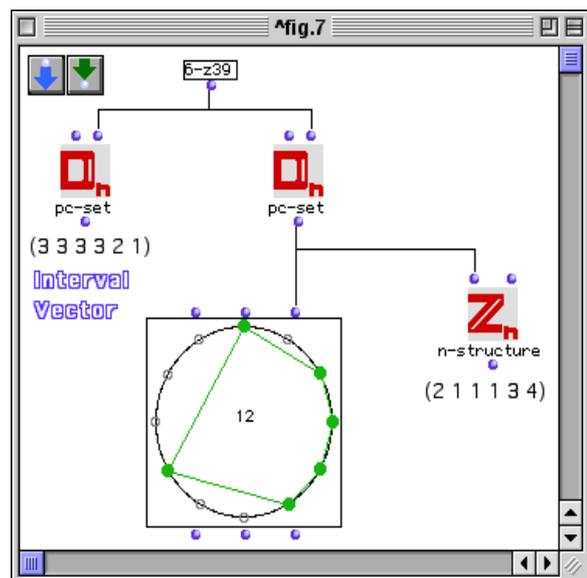


Figure 9: un ECH en relation Z avec l'ensemble 6-Z10

Comme on peut le constater, les *n-structures* correspondantes ne sont pas en rapport de

permutation cyclique ou d'inversions, ce qui prouve que les deux accords ne sont pas représentés par la même orbite.

L'opération ensembliste suivante est celle du passage au complémentaire. Par définition, deux accords sont complémentaires s'ils forment une union disjointe du total chromatique (i.e. si le total chromatique est l'union des deux accords et si leur intersection est vide). Cette définition concerne la relation de complémentarité au sens "littéral" et elle peut donner lieu à certaines contradictions si elle s'applique au niveau de la forme primaire. Dans ce cas on parlera de relation de complémentarité "abstraite", car elle opère sur les classes d'équivalence et non sur les représentants. Prenons l'exemple suivant (figure 10), tiré de l'analyse du *Sacre du Printemps* d'I. Stravinsky par Allen Forte (Forte, 1978).<sup>7</sup>

L'ECH *A* est inclus dans l'ECH *B*, car tout élément de *A* appartient à *B*. Le complément "littéral" de *A* est donné par *C* que l'on peut transformer en *B* à travers des transpositions et des inversions. En conclusion, *A* est contenu dans son complémentaire, ce qui pourrait sembler (mais ce ne l'est pas) une contradiction logique.

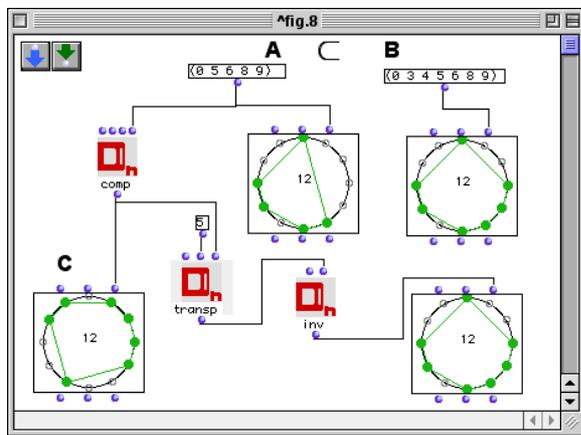


Figure 10 : Un ECH contenu dans son complémentaire.

La relation d'inclusion et du passage au complémentaire permet de mettre en relation des ECH ayant cardinalité différente. Cela est réalisé grâce au concept de complexe et de sous-complexe d'ensembles. Par définition, le complexe d'un ECH *A* est la collection d'ensembles de classes des hauteurs

$X_i$  qui sont en "relation d'inclusion" avec *A* ou son complémentaire. Cette notion est trop faible pour permettre d'établir un réseau raisonnable autour d'un ECH donné, raison pour laquelle Forte introduit le concept plus puissant de sous-complexe d'ensembles. Par définition, le sous-complexe d'un ECH *A* est la collection d'ensembles de classes des hauteurs  $X_i$  qui sont en "relation d'inclusion" avec *A* et son complémentaire. Le sous-complexe de *A* est indiqué avec  $Kh(A)$  et l'ensemble *A* est appelé le *nexus* du sous-complexe. La figure suivante (figure 11) montre le sous-complexe de l'ECH 4-28 correspondant à l'accord de septième diminuée. Son sous-complexe comprend quatre ensembles, dont la représentation circulaire met en évidence les rapports d'inclusion avec le nexus et son complémentaire.

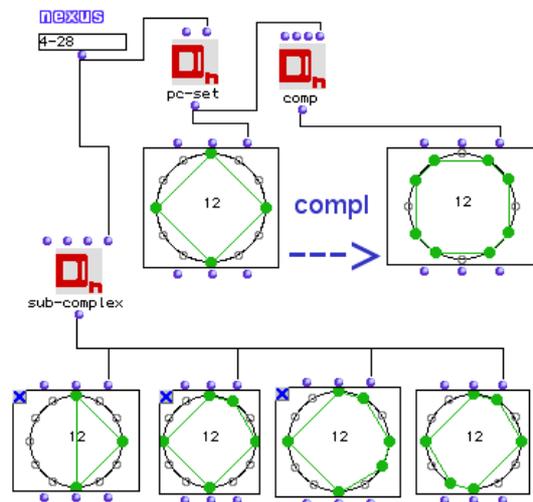


Figure 11 : Le sous-complexe de l'accord de septième diminuée.

Cette démarche est appliquée par Forte dans sa célèbre analyse du *Sacre du Printemps* de Stravinsky (Forte, 1978), avec une attention particulière aux aspects épistémologiques : "du fait du nombre important d'harmonies présentes dans le *Sacre*, il est important de sélectionner les harmonies principales avec beaucoup de soin et avec un certain degré de flexibilité. Un schéma de complexes d'ensemble contenant quasiment tous les ensembles est utile, mais il requiert une interprétation intelligente" (p. 132). Un ECH en particulier, selon Forte, caractérise l'organisation harmonique de la pièce. Il s'agit de l'hexacorde 6-27, dont le sous-complexe est donné par les cinq ensembles de classes des hauteurs en figure 12.

<sup>7</sup> Cet exemple est discuté aussi par Marc Chemillier (1987).

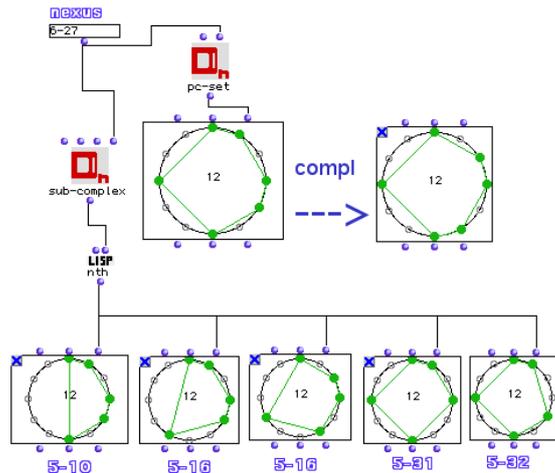


Figure 12 : Le néxus principal du *Sacre* et son sous-complexe d'après l'analyse de Forte.

D'autres théoriciens ont développé des techniques différentes pour mettre en relation des ensembles ayant cardinalité différentes. Parmi les outils les plus intéressants, aussi bien d'un point de vue mathématique que d'un point de vue musical, on peut citer le concept de *système d'intervalles généralisés* (GIS) introduit par David Lewin (1987). Ce concept permet une généralisation des résultats de base de la *Set-theory* grâce à l'introduction de quelques outils algébriques nouveaux. Par définition, un système d'intervalles généralisés GIS est la donnée d'un ensemble  $S$ , d'un groupe d'intervalles généralisés<sup>8</sup>  $IVLS$  et d'une fonction "intervalle"  $int$  définie sur le produit cartésien  $S \times S$  à valeur dans le groupe  $IVLS$  vérifiant les deux axiomes suivants sont respectés :

1. Pour tout objet  $a, b, c$  dans  $S$  :  
 $int(a,b)int(b,c)=int(a,c)$
2. Pour tout objet  $a$  dans  $S$  et tout intervalle  $i$  dans  $IVLS$  il y a un seul objet  $b$  dans  $S$  tel que  
 $int(a,b)=i$

La généralisation de la *Set-Theory* s'obtient à l'aide de deux fonctions qui opèrent non plus sur un simple ECH, mais sur des ensembles différents. Tout d'abord, voyons comment généraliser la notion de

<sup>8</sup> Ce groupe n'est pas nécessairement le groupe cyclique d'ordre 12, ou le groupe diédral d'ordre 24, comme dans le cas de la théorie de Forte, mais il peut être n'importe quel groupe fini (commutatif ou pas).

vecteur d'intervalles de Forte à l'aide de la fonction intervallique généralisée  $IFUNC$ . Par définition, dans un système d'intervalles généralisés  $GIS=(S,IVLS,int)$ , la fonction intervallique associée à deux sous-ensembles  $X, Y$  de  $S$  et à tout élément  $i$  dans le groupe  $IVLS$  le nombre de couples  $(a,b)$  d'éléments de  $X$  et  $Y$  respectivement tels que  $int(a,b)=i$ . Formellement :

$$IFUNC(X,Y)(i) = \#\{(a,b) : a \in X, b \in Y, int(a,b)=i\}.$$

La figure 13 montre la fonction intervallique entre l'accord mineur (0 3 7) et l'accord majeur (0 4 7) dans le cas du groupe  $IVLS=\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$  et avec  $int$  l'application "distance en demi-tons".<sup>9</sup>

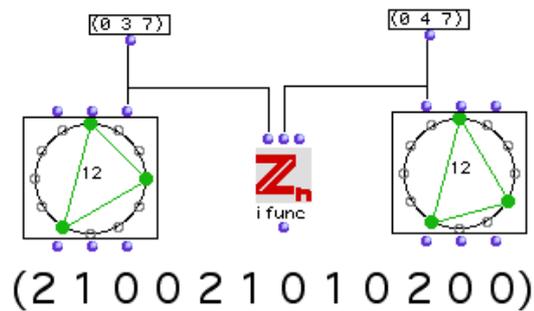


Figure 13 : un exemple de fonction intervallique

À noter que  $IFUNC(X,Y)(1)$  donne toujours le nombre d'éléments communs entre  $X$  et  $Y$ , tandis que  $IFUNC(Y,X)$  correspond à la lecture en rétrogradation de la fonction  $IFUNC(X,Y)$  toujours à partir du premier élément  $IFUNC(X,Y)(1)$ . La figure 14 exemplifie ce cas :

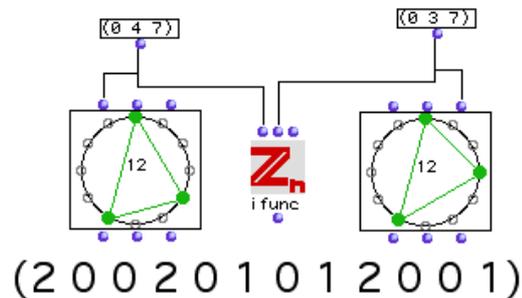


Figure 14 : la fonction intervallique appliquée aux mêmes ensembles mais dans l'ordre inverse.

Il s'agit en effet d'une généralisation du vecteur d'intervalles de Forte, comme on le constate en calculant la fonction intervallique dans le cas  $X=Y$ .

<sup>9</sup> C'est-à-dire  $int(0,x)=x$  pour tout  $x$  dans  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ .

La figure 15 montre la relation entre *IFUNC* d'un ensemble *X* et le vecteur d'intervalles de Forte :

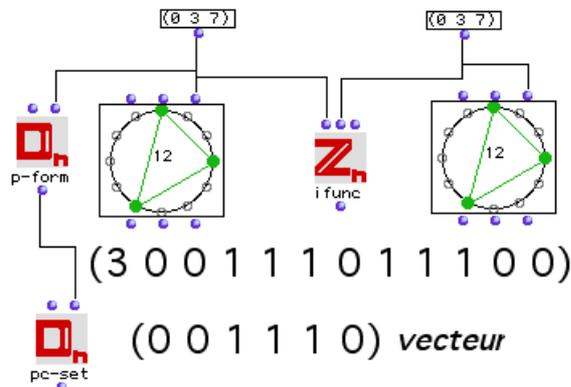


Figure 15 : La fonction intervallique et le vecteur d'intervalles

À noter que *IFUNC* (*X,X*)(1) donne simplement la cardinalité de l'ensemble *X* tandis que les valeurs *IFUNC*(*X,X*)(*i*) pour *i*>1 se distribuent d'une façon symétrique par rapport à la valeur centrale *j* où *j*=1+n/2 et *n* est la cardinalité du groupe *IVLS*. Une autre fonction qui généralise quelques résultats classiques de la *Set-Theory*, comme par exemple le théorème de l'hexacorde généralisé de Babbitt où le concept des sous-complexes d'ensembles de Forte, est la *fonction injection* *INJ*. Soit *GIS* =(*S*, *IVLS*, *int*) un système d'intervalles généralisés et soient *X* et *Y* deux sous-ensembles de *S*. Pour toute application bijective *f* de *X* dans *Y*, on peut définir la fonction injection *INJ*(*X,Y*) en correspondance de *f* comme le nombre d'éléments *x* dans *X* tels que *f*(*x*) appartient à *Y*. La figure 16 offre un exemple de fonction injection entre l'accord de do majeur et l'accord de septième de dominante, en correspondance de la fonction *f*=transposition à la quinte.

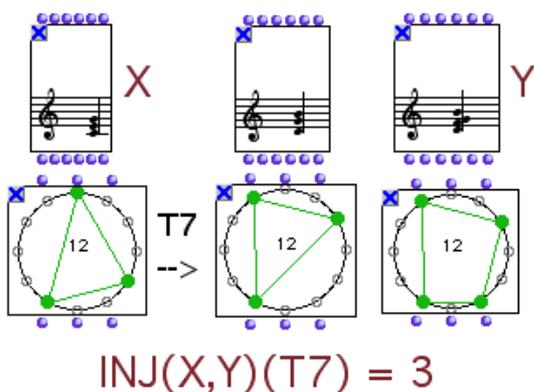


Figure 16 : La fonction injection dans le cas d'une transposition.

La fonction injection généralise la fonction intervallique *IFUNC* précédente, grâce à la simple relation suivante (Cf. Lewin, 1987 ; théorème 6.7.1 p. 147), où *Ti* est l'opération de transposition de *i* demi-tons :

$$IFUNC(X,Y)(i) = INJ(X,Y)(Ti)$$

Somme toute, "on peut remplacer entièrement le concept d'intervalle dans un *GIS* avec le concept de transposition dans un espace" (Lewin, 1987; p. 157). Plus en général, "...on peut remplacer le concept même de *GIS* avec l'idée d'un espace *S* sur lequel on a un groupe d'opérations qui opère d'une façon simplement transitive" (Lewin 1987, p. 157)<sup>10</sup>. Ceci constitue la base de l'approche transformationnelle, qui fait abstraction des propriétés de l'objet pour se concentrer sur les propriétés des opérations sur l'objet, une idée qui, comme on l'a vu, est déjà implicite dans la démarche algébrique au sens des mathématiques modernes. Dans le cas du théorème de l'hexacorde généralisé de Babbitt, la généralisation proposée par Lewin est particulièrement élégante. Rappelons que le théorème de l'hexacorde affirme qu'un hexacorde et son complémentaire ont le même vecteur d'intervalles. En utilisant la fonction "injection" que l'on vient de définir, on peut affirmer que pour toute fonction bijective *f* et tout hexacorde *X* (et son complémentaire *X'*) on a la relation suivante :

$$INJ(X,X)(f) = INJ(X',X')(f)$$

L'implémentation d'autres fonctions algébriques issues de la théorie transformationnelle de Lewin représente un axe de recherche en cours dans le travail de thèse de l'un des auteurs (Andreatta, 2003).

<sup>10</sup> D'un point de vue mathématique cette équivalence pose un problème, comme le mathématicien roumain Dan Tudor Vuza l'a bien mis en évidence, car "il n'y a pas de correspondance bijective entre un *GIS* et une action simplement transitive" (Vuza, 1988, p. 277).

## 5. Les orbites affines, ou l'action de $Aff(n)$ sur $Z/nZ$ .

Comme on l'a souligné dans la partie introductive, l'utilisation du groupe affine pour définir la relation d'équivalence entre accords réduit le catalogue des orbites à 88 représentants. Pour comprendre comment le groupe affine opère sur l'ensemble  $Z/nZ$ , reprenons le cas de l'accord majeur sous l'action des deux groupes étudiés précédemment. Les figures 17 et 18 montrent, respectivement, l'action du groupe cyclique et du groupe diédral.

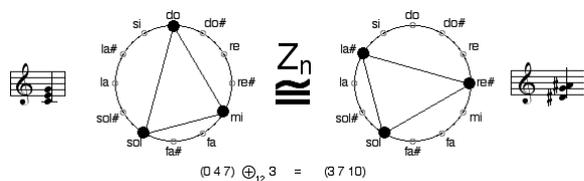


Figure 17 : Action "transpositionnelle" du groupe cyclique sur un accord majeur.

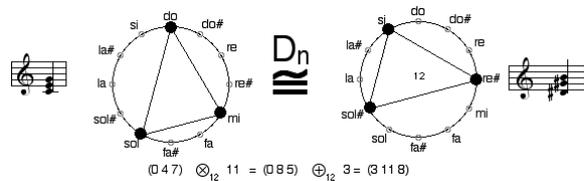


Figure 18 : Action du groupe diédral sur l'accord majeur ou équivalence majeur/mineur.

Dans le cas de l'action du groupe affine, tout intervalle de quinte ou de quarte est transformé dans l'intervalle du demi-ton chromatique. La figure 19 montre la transformation de l'accord majeur sous l'action du groupe affine.

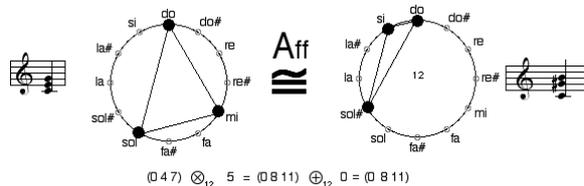


Figure 19 : Action du groupe affine sur l'accord majeur.

Le débat sur la pertinence musicale de l'action du groupe affine, dans le domaine des hauteurs, n'a pas encore obtenu l'unanimité auprès des musicologues et théoriciens de la musique. Certains théoriciens, comme Robert Morris, suggèrent que les transformations affines opèrent sur des progressions typiques de la musique jazz en préservant le caractère cadentiel. La figure 20 montre un exemple de progression suggérée par Morris qui est "préservée", dans son caractère cadentiel, par les transformations affines.



Figure 20 : Deux progressions étant l'une la transformée affine de l'autre.

En fait, si on analyse le passage avec la représentation circulaire, on peut se rendre compte que la progression est formée par deux types d'accords qui sont simplement échangés à travers l'application affine (voir figure 21) :

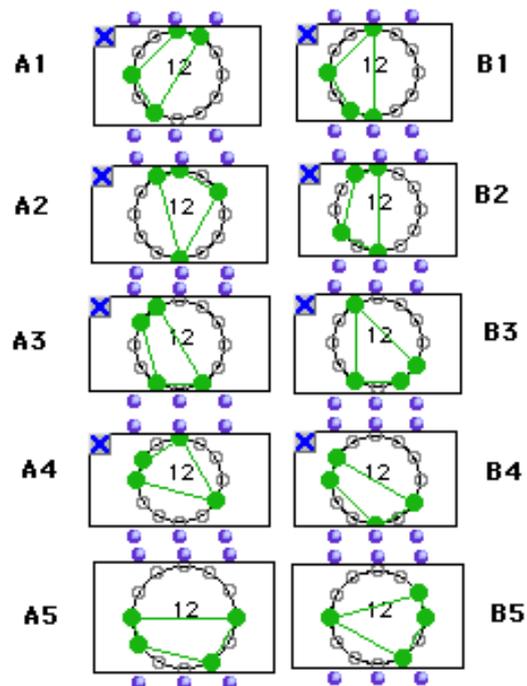


Figure 21 : Les deux progressions précédentes dans la représentations circulaire.

## 6. Les orbites "permutationnelles", ou l'action de $S_n$ sur $Z/nZ$ .

Cet aspect du catalogue des structures, comme le cas précédent des applications affines, n'est pas encore entièrement développé dans *OpenMusic*. Dans le cas de l'action du groupe symétrique sur  $Z/12Z$ , nous retrouvons les "textures" au sens d'Estrada. Il faut noter que ce type d'action commence à être significative pour les accords ayant plus de 3 notes. Autrement dit, le catalogue d'accords sur l'action du groupe diédral et du groupe symétrique est le même pour les accords de structures intervalliques ayant 1, 2 ou 3 notes. Le groupe symétrique commence à opérer véritablement à partir des tétracordes. Par rapport aux 43 orbites dans le paradigme  $Z/12Z$ , aux 29 *pitch class sets* dans le paradigme  $D12$  et aux 21 orbites affines, le catalogue des orbites "permutationnelles" se réduit à 15 représentants. En outre, la distribution des orbites ne garde plus le caractère de symétrie formelle qu'elle possédait dans le cas des trois groupes précédents. La figure 22 montre la nouvelle distribution des orbites représentés à l'aide de la structure intervallique<sup>11</sup> :

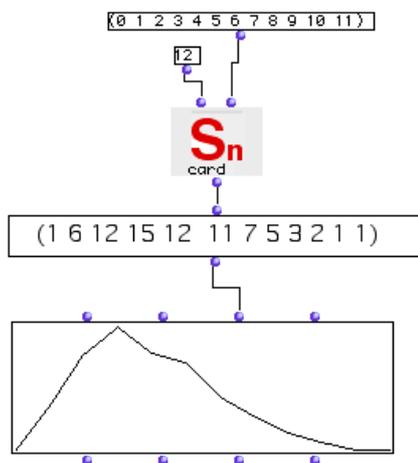


Figure 22 : Distribution des orbites dans le cas de l'action du groupe symétrique sur  $Z/12Z$ .

## 7. Conclusion

Les méthodes algébriques offrent un cadre élégant pour traiter le problème de la formalisation des structures musicales. Dans ce papier nous nous sommes concentrés sur la formalisation dans le domaine des hauteurs. La même démarche s'adapte tout aussi bien à la formalisation des structures rythmiques, comme nous l'avons montré ailleurs en suivant la démarche de trois grands théoriciens de la musique du XXème siècle : Iannis Xenakis, Milton Babbitt et Anatol Vieru.

Pour ce qui concerne le domaine des hauteurs, l'approche algébrique offre, à notre avis, une meilleure compréhension structurelle de certaines approches musicologiques, telles que la *Set-Theory*. En introduisant le concept d'action d'un groupe sur un ensemble, toute démarche analytique visant à établir un catalogue exhaustif d'accords peut s'interpréter comme le choix d'un paradigme à l'intérieur duquel déduire une notion d'équivalence au sens mathématique. La possibilité de pouvoir changer de paradigme, selon le style à analyser ou la démarche compositionnelle à poursuivre, représente l'un des enjeux majeurs d'une approche computationnelle de type algébrique pour la formalisation des structures musicales. Les quatre groupes, définissant quatre possible paradigmes d'investigations, assouplissent la notion d'équivalence entre structures musicales, tout en interrogeant la notion d'algorithmes permettant la calculabilité explicite des orbites sous l'action d'un groupe donné.

## Remerciements

Nous voudrions remercier Janusz Podrazik pour son implémentation en lisp de la *Set-Theory* d'Allen Forte. Merci aussi à Isabelle Viaud-Delmon pour ses commentaires précieux sur le manuscrit.

<sup>11</sup> Par convention, (0) indique la structure ayant une seule note et (12) le totale chromatique.

## Références

- Andreatta, M., C. Agon and M. Chemillier 1999. "OpenMusic et le problème de la construction de canons musicaux rythmiques." *Actes des sixièmes Journées d'Informatique Musicale*, pp. 179-185.
- Andreatta, M., T. Noll, C. Agon and G. Assayag 2001. The geometrical groove: rhythmic canons between theory, implementation and musical experiments. Actes JIM, Bourges, pp. 93-98.
- Andreatta, M. 2003. *Méthodes algébriques dans la musique et la musicologie du Xxème siècle : aspects théoriques, analytiques et compositionnels* (thèse, EHESS/Ircam. En préparation)
- Assayag G., C. Rueda, M. Laurson, A. Agon, O. Delerue. 1999 : "Computer Assisted Composition at Ircam : PatchWork & OpenMusic". *Computer Music Journal* 23(3).
- Castine, P. 1994. *Set Theory Objects*. Frankfurt: Lang Press.
- Chemillier, M. 1997. "Monoïde libre et musique première partie : les musiciens ont-ils besoin des mathématiques?" *Informatique théorique et Applications*, 21(3), 341-371.
- Forte, A. 1973. *The Structure of Atonal Music*. New Heaven: Yale University Press.
- Forte, A. 1978. *The Harmonic Organization of The Rite of Spring*. New Haven and London: Yale University Press.
- Lewin, D. 1987. *Generalized Musical Intervals and Transformations*. New Heaven: Yale University Press.
- Mazzola, G. *The Topos of Music*. Birkhäuser Verlag, 2002.
- Moscariello, C. 1995. "Quando l'Est e l'Ovest si incontrano...ovvero, un sommario confronto tra la Teoria delle Strutture di Maciej Zalewski e la Set Theory d'Allen Forte", *Analisi*, 16, pp. 5-16, 1995.
- Morris, R. 1987. *Composition with Pitch-Classes*. New Heaven and London: Yale University Press.
- Poincaré, H. 1952. (Orig. French Edition, 1903). *Science and Hypothesis*. Dover.
- Rahn, J. *Basic Atonal Theory*. New York: Schirmer Books.
- Romanowska, A. 1974. "Algebraic structures of the tone system". *Demonstratio Mathematica*, vol VII, N. 4, 525-542.
- Vieru, A. 1993. *The book of modes*. Bucharest: Editura Muzicala.
- Vuza, D. T. 1988. "Some mathematical aspects of David Lewin's Book *Generalized Musical Intervals and Transformations*", *Perspectives of New Music*, 26(1), 258-287.
- Xenakis, I. 1965 "La voie de la recherche et de la question", *Preuves*, 177.
- Zalewski, M. 1972. *Marmonia Teoretyczna*. PWSM, Pologne.