

Master

Groupe des Ecoles des Télécommunications
Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications de Bretagne



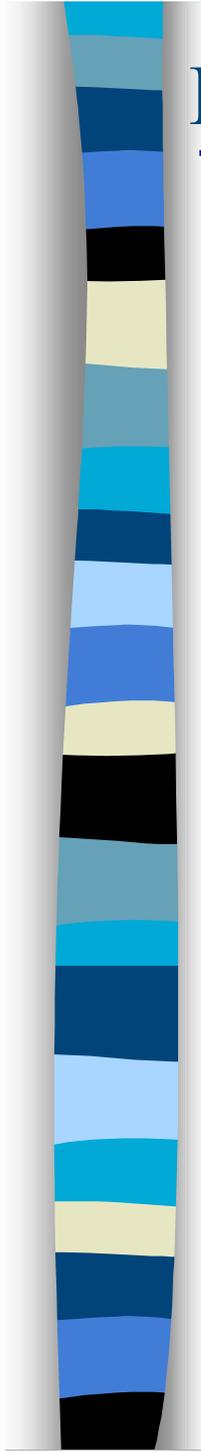
Méthodes mathématiques pour la composition musicale

Moreno Andreatta

Equipe Représentations Musicales

IRCAM/CNRS UMR 9912





Plan du cours (4 Février 2005 : 9h-13h ; 14h-17h)

Survol sur l'émergence des structures algébriques en musique

Set Theory et théorie transformationnelle.

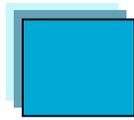
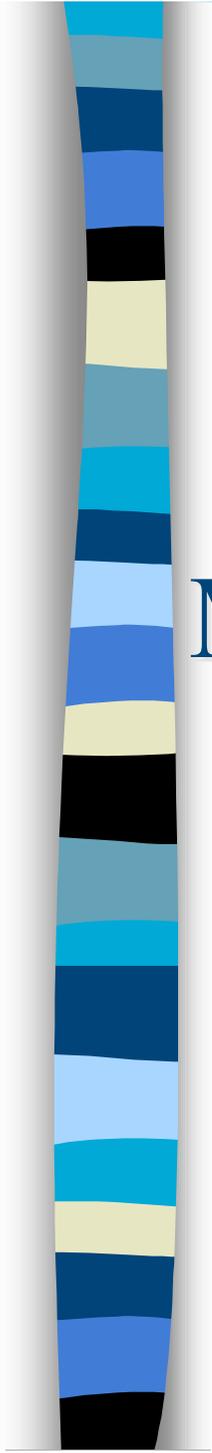
Théorie des cribles de Iannis Xenakis et structures d'ordre

Théorie modale d'Anatol Vieru

Énumération et classification paradigmatique des structures musicales en *OpenMusic*

Canons rythmiques et théorie des suites périodiques engendrées par différences finies

Nomos Alpha de Xenakis, groupe de rotations du cube et Fibonacci



Mathématiques
modernes

double perspective

Musique

XX^e
siècle

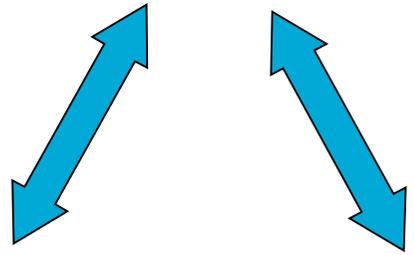
Musicologie

Théorie

Analyse

Composition

tripartition



Algèbre et Musique : un survol

→ *Méthodes algébriques en théorie de la musique*

Tradition américaine 'set-théorique'

Musiques formelles

Théorie modale

Théorie mathématique de la musique

Babbitt
Lewin

Xenakis
Barbaud

Vieru

Mazzola

Adler

Seeger

Riotte
Mesnager
Assayag

→ *Musicologie computationnelle*

Musicologie systématique

CAO, AAO et TAO

« Analyse paradigmatique » en *OpenMusic*

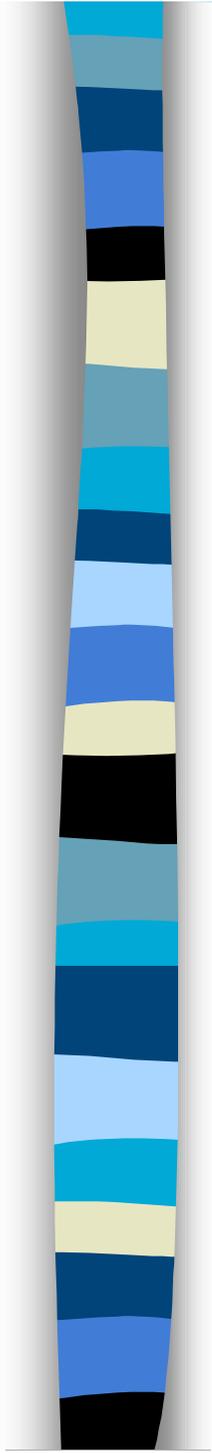
→ Implémentation du processus compositionnel

La place des mathématiques dans la musicologie systématique

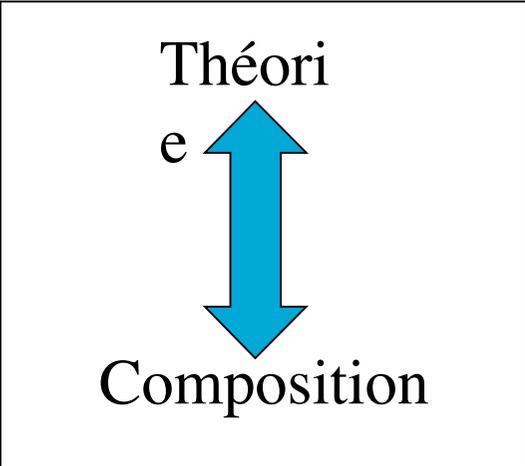
Guido Adler : « Umfang, Methode und Ziel der Musikwissenschaft » (1885)

II. Systematisch.			
Aufstellung der in den einzelnen Zweigen der Tonkunst zuhöchst stehenden Gesetze.			
A. Erforschung und Begründung derselben in der	B. Aesthetik der Tonkunst.	C. Musikalische Pädagogik und Didaktik	D. Musikologie
1. <i>Harmo- nik</i> (tonal od. tonlich).	1. Vergleichung und Werthschätzung der Gesetze und deren Relation mit den apperzipirenden Subjecten behufs Feststellung der <i>Kriterien des musikalisch Schönen.</i>	(Zusammenstellung der Gesetze mit Rücksicht auf den Lehrzweck)	(Unter- suchung und Ver- gleichung zu ethno- graphi- schen Zwecken).
2. <i>Rhyth- mik</i> (temporär oder zeitlich).	2. Complex unmittelbar und mittelbar damit zusammenhängender Fragen.	1. Tonlehre, 2. Harmonielehre, 3. Kontrapunkt, 4. Compositionslehre,	
3. <i>Melik</i> (Cohärenz von tonal und temporär).		5. Instrumentationslehre, 6. Methoden des Unterrichtes im Gesang und Instrumentalspiel.	
Hilfswissenschaften: Akustik und Mathematik. Physiologie (Tonempfindungen). Psychologie (Tonvorstellungen, Tonurtheile und Tongefühle). Logik (das musikalische Denken). Grammatik, Metrik und Poetik. Pädagogik Ästhetik etc.			

« La deuxième grande partie de la musicologie est la partie systématique; cette partie se base sur la partie historique. (...) L'accent de l'observation réside dans l'analogie de la méthode musicologique avec la méthode scientifique ».

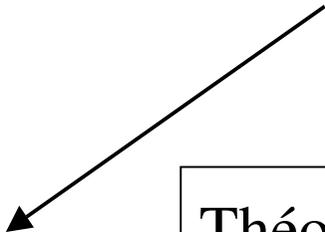


Méthodes algébriques



Théorie
↕
Composition

Musique



Théoriciens/Compositeurs

- Ernst Krenek
- Milton Babbitt
- Iannis Xenakis
- Anatol Vieru
- Pierre Barbaud
- Michel Philippot
- André Riotte
- ...

Vers l'émergence des structures algébriques en musique

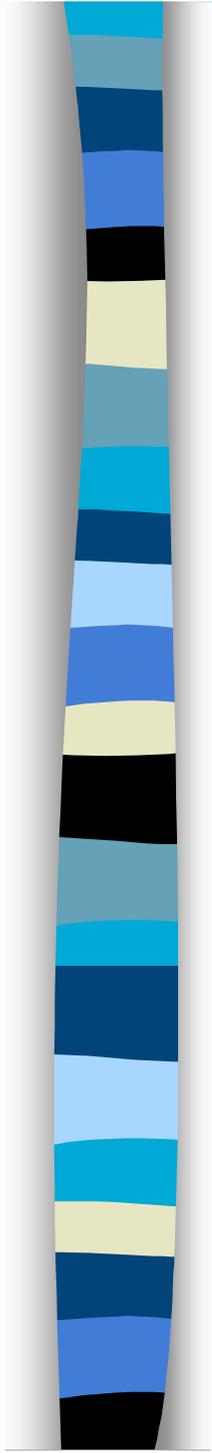
Ernst Krenek et la méthode axiomatique

- *The Relativity of Scientific Systems*
- *The Significance of Axioms*
- *Axioms in music*
- *Musical Theory and Musical Practice*

Ernst Krenek : *Über Neue Musik*, 1937
(Engl. Transl. *Music here and now*, 1939).

«*Physicists and mathematicians are far in advance of musicians in realizing that their respective sciences do not serve to establish a concept of the universe conforming to an objectively existent nature*»

«*As the study of axioms eliminates the idea that axioms are something absolute, conceiving them instead as **free propositions of the human mind**, just so would this **musical theory** free us from the concept of major/minor tonality [...] as an irrevocable law of nature*».



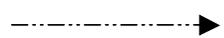
Babbitt : *The function of Set Structure
in the Twelve-Tone System*, PhD 1946/1992

Xenakis : *Musiques formelles*, 1963

Vieru : *Eléments
d'une théorie générale des
modes*, 1967

La structure de
groupe en musique

Théorie



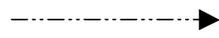
Groupe cyclique $\mathbf{Z/nZ}$

Groupe diédral \mathbf{D}_n

Groupe affine \mathbf{Aff}_n



Composition



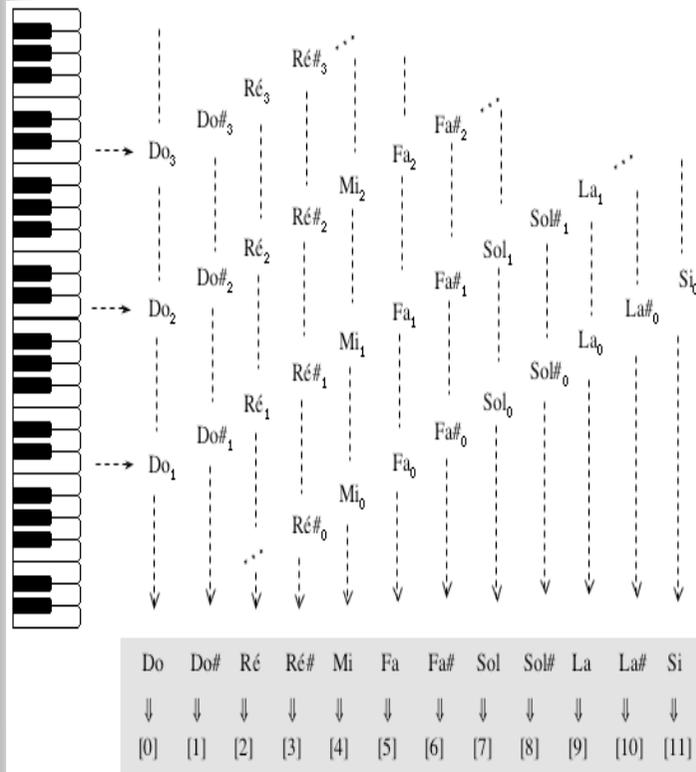
Groupe de Klein

Groupe des rotations du cube \mathbf{S}_4

Groupe cyclique

Towards an algebraic approach in music

The congruence relation mod 12



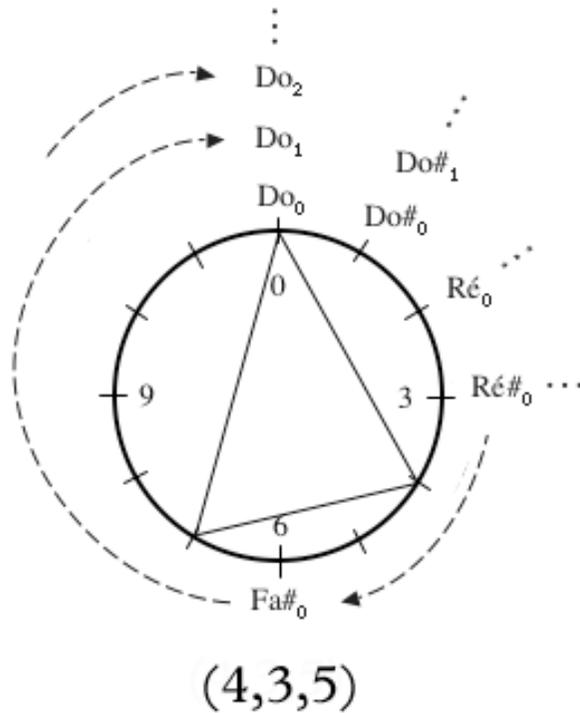
Camille Durutte:

- *Technie, ou lois générales du système harmonique* (1855)
- *Résumé élémentaire de la Technie harmonique, et complément de cette Technie* (1876)

« *Two elements are congruent modulo 12 if their difference is equal to a multiple of 12* »

(M. Babbitt: *The function of Set Structure in the Twelve-Tone System*, 1946)

The emergence of group structure in music



↓
Cyclic group
 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$

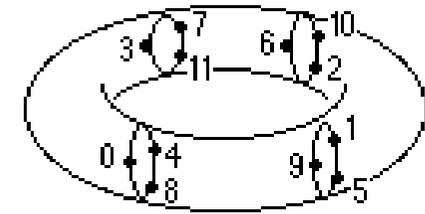
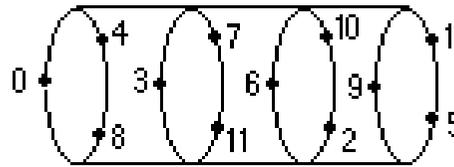
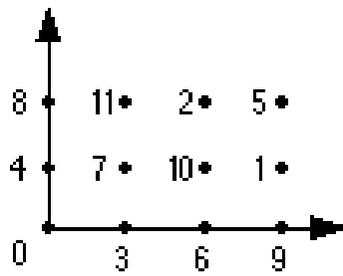
The congruence modulo 12 is an equivalence relation

- Reflexivity: $a \sim a$
- Symmetry: $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$
- Transitivity: $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$

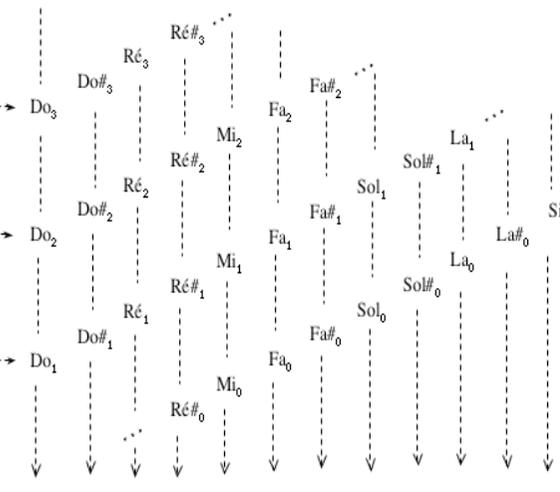
*The equivalence classes modulo 12 define a **group** structure*

- The operation is internal
- Existence of an identity
- Existence of an invers
- Associativity

Formalisation vs représentation

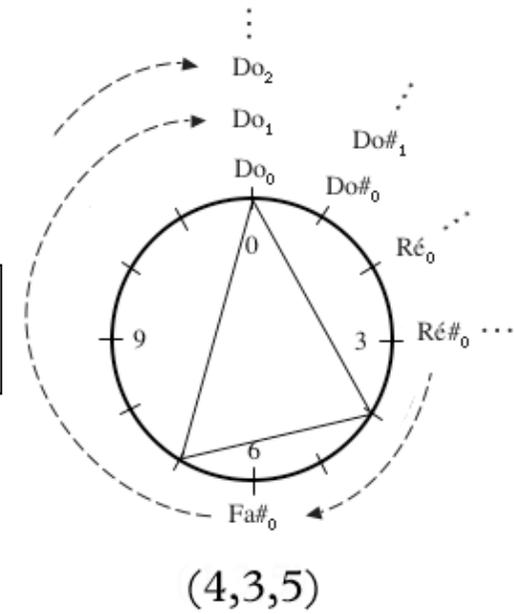


Représentation toroidale



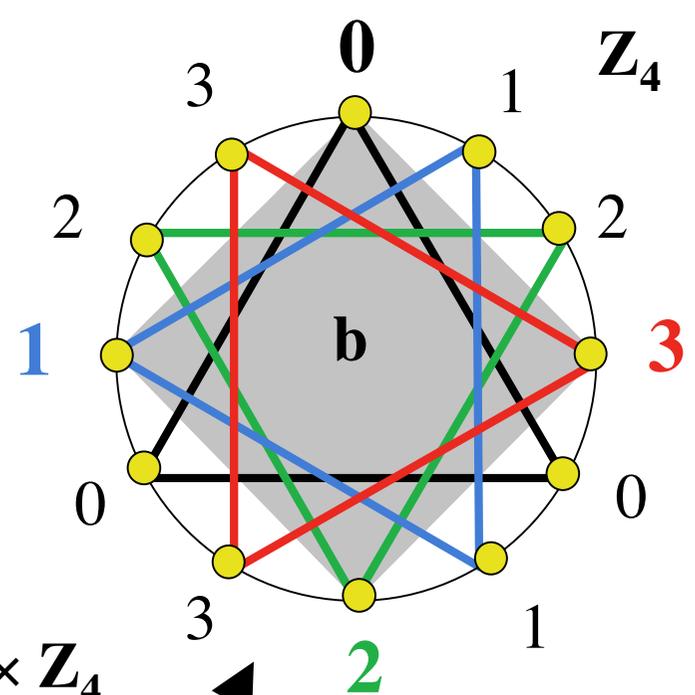
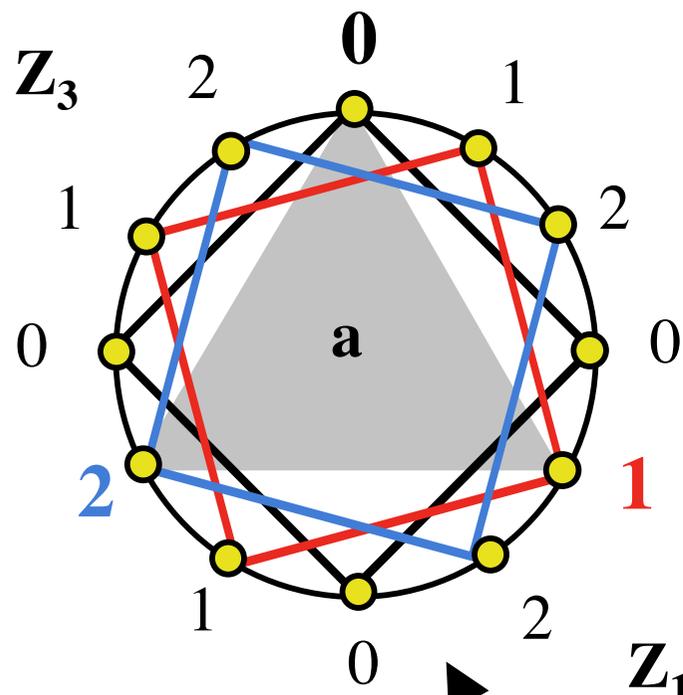
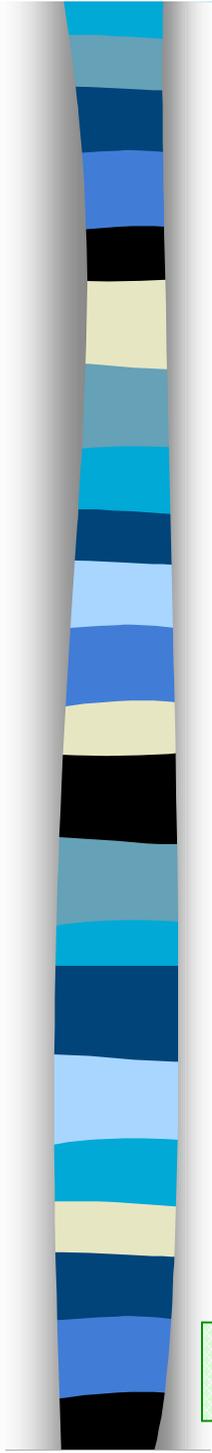
Do	Do#	Ré	Ré#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]

$$\mathbb{Z}_{12} = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$$



(4,3,5)

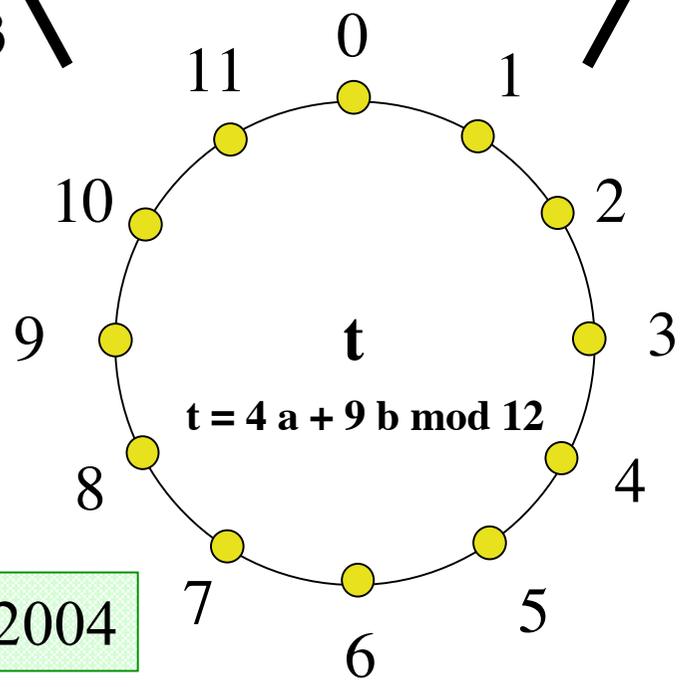
Représentation circulaire



$$\mathbb{Z}_{12} = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$$

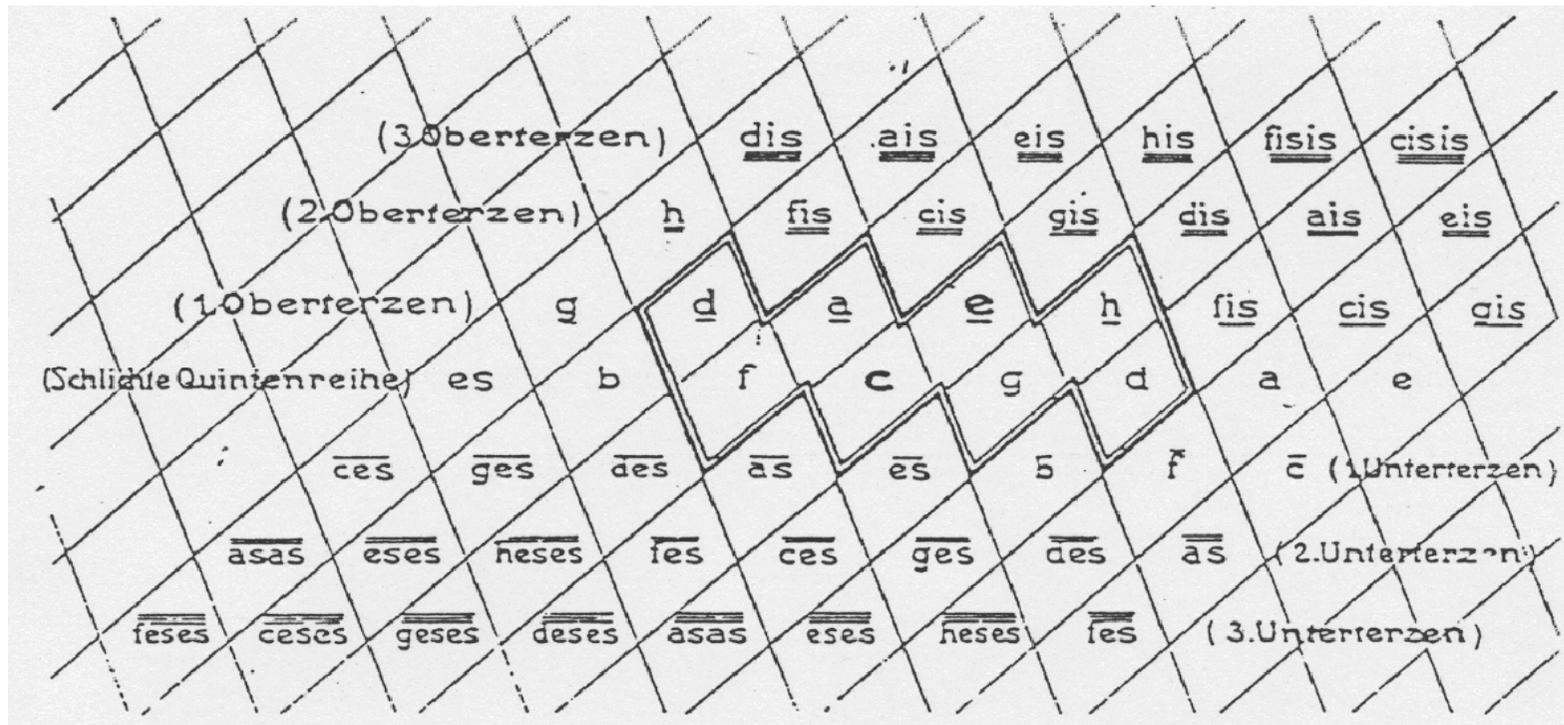
$$a = t \pmod{3}$$

$$b = t \pmod{4}$$



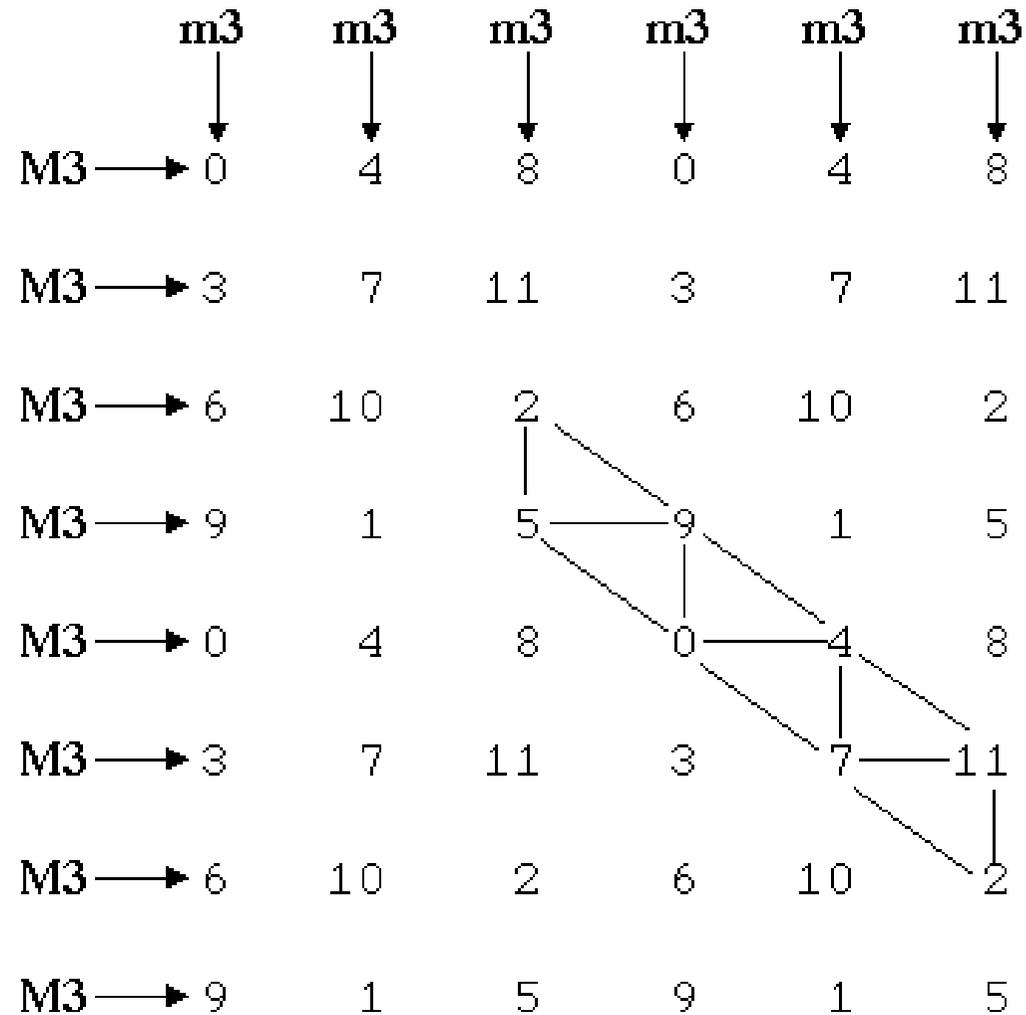
Noll, *MaMuX*, déc. 2004

La représentation (géométrique) des structures musicales



Hugo Riemann : « Ideen zu einer *Lehre von den Tonvorstellung* », 1914

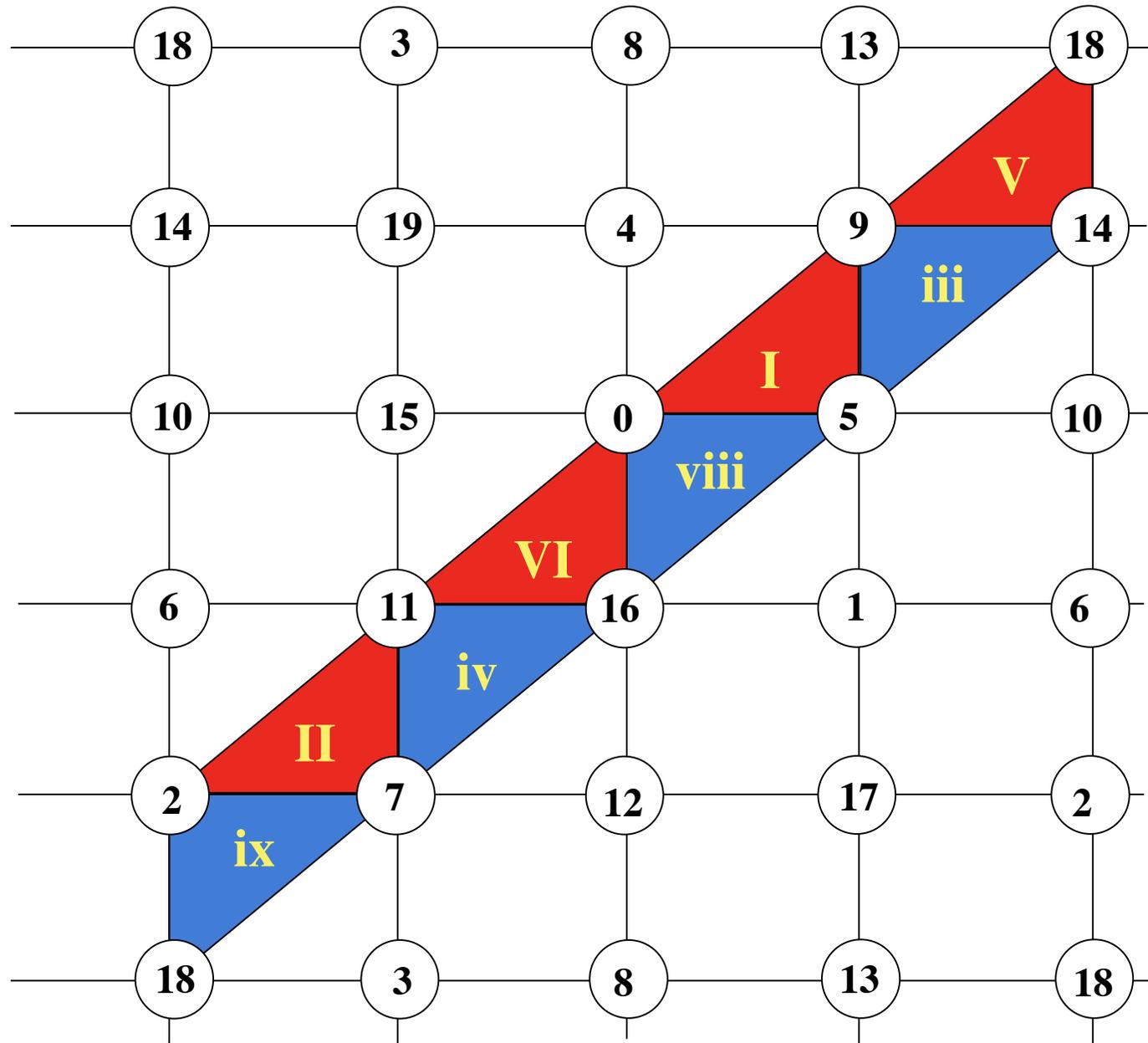
Représentation bidimensionnelle de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$



Propriété géométrique de la gamme diatonique
(Longuet-Higgins, Balzano, ...)

Généralisations pour $Z_n = Z_{k(k+1)}$ (Balzano, 1980)

Noll, *MaMuX*, Déc. 2004



Une démarche algébrique pour le sérialisme intégral

*« Une compréhension de la structuration dodécaphonique des composantes autres que les hauteurs ne peut que passer par une définition correcte et rigoureuse de la **nature** du système et des **opérations** qui lui sont associées »*

M. Babbitt : « Some Aspects of Twelve-Tone Composition », 1955

*« [Le système] peut être caractérisée complètement en explicitant les éléments, les **relations** [...] entre ces éléments et les **opérations** sur les éléments ainsi reliés. [...] Toute considération sur les opérations du système doit procéder de la conscience de leur nature permutationnelle »*

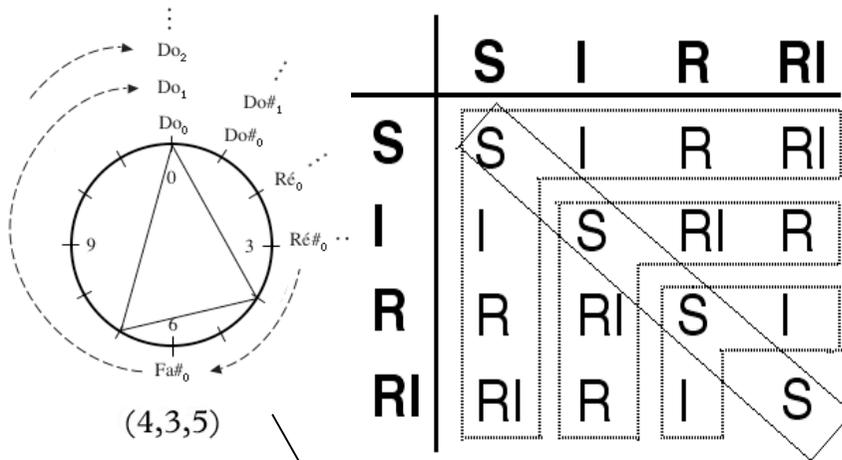
M. Babbitt : « Twelve-Tone Invariants as Compositional Determinants », 1960

*« ...un large nombre de conséquences compositionnelles sont dérivables directement de théorèmes de **théorie des groupes finis** »*

M. Babbitt : « Set Structure as a Compositional Determinant », 1961

Le système dodécaphonique et la théorie des groupes

The Twelve-Tone System, is a «*set of elements, relations between elements and operations upon elements*» (Babbitt, 1946)



$$S: (a,b) \rightarrow (a,b)$$

$$I: (a,b) \rightarrow (a, 12-b \text{ mod. } 12)$$

$$R: (a,b) \rightarrow (11-a,b).$$

$$RI: (a,b) \rightarrow (a, 12-b \text{ mod. } 12)$$

$$\downarrow$$

$$(11-a, 12-b \text{ mod. } 12)$$

S

I

R

IR

$$S(a,b) = (a,b)$$

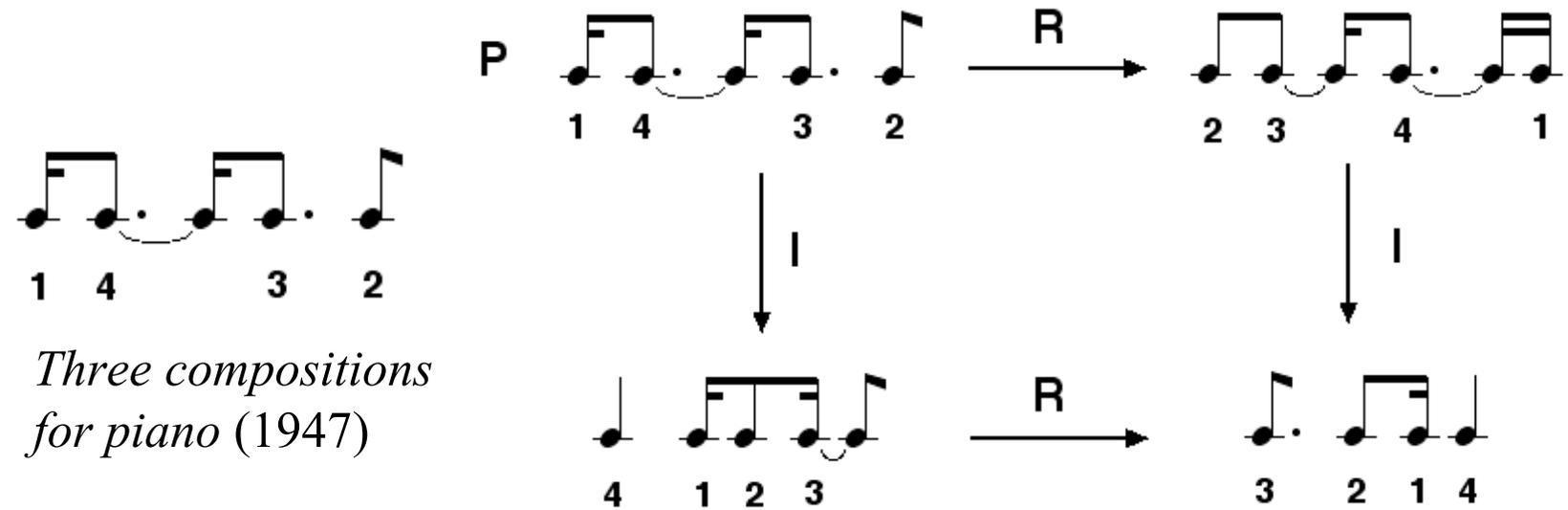
$$I(a,b) = (a, 12-b \text{ mod. } 12)$$

$$R(a,b) = (11-a,b).$$

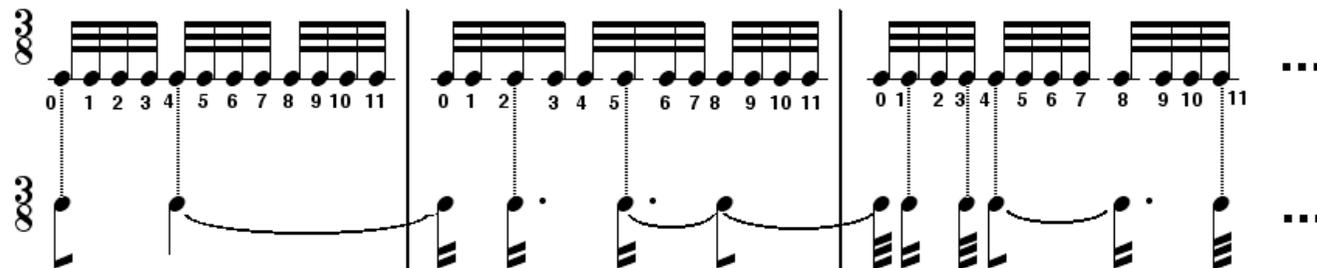
$$RI(a,b) = R(a, 12-b \text{ mod. } 12) = (11-a, 12-b \text{ mod. } 12)$$

Vers une formalisation algébrique du sérialisme intégrale

- La série des durées temporelles (*durational row*)

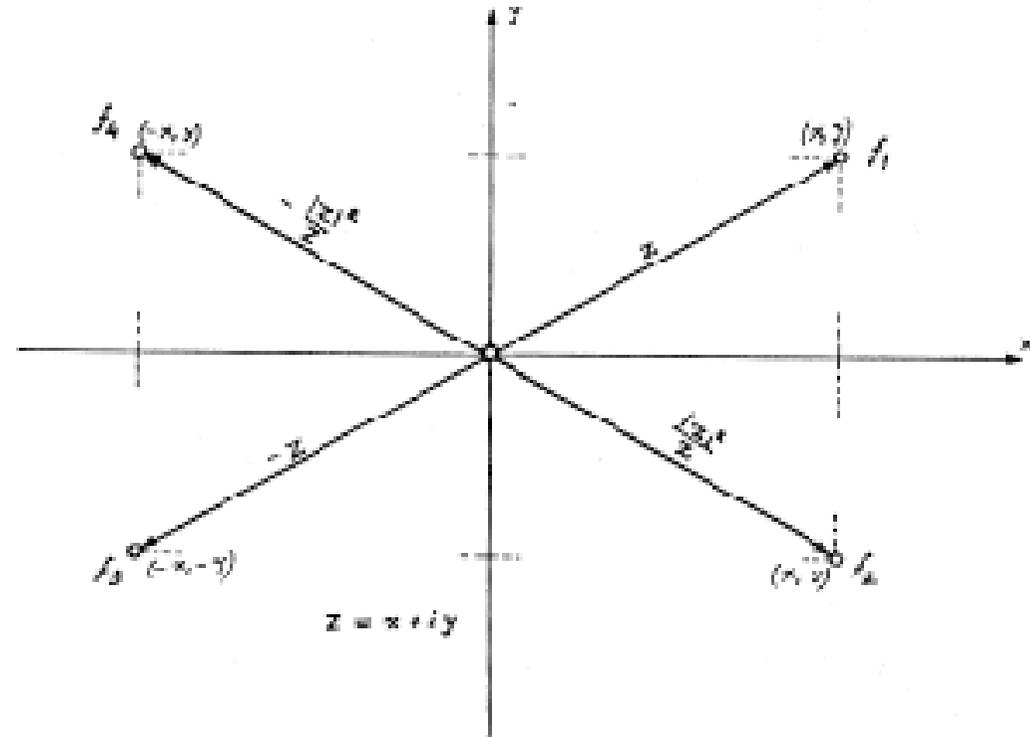


- Le système des points d'attaque (*Time-Points System*)



Algèbre/géométrie chez Xenakis

	S	I	R	R
S	S	I	R	R
I	I	S	RI	R
R	R	RI	S	I
RI	RI	R	I	S



$$Z = x + yi$$

- S série de base $\longrightarrow f_1 = Z = x + yi = Z = f_1(Z) = \text{original form}$
- I inversion $\longrightarrow f_2 = x - yi = |Z|^{-1} Z = f_2(Z) = \text{inversion}$
- RI rétrog. inverse $\longrightarrow f_3 = -x - yi = -Z = f_3(Z) = \text{inverted retrogradation}$
- R rétrogradation $\longrightarrow f_4 = -x + yi = -(|Z|^{-1} Z) = f_4(Z) = \text{retrogradation}$

Axiomatique et théorie des groupes en musique

« La musique peut [...] être définie comme une organisation d'**opérations** et de **relations** élémentaires entre des êtres ou entre des fonctions d'êtres sonores. Nous comprenons la place de choix qui revient à la **théorie des ensembles**, non seulement pour la **construction** d'œuvres nouvelles, mais aussi pour l'**analyse** et la meilleure compréhension des œuvres du passé. Ainsi, même une construction stochastique ou une investigation de l'histoire à l'aide de la stochastique ne peuvent être exploitées sans l'aide de la reine des sciences et même des arts, dirais-je, qu'est la logique ou sa forme mathématique l'**algèbre** »

I. Xenakis : « La musique stochastique : éléments sur les procédés probabilistes de composition musicale » 1961.

« La **formalisation** et l'**axiomatisation** constituent en réalité un guide processionnel plus adapté à la pensée moderne en général. Elle permet de placer d'emblée sur un terrain plus **universel** l'art des sons... »

I. Xenakis : *Musiques formelles*, 1963

« Aujourd'hui, on peut affirmer qu'avec les vingt-cinq siècles d'évolution musicale, on aboutit à une **formulation universelle** en ce qui concerne la **perception** des hauteurs, qui est la suivante: l'ensemble des intervalles mélodiques est muni d'une structure de **groupe** avec comme loi de composition l'**addition** »

I. Xenakis : « La voie de la recherche et de la question », 1965

Théorie des cribles: algèbre et structures ordonnées

modulo

10

origine

... -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 ...

$6_0 \cup 6_1 \cup 3_2$

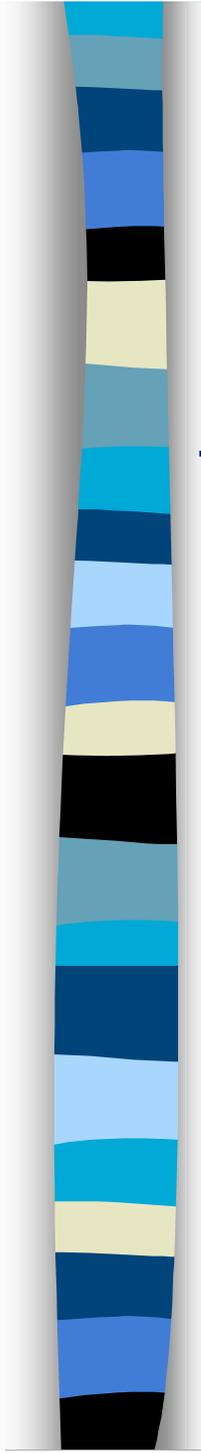
6_0

6_1

3_2

Mode à transposition limitée de Messiaen

- Gammes traditionnelles (diatoniques, Modes de Messiaen, ...)
- Gammes micro-tonales et non octaviantes (*Nomos Alpha*, ...)
- Cribles comme généralisation de rythmes (*Psappha*, ...)
- Cribles comme outil de modélisation des partitions (Riotte&Mesnage)



(6₀) (2₀) 6₀ ∪ 6₁ 6₀ ∪ 6₁ ∪ 6₅ 4₀ ∪ 4₂ ∪ 4₃ 3₀ ∪ 3₁

(1₀)

Cribles / Messiaen

(3₀) 6₀ ∪ 6₁ ∪ 3₂

(4₀) 6₀ ∪ 6₂ 2₀ ∪ 6₅ 2₁ ∪ 6₀ ∪ 6₂

Trois modes 'oubliés'

4₀ ∪ 4₁

6₀ 6₁ 3₂

6₀ 6₁ 6₃

6₀ ∪ 6₁ ∪ 6₃

6₀ 6₃ 6₅

6₀ ∪ 6₃ ∪ 6₅

Pitch/Rhythm Isomorphism (Xenakis)

« [With the sieve theory] one can build very complex *rhythmic architectures* which can simulate the stochastic distribution of points on a line if the period is big enough »

(« Redécouvrir le temps », éditions de l'Université de Bruxelles, 1988)

$$A = (13_3 \cup 13_5 \cup 13_7 \cup 13_9)^c$$

$$B = 11_2$$

$$C = (11_4 \cup 11_8)^c$$

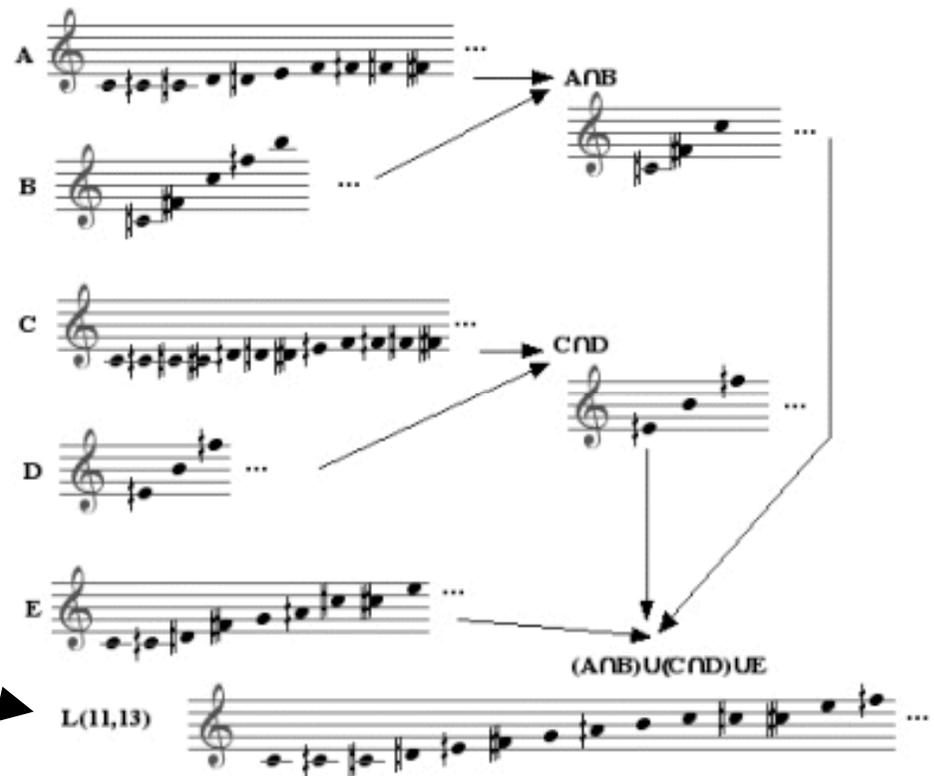
$$D = 13_9$$

$$E = 13_0 \cup 13_1 \cup 13_6$$

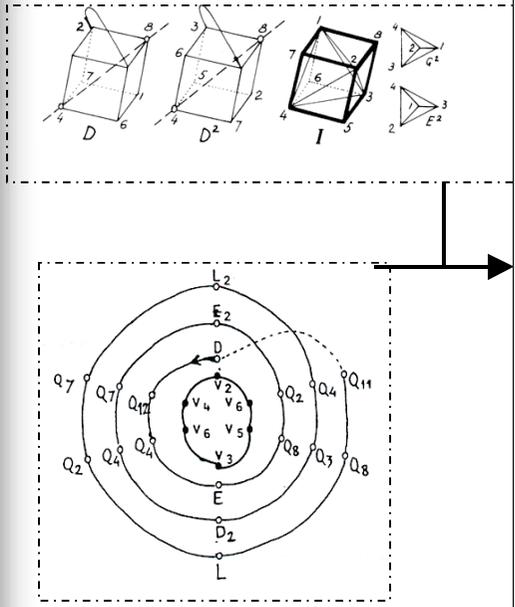
(*Nomos Alpha*, 1966)

$$(A \cap B) \cup (C \cap D) \cup E$$

1 1 4 3 4 1 5 3 2 2 1 5 3 4 1 5 7 1 5 3 4 1 5 7 1 5 3 3 1 1 5 3 1 3 1 5 2 1 4 1...



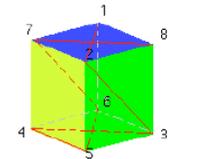
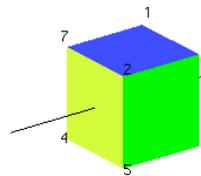
Nomos Alpha (1966)



CUBE-TABLE1

manual
 loop

	I	A	B	C	D	D^2	E	E^2	G	G^2	L	L^2	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12
I																								
A																								
B																								
C																								
D																								
D^2																Q3								
E																Q8								
E^2															Q7									
G																								
G^2																								
L																Q8								
L^2																							Q7	
Q1																								
Q2																				L	E^2			
Q3																								
Q4																				D^2			E	
Q5																								
Q6																								
Q7																								
Q8																								
Q9																								
Q10																								
Q11																								
Q12																								

```

q11 (8 5 6 7 4 1 2 3)
q8 (7 5 8 6 3 1 4 2)
l (1 3 4 2 5 7 8 6)
q2 (7 6 5 8 3 2 1 4)
q7 (8 7 5 6 4 3 1 2)
l^2 (1 4 2 3 5 8 6 7)
q11 (8 5 6 7 4 1 2 3)
q3 (8 6 7 5 4 2 3 1)
d^2 (3 1 2 4 7 5 6 8)
q4 (6 7 8 5 2 3 4 1)
q7 (8 7 5 6 4 3 1 2)
e^2 (4 1 3 2 8 5 7 6)
q2 (7 6 5 8 3 2 1 4)
q8 (7 5 8 6 3 1 4 2)
e (2 4 3 1 6 8 7 5)
q4 (6 7 8 5 2 3 4 1)
q12 (5 6 8 7 1 2 4 3)
d (2 3 1 4 6 7 5 8)
    
```

« Musique **symbolique** pour violoncelle seul, possède une architecture « hors-temps » fondée sur la théorie des groupes de transformations. Il y fait usage de la théorie des cribles, théorie qui annexe les congruence modulo n et qui est issue d'une **axiomatique** de la structure **universelle** de la musique »

Vers un modèle de la pensée intervallique chez A. Vieru

*« ...The modes, no matter which they may be, start from a common background of the musical human hearing; **anywhere** and **any time**, our hearing on the basis of an inborn sensibility and logics [...] performs in the field of musical scales certain modal operations. [...] These intuitive or technical operations are of the nature called in mathematics the **theory of sets** ».*

A. Vieru: « Modes, elements of a general theory of modes », 1967

« Nous appelons mode tout ensemble de classes de résidus »

A. Vieru : *Le livre des modes*, 1980

« [...] si les échelles ont vraiment un statut ensembliste, où sont les intervalles ? Quel est leur statut ? »

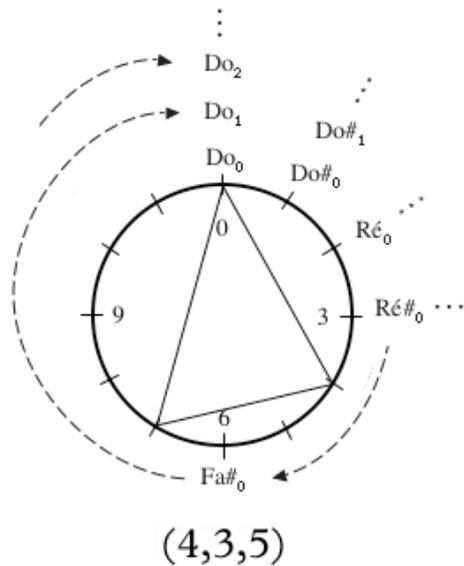
A. Vieru : « Nature et culture dans la perception musicale », 1998.

« ...l'une des questions les plus spécifiques, délicates et mystérieuses de la musique : la dualité sons/intervalles »

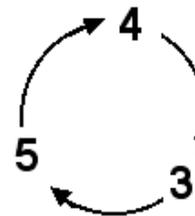
A. Vieru : « Une théorie musicale pour la période postmoderne », 1994.

La dualité son/intervalles

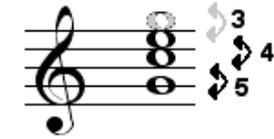
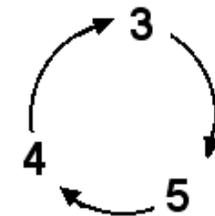
La « structure intervallique » et l'opération de « composition »



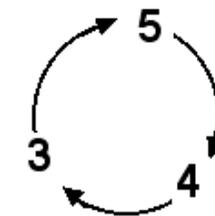
(4 3 5)



(3 5 4)



(5 4 3)



$(1\ 2\ 3\ 1\ 2\ 3) \bullet \{0\} = \{0, 1, 3, 6, 7, 9\}$

$$(6\ 6) \bullet \{0, 1, 3\} =$$

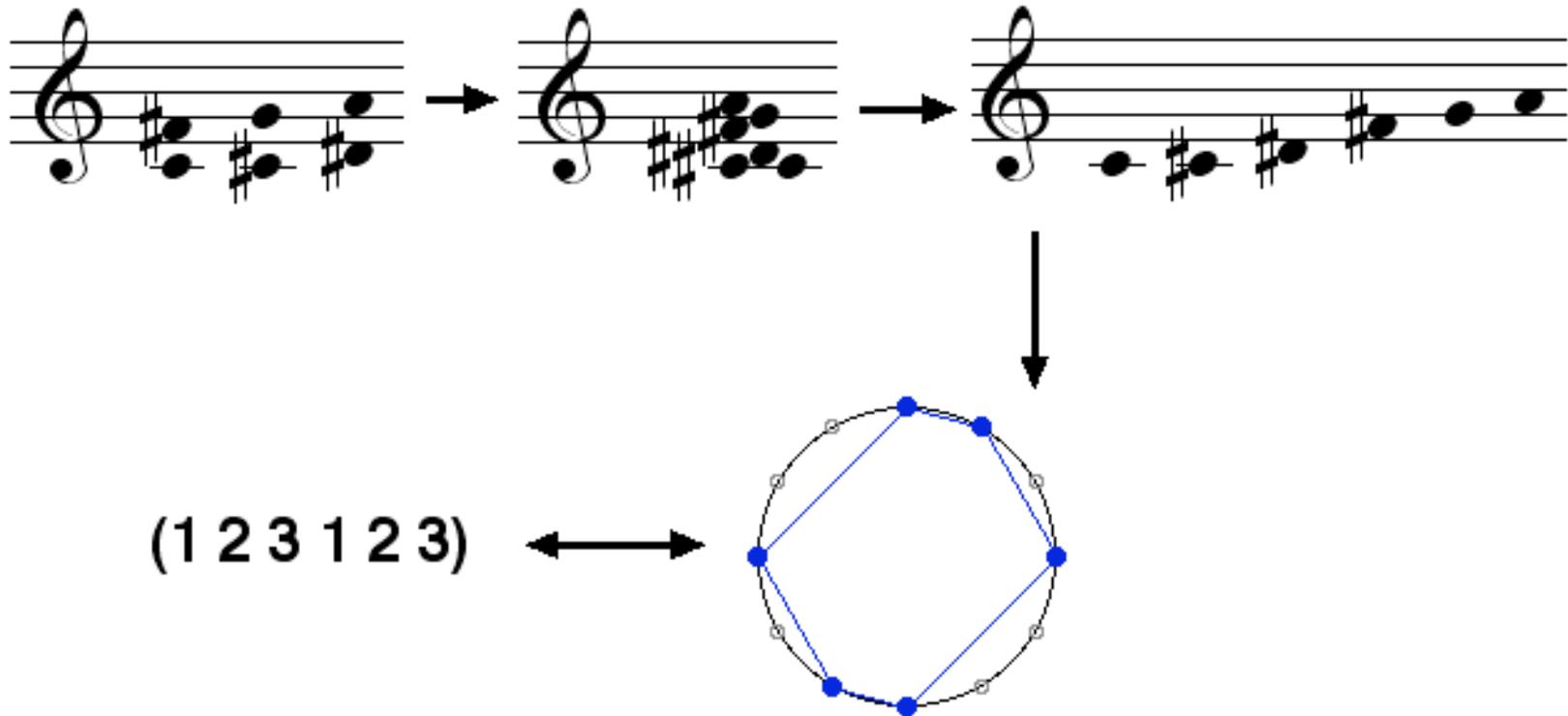
$$= ((6\ 6) \bullet \{0\}) \cup ((6\ 6) \bullet \{1\}) \cup ((6\ 6) \bullet \{3\}) =$$

$$= \{0, 6\} \cup \{1, 7\} \cup \{3, 9\} =$$

$$= \{0, 1, 3, 6, 7, 9\}.$$

$6_0 \cup 6_1 \cup 6_3$
crible

« • » et la « multiplications d'accords » (Boulez)
(ou *Transpositional Combination*, Richard Cohn)



Composition de deux structures intervalliques

$$(6\ 6) \cdot (1\ 2\ 9) = ?$$

La composition de deux structure intervalliques

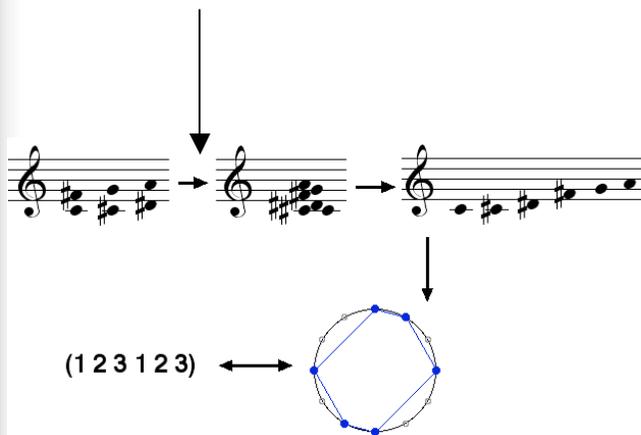
$$(6\ 6) \bullet (1\ 2\ 9) = ?$$

$$(6\ 6) \bullet \{0, 1, 3\} =$$

...

$$= \{0, 1, 3, 6, 7, 9\}$$

$$(1\ 2\ 3\ 1\ 2\ 3)$$

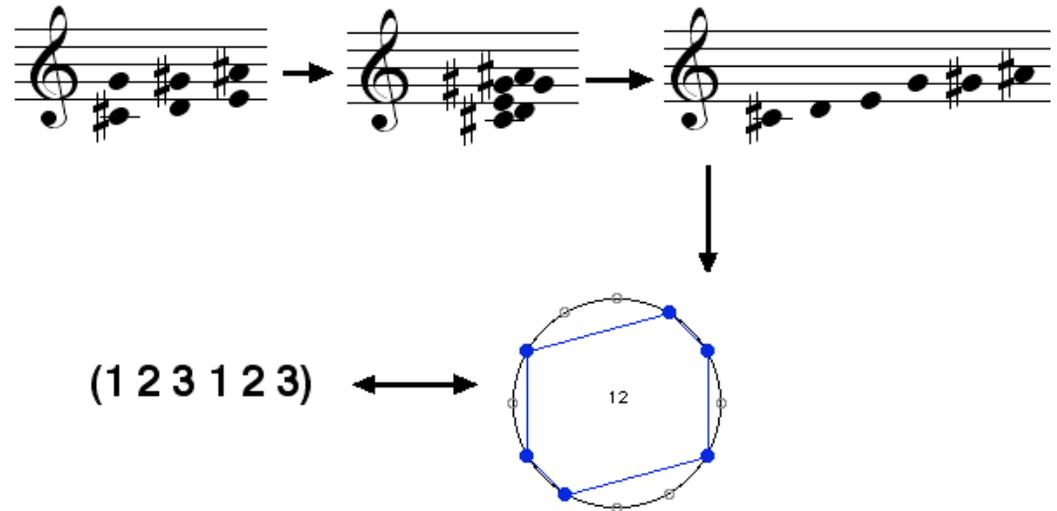


$$(6\ 6) \bullet \{1, 2, 4\} =$$

$$= \{1, 7\} \cup \{2, 8\} \cup \{4, 10\} =$$

$$= \{1, 2, 4, 7, 8, 10\}$$

$$(1\ 2\ 3\ 1\ 2\ 3)$$



Elle est bien définie !

Quelques applications de l'opération « • »

- Construction des modes (généralisés) de Messiaen
- Construction des canons rythmiques

$$(6\ 6) \bullet \{0, 1, 3\} = \dots = \{0, 1, 3, 6, 7\ 9\} \longrightarrow (1\ 2\ 3\ 1\ 2\ 3)$$

$$(6\ 6) \bullet \{0, 1\} = \dots = \{0, 1, 6, 7\} \longrightarrow (1\ 5\ 1\ 5)$$

$$(6\ 6) \bullet \{a, b, c, \dots\} \longrightarrow \text{Mode de Messiaen}$$

$$A_1 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

$$A_2 = (2, 2, 2, 2, 2, 2)$$

$$A_3 = (3, 3, 3, 3)$$

$$A_4 = (4, 4, 4)$$

$$A_6 = (6, 6)$$

$$A_7 = (0)$$



Totale chromatique

Gamme par tons

Accorde diminué

Accorde augmentée

Triton

« Classe de hauteur »

The construction of rhythmic (tiling) canons

Musical score for 'Harawi (1945)' by Olivier Messiaen. It consists of three staves: a vocal line at the top, a piano accompaniment in the middle, and a bass line at the bottom. The tempo is marked '♩ = 40'. The music is in 3/4 time and features complex rhythmic patterns and dissonant harmonies.

Harawi (1945)

Musical score for 'Visions de l'Amen (1943)' by Olivier Messiaen. It consists of three staves, each showing a rhythmic canon. The tempo is marked '♩ = 40'. The music is in 2/4 time and features complex rhythmic patterns and dissonant harmonies.

Visions de l'Amen (1943)

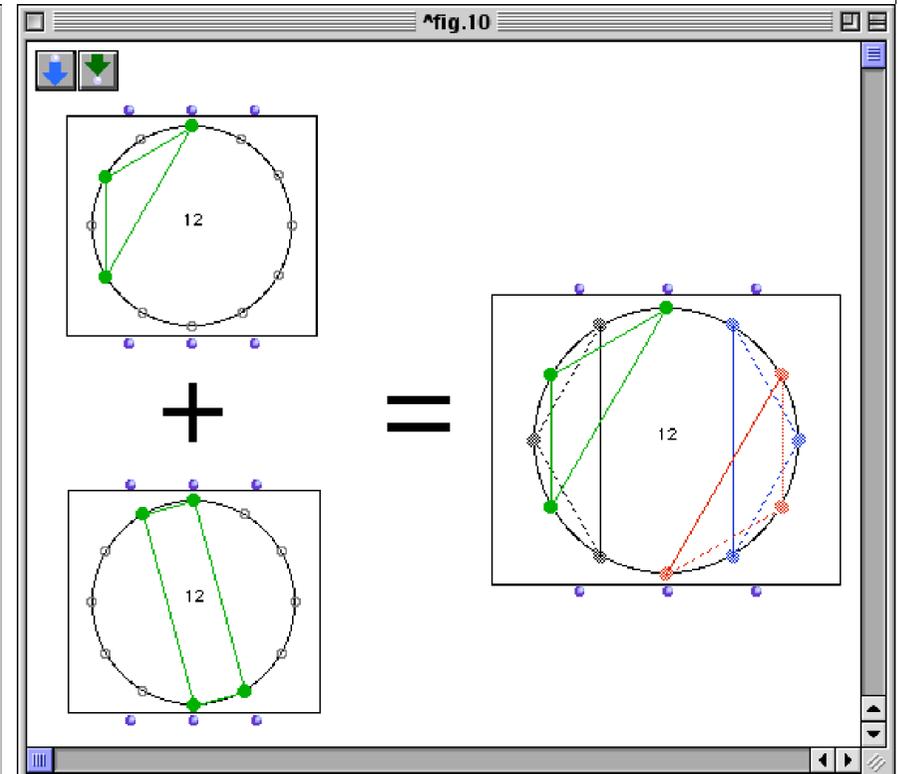
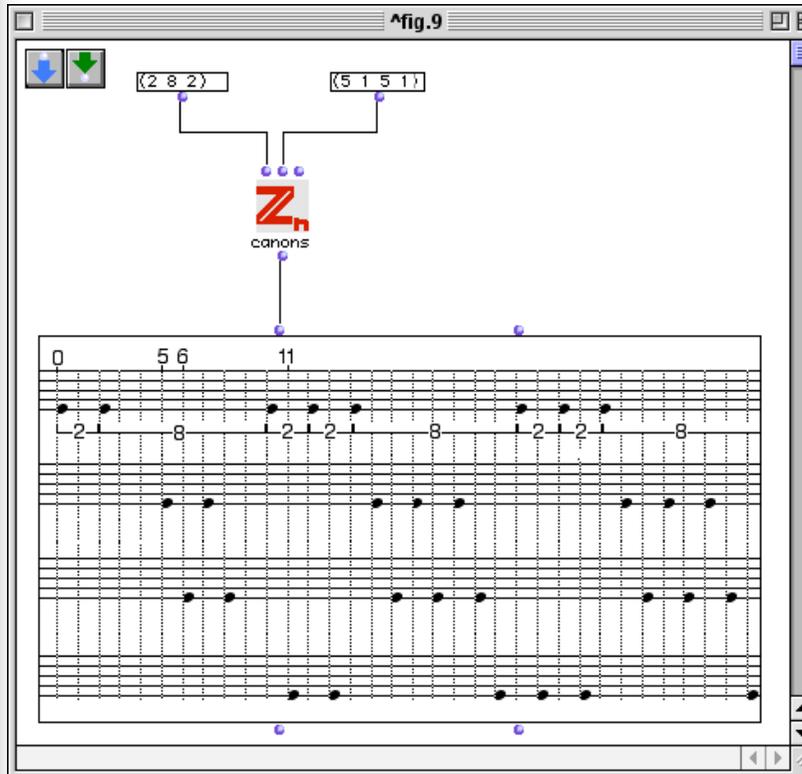
A rhythmic model diagram consisting of three staves. The top staff has blue dots on a treble clef staff. The middle staff has blue dots on a treble clef staff. The bottom staff has black dots on a treble clef staff. Vertical dotted lines connect the dots across the staves, illustrating the rhythmic relationships between the different parts.

Rhythmic
model

« ...il résulte de tout cela que les différentes sonorités se mélangent ou s'opposent de manières très diverses, **jamais au même moment ni au même endroit [...]. C'est du désordre organisé** »

O. Messiaen : *Traité de Rythme, de Couleur et d'Ornithologie*, tome 2, Alphonse Leduc, Editions Musicales, Paris, 1992.

Canons as Composition between modal structures



$$(2\ 8\ 2) \cdot (5\ 1\ 5\ 1) = \mathbf{Z/12Z}$$

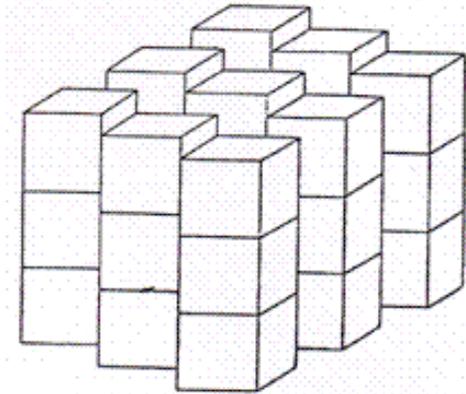


Transposition limited mode

Canons rythmiques de pavage

théorie ↔ composition

- La conjecture de Minkowski
- La solution algébrique de Hajos
- Les intuitions du « rythmicien » Messiaen
- Le modèle algébrique de Vieru/Vuza
- Le modèle informatique généralisé (en collaboration avec Carlos Agon et Thomas Noll)
- Applications compositionnelles (G. Bloch)
- L'énumération des solutions: un problème ouvert (Vuza, Andreatta, Fripertinger, Amiot, Noll, Tangian, Jedrzejewski...)

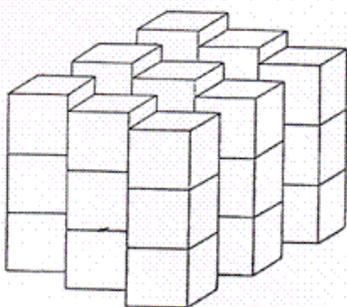


Minkowski Conjecture (1896/1907)

In a simple lattice tiling of the n -dimensional space by unit cubes, there are at least two cubes which share an entire $(n-1)$ -dimensional face.

(Cf. S. Stein, S. Szabó : *Algebra and Tiling*, 1994)

Conjecture de Minkowski et théorème de Hajos



Conjecture de Minkowski (1896/1907)

Dans un pavage simple [simple lattice tiling] d'un espace à n dimensions par des cubes unités, il y a au moins un couple de cubes qui ont en commun une face entière de dimension $n-1$.

Théorème de Hajós (1942)

Soit G un groupe abélien fini et soient a_1, a_2, \dots, a_n n éléments de G .
Si l'on suppose que le groupe admet comme factorisation la somme directe des sous-ensembles A_1, A_2, \dots, A_n suivants :

$$A_1 = \{1, a_1, \dots, a_1^{m_1-1}\}, A_2 = \{1, a_2, \dots, a_2^{m_2-1}\}, \dots, A_n = \{1, a_n, \dots, a_n^{m_n-1}\}$$

avec $m_i > 0$ pour tout $i=1, 2, \dots, n$, alors un des facteurs A_i est un groupe

Théorème de Redei (1965)

Soit G un groupe abélien fini et soient A_1, A_2, \dots, A_n n sous-ensembles de G , chacun contenant l'élément neutre du groupe et chacun ayant un nombre premier d'éléments et supposons que le groupe admette comme factorisation la somme directe des sous-ensembles $A_i, i=1, \dots, n$. Alors, un des sous-ensembles A_i est périodique

Groupes de Hajós et canons de pavage

Un groupe G est “ groupe de Hajós ” si pour toute factorisation du groupe en somme directe de ses sous-ensembles A_1, A_2, \dots, A_k , au moins un des facteurs est périodique.

Rédei 1947

(p, p)

Hajós 1950

\mathbf{Z}

De Brujin 1953

$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ avec $n = p^\alpha$

(p^α, q)

(p, q, r)

Sands 1957

(p^2, q^2)

(p^2, q, r)

(p, q, r, s)

72
108 120 144 168 180
200 216 240 252 264 270 280 288
300 312 324 336 360 378 392 396
400 408 432 440 450 456 468 480
500 504 520 528 540 552 560 576 588 594
600 612 616 624 648 672 675 680 684 696
700 702 720 728 744 750 756 760 784 792
800 810 816 828 864 880 882 888
900 912 918 920 936 945 952 960 968 972 980 984
1000 ...



Sands 1959

$(2^2, 2^2)$

$(3^2, 3)$

$(2^n, 2)$

Sands 1962

$(p, 3, 3)$

$(p, 2^2, 2)$

$(p, 2, 2, 2, 2)$

$(p^2, 2, 2, 2)$

$(p^3, 2, 2)$

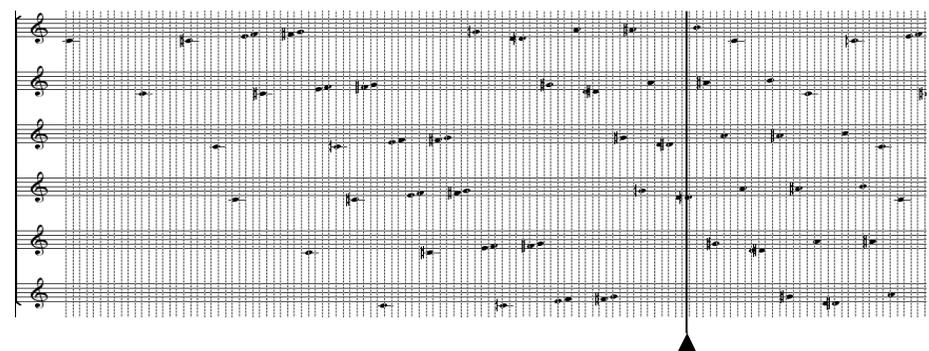
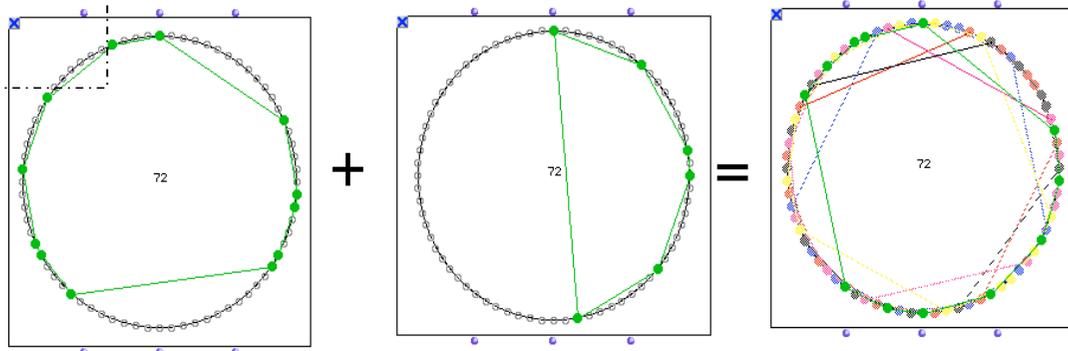
$(p, q, 2, 2)$

Sands 1964

\mathbf{Q}

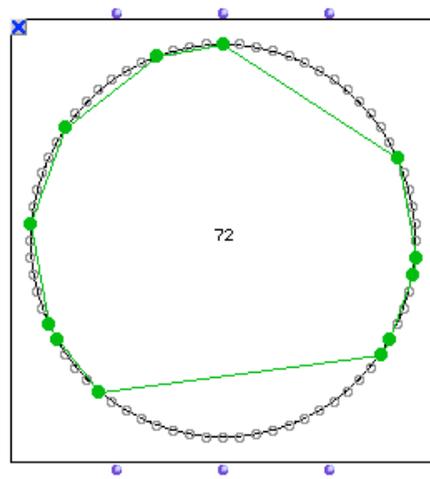
$\mathbf{Z} + \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$

$\mathbf{Q} + \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$

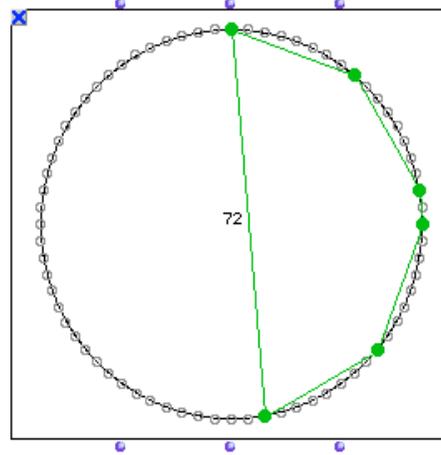


Hauteurs/Rythmes : les canons rythmiques de pavage

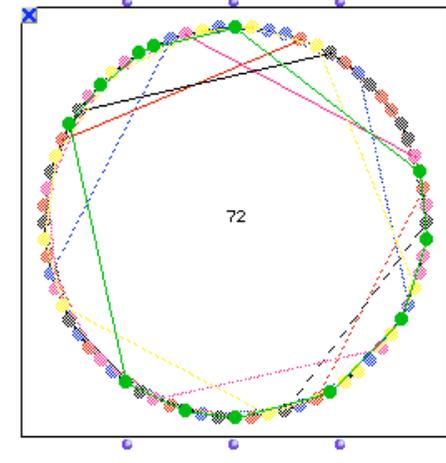
A musical score consisting of six staves, each with a treble clef. A vertical line is drawn through the center of the score, acting as an axis of symmetry. The notes on each staff are mirrored across this axis. Some notes are enclosed in rectangular boxes, highlighting specific rhythmic patterns. The notation includes various note values such as quarter, eighth, and sixteenth notes, along with rests.



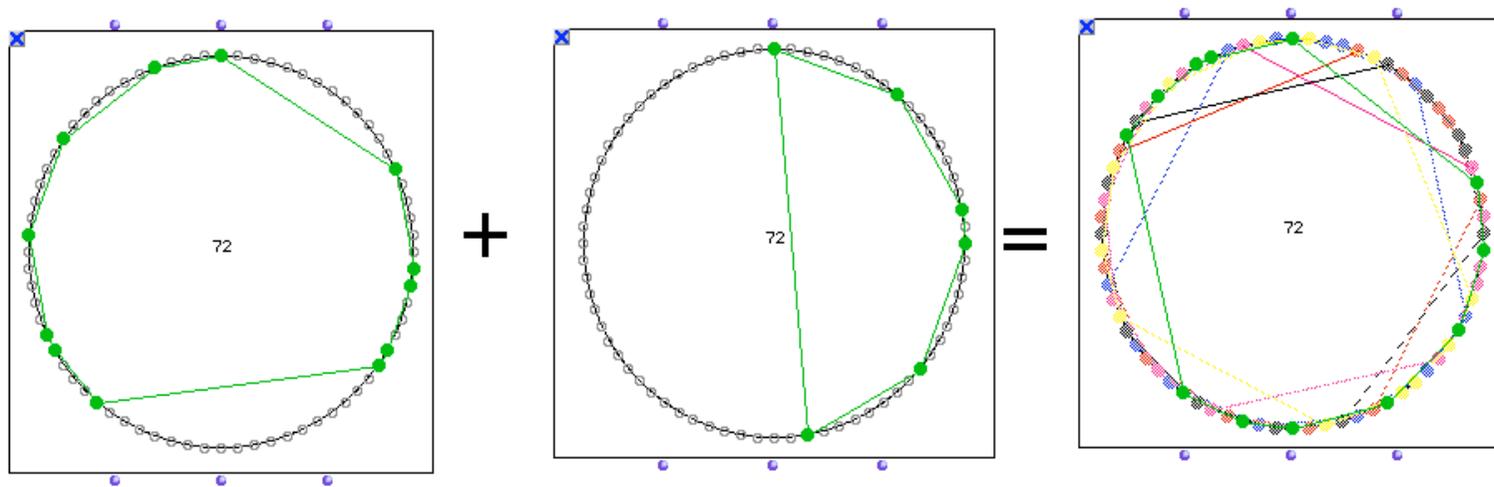
+



=



Vers une classification des canons RCCM

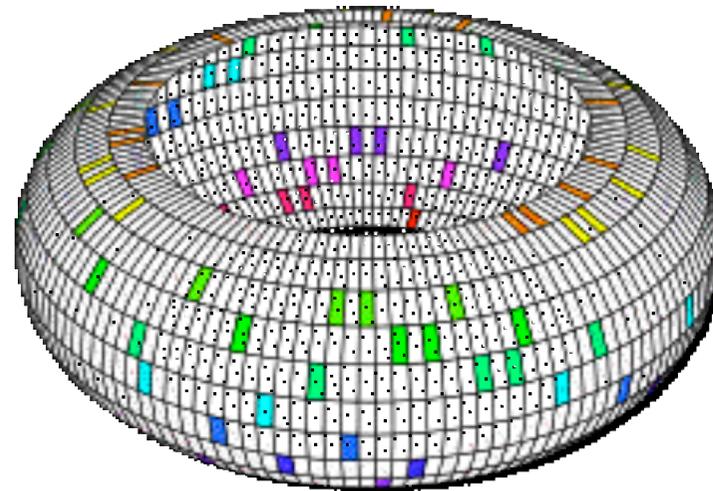


R

```
(1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)
(20 3 1 5 6 9 4 11 6 3 3 1)
(1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6)
(6 13 4 7 6 6 1 4 19 1 4 1)
(1 5 15 4 5 6 6 3 4 17 3 3)
(3 3 17 4 3 6 6 5 4 15 5 1)
```

S

```
(8 8 2 8 8 38)
(16 2 14 2 16 22)
(14 8 10 8 14 18)
```



Georges Bloch (2001-2004)

Stratégies compositionnelles nouvelles à partir du modèle formel

- Organisation métrique d'un canon de pavage
- Réduction d'un canon de pavage en canons auto-similaires
- Modulation métrique entre canons
- *Transformation* d'un canon rythmique en « texture »

- *Projet Beyeler* (2001)
- *Projet Hitchcock*
- *Visite des tours de la cathédrale de Reims*
- *Noël des Chasseurs*
- *Canons à marcher*
- *Canon à eau*
- *Harawun* (2004)

harawun $\text{♩} = 40$
GB

Piano 1 *mf*

Piano 2 *f* *mf*

Cymbale *pp*

mp *pp* *f*

Harawun: L'entrée d'un canon RCCM modélisé sur *Harawi*

Georges Bloch (2001-2004)

Stratégies compositionnelles nouvelles à partir du modèle formel

The image displays a musical score for the 'Canon Final' by Georges Bloch. The score is arranged in five staves, each labeled with a red instrument abbreviation on the left: Bb Cl. (B-flat Clarinet), Sax. T. (Soprano Saxophone), Vib. (Vibraphone), Vln. (Violin), and Cb. (Cello). The music is written in a complex, rhythmic style with numerous triplets and sixteenth-note patterns. The notation includes various articulations such as slurs, accents, and dynamic markings. The overall texture is dense and intricate, reflecting the 'transformation of a rhythmic canon into a texture' as described in the caption.

Canon Final : transformation d'un canon rythmique en « texture »

L'analyse formalisée ou les « entités formelles » en musique

André Riotte et Marcel Mesnage

A. Schoenberg : *Klavierstück Op. 33a*, 19??

The image displays a musical score for A. Schoenberg's *Klavierstück Op. 33a* in 4/4 time, featuring a treble and bass clef. The score is annotated with several colored boxes: a blue rounded rectangle, a yellow diamond, and a light blue dotted rectangle. Below the score, six circular diagrams (pitch-class sets) are shown, each with a corresponding numerical label. Arrows connect the boxes in the score to these diagrams: a green dotted arrow from the first dotted box to the first diagram, a blue arrow from the first blue box to the second diagram, a yellow arrow from the yellow diamond to the third diagram, a blue arrow from the second blue box to the fifth diagram, and a green dotted arrow from the second dotted box to the sixth diagram.

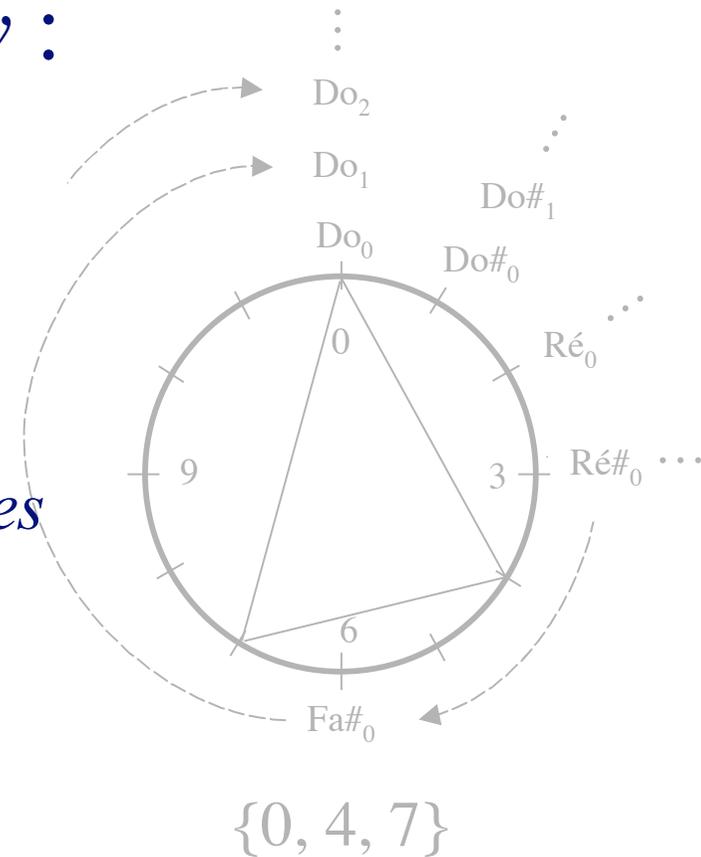
<p>0-5511 (1 2 5 6)</p>	<p>9-4233 (2 3 4 5 6)</p>	<p>8-6231 (1 2 3 4 5 6)</p>	<p>11-6132 (1 2 3 4 5 6)</p>	<p>0-4332 (2 3 4 5 6)</p>	<p>3-5511 (1 2 5 6)</p>
-----------------------------	-------------------------------	---------------------------------	----------------------------------	-------------------------------	-----------------------------

Les principes de base de la *Set Theory* : une introduction

Set Theory « classique » et
Approches Transformationnelles

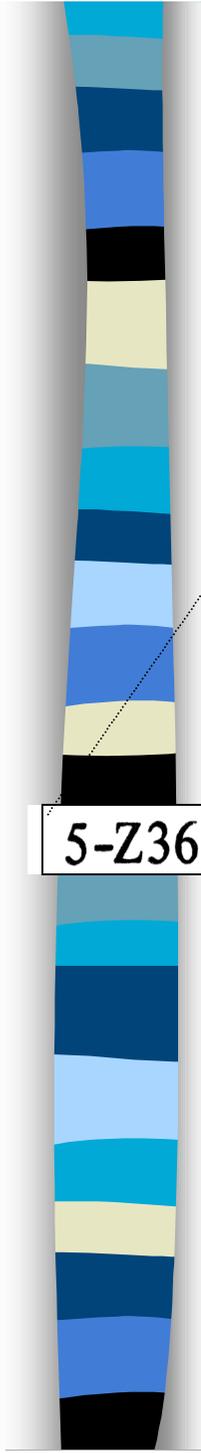
Moreno Andreatta
Stéphan Schaub

Colloque international
Autour de la *Set Theory*



Résonances 2003

Le catalogue des *pcs* d'Allen Forte



5-Z36 0,1,2,4,7 222121

7-Z36 0,1,2,3,5,6,8 444342

Ensemble (littéral) de Classes de Hauteurs (ECH) (Literal) pitch class set (pcs)

A. Schoenberg *Sechs kleine Klavierstücke* op. 19 no. 4, 1911 (Forte 2003)



A

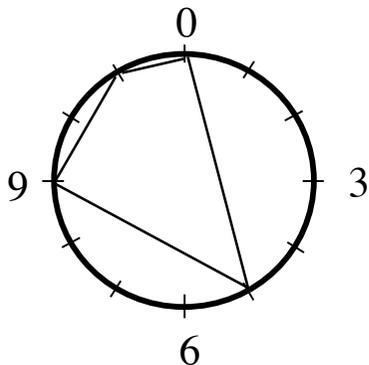
m. 2



{do, fa, si, la}

{0, 5, 11, 9}

{0, 5, 9, 11}



B

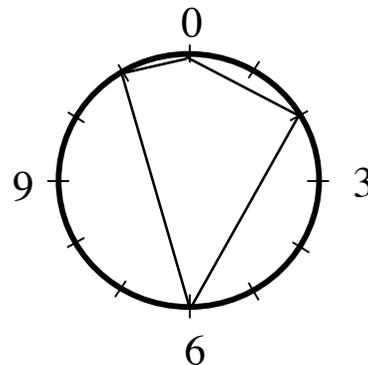
m. 5



{si, do, ré; fa#}

{11, 0, 2; 6}

{0, 2, 6, 11}



C

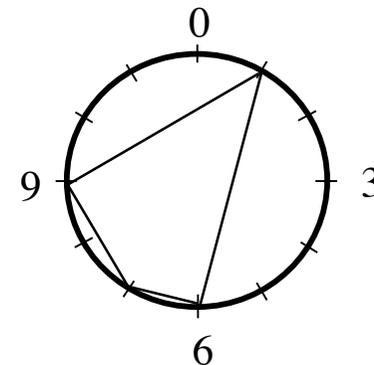
m. 8



{sol, la, fa#, do#}

{7, 9, 6, 1}

{1, 6, 7, 9}



Classes d'Intervalles et Contenu Intervallique d'un ECH (2)

Interval Classes and Interval Content of a pcs

Le **vecteur IFUNC** (Lewin) répertorie la fréquence d'apparition des classes d'intervalles contenues dans un ECH.

$$\text{IFUNC}(A, A) = [4 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

$\begin{matrix} \nearrow & \nearrow & \nearrow & & \nearrow \\ \text{ci } 0 & \text{ci } 1 & \text{ci } 2 & \dots & \text{ci } 11. \end{matrix}$

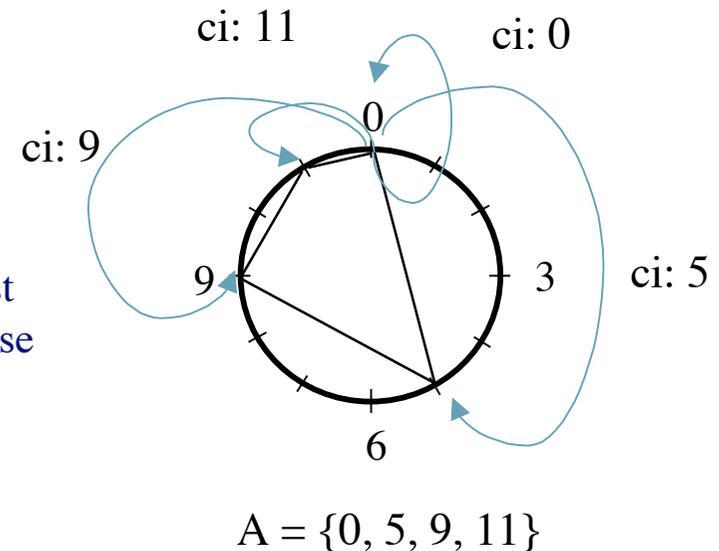
Au sein de la théorie « classique », l'information est encore condensée, puisqu'un intervalle et son inverse sont considérés comme faisant partie de la même « classe ».

seconde mineure / septième majeure: 1,
 seconde majeure / septième mineure: 2
 ... triton: 6.

Le **vecteur intervallique** (Forte) répertorie la fréquence d'apparition des classes d'intervalles contenues dans un ECH, selon la définition ci-dessus.

$$\text{VI}(A) = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

$\begin{matrix} \nearrow & \nearrow & \nearrow & & \nearrow \\ \text{ci } 1 & \text{ci } 2 & \text{ci } 3 & \dots & \text{ci } 6. \end{matrix}$



Classes d'Intervalles et Contenu Intervallique d'un ECH

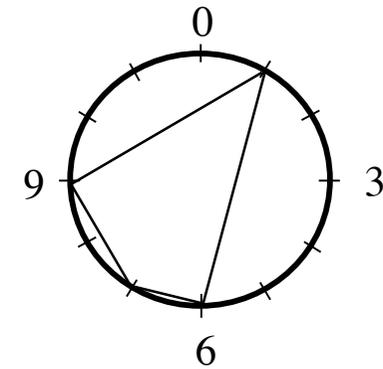
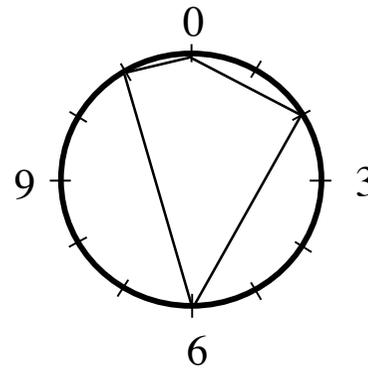
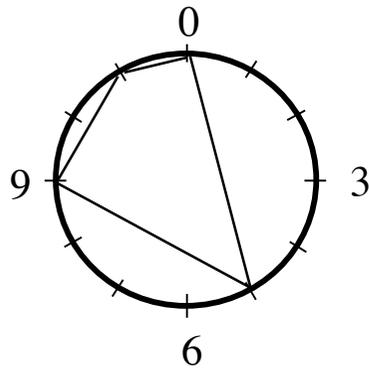
Interval Classes and Interval Content of a pcs



A

B

C



SI: (5, 4, 2, 1)

(2, 4, 5, 1)

(5, 1, 2, 4)

IFUNC: [4 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]

[4 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]

[4 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]

VI: [1 1 1 1 1 1]

[1 1 1 1 1 1]

[1 1 1 1 1 1]

(Retrouver les transformations)

Transformations d'ECH : la Transposition

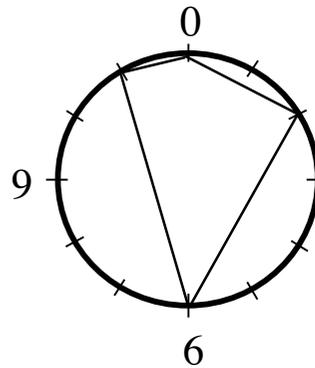
Pcs Transformations : Transposition



B

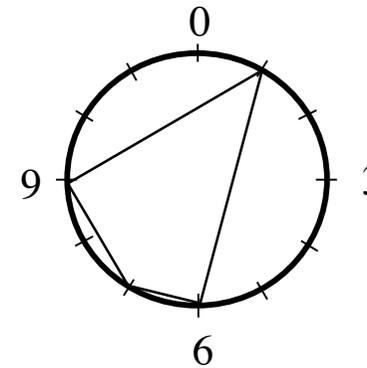
leicht *pp*

{0, 2, 6, 11}



C

{1, 6, 7, 9}



$T_7(B) = C$

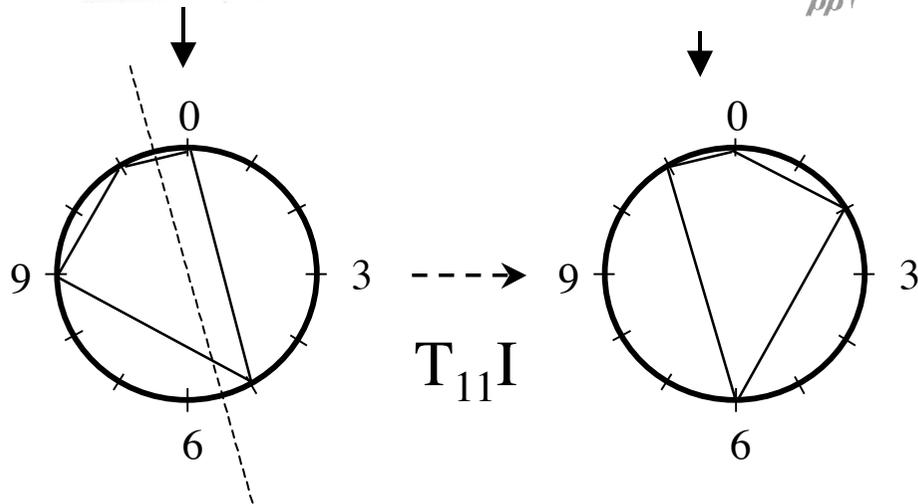
Transformations d'ECH : l'Inversion

Pcs Transformations : Inversion



A

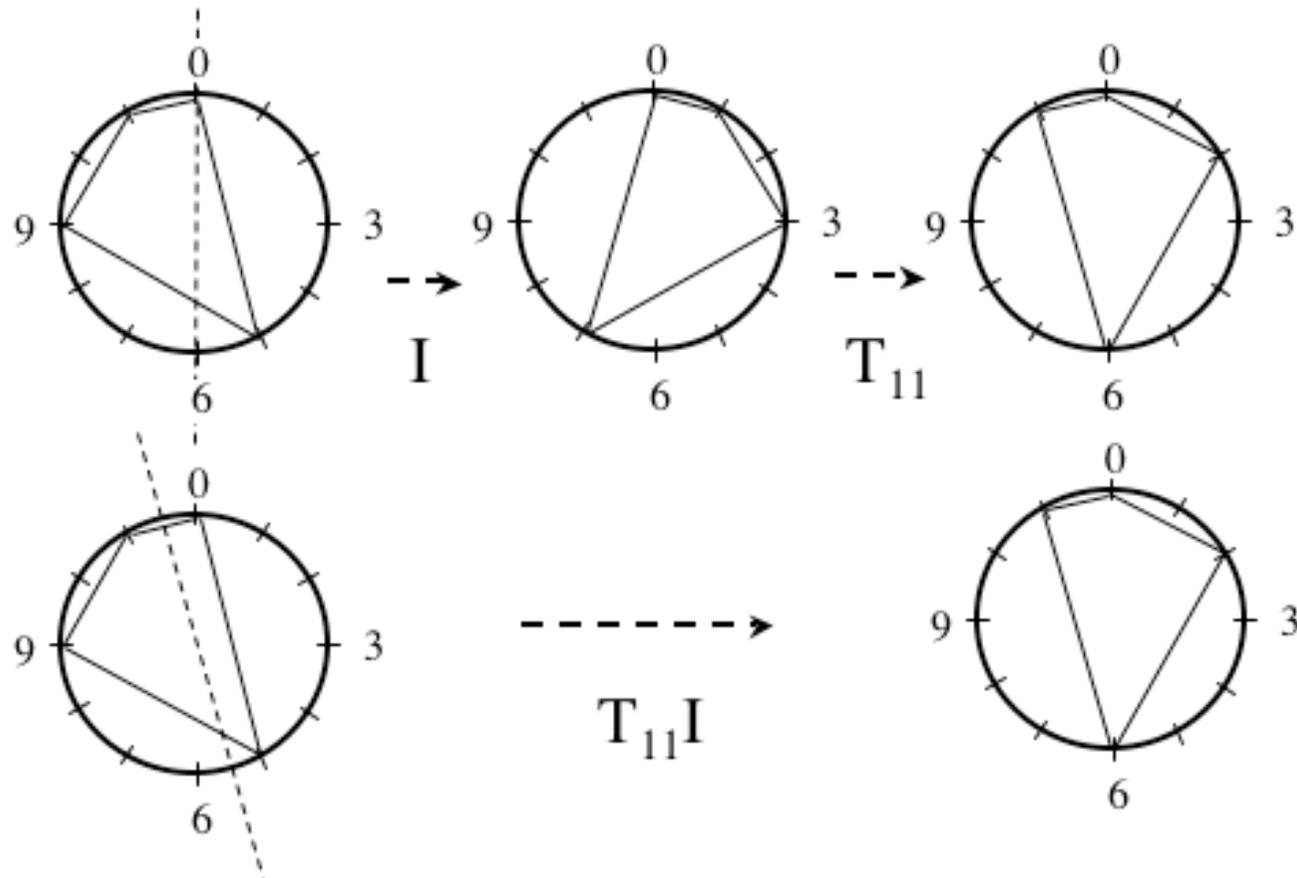
B



$$T_{11}I(A) = B$$

Transformations d'ECH : Inversion et Transposition

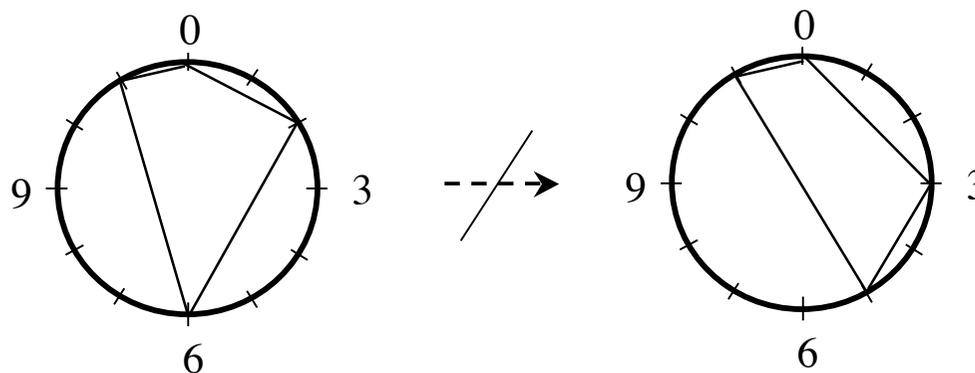
Pcs Transformations : Inversion and Transposition



La Relation z

Z-relation

La transposition autant que l'inversion laissent le contenu intervallique d'un ECH inchangé. En d'autres termes, si un ECH B est le transformé par inversion et / ou transposition d'un ECH A, alors A et B ont le même contenu intervallique.

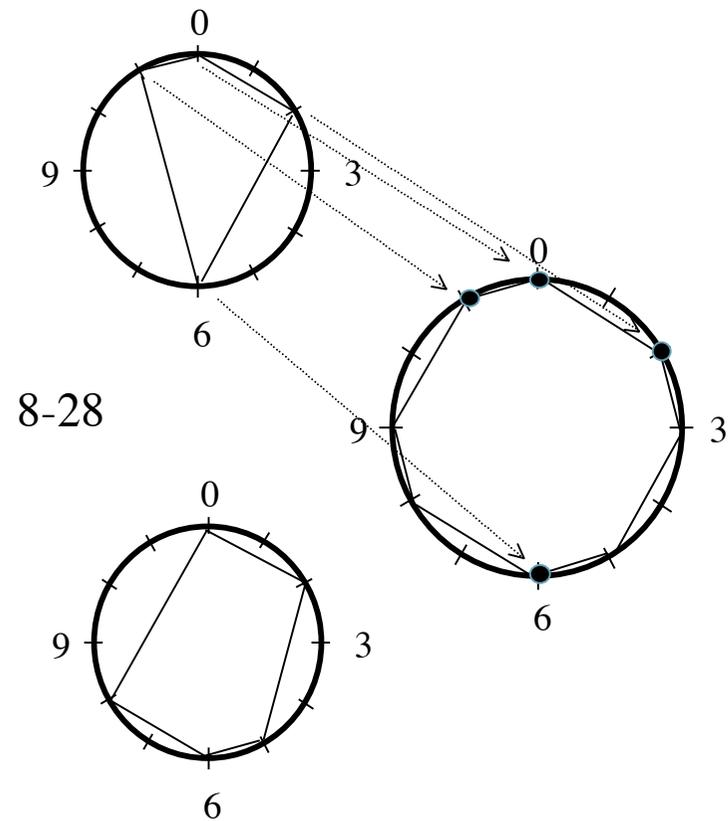
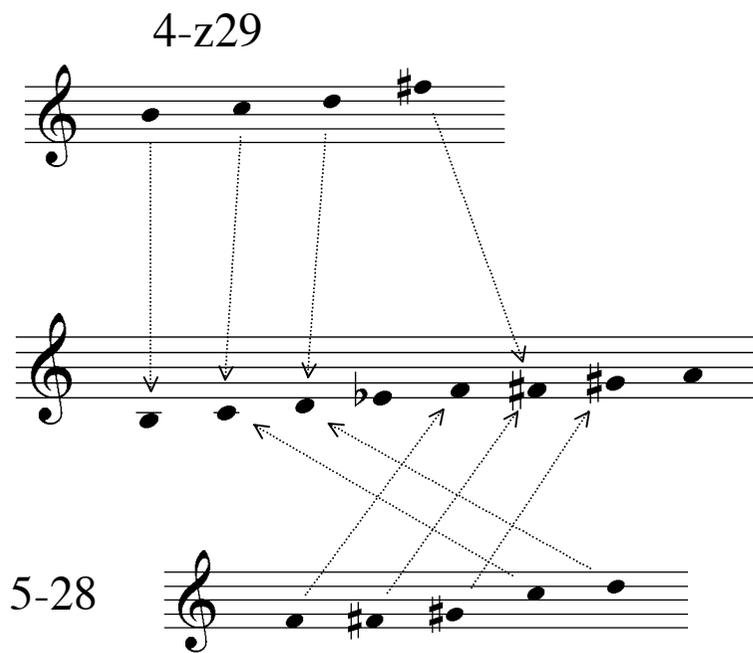


VI: [1 1 1 1 1 1] \dashrightarrow [1 1 1 1 1 1]

La proposition inverse n'est pas vraie.

Relations entre ECH: l'inclusion littérale

Relations between pcs: literal inclusion



$$4-z29 \subset 8-28$$

$$5-28 \subset 8-28$$

Relations entre ECH: l'inclusion abstraite

Relations between pcs: abstract inclusion

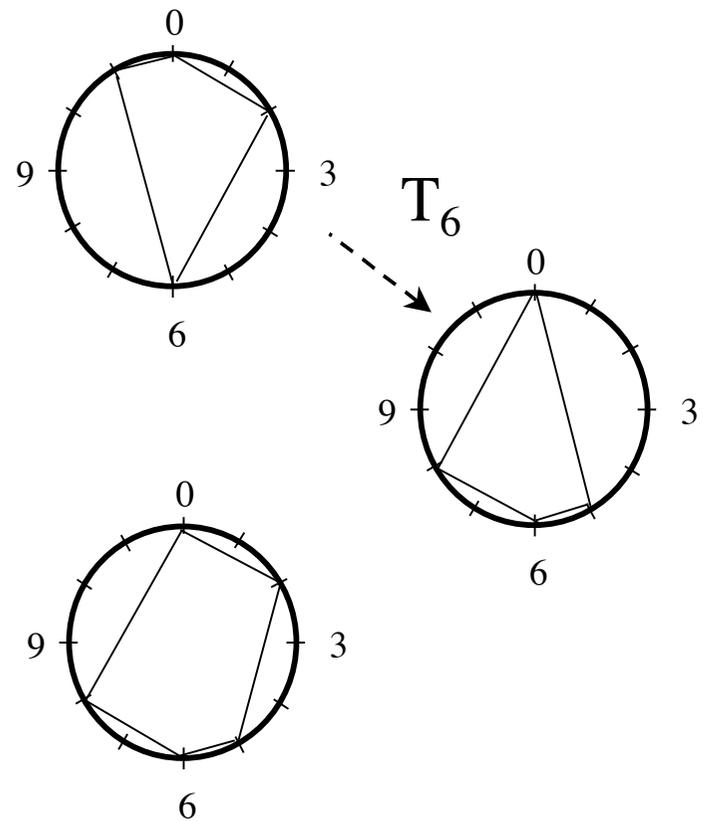
4-z29

T_6

4-z29

5-28

The diagram shows three musical staves. The top staff is labeled '4-z29' and contains a four-note chord: G4, A4, B4, and C#5. A dashed arrow labeled 'T6' points down to the middle staff, which is also labeled '4-z29' and contains a four-note chord: G#4, A#4, B#4, and C5. Below the middle staff is a fifth staff labeled '5-28' containing a five-note chord: G4, A4, B4, C#5, and D5. Dotted lines connect the notes of the middle staff to the notes of the bottom staff, illustrating that the 4-z29 chord is a subset of the 5-28 chord.



$$4\text{-z}29 \subset 5\text{-}28 \subset 8\text{-}28$$

Relations entre ECH: le complémentaire littérale

Relations between pcs: literal complement

A. Webern *Fünf Stücke* op. 10 no. 4, 1913 (Forte 1973 / Lewin 1987)

The image displays a musical score for Webern's *Fünf Stücke* op. 10 no. 4. The score consists of two staves, with the upper staff in treble clef and the lower staff in bass clef. Three specific pitch classes are highlighted with arrows pointing to their corresponding sets: H, H', and H''.

$H = \{0, 1, 2, 5, 6, 8\}$ $H' = \{3, 4, 7, 9, 10, 11\}$ $H'' = \{2, 3, 4, 8, 10, 11\}$

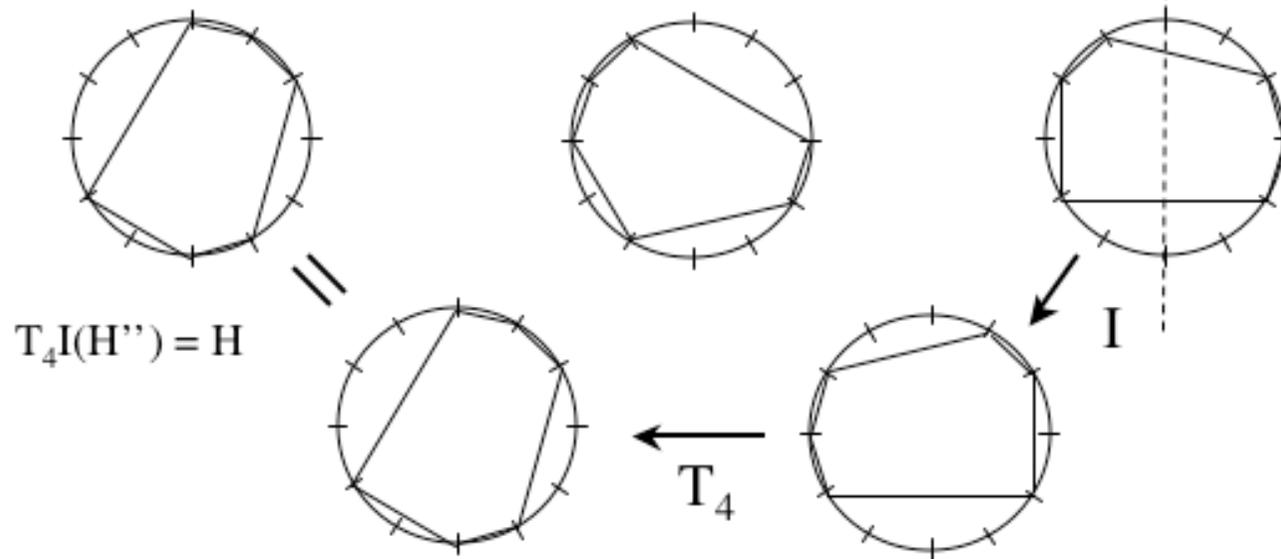
Below the sets are three circular pitch class diagrams (chromatic circles) illustrating the relationships between H, H', and H''. The first diagram shows H as a hexagon with vertices at 0, 1, 2, 5, 6, and 8. The second diagram shows H' as a hexagon with vertices at 3, 4, 7, 9, 10, and 11. The third diagram shows H'' as a hexagon with vertices at 2, 3, 4, 8, 10, and 11. Dashed lines connect the vertices of H and H' to show their complementary relationship, and solid lines connect the vertices of H and H'' to show their literal complement relationship.

Relations entre ECH: le complémentaire abstrait

Relations between pcs: abstract complement



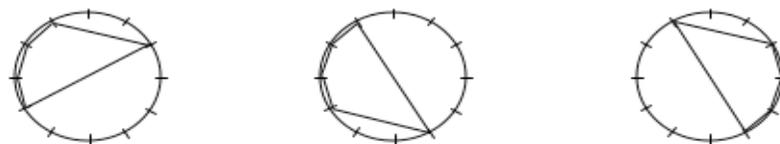
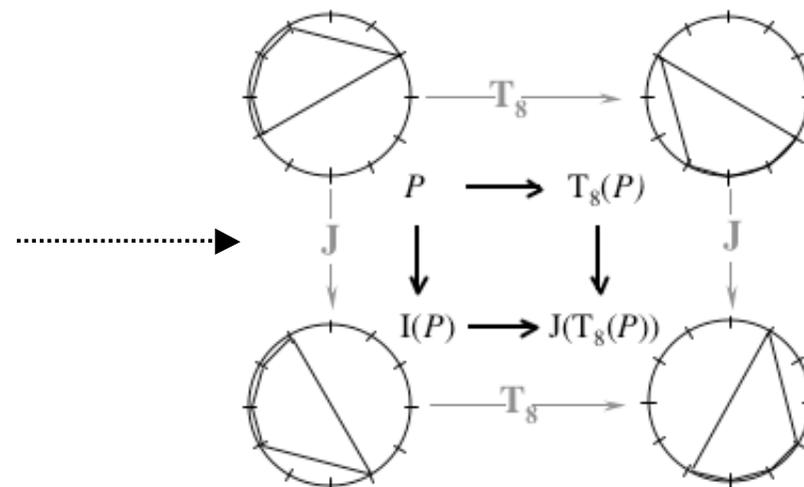
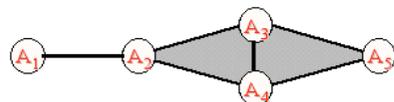
$H = \{0, 1, 2, 5, 6, 8\}$ $H' = \{3, 4, 7, 9, 10, 11\}$ $H'' = \{2, 3, 4, 8, 10, 11\}$



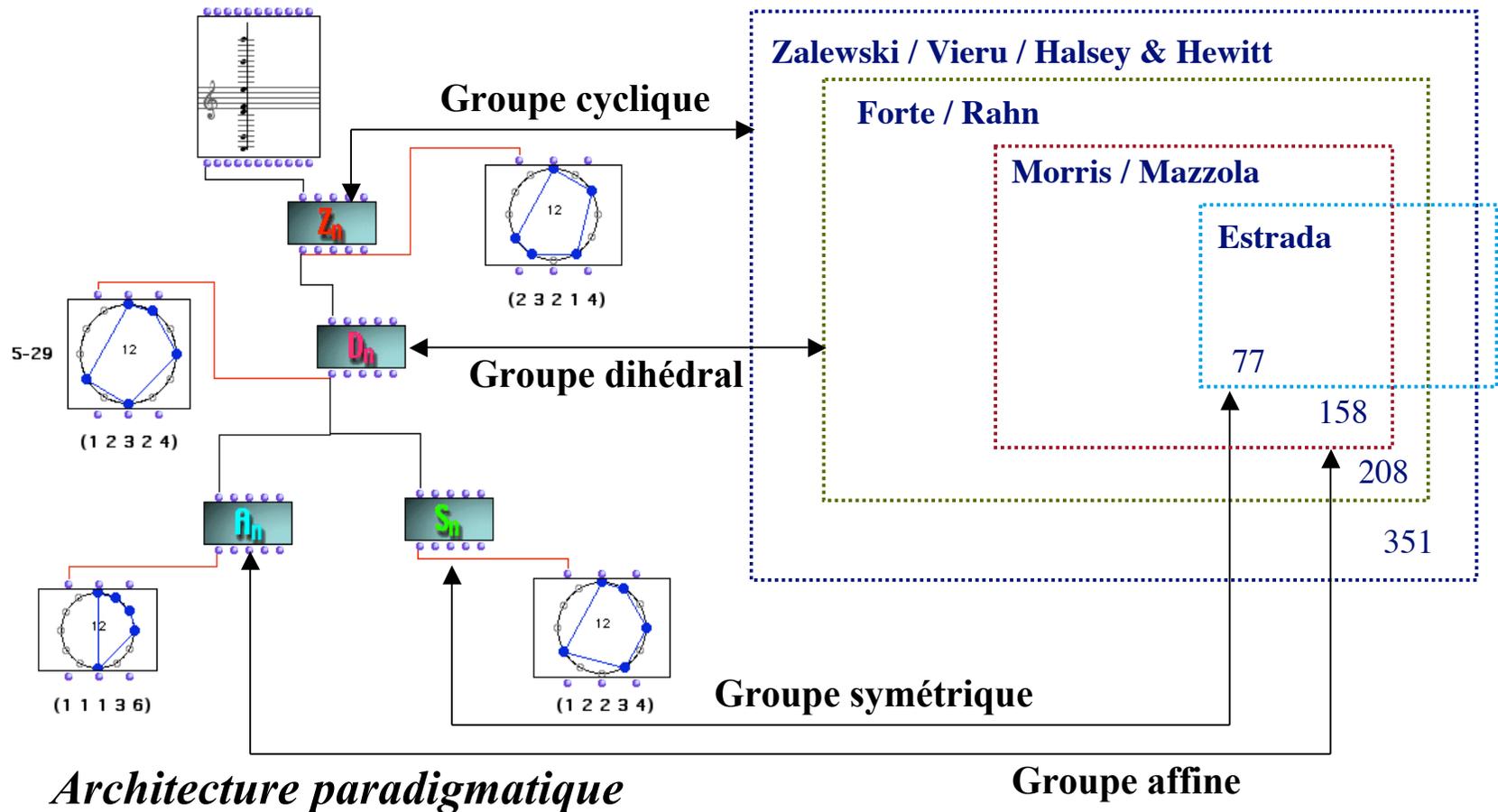
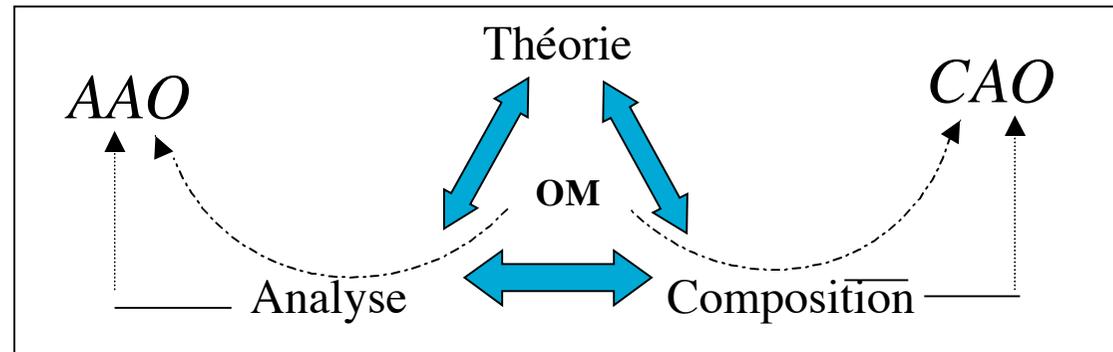
Set Theory, analyse transformationnelle et théorie des catégories

Stockhausen's *Klavierstück III* (Analyse de David Lewin, 1992)

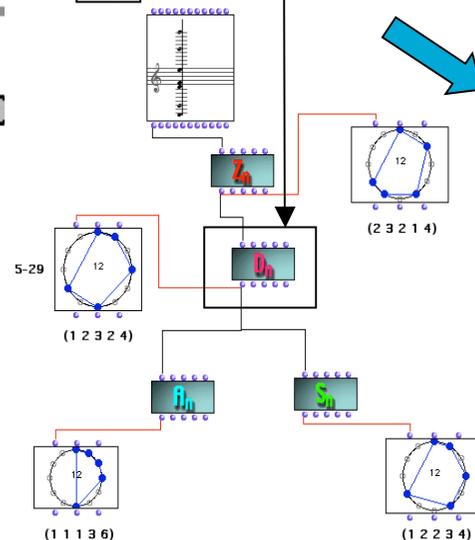
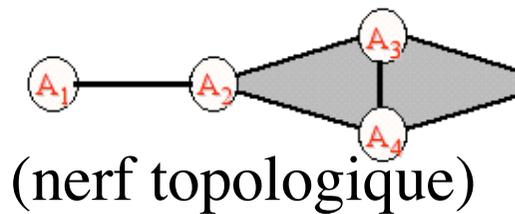
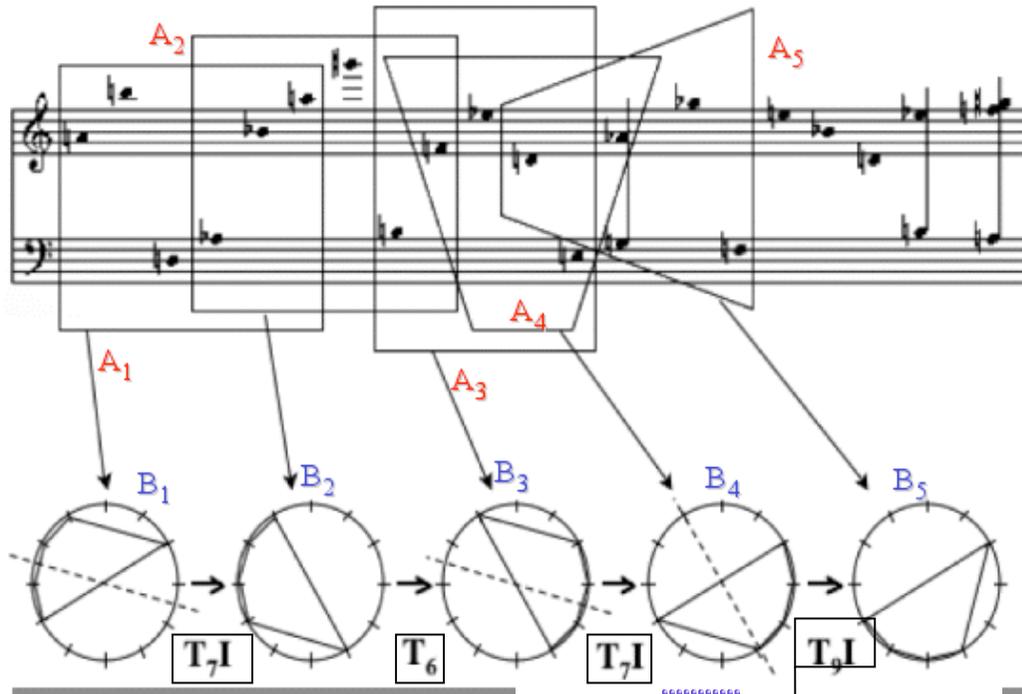
SI: (1, 1, 1, 3, 6) (6, 3, 1, 1, 1) (6, 3, 1, 1, 1)
IFUNC: [5 3 2 2 1 1 1 1 2 2 3] [5 3 2 2 1 1 1 1 2 2 3] [5 3 2 2 1 1 1 1 2 2 3]
VI: [3 2 2 1 1 1] [3 2 2 1 1 1] [3 2 2 1 1 1]

Classification 'paradigmatique' des structures musicales



Retombées de l'analyse transformationnelle



Mathématiques

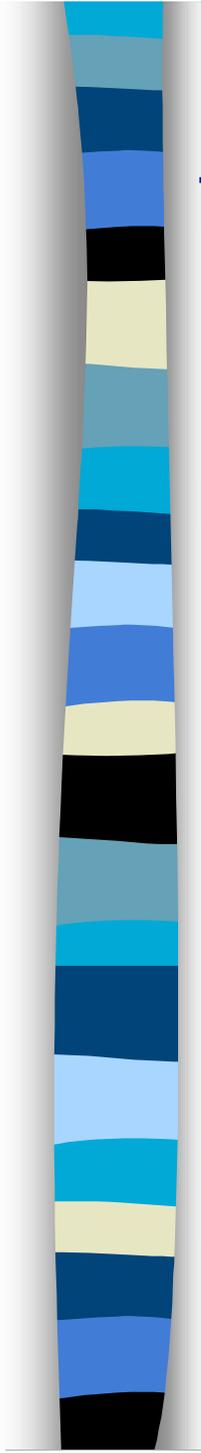
- Transformations et typologies d'accords

Épistémologie

- Segmentation
- Équivalence
- Transformations

Philosophie

- Dualité objet/opération
- Dualité local/global
- Les universaux



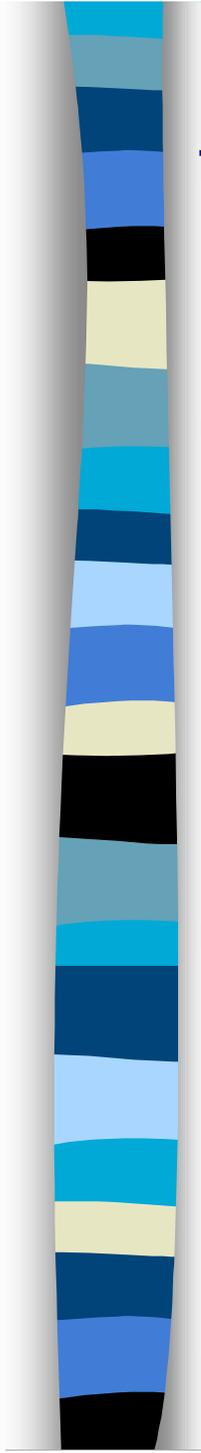
Horizons philosophique d'une démarche structurale en musique

G.-G. Granger et la dualité de l'objectal et de l'opérateur

- « Pygmalion. Réflexions sur la pensée formelle », 1947
- *Pour la connaissance philosophique*, 1988
- *Formes, opérations, objets*, 1994

« [C'est la notion de groupe qui] donne un sens précis à l'idée de structure d'un ensemble [et] permet de déterminer les éléments efficaces des transformations en réduisant en quelque sorte à son schéma opératoire le domaine envisagé. [...] L'objet véritable de la science est le **système des relations** et non pas les termes supposés qu'il relie. [...] Intégrer les résultats - symbolisés - d'une **expérience** nouvelle revient [...] à créer un canevas nouveau, un **groupe de transformations** plus complexe et plus compréhensif »

G.-G. Granger : « Pygmalion. Réflexions sur la pensée formelle », 1947



Horizons philosophique d'une démarche structurale en musique

J. Piaget: de la théorie des groupes à la théorie des catégories

- *Le structuralisme*, 1968
- *Morphismes et Catégories. Comparer et transformer* (avec G. Henriques, E. Ascher 1990)

« ...**attitude relationnelle**, selon laquelle ce qui compte [sont] les relations entre les éléments, autrement dit les procédés ou processus de composition [...] La structure [de **groupe**] se referme sur elle-même, mais cette fermeture ne signifie en rien que la structure considérée ne peut pas entrer à titre de sous-structure dans une structure plus large »

« De même qu'en mathématique le structuralisme des Bourbaki est déjà doublé par un mouvement faisant appel à des **structures plus dynamiques** (les « catégories » [...]) de même toutes les formes actuelles du structuralisme [...] sont certainement grosses de développements multiples... »

Retombées perceptives de l'approche algébrique

De la théorie des groupes à la théorie des catégories

- E. Cassirer : « The concept of group and the theory of perception », 1944
- G. Balzano : « The group-theoretic description of 12-fold and microtonal pitch systems », 1980

La question de la **ressemblance perceptive** entre différentes transpositions d'un même profil mélodique est liée « à un problème beaucoup plus général, un problème qui concerne les mathématiques abstraites »

E. Cassirer : « The concept of group and the theory of perception », 1944

*« Le caractère singulier de l'expérience musicale est dû en partie aux structures particulières de **groupe** que la musique rend accessible à l'auditeur »*

G. Balzano : « The group-theoretic description of 12-fold and microtonal pitch systems », 1980

3 Février 2005



Méthodes paradigmatiques pour la
théorie, l'analyse et la composition
assistées par ordinateur

Fonction et structure d'une théorie de la musique

« ...rendre possible d'un côté l'étude de la **structure** des systèmes musicaux [...] et la formulation des contraintes de ces systèmes dans une perspective compositionnelle [...] mais aussi, comme étape préalable, une terminologie adéquate [...] pour rendre possible et établir un **modèle** qui autorise des énoncés bien déterminés et vérifiables sur les œuvres musicales »

M. Babbitt : « The Structure and Function of Music Theory », 1965

Approches 'set-theoriques'

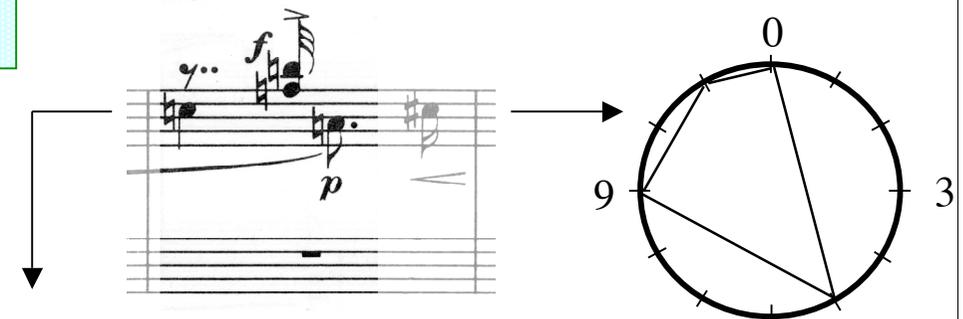
• A. Forte : *The Structure of Atonal Music*, 1973.

• D. Lewin : *Generalized Musical Intervals and Transformation*, 1987

• A. Vieru : *The Book of modes*, 1993 (orig. 1980)

• A. Riotte, M. Mesnage : l'analyse formalisée

• E. Carter : *Harmony Book*, 2002



{do, fa, si, la}

{0, 5, 9, 11}

[1, 1, 1, 1, 1, 1]

4-Z29

(5 4 2 1)

0-5421

N° 23

L'analyse formalisée ou les « entités formelles » en musique

André Riotte et Marcel Mesnage

A. Schoenberg : *Klavierstück Op. 33a*, 1929

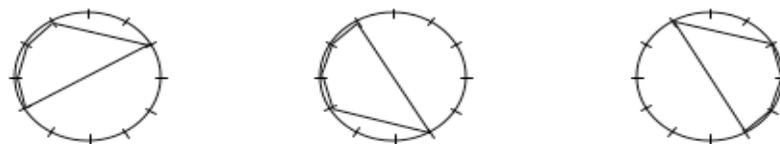
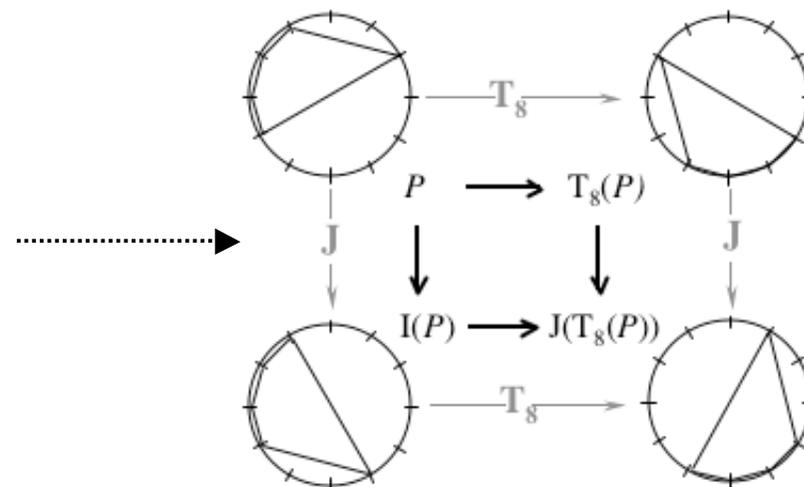
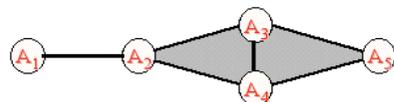
The image displays a musical score for the first system of Schoenberg's *Klavierstück Op. 33a*. The score is written in 4/4 time and features a complex, atonal harmonic language. Several specific musical phrases are highlighted with colored boxes: a blue rounded rectangle, a yellow diamond, and a light blue dotted rectangle. Below the score, six circular diagrams (pitch-class sets) are shown, each with a corresponding numerical label. Dotted arrows connect these diagrams to the highlighted musical phrases in the score above. The diagrams are arranged in two groups of three, separated by a vertical dashed line. The first group contains three diagrams, and the second group contains three diagrams. Each diagram is a circle with 12 positions, representing the 12 pitch classes, and is labeled with a set of numbers.

0-5511 (1 2 5 6)	9-4233 (2 3 4 5 6)	8-6231 (1 2 3 4 5 6)	11-6132 (1 2 3 4 5 6)	0-4332 (2 3 4 5 6)	3-5511 (1 2 5 6)
---------------------	-----------------------	-------------------------	--------------------------	-----------------------	---------------------

Set Theory, analyse transformationnelle et théorie des catégories

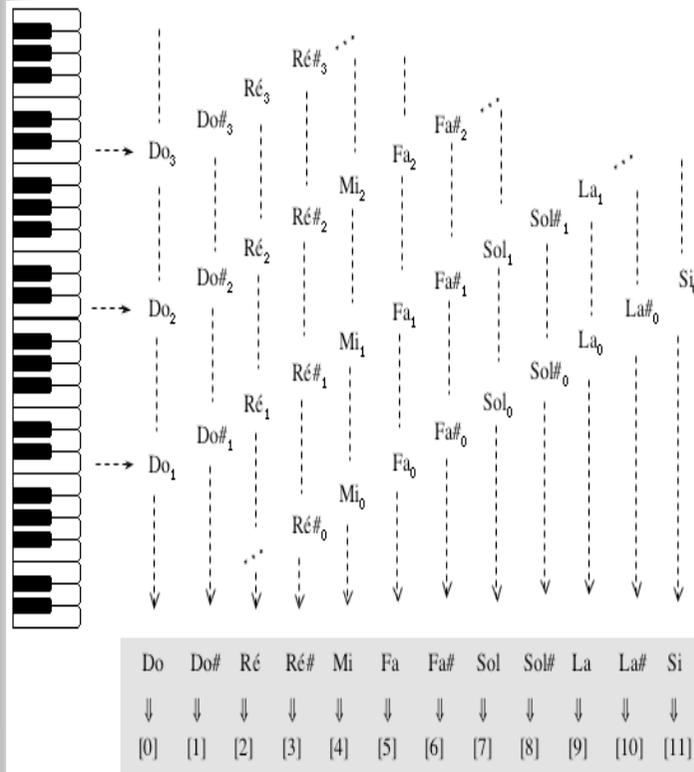
Stockhausen's *Klavierstück III* (Analyse de David Lewin, 1992)

SI: (1, 1, 1, 3, 6) (6, 3, 1, 1, 1) (6, 3, 1, 1, 1)
IFUNC: [5 3 2 2 1 1 1 1 2 2 3] [5 3 2 2 1 1 1 1 2 2 3] [5 3 2 2 1 1 1 1 2 2 3]
VI: [3 2 2 1 1 1] [3 2 2 1 1 1] [3 2 2 1 1 1]

Vers une approche algébrique en musique

La relation de congruence mod 12



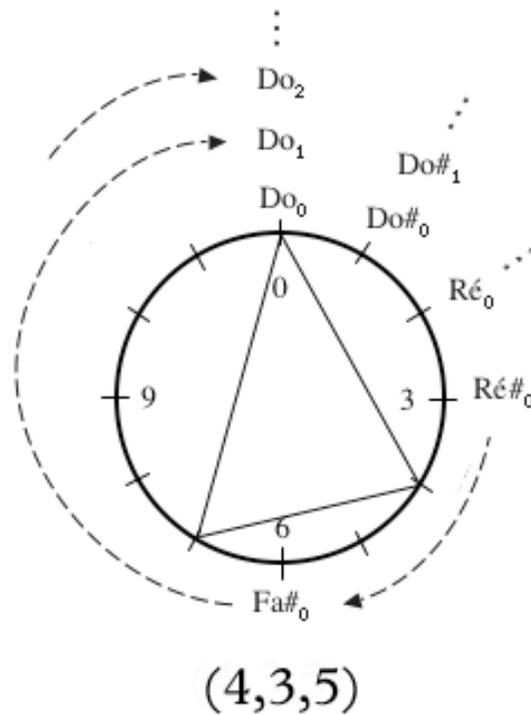
Camille Durutte:

- *Technie, ou lois générales du système harmonique (1855)*
- *Résumé élémentaire de la Technie harmonique, et complément de cette Technie (1876)*

« *Two elements are congruent modulo 12 if their difference is equal to a multiple of 12* »

(M. Babbitt: *The function of Set Structure in the Twelve-Tone System*, 1946)

Structure de groupe et représentation circulaire



↓
Groupe cyclique
 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$

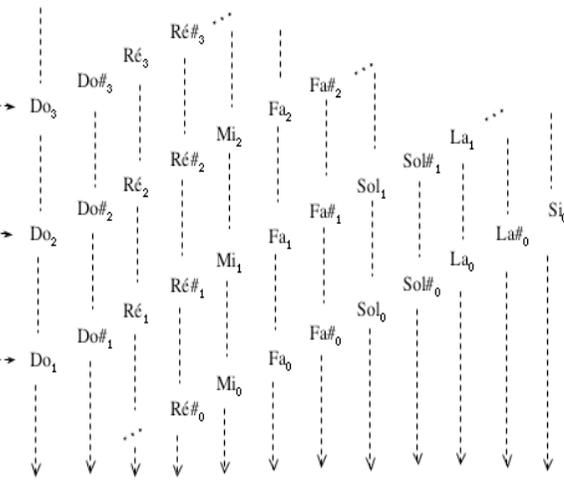
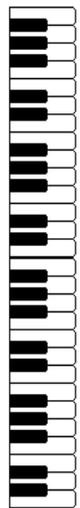
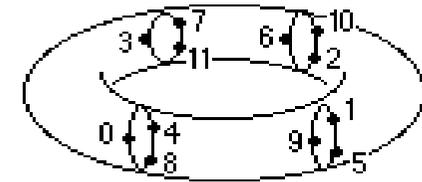
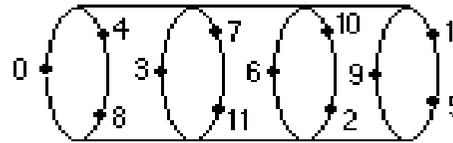
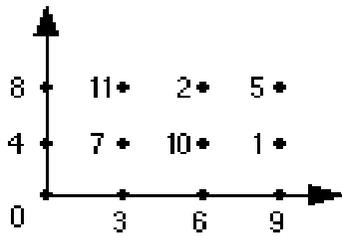
La congruence modulo 12 est une relation d'équivalence

- Reflexivité: $a \sim a$
- Symétrie: $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$
- Transitivité: $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$

*L'ensemble des classes d'équivalence modulo 12 a une structure de **groupe** par rapport à l'addition modulo 12*

- Clôture
- Existence de l'élément neutre
- Existence de l'inverse
- Associativité
- (Commutativité)
- (Cyclicité)

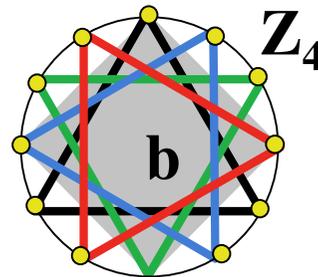
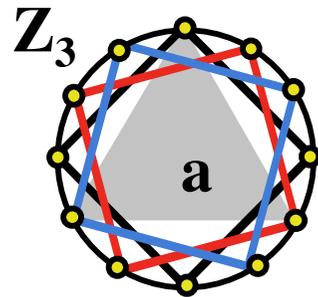
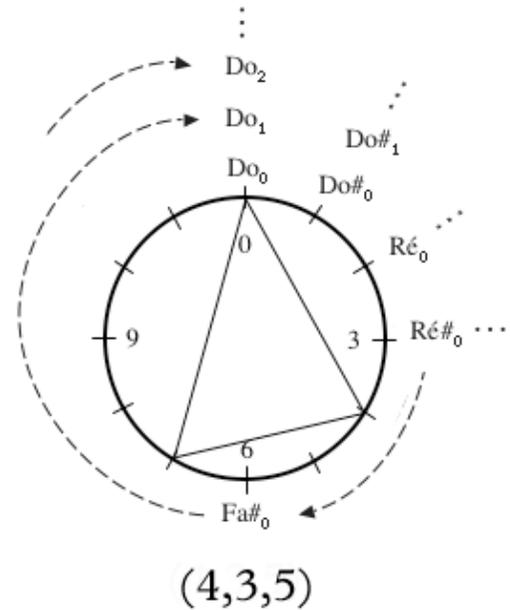
Formalisation vs représentation



Do	Do#	Ré	Ré#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]

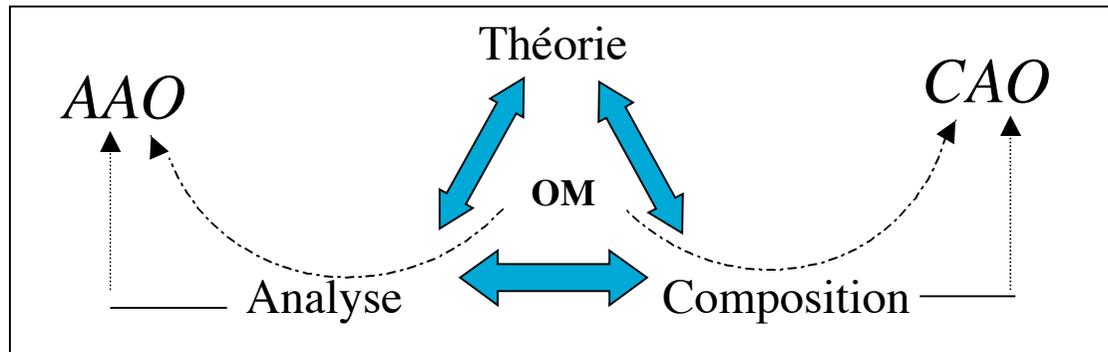
$$\mathbb{Z}_{12} = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$$

Représentation toroidale



Représentation circulaire

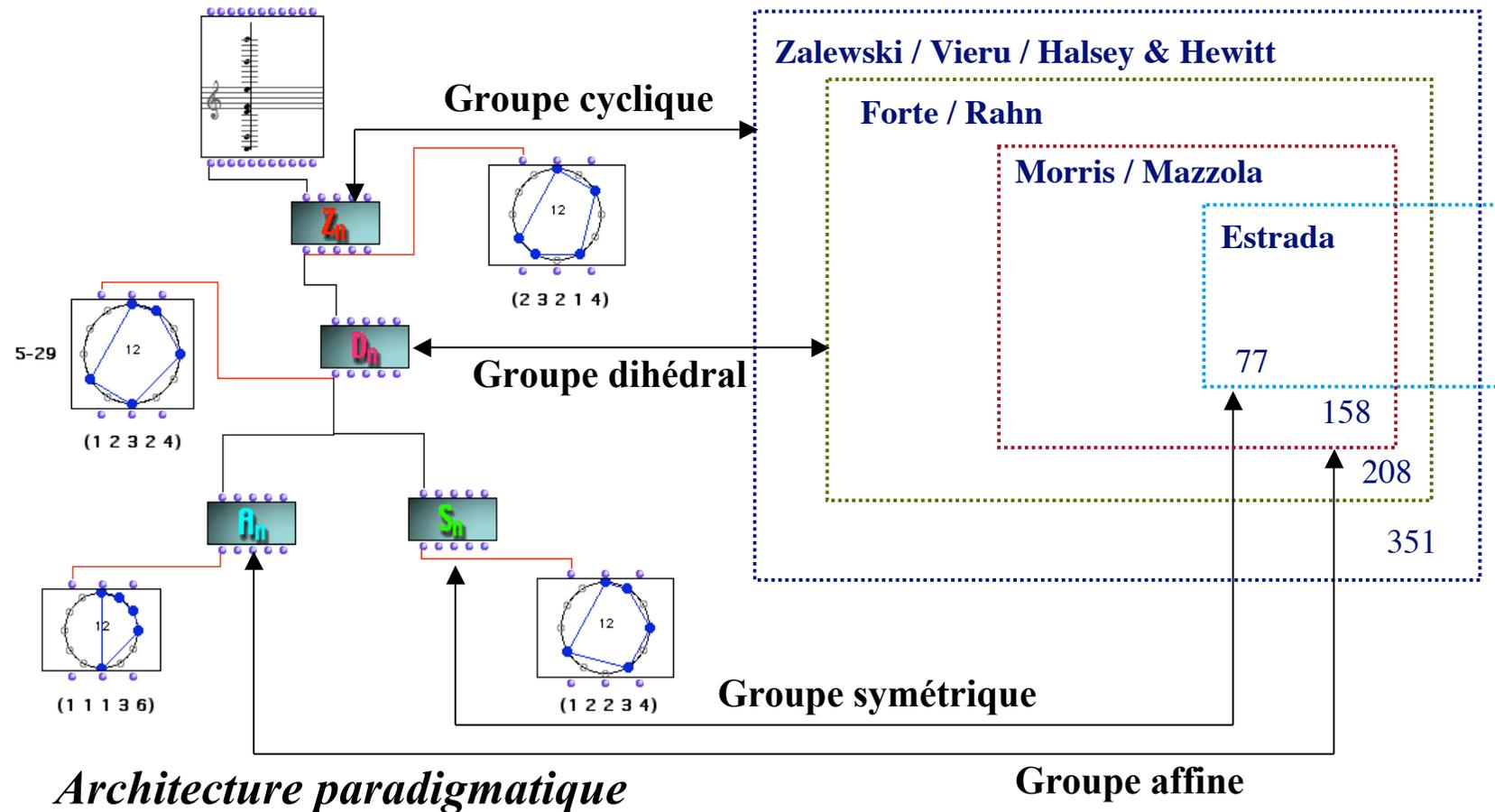
Classification 'paradigmatique' des structures musicales



$$\mathbf{Z}_n = \langle T : T^n = e \rangle$$

$$\mathbf{D}_n = \langle T, I : T^n = I^2 = e, TI = IT^{-1} \rangle$$

$$\mathbf{Aff}_n = \{ax+b : a \in \mathbf{Z}_n^*, b \in \mathbf{Z}_n\}$$



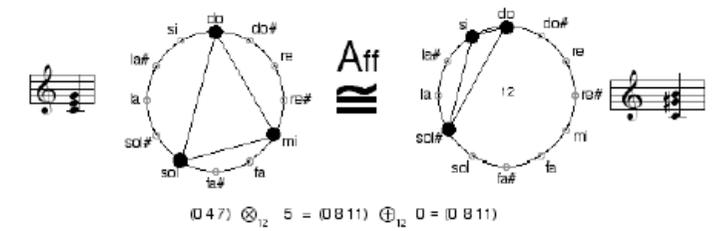
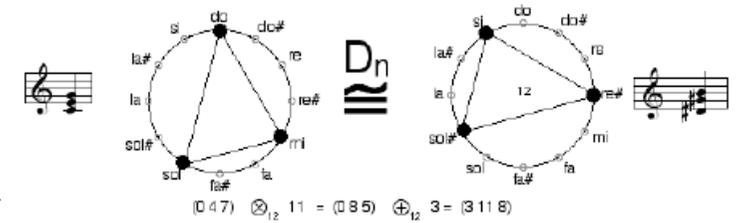
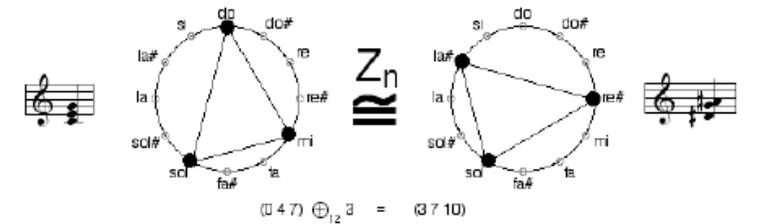
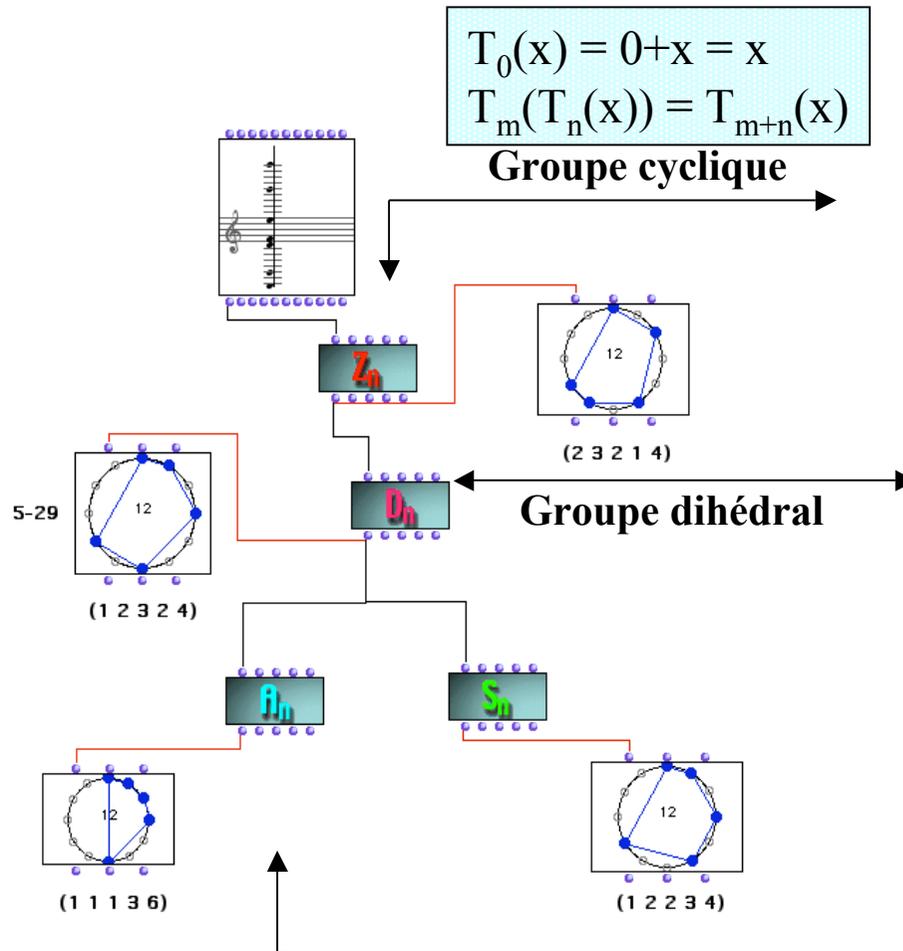
Action de groupe et classes d'équivalence d'accords

Les-Mathematiques.net

On dira que le groupe G agit (ou opère) sur l'ensemble X si il existe une application $\theta : G \times X \rightarrow X$ telle que:

- Pour tout x dans X , $\theta(e, x) = x$.
- Pour tout $g_1, g_2 \in G$, $\theta(g_1, \theta(g_2, x)) = \theta(g_1 \cdot g_2, x)$.

L'action d'un groupe induit une relation d'équivalence



Architecture paradigmatique

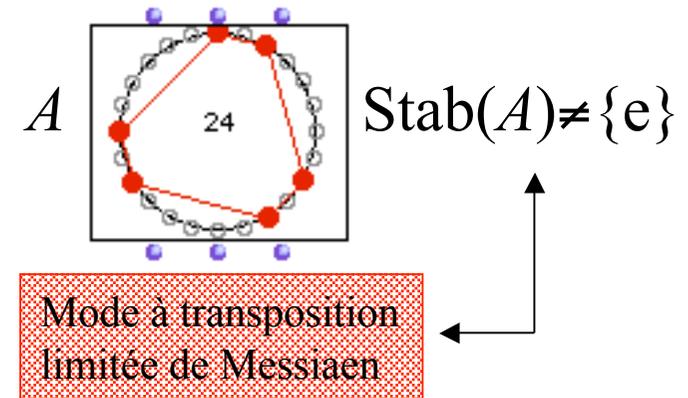
Groupe affine

Lemme de Burnside (ou Lemme de Cauchy-Frobenius)

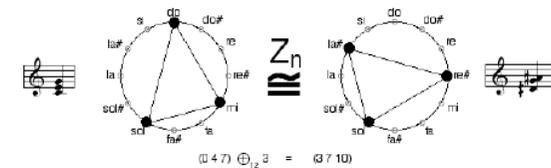
Les-Mathematiques.net

Définition Soit $x \in X$ et soit θ une action de G sur X .

- On appelle **stabilisateur de x** et on note $\text{stab}(x)$ le sous ensemble de G donné par $\text{stab}(x) = \{g \in G / g.x = x\}$.
- On appelle **orbite de x** et on note $w(x)$ le sous ensemble de X donné par $\{g.x / g \in G\}$.



Définition Si g est élément de G et que θ est une action de G sur X , on appelle **fixateur de g** et on note $\text{fix}(g)$ ou X^g le sous ensemble de X donné par $\text{fix}(g) = \{x \in X / g.x = x\}$.



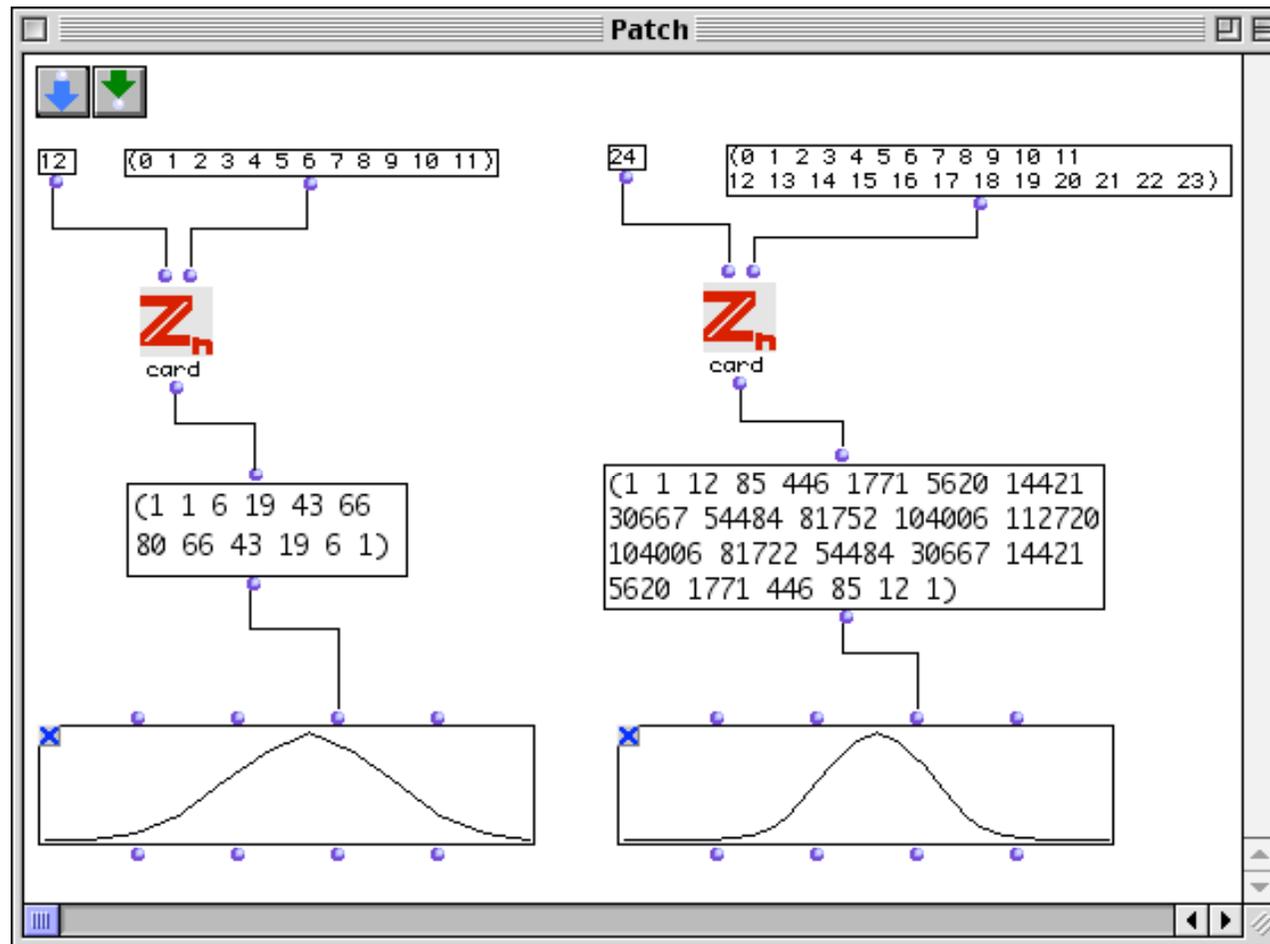
Théorème Formule de la moyenne On suppose G de cardinal fini et agissant sur un ensemble X . Alors si n désigne le nombre d'orbites distinctes de l'action, si \mathcal{A} désigne le sous ensemble de X composé d'un représentant pour chacune de ces orbites, on a:

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

Le nombre d'orbites sous l'action d'un groupe fini G sur un ensemble X est la moyenne des fixateurs des éléments du groupe.

Action de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur lui-même et Théorème de Polya

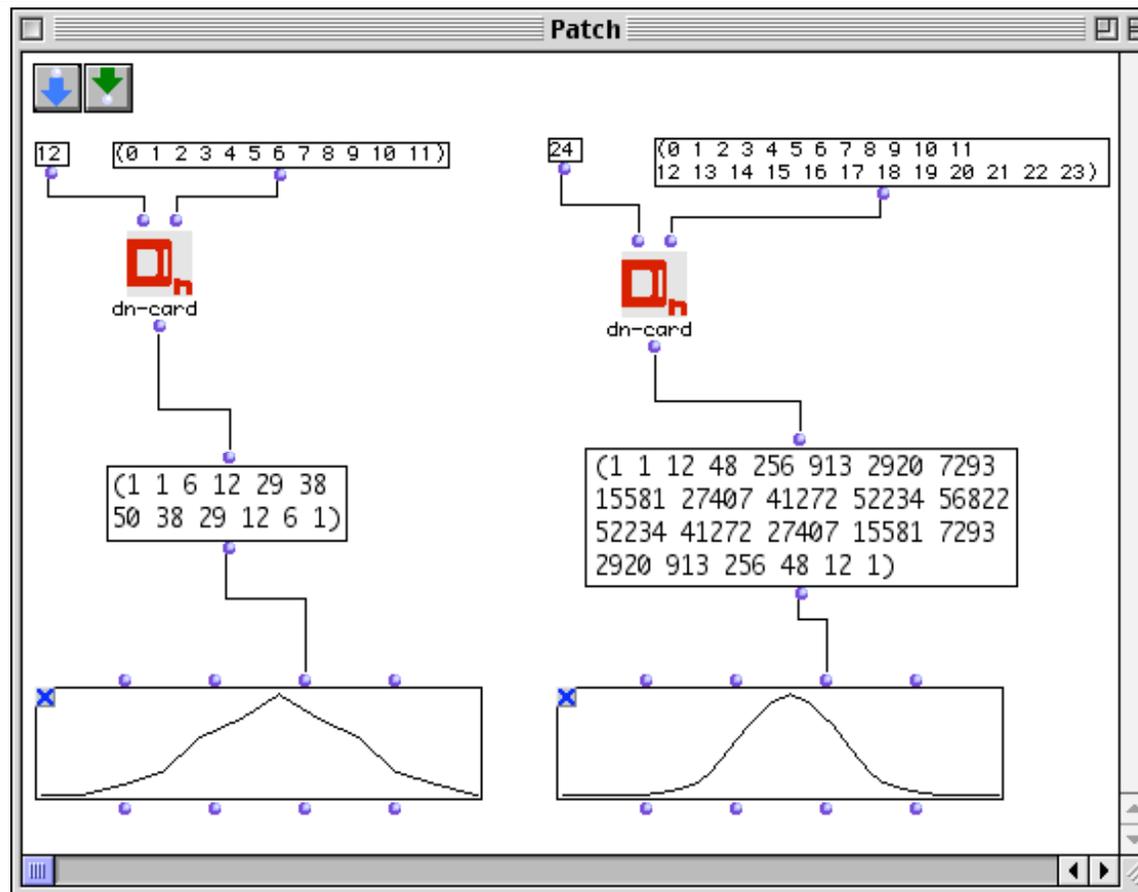
Enumération des classes de transposition dans un espace tempéré $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$



D.Reiner: «Enumeration in Music Theory», *Amer. Math. Month.* 92:51-54, 1985
H. Friepertinger: «Enumeration in Musical Theory», *Beiträge zur Elektr. Musik*, 1, 1992
R.C. Read: «Combinatorial problems in the theory of music», *Discrete Math.*, 1997

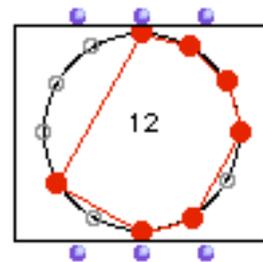
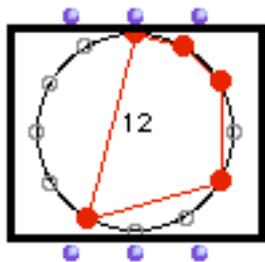
Action de D_n sur Z/nZ

Enumération des 'Pitch-class sets' (Forte) dans un espace tempéré Z/nZ



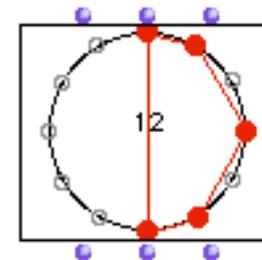
$G \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C_{12}	1	6	19	43	66	80	66	43	19	6	1	1
D_{12}	1	6	12	29	38	50	38	29	12	6	1	1
$\text{Aff}_1(Z_{12})$	1	5	9	21	25	34	25	21	9	5	1	1

Le catalogue des *pcs* d'Allen Forte



5-Z36 0,1,2,4,7 222121

7-Z36 0,1,2,3,5,6,8 444342



5-Z12

La construction des canons rythmiques

The image displays two musical scores. The top score, for *Harawi* (1945), consists of three staves (treble, alto, and bass clefs) with a tempo marking of quarter note = 40. The bottom score, for *Visions de l'Amen* (1943), consists of three staves in 2/4 time, showing a rhythmic canon structure with overlapping phrases.

Harawi (1945)



A rhythmic diagram consisting of three staves. The top staff has blue dots on the lines, the middle staff has blue dots on the spaces, and the bottom staff has black dots on the lines. This represents a specific rhythmic pattern or canon.

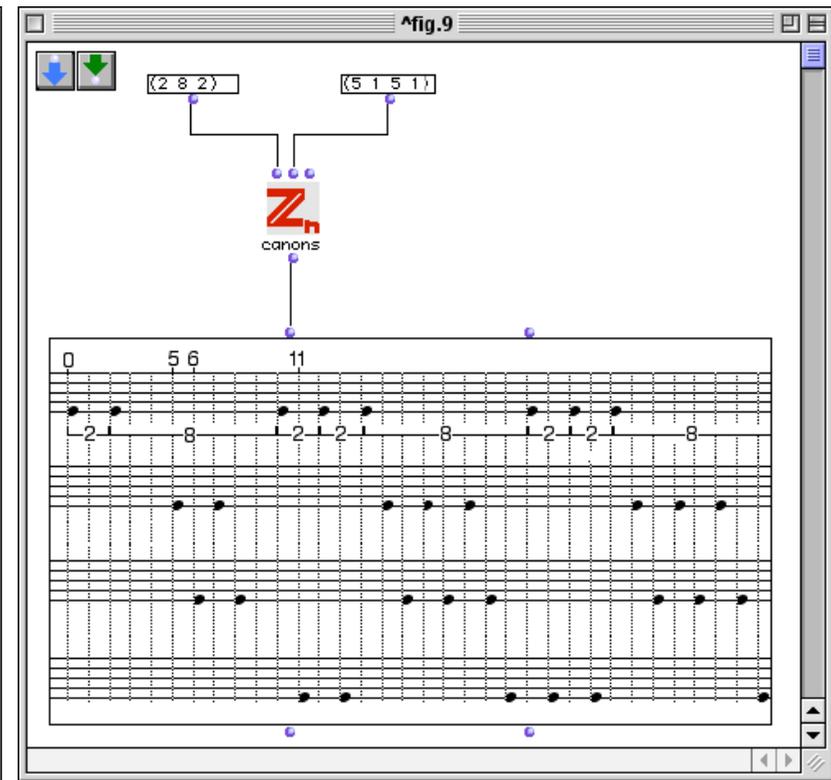
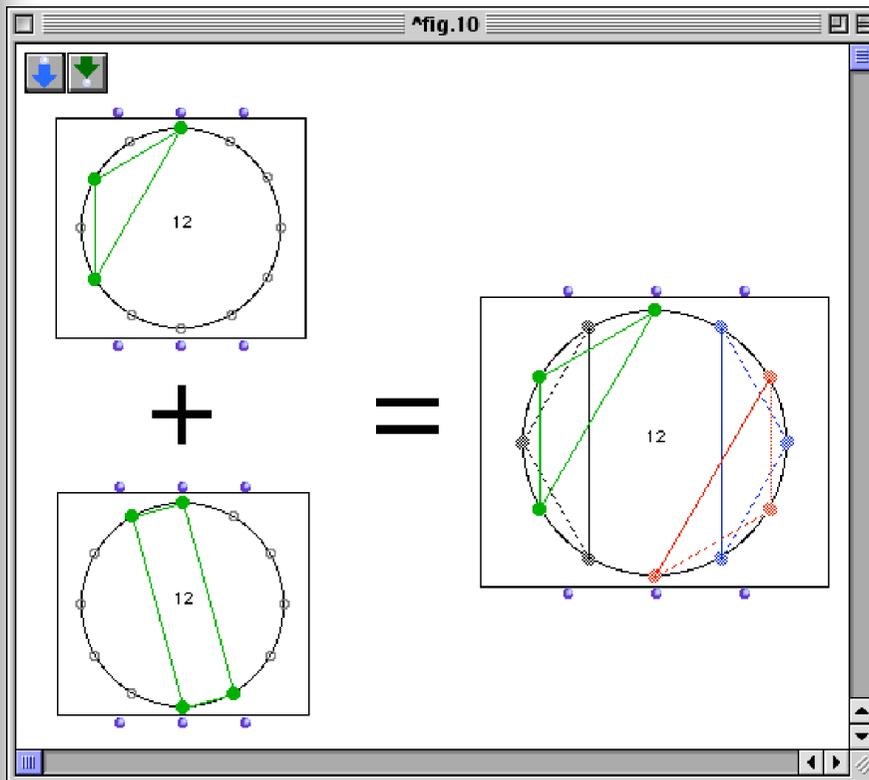


*Visions de
l'Amen* (1943)

« ...il résulte de tout cela que les différentes sonorités se mélangent ou s'opposent de manières très diverses, **jamais au même moment ni au même endroit [...]. C'est du désordre organisé** »

O. Messiaen : *Traité de Rythme, de Couleur et d'Ornithologie*,
tome 2, Alphonse Leduc, Editions Musicales, Paris, 1992.

Factorisation et canons rythmiques de pavage



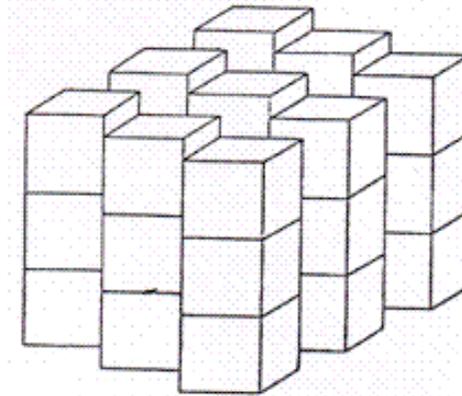
'transpositional combination'

$$\{0,8,10\} \oplus \{0,5,6,11\} = \mathbf{Z}_{12} = (2\ 8\ 2) \bullet (5\ 1\ 5\ 1)$$

Un des facteurs est un mode à transposition limitée

Conjectures mathématiques et pavages rythmiques

théorie ↔ composition

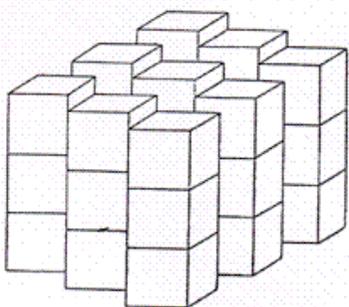


- La conjecture de Minkowski (version géométrique)
- La solution algébrique de Hajos
- Les intuitions du « rythmicien » Messiaen
- Le modèle algébrique de Vieru/Vuza (1991-)
- Le modèle informatique généralisé (en collaboration avec Carlos Agon et Thomas Noll)
- Applications compositionnelles (G. Bloch)
- L'énumération des solutions: un problème ouvert (Vuza, Andreatta, Fripertinger, Amiot, Noll, Tangian, Jedrzejewski...)

Conjecture de Minkowski (1896/1907)

*Dans un pavage simple [simple lattice tiling] d'un espace à n dimensions par des cubes unités, il y a au moins un couple de cubes qui ont en commun une face entière de dimension $n-1$. (Cf. S. Stein, S. Szabó : *Algebra and Tiling*, 1994)*

Conjecture de Minkowski et théorème de Hajos



Conjecture de Minkowski (1896/1907)

Dans un pavage simple [simple lattice tiling] d'un espace à n dimensions par des cubes unités, il y a au moins un couple de cubes qui ont en commun une face entière de dimension $n-1$.

Théorème de Hajós (1942)

Soit G un groupe abélien fini et soient a_1, a_2, \dots, a_n n éléments de G .
Si l'on suppose que le groupe admet comme factorisation la somme directe des sous-ensembles A_1, A_2, \dots, A_n suivants :

$$A_1 = \{1, a_1, \dots, a_1^{m_1-1}\}, A_2 = \{1, a_2, \dots, a_2^{m_2-1}\}, \dots, A_n = \{1, a_n, \dots, a_n^{m_n-1}\}$$

avec $m_i > 0$ pour tout $i=1, 2, \dots, n$, alors un des facteurs A_i est un groupe

Théorème de Redei (1965)

Soit G un groupe abélien fini et soient A_1, A_2, \dots, A_n n sous-ensembles de G , chacun contenant l'élément neutre du groupe et chacun ayant un nombre premier d'éléments et supposons que le groupe admette comme factorisation la somme directe des sous-ensembles $A_i, i=1, \dots, n$. Alors, un des sous-ensembles A_i est périodique

Groupes de Hajós et canons de pavage

Un groupe G est “ groupe de Hajós ” si pour toute factorisation du groupe en somme directe de ses sous-ensembles A_1, A_2, \dots, A_k , au moins un des facteurs est périodique.

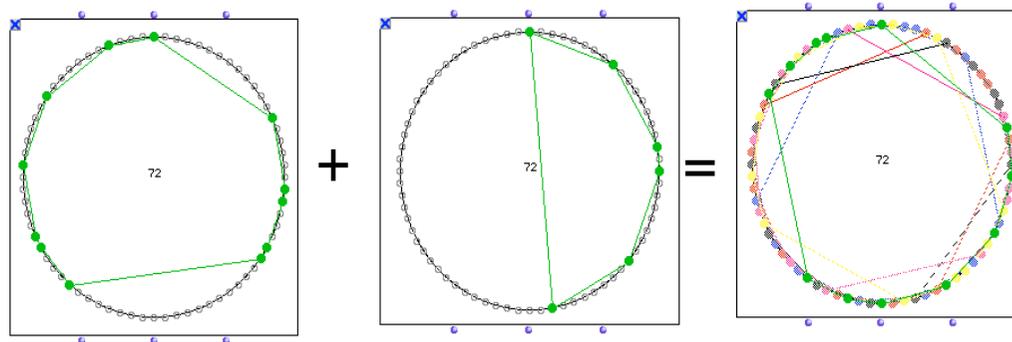
Rédei 1947	(p, p)
Hajós 1950	\mathbf{Z}
De Brujin 1953	$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ avec $n = p^\alpha$
Sands 1957	(p^α, q) (p, q, r) (p^2, q^2) (p^2, q, r) (p, q, r, s)

Groupes non-Hajos (bad groups)

72
 108 120 144 168 180
 200 216 240 252 264 270 280 288
 300 312 324 336 360 378 392 396
 400 408 432 440 450 456 468 480
 500 504 520 528 540 552 560 576 588 594
 600 612 616 624 648 672 675 680 684 696
 700 702 720 728 744 750 756 760 784 792
 800 810 816 828 864 880 882 888...

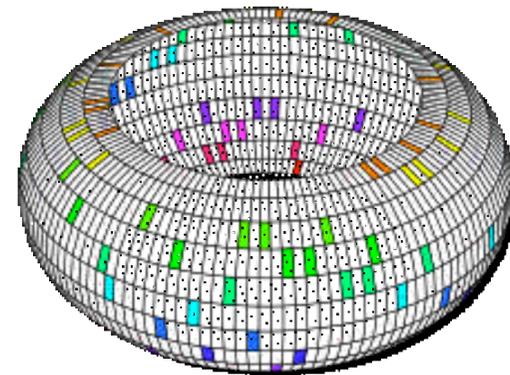
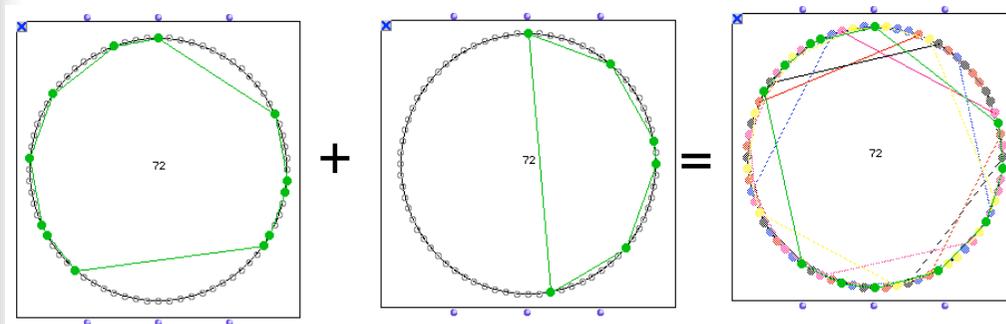
Sands 1959	$(2^2, 2^2)$ $(3^2, 3)$ $(2^n, 2)$
Sands 1962	$(p, 3, 3)$ $(p, 2^2, 2)$ $(p, 2, 2, 2, 2)$ $(p^2, 2, 2, 2)$ $(p^3, 2, 2)$ $(p, q, 2, 2)$

Sands 1964	\mathbf{Q} $\mathbf{Z} + \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ $\mathbf{Q} + \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$
------------	--



'Bad groups' et canons RCCM (Vuza, 1991)

A musical score consisting of six staves. Each staff contains a sequence of musical notes. Several phrases are enclosed in rectangular boxes, indicating specific rhythmic or melodic segments. A vertical line is drawn through the score, with a small blue triangle pointing upwards from the bottom staff at the point where the line intersects it.



Georges Bloch (2001-2004)

Stratégies compositionnelles nouvelles à partir du modèle formel

- Organisation métrique d'un canon de pavage
- Réduction d'un canon de pavage en canons auto-similaires
- Modulation métrique entre canons
- *Transformation* d'un canon rythmique en « texture »

- *Projet Beyeler* (2001)
- *Projet Hitchcock*
- *Visite des tours de la cathédrale de Reims*
- *Noël des Chasseurs*
- *Canons à marcher*
- *Canon à eau*
- *Harawun* (2004)

harawun $\text{♩} = 40$
GB

Piano 1 *mf*

Piano 2 *f* *mf*

Cymbale *pp*

mp *pp* *f*

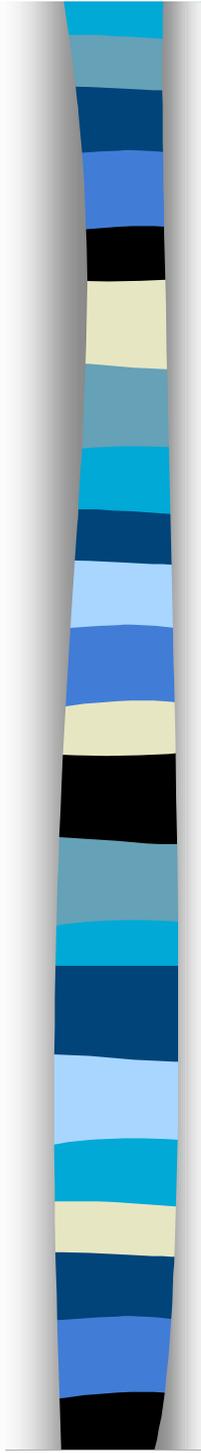
Harawun: L'entrée d'un canon RCCM modélisé sur *Harawi*

Georges Bloch (2001-2004)

Stratégies compositionnelles nouvelles à partir du modèle formel

The image displays a musical score for the 'Canon Final' by Georges Bloch. The score is arranged in five staves, each labeled with a red instrument abbreviation on the left: Bb Cl., Sax. T., Vib., Vln., and Cb. The notation is complex, featuring numerous triplets, sixteenth notes, and slurs. The Bb Cl. and Sax. T. parts are in treble clef, while the Vib., Vln., and Cb. parts are in bass clef. The Cb. part begins with a double bar line and a repeat sign. The score is written in a single system, with a double bar line at the end of the Cb. staff.

Canon Final : transformation d'un canon rythmique en « texture »



Évolutions récentes: le pavage de la ligne

- Tom Johnson (2001): pavage de la ligne avec un pattern rythmique donné
 - ex. 11001
 - Andranik Tangian (2001): Représentation polynomial
 - $J(X) = 1 + X + X^4$ (**JOHNSON's polynomial**).
 - Emmanuel Amiot (2002): A solution to Johnson-Tangian conjecture
 - **Theorem:** *Any tiling of the line by the pattern 1 1 0 0 1 and its binary augmentations (eg 1 0 1 0 0 0 0 1, 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1...) has a length that is a multiple of 15.*
 - Harald Fripertinger (2002):
 - “Enumeration of non-isomorphic canons”, *Tatra Mt. Math. Publ.*, 23, 47-57, 2001
-
- R. Tijdeman : “Decomposition of the Integers as a direct sum of two subsets” (dans *Séminaire de théorie des nombres de Paris*, CUP, 1995)
 - J. Lagarias & Y. Wang : “Tiling the line with translates of one tile”, *Inv. Math.*, 124, pp.341-365, 1996
 - E. Coven & A. Meyerowitz : “Tiling the integers with translates of one finite set”, *J. Algebra*, 212, pp.161-174, 1999

Canons de pavage et pôlynomes

$$A \oplus B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow A(x) = \sum_{k \in A} x^k$$

$$A(x) \times B(x) = (A \oplus B)(x) \equiv 1 + x + \dots + x^{n-1} \pmod{x^n - 1}$$

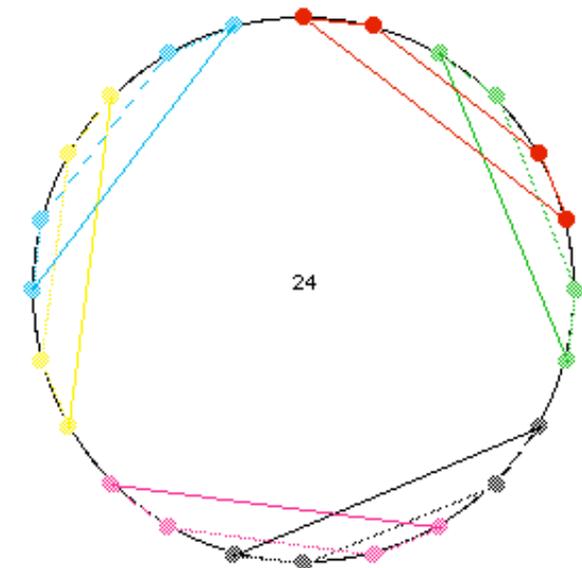
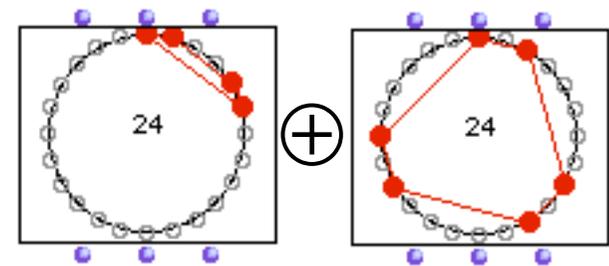
^Patch

$P(x) = 1 + x + x^4 + x^5$ $Q(x) = 1 + x^2 + x^8 + x^{10} + x^{16} + x^{18}$

{0 1 4 5} {0 2 8 10 16 18}

\mathbb{Z}_n
canons

$T(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{23}$



Racines de l'unité et pôlynomes cyclotomiques

Racines n -ièmes de l'unité : $z^n = 1$

$$n=3 \longrightarrow \left\{ 1, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right\}$$

$$n=4 \longrightarrow \{1, +i, -1, -i\}$$

Les racines n -ièmes de l'unité peuvent s'écrire sous la forme :

$$e^{\frac{2k\pi i}{n}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \quad (k, n \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq k < n)$$

Elles sont exactement les racines du pôlynome : $P(X) = X^n - 1$

Les racines n -ièmes primitives de l'unité : $e^{\frac{2ki\pi}{n}} \quad (n,k)=1$

Elles sont exactement les racines du pôlynome cyclotomique :

$$\Phi_n(X) = \prod_{k=1}^{\varphi(n)} (X - z_k) \longleftrightarrow X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X).$$

Pavage de la ligne et pôlynomes cyclotomiques

$$\Phi_n(X) = \prod_{k=1}^{\varphi(n)} (X - z_k) \longleftrightarrow X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X).$$

$$\Phi_1(X) = -1 + X \longleftrightarrow (-1, 1)$$

$$\Phi_2(X) = 1 + X \longleftrightarrow (1, 1)$$

$$\Phi_3(X) = 1 + X + X^2 \longleftrightarrow (1, 1, 1)$$

$$\Phi_4(X) = 1 + X^2 \longleftrightarrow (1, 0, 1)$$

$$\Phi_5(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 \longleftrightarrow (1, 1, 1, 1, 1)$$

$$\Phi_6(X) = 1 - X + X^2 \longleftrightarrow (1, -1, 1)$$

$$\Delta_n = 1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1} = \prod_{\substack{d|n \\ d \neq 1}} \Phi_d(X)$$

$$\Delta_4 = 1 + X + X^2 + X^3 = \Phi_2(X) \times \Phi_4(X)$$

$$A(x) \times B(x) = (A \oplus B)(x) \equiv 1 + x + \dots + x^{n-1} \pmod{X^n - 1}$$

Bonnes et mauvaises factorisations

$$\Delta_n = 1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1} = \prod_{\substack{d|n \\ d \neq 1}} \Phi_d(X)$$

$\Phi_2(X) = 1 + X$	←-----→	(1, 1)
$\Phi_3(X) = 1 + X + X^2$	←-----→	(1, 1, 1)
$\Phi_4(X) = 1 + X^2$	←-----→	(1, 0, 1)
$\Phi_6(X) = 1 - X + X^2$	←-----→	(1, -1, 1)

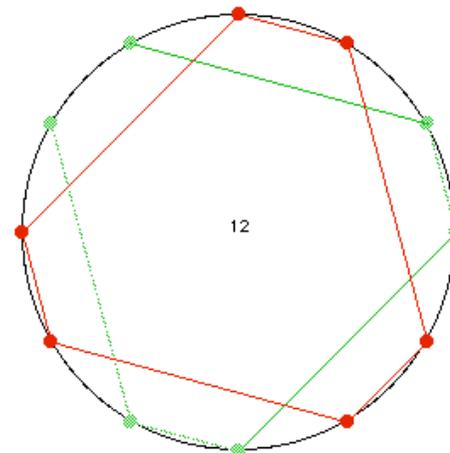
$$\Delta_{12} = 1 + X + \dots + X^{11} = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_4 \times \Phi_6 \times \Phi_{12}$$

$$A(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_6 \times \Phi_{12} = 1 + X + X^4 + X^5 + X^8 + X^9$$

$$B(X) = \Phi_4 = 1 + X^2$$

$$S = \{0, 2\}$$

$$R = \{0, 1, 4, 5, 8, 9\}$$



$$A^*(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_{12}$$

$$B^*(X) = \Phi_4 \times \Phi_6$$

Cette décomposition ne marche pas

Les conditions de Coven-Meyerowitz

- E. Coven & A. Meyerowitz : “Tiling the integers with translates of one finite set”, *J. Algebra*, 212, pp.161-174, 1999

There is no loss of generality in restricting attention to translates of a finite set A of *nonnegative* integers. Then $A(x) = \sum_{a \in A} x^a$ is a polynomial such that $\#A = A(1)$. Let S_A be the set of prime powers s such that the s -th cyclotomic polynomial $\Phi_s(x)$ divides $A(x)$. Consider the following conditions on $A(x)$.

(T1) $A(1) = \prod_{s \in S_A} \Phi_s(1)$.

(T2) If $s_1, \dots, s_m \in S_A$ are powers of distinct primes, then $\Phi_{s_1 \dots s_m}(x)$ divides $A(x)$.

Theorem A. *If $A(x)$ satisfies (T1) and (T2), then A tiles the integers.*

Theorem B1. *If A tiles the integers, then $A(x)$ satisfies (T1).*

Theorem B2. *If A tiles the integers and $\#A$ has at most two prime factors, then $A(x)$ satisfies (T2).*

Corollary. *If $\#A$ has at most two prime factors, then A tiles the integers if and only if $A(x)$ satisfies (T1) and (T2).*

Les conditions de Coven-Meyerowitz

$$(T1) A(1) = \prod_{s \in S_A} \Phi_s(1).$$

(T2) If $s_1, \dots, s_m \in S_A$ are powers of distinct primes, then $\Phi_{s_1 \dots s_m}(x)$ divides $A(x)$.

Theorem A. *If $A(x)$ satisfies (T1) and (T2), then A tiles the integers.*

$$A(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_6 \times \Phi_{12} = 1 + X + X^4 + X^5 + X^8 + X^9$$

$$\Phi_2(X) = 1 + X$$

$$\Phi_3(X) = 1 + X + X^2$$

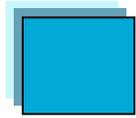
$$(T1) A(1) = 6 = \Phi_2(1) \times \Phi_3(1) = 2 \times 3$$

$$(T2) \Phi_2 \mid A(X) \text{ et } \Phi_3 \mid A(X) \Rightarrow \Phi_{2 \times 3} \mid A(X)$$

Theorem B1. *If A tiles the integers, then $A(x)$ satisfies (T1).*

$$A^*(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_{12} = 1 + 2X + 2X^2 - X^3 - X^4 + X^5 + 2X^6 + X^7$$

$$A^*(1) = 7 \neq \Phi_2(1) \times \Phi_3(1) = 6$$



Méthodes algébriques en Musique
et Musicologie du XX^e siècle :
aspects
théoriques, analytiques et
compositionnels

www.ircam.fr/equipes/repmus/moreno

www.ircam.fr/equipes/repmus/mamux