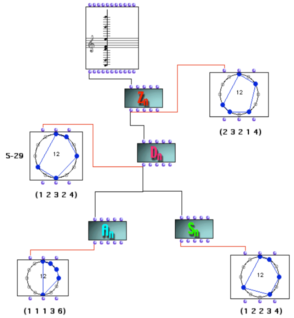
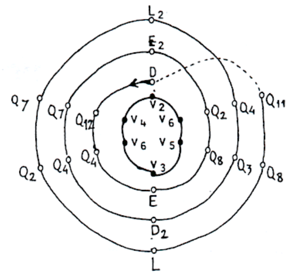
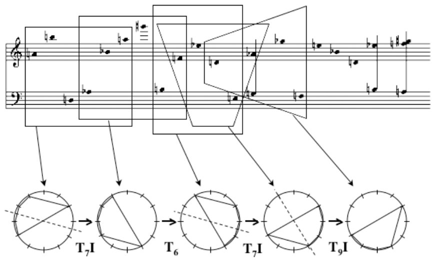


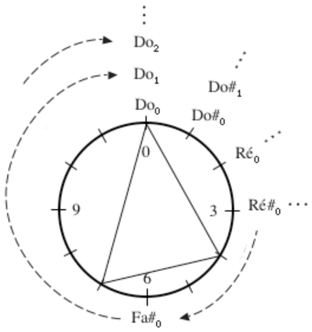
CONSERVATORIO DI MUSICA
“Antonio Buzzolla” di ADRIA



Diploma accademico di II livello in discipline musicali ad indirizzo tecnologico

Formalizzazione algebrica delle strutture musicali





(4,3,5)

Moreno Andreatta

Equipe Représentations Musicales

IRCAM/CNRS

Moreno.Andreatta@ircam.fr

Struttura del corso

Aspetti storici, teorici, analitici e compositivi della formalizzazione algebrica delle strutture musicali

Ars combinatoria (Babbitt, Vieru, Benjamin, Carter)

Set Theory ‘classica’ (Forte) e ‘trasformazionale’ (Lewin)

Serialismo integrale (Babbitt, Boulez, Vieru)

Teoria dei ‘setacci’ e *musique symbolique* (Xenakis)

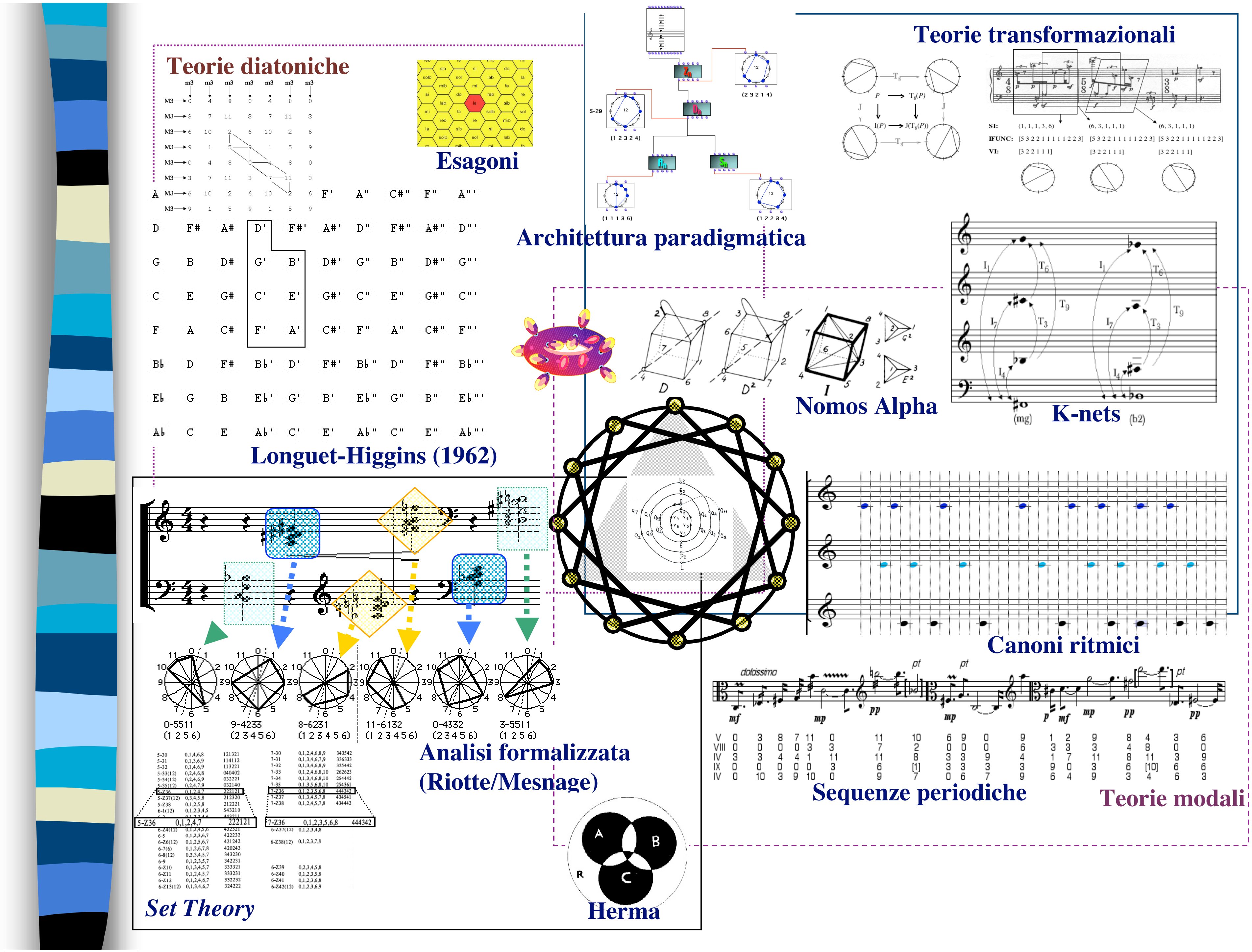
Analisi paradigmatica su computer (*OpenMusic*)

Canoni ritmici e imparità ritmica (Messiaen, Bloch, Arom)

Sequenze periodiche e differenze finite (Vieru, …)

Implementazione del processo compositivo in *OpenMusic*: *Herma* e *Nomos Alpha* (Xenakis)

Ramificazioni filosofiche della formalizzazione algebrica



Teorie diatoniche
Esagoni
Architettura paradigmatica
Teorie transformazionali
Longuet-Higgins (1962)
Nomos Alpha
K-nets
Canoni ritmici
Analisi formalizzata
(Riotte/Mesnage)
Sequenze periodiche
Teorie modali
Set Theory
Herma

Matematica/Musica…una storia recente

• 1999 : 4e Forum Diderot (Paris, Vienne, Lisbonne),
Mathematics and Music (Assayag et al., 2001)

• 2000 - 2003 : MaMuTh Seminar (Mexique, Zürich, Berlin).
Perspectives in Mathematical and Computational Music Theory (Mazzola, Noll, Luis-Puebla, epOs, 2004)
`http://www.epos.uos.de/music/`

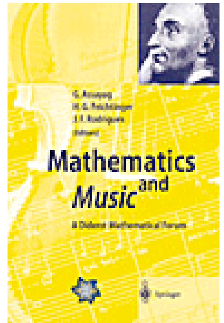
• 2000 - 2001 : Séminaire *MaMuPhi* (Ircam). *Penser la musique avec les mathématiques ?* (Assayag, Mazzola, Nicolas, Collection Musique-Science, 2005)
`http://www.entretemps.asso.fr/Seminaire/mamuphi.html`

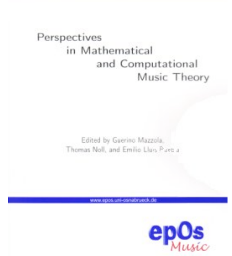
• 2001 - 2005 : Séminaire *MaMuX* de l'IRCAM
`http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/`

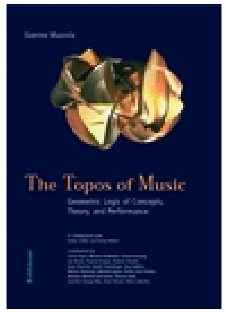
• 2003 : *The Topos of Music* (G. Mazzola et al.), Birkhäuser.

• 2005 : Séminaire « *Musique et Mathématiques* », ENS-IRCAM-CNRS
`http://www.entretemps.asso.fr/maths/`

European Mathematical Society







Méthodes algébriques en Musique et Musicologie du XX^{e} siècle : aspects théoriques, analytiques et compositionnels

www.ircam.fr/equipes/repmus/moreno

Doppia perspettiva

Musica

Matematica (algebra)

XX° secolo

Musicologia

Teoria

Analisi

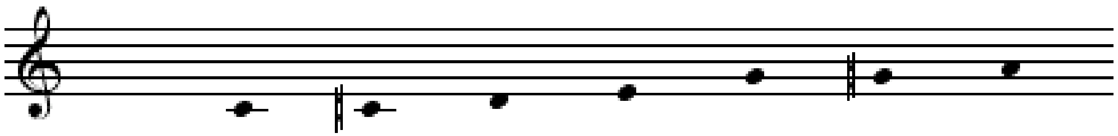
Composizione

tripartizione

Ars combinatoria e sistematica modale

A proposito di un problema sollevato da G. Benjamin

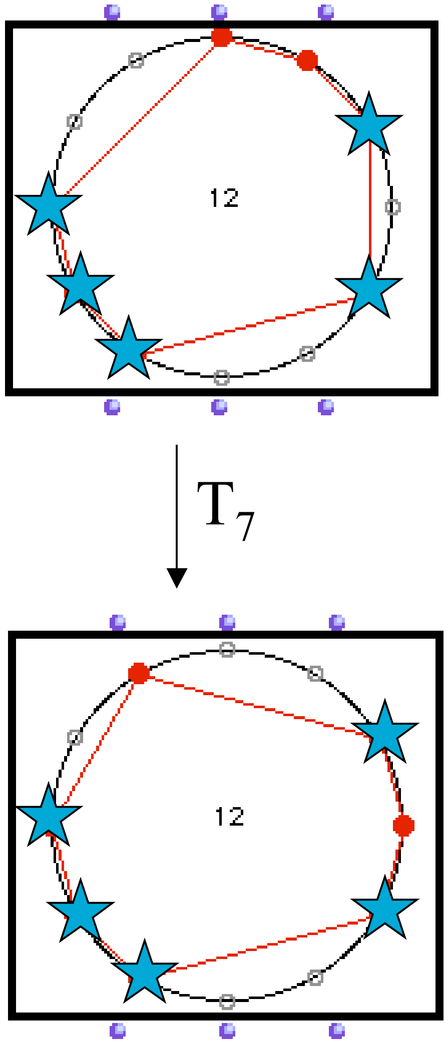
La scala musicale seguente:



è unica?

Trovare le scale eptatoniche (7 note) che conservano:

1) 4 note (dopo un'inversione degli intervalli)
2) 5 notes (dopo una trasposizione di una quinta)
3) 5 notes (dopo una trasposizione di una quarta dell'inversione)



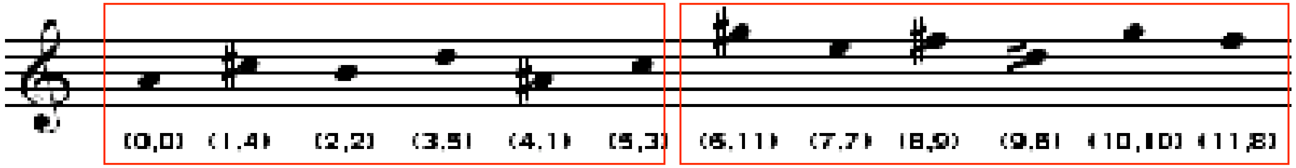
=> *OpenMusic*

‘Combinatorialità’ esacordale (Schoenberg, Hauer, Krenek, Babbitt)

Combinatorialità inversa

$I: x \to 12 - x$

$T_k: x \to k + x$



$T_{11}I: x \to 11 - x$

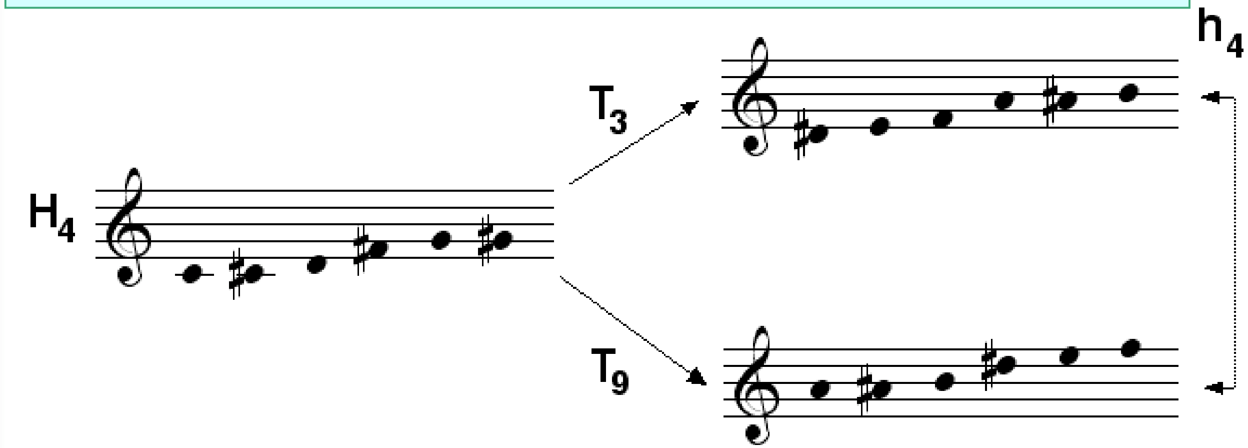
$T_{11}I: \{0,4,2,5,1,3\} \to \{11,7,9,5,10,8\}$

Total-Combinatorialità (All-combinatoriality)

Quanti tipi di combinatorialità vi sono?

Combinatorialità esacordale (Schoenberg, Hauer, Krenek,…)

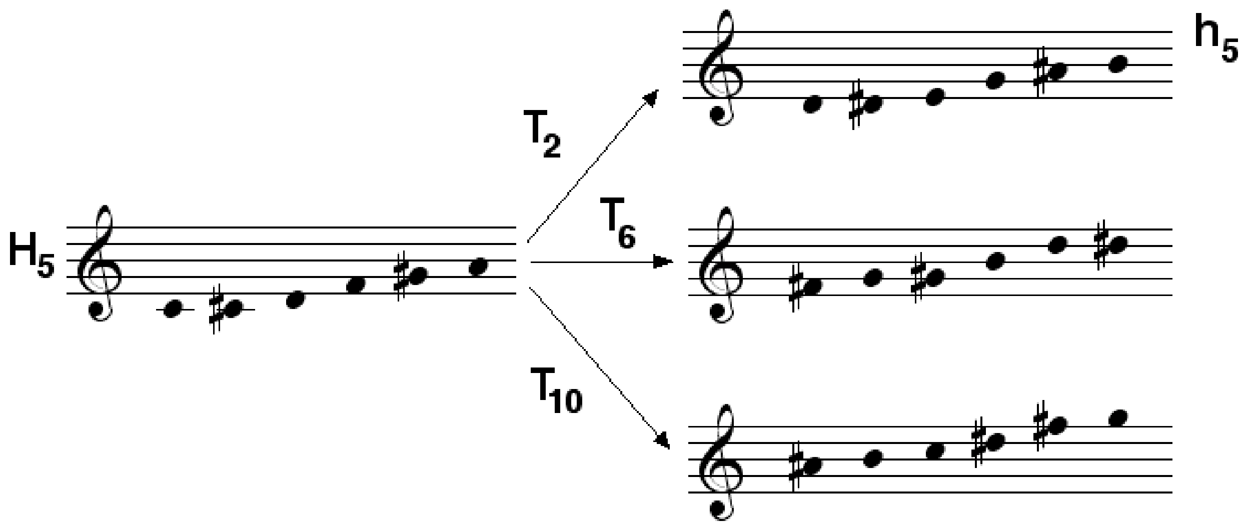
- Omnicombinatorialità del secondo ordine



T_3: $x \rightarrow 3+x$

T_9: $x \rightarrow 9+x$

- Omnicombinatorialità del terzo ordine



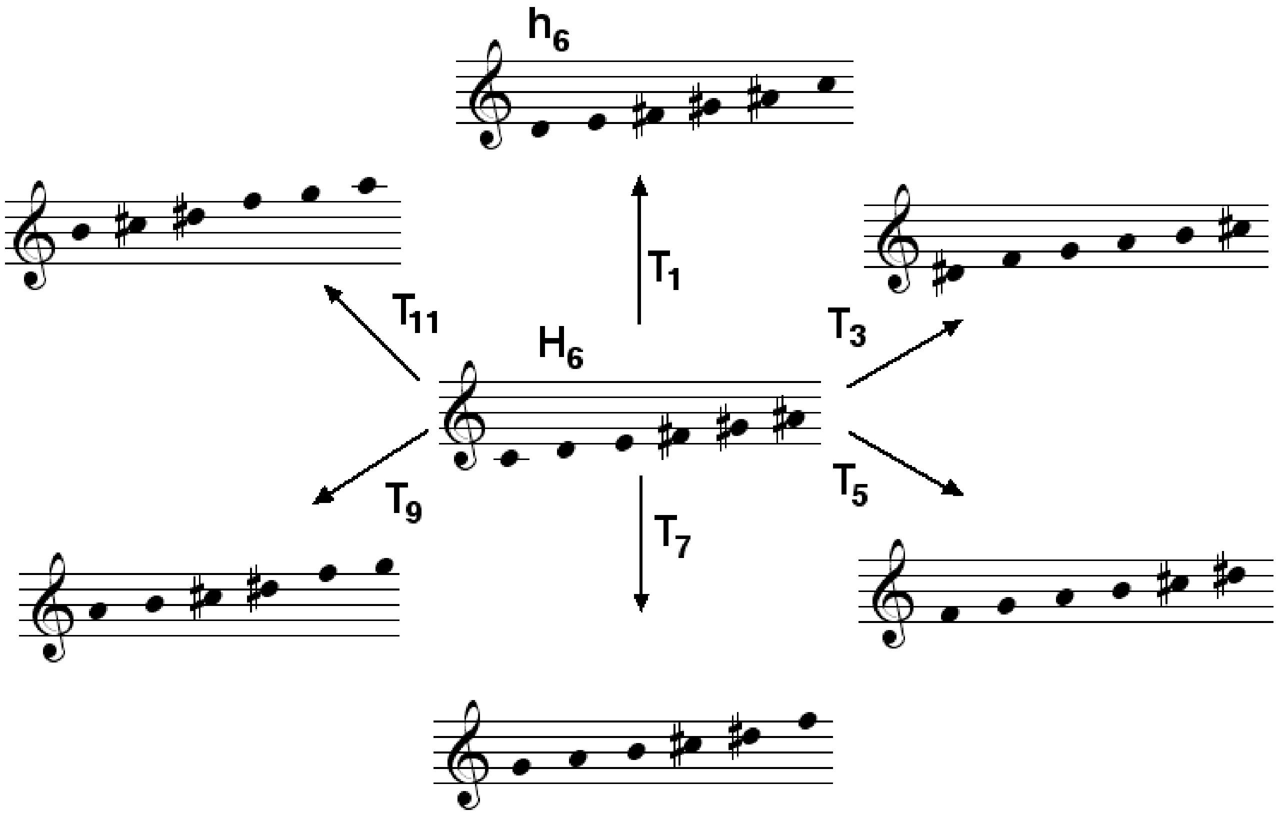
T_2: $x \rightarrow 2+x$

T_6: $x \rightarrow 6+x$

T_{10}: $x \rightarrow 10+x$

Combinatorialità esacordale (Schoenberg, Hauer, Krenek,…)

- Omnicombinatorialità del quarto ordine



$T_1: x \rightarrow 1+x$

$T_3: x \rightarrow 3+x$

$T_5: x \rightarrow 5+x$

$T_7: x \rightarrow 7+x$

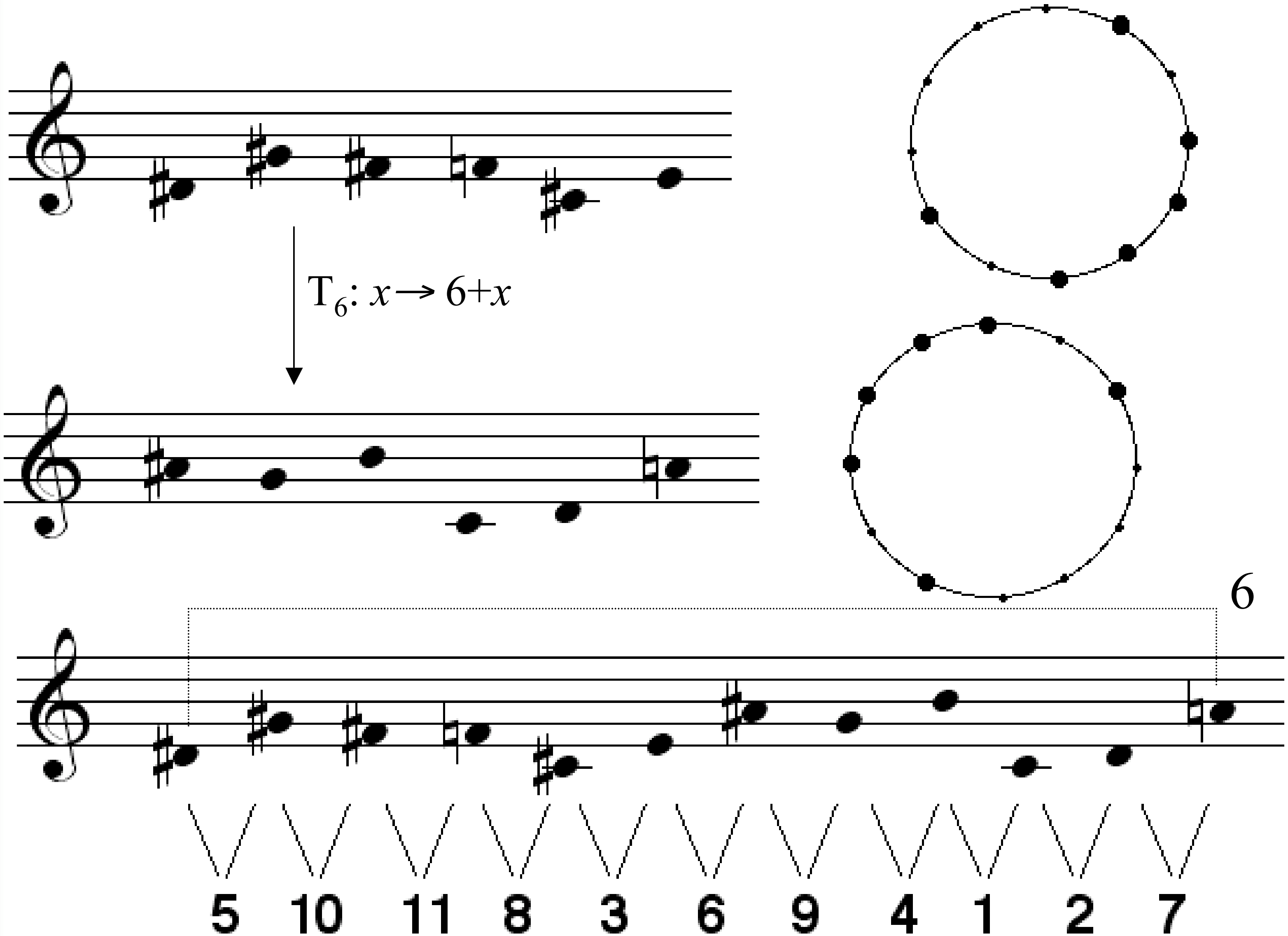
$T_9: x \rightarrow 9+x$

$T_{11}: x \rightarrow 11+x$

=> *OpenMusic*

Combinatorialità esacordale e serie « omni-intervallari »

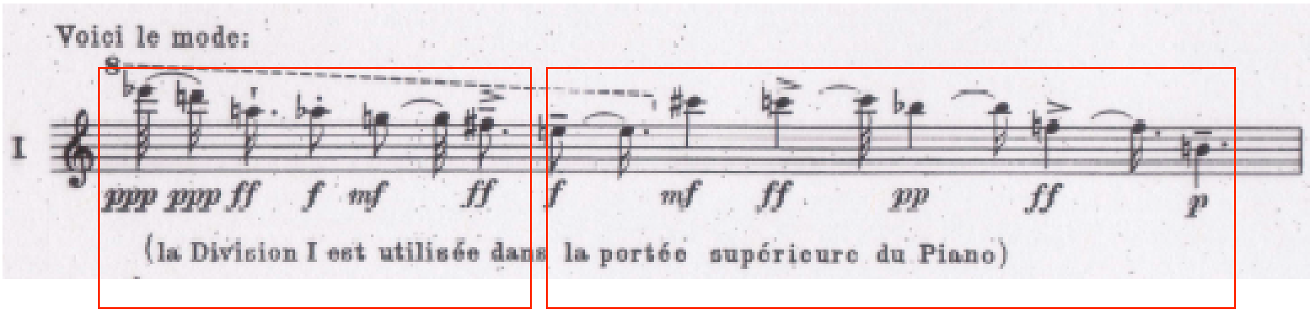
- *Partitions* (1957) → • *Post-Partitions* (1957)

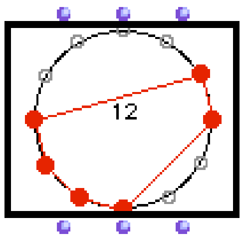


Combinatorialità esacordale e serialismo integrale

La filiazione Babbitt/Messiaen

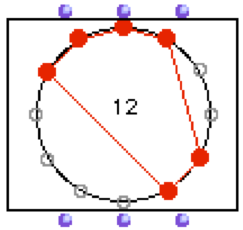
- Mode de valeurs et d'intensités (1950)





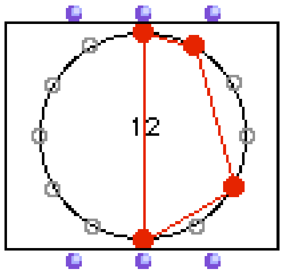
$\{3,2,9,8,7,6\} \longrightarrow \{4,5,10,11,0,1\}$

$T_7I : x \rightarrow 7\text{-}x$

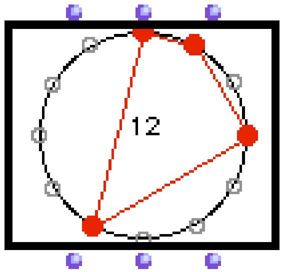


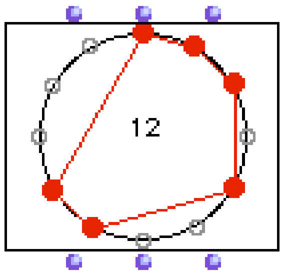
Elliott Carter's *Harmony Book* (2002)

	pcset	vecteur	Forte
18	(0 1 4 6)	[111111]	4-Z15
23	(0 1 3 7)	[111111]	4-Z29
35	(0 1 2 4 7 8)	[322332]	6-Z17

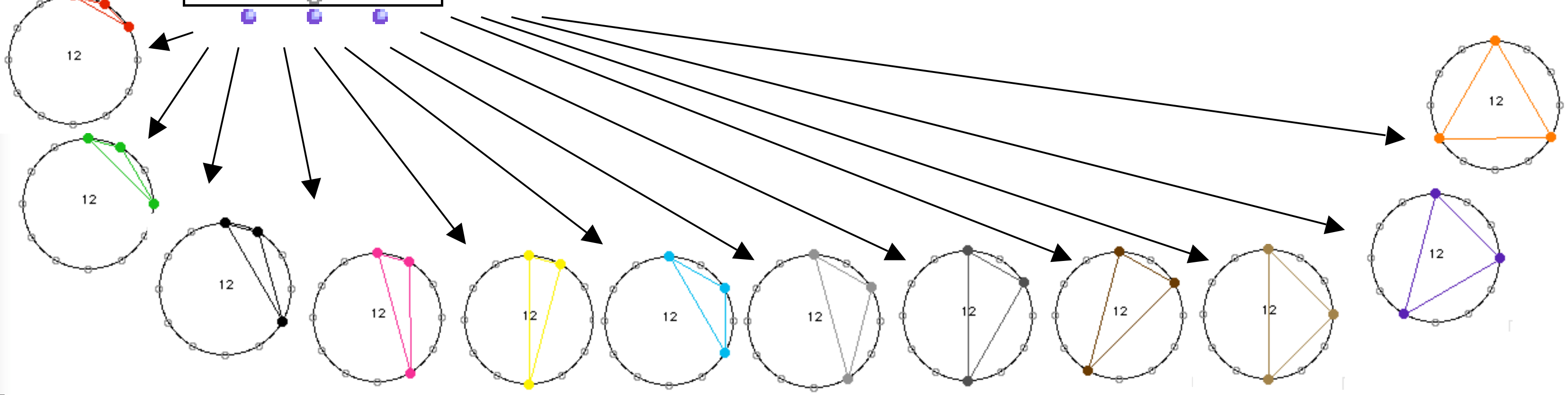


Cf. Night Fantasies (1980)

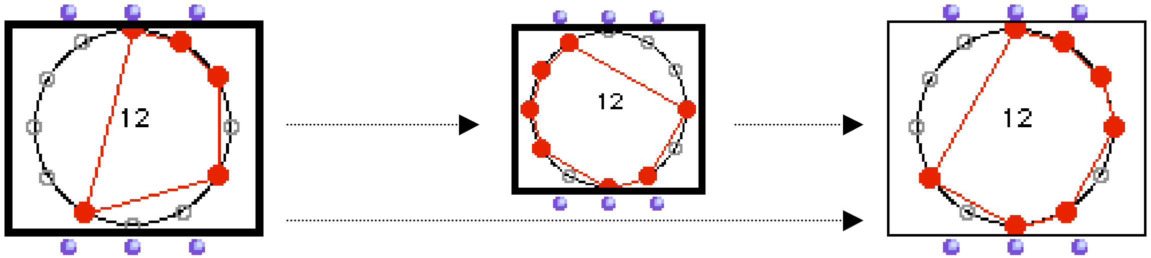




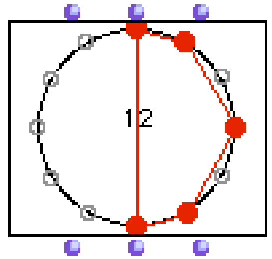
All-triad hexachord



Il catalogo dei *pcs* d'Allen Forte (1973)



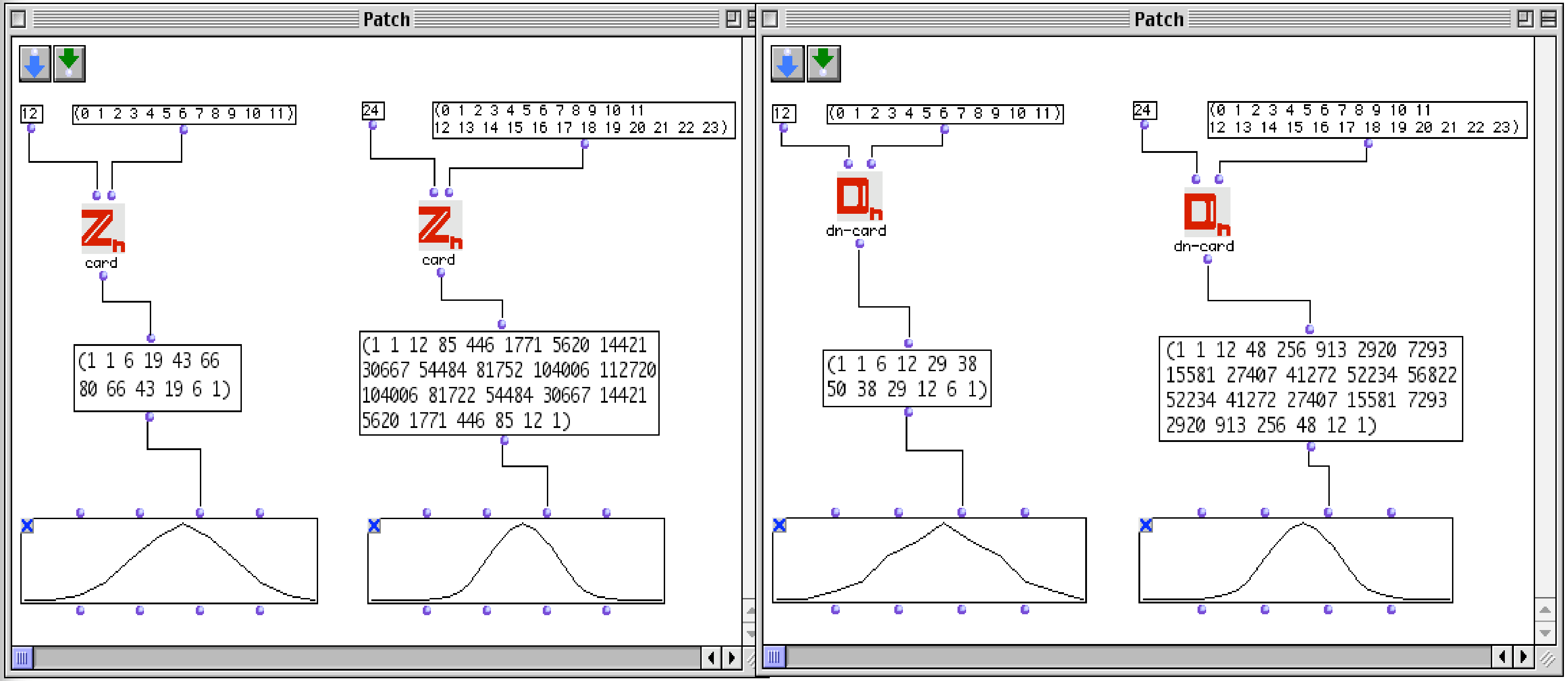
5-Z36	0,1,2,4,7	222121
7-Z36	0,1,2,3,5,6,8	444342



5-Z12

Aspetti computazionali

Enumerazione delle orbite in un sistema temperato ***Z/nZ*** *a n-gradi*

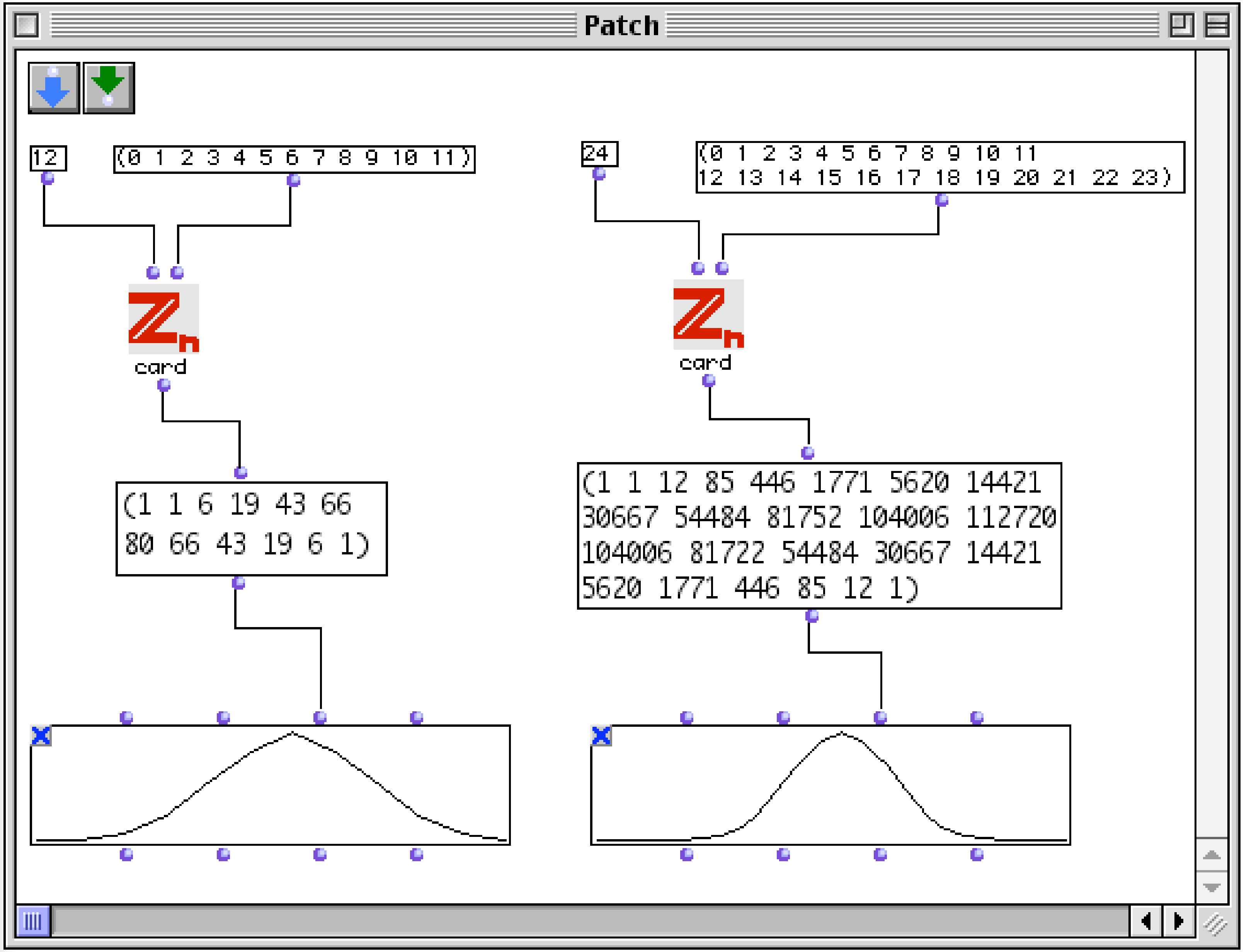


Enumerazione delle classi di trasposizione

Enumerazione dei 'Pitch-class sets' (Forte) *in uno spazio temperato* ***Z/nZ***

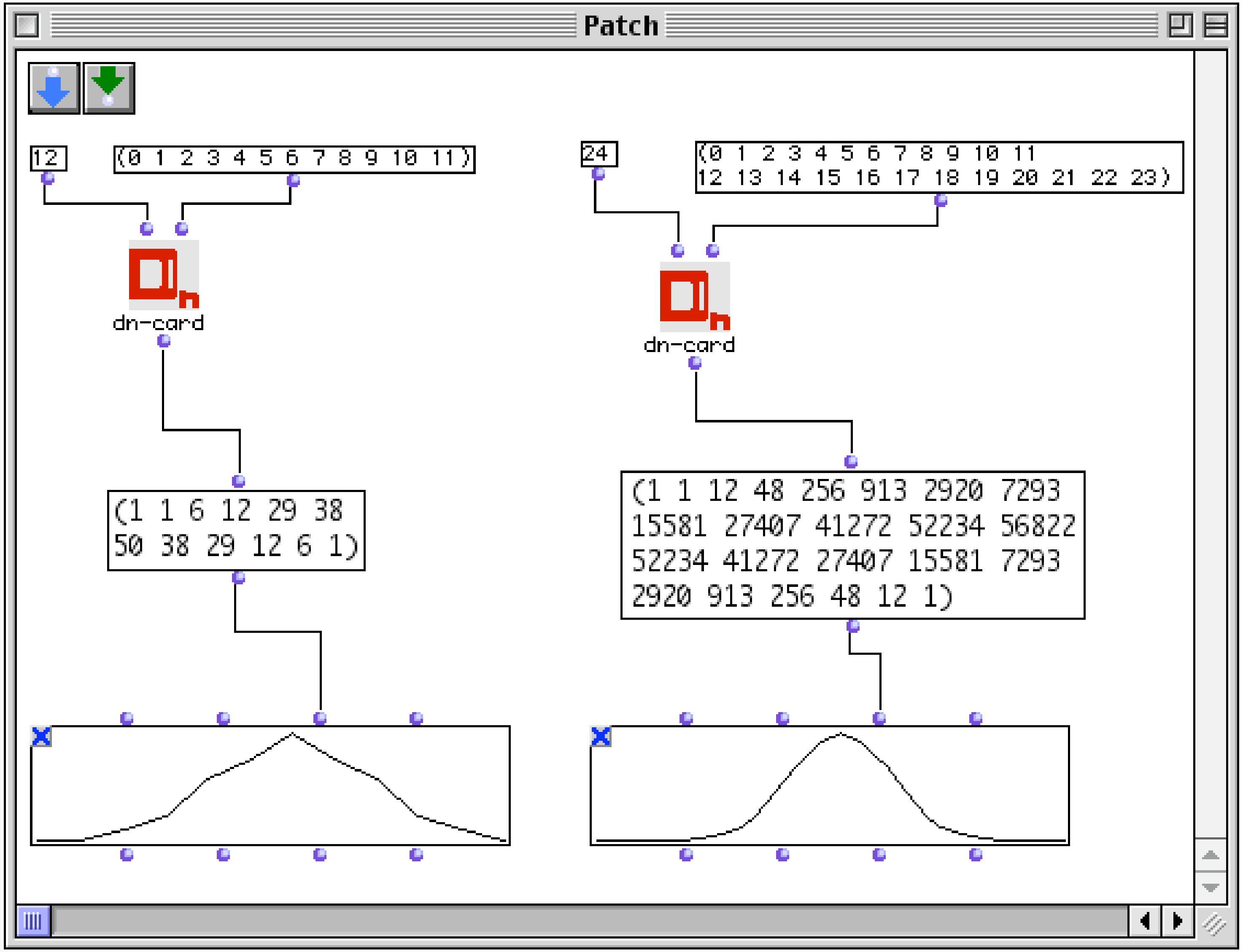
Aspectti computazionali

Enumerazione delle classi di trasposizione d'accordi



Aspectti computazionali

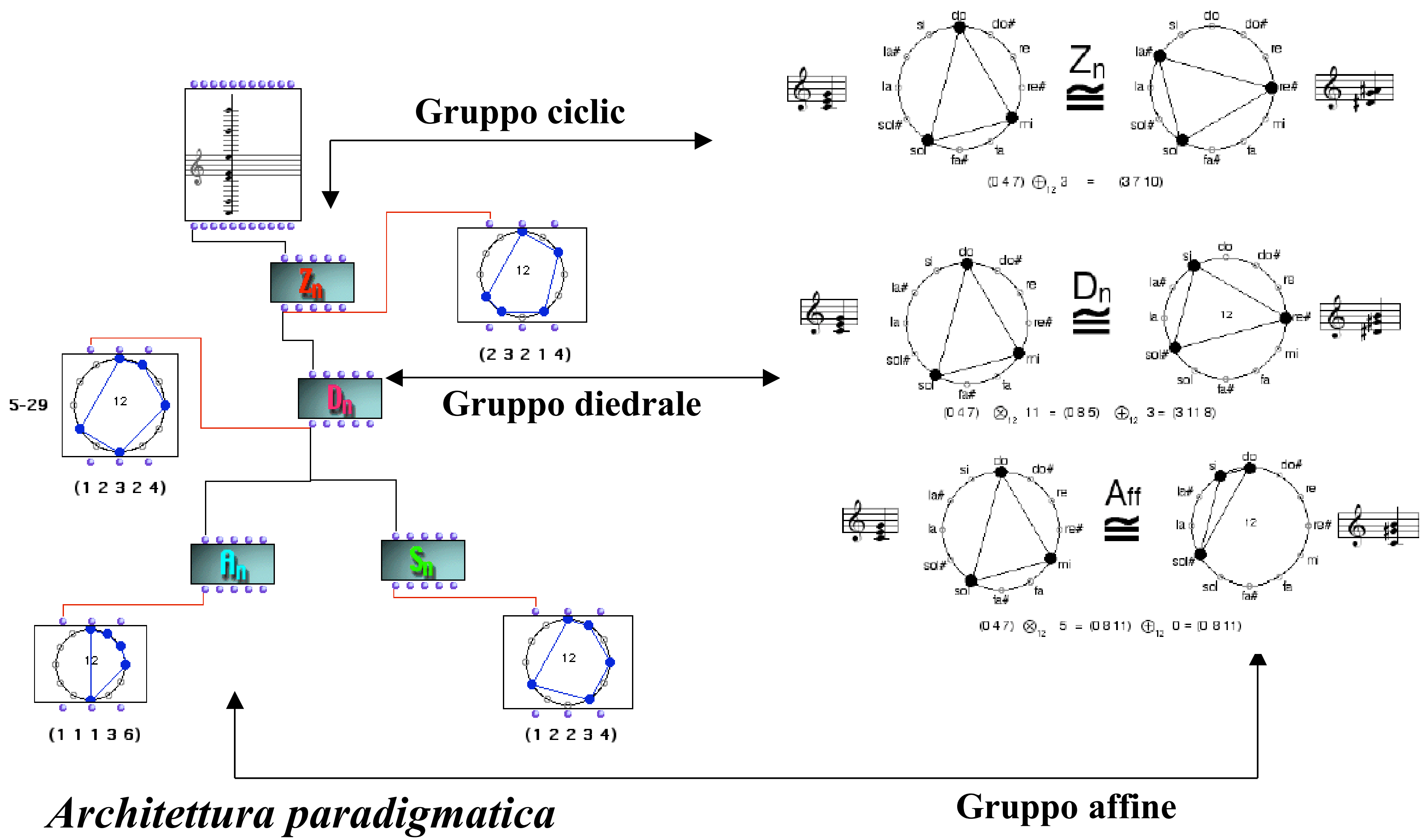
Enumerazione delle classi di trasposizione e inversione d'accordi (pcsets)



=> OpenMusic

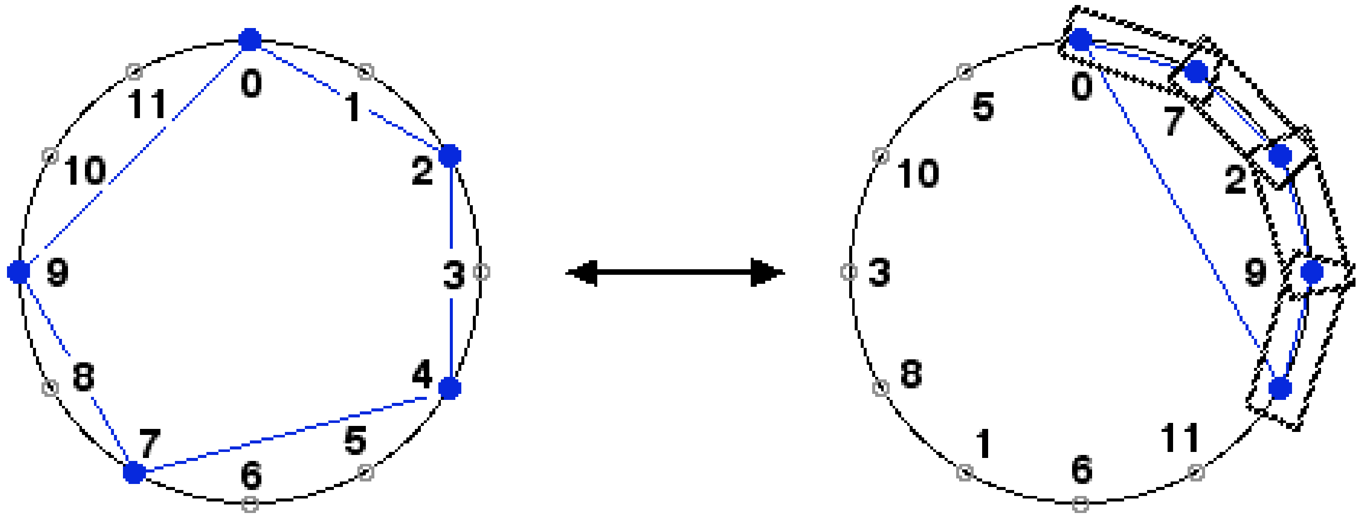
Classi d'equivalenza d'accordi

Trasposizione	$T_3\{0, 4, 7\} = 3+\{0, 4, 7\} = \{3, 7, 10\}$
Trasposizione e/o inversione	$T_3I\{0, 4, 7\} = 3+\{0, -4, -7\} = \{3, 11, 8\}$
Moltiplicazioni	$M_5\{0, 4, 7\} = 5\times\{0, 4, 7\} = \{0, 8, 11\}$



Le applicazioni affini

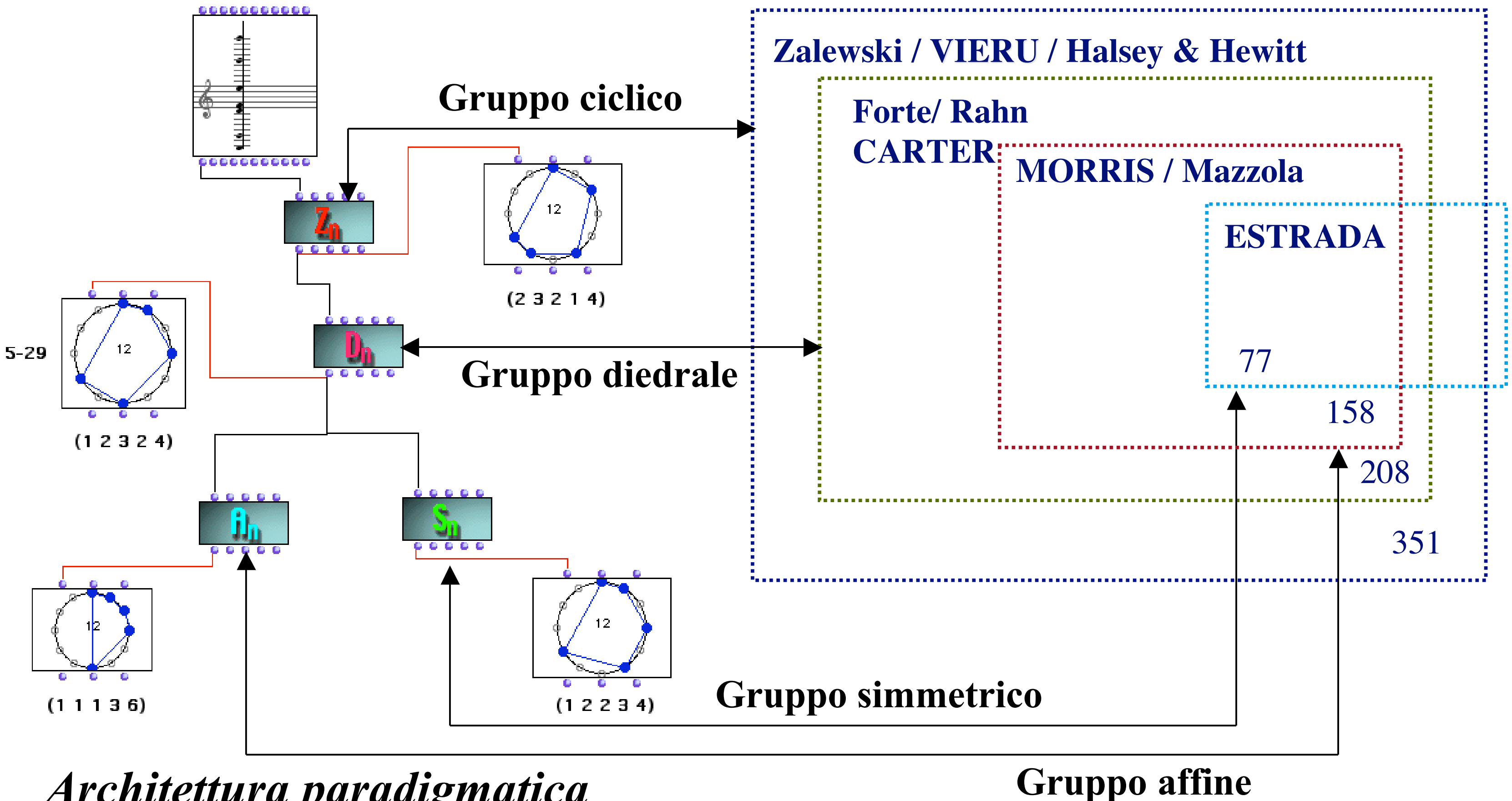
Grado di diatonismo e cromatismo di una scala (A. Vieru)



La multiplicazione M7 (risp. M5) trasforma il cerchio cromatico nel cerchio delle quinte (risp. quarte)

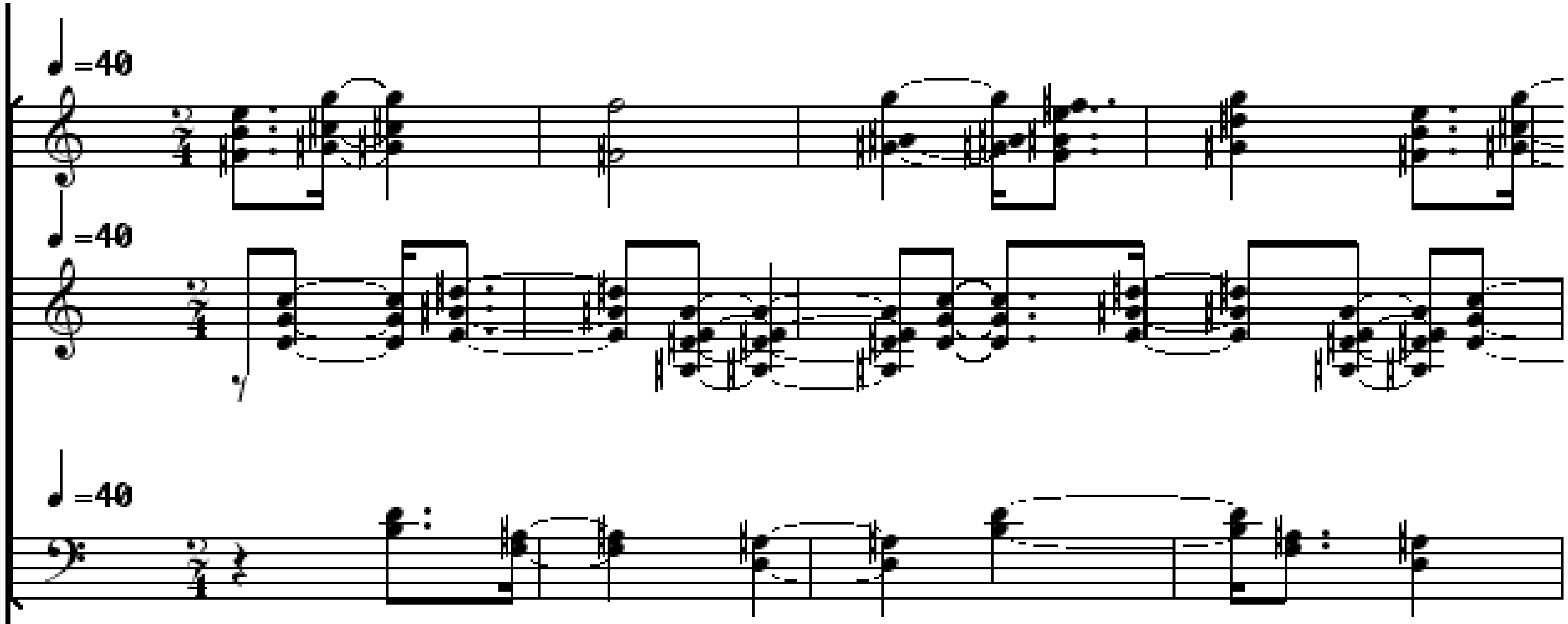
Classificazione 'paradigmatica' delle strutture musicali

$G \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C_{12}	1	6	19	43	66	80	66	43	19	6	1	1
D_{12}	1	6	12	29	38	50	38	29	12	6	1	1
$\mathrm{Aff}_1(Z_{12})$	1	5	9	21	25	34	25	21	9	5	1	1

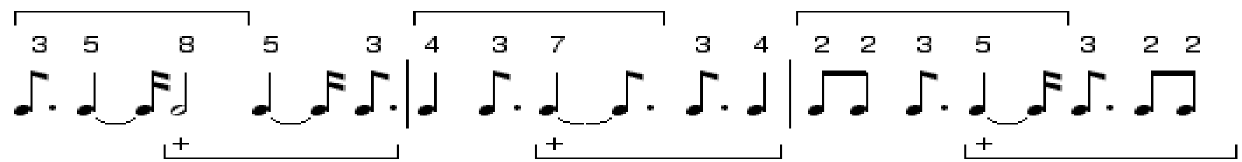


Architettura paradigmatica

Costruzione di canoni ritmici



O. Messiaen: *Harawi* (1945)



Pedale ritmico

« Remarquons […] que les trois rythmes non rétrogradables divisent les durée en 5+5+7 durées, alors que les termes des trois ostinatos harmoniques contiennent toujours six sonorités pour le supérieur, et trois sonorités pour les deux autres. Ajoutons que les durées sont très inégales »

O. Messiaen : *Traité de Rythme, de Couleur et d'Ornithologie,* tome 2, Alphonse Leduc, Editions Musicales, Paris, 1992.

=> *OpenMusic*

Canoni ritmici a mosaico e « imparità ritmica »

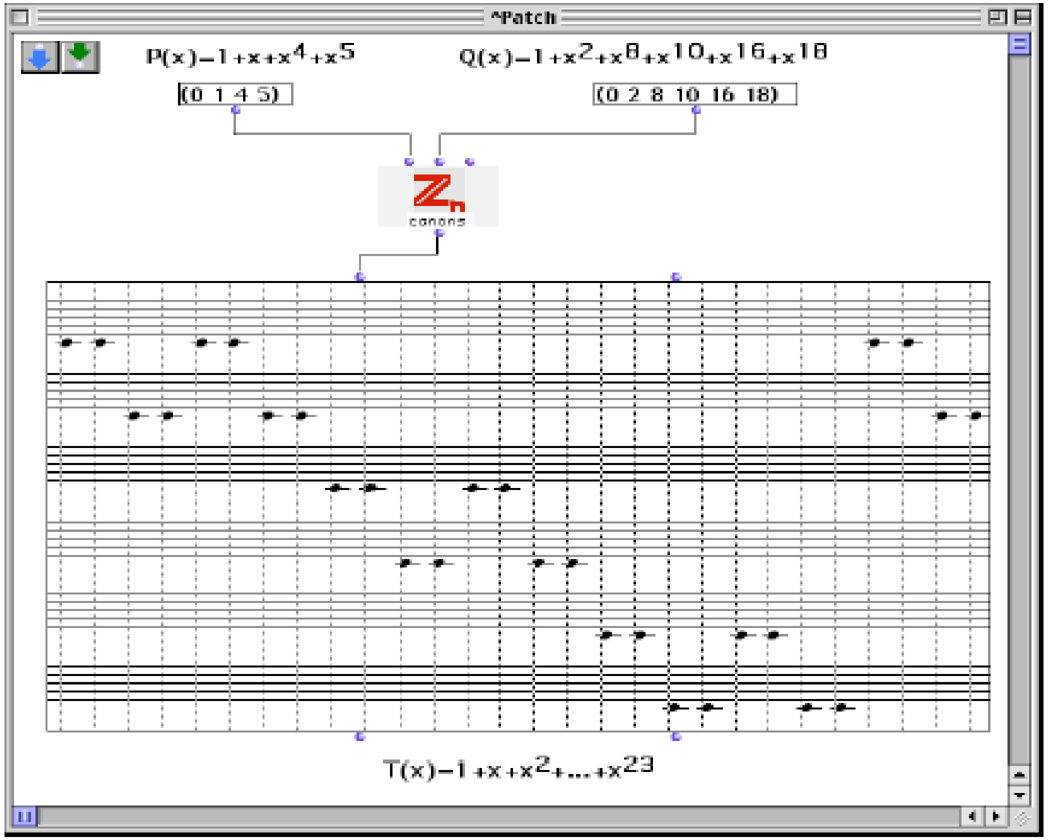
Rachel W. Hall and P. Klingsberg: « Asymmetric Rhythms and Tiling Canons », *American Mathematical Monthly*, to appear (2005)

- Ritmi 2-asimmetrici (i.e. « imparità ritmica », S. Arom)

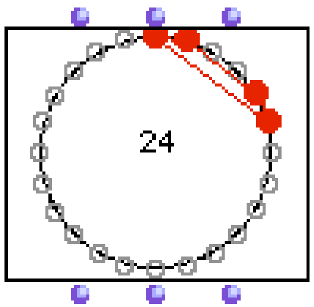
- Ritmi 3-asimmetrici

- Teorema: i canoni ritmici a mosaico a 3 voci sono tutti e soli quelli avente come 'ritmo di base' (*inner rhythm*) un ritmo 3-asimmetrico

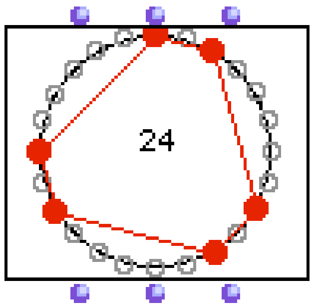
Costruzione di canoni ritmici a mosaico



Approccio polinomiale

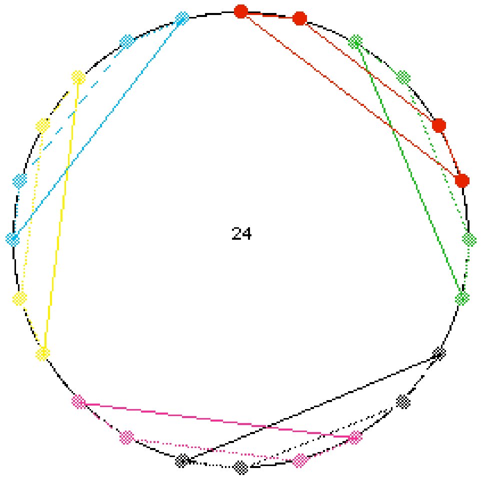


+



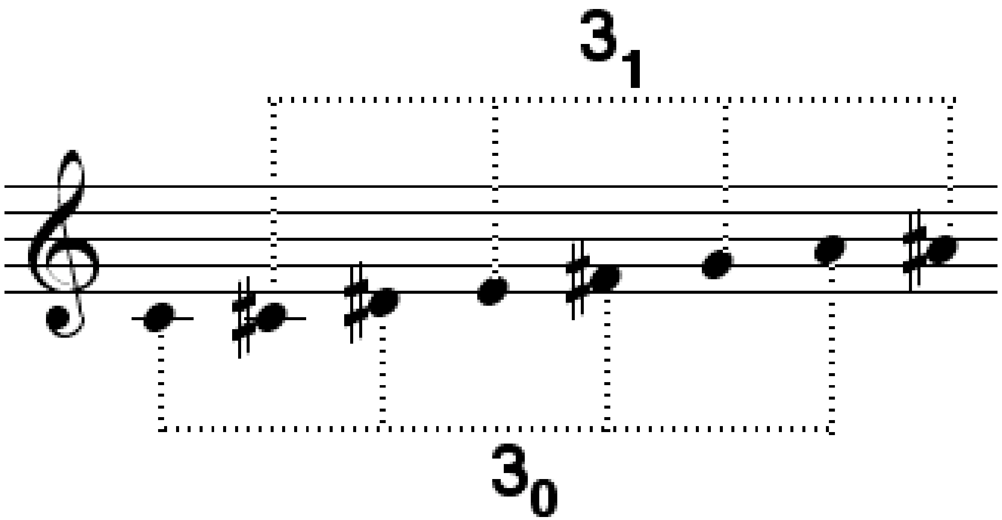
TL

=

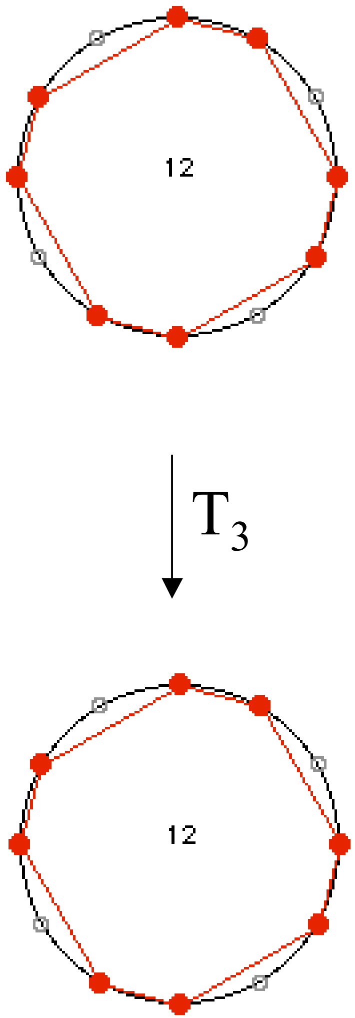


Formalizzazione dei modi di Messiaen a trasposizione limitata

Quante e quali scale musicali hanno le stesse proprietà strutturali della scala ottatonica (semitono-tono)?

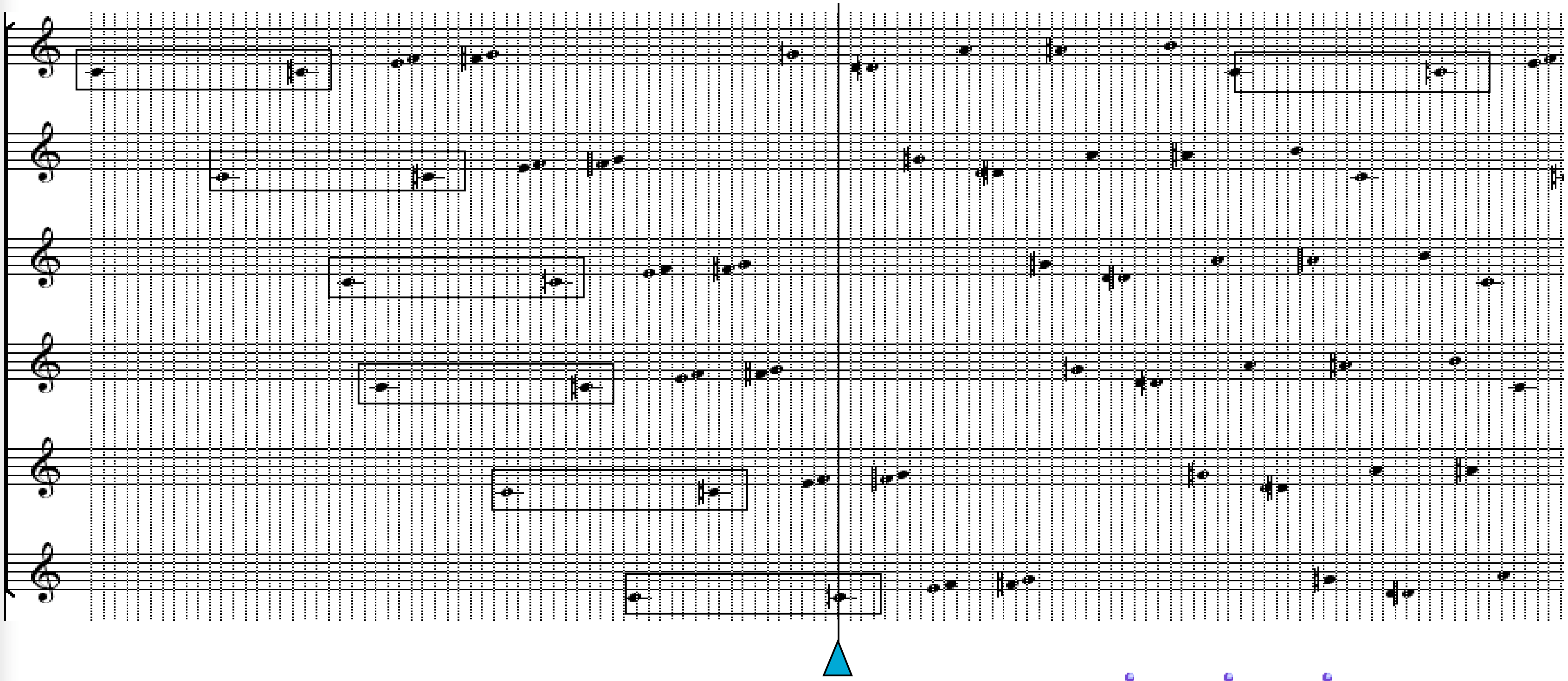


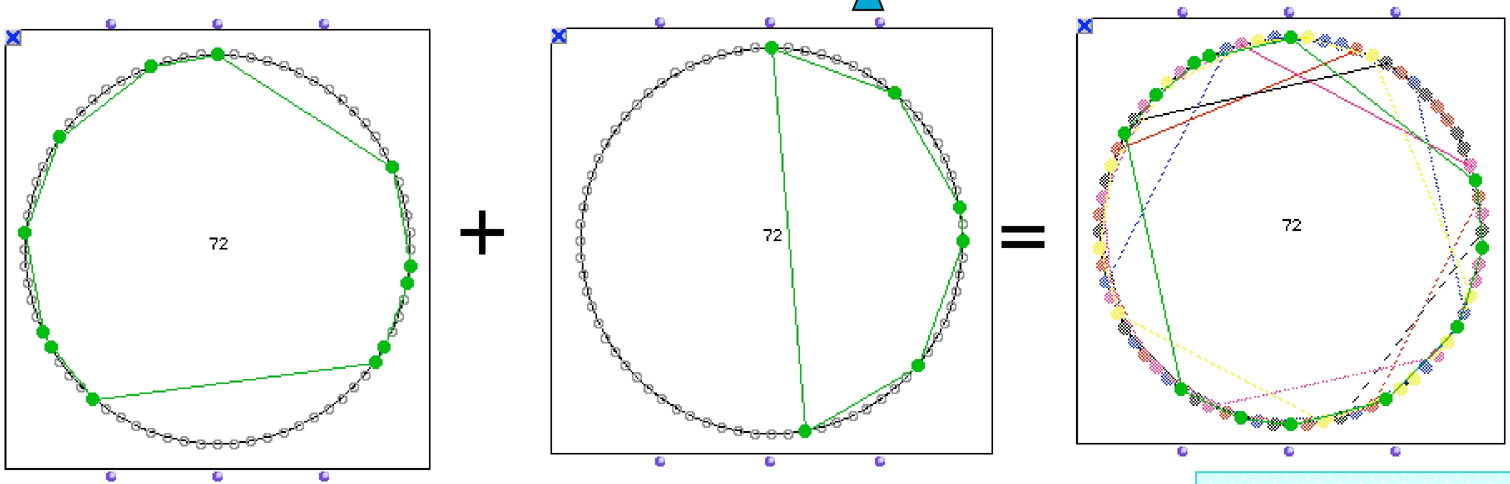
Trovare tutte le scale musicali che si ripetono esattamente ad una trasposizione T_k di k semitoni ($k \neq 0$ mod 12)



=> *OpenMusic*

Canoni ritmici « a mosaico » (senza la proprietà TL)





=> *OpenMusic*

La dualità suono/intervallo

Sequenze periodiche e differenze finite (Anatol Vieru)

f = 7 11 10 11 7 2 7 11 10 11 7 2 7 11…

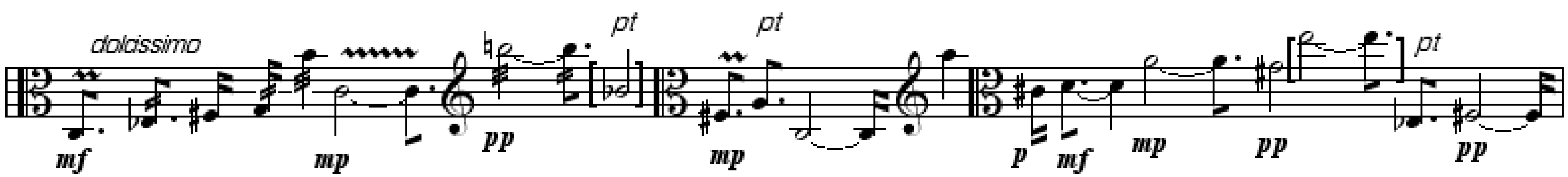
Df = 4 11 1 8 7 5 4 11 1 8 7 5 4 11…

$D^2 f$ = 11 7 2 7 11 0 11 7 2 7 11 0…

$D^3 f$ = 1 8 7 5 4 11 1 8 7 5 4 11…

$D^k f$ = ……

$Df(x)=f(x)-f(x-1)$.



V	0	3	8	7	11	0	11	10	6	9	0	9	1	2	9	8	4	3	6
VIII	0	0	0	0	3	3	7	2	0	0	0	6	3	3	3	4	8	0	0
IV	3	3	4	4	1	11	11	8	3	3	9	4	1	7	11	8	11	3	9
IX	0	0	0	0	0	3	6	[1]	3	3	3	3	9	0	3	6	[10]	6	6
IV	0	10	3	9	10	0	9	7	0	6	7	9	6	4	9	3	4	6	3

Zone d'oubli pour alto (1973)

=> *OpenMusic*

Musica

Metodi algebrici

Teoria

Composizione

Teorici/Compositori

- Ernst Krenek
- Milton Babbitt
- Iannis Xenakis
- Anatol Vieru
- Pierre Barbaud
- Michel Philippot
- André Riotte
- Robert Morris
- ……

Babbitt : *The function of Set Structure in the Twelve-Tone System*, PhD 1946/1992

Xenakis : *Musiques formelles*, 1963

Vieru : *Eléments d 'une théorie générale des modes*, 1967

La struttura di *gruppo* in musica

Teoria → Gruppo ciclico **Z/nZ** (Vieru, …)
Gruppo diedrale $\mathbf{D_n}$ (Forte, …)
Gruppo affine $\mathbf{Aff_n}$ (Mazzola, Morris, …)

Composizione → Gruppo di Klein (dodecafonismo)
Gruppo delle rotazioni del cubo S_4
Groupe ciclico (canoni ritmici, …)

Verso l’approccio algebrico in teoria musicale

Matematica/Musica secondo Ernst Krenek

1. La relatività dei sistemi scientifici
2. L’importanza degli assiomi
3. Gli assiomi nella musica
4. Teoria musicale [*Musical Theory*] e pratica musicale

« Fisici e matematici hanno capito ben prima dei musicisti che le loro scienze rispettive non hanno come scopo di stabilire un concetto dell’universo conforme ad una natura obiettiva e preesistente. Al contrario, sono ben coscienti del fatto che il loro compito è di rendere compatibile una determinata concezione dell’universo con il più gran numero di osservazioni che sono validate da esperienze scientifiche ».

Ernst Krenek : *Über Neue Musik*, 1937, p.202

L’approccio assiomatico in matematica
David Hilbert ed i fondamenti della geometria

« Per essere edificata in maniera opportuna, la geometria […] ha bisogno di principi semplici e poco numerosi. Questi principi si chiamano gli ***assiomi*** *della geometria. La determinazione degli assiomi […] e lo studio delle loro relazioni reciproche sono delle imprese che, a partire da Euclide, sono state abbordate in numerosi e eccellenti trattati della letteratura matematica. Questo studio (degli assiomi) si riconduce all’****analisi logica della nostra intuizione spaziale*** *»*

David Hilbert : *Grundlage der Geometrie*, 1899

L'approccio assiomatico ed il ruolo dell'intuizione

David Hilbert e la geometria intuitiva

« Vi sono a presente [...] due tendenze nella matematica. Da una parte la tendenza verso l'astrazione mira a cristallizzare le relazioni logiche inerenti all'oggeto di studio [...] e a mettere in ordine questo materiale in modo sistematico.
Dall'altra parte vi è una tendenza verso la ***comprensione intuitiva*** *che spinge verso una presa più immediata degli oggetti di studio, un rapporto vitale, per così dire con questi, che insiste sulla* ***significazione concreta delle loro relazioni*** *»*

D. Hilbert, S. Cohn-Vossen: *Anschauliche Geometrie*, 1932

Verso il concetto di teoria musicale in senso moderno

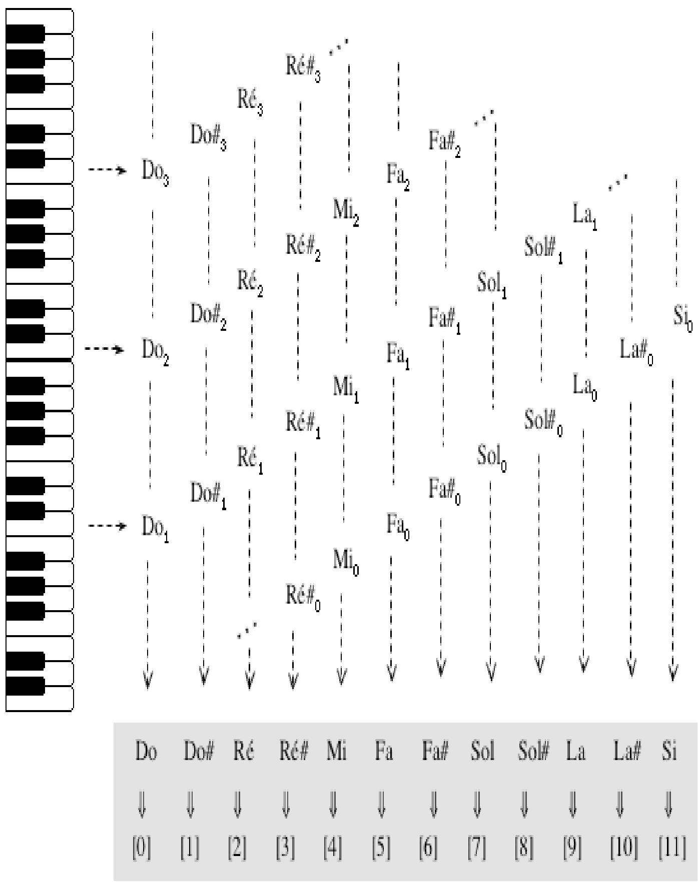
Ernst Krenek e il metodo assiomatico in musica

*« Un assioma è una proposizione che non può essere ridotta ad un'altra attraverso delle deduzioni logiche, ovvero una proposizioneche non si può dimostrare. (…) Gli assiomi sono **libere espressioni del nostro spirito** »*

*« I sistemi musicali (…) non sono stati creati dalla natura (…) ma sono prodotti dagli esseri umani per rendere possibile la musica all'interno di una sfera ben definita. (…) Come l'approccio assiomatico elimina l'idea che gli **assiomi** sono un qualcosa di assoluto in quanto li considera piuttosto come **libere proposizioni dello spirito umano** allo stesso modo una **teoria musicale** potrebbe liberarci del concetto maggiore/minore (…) come una legge irrevocabile della natura ».*

Ernst Krenek : *Über Neue Musik*, 1937

Verso la formalizzazione algebrica in musica



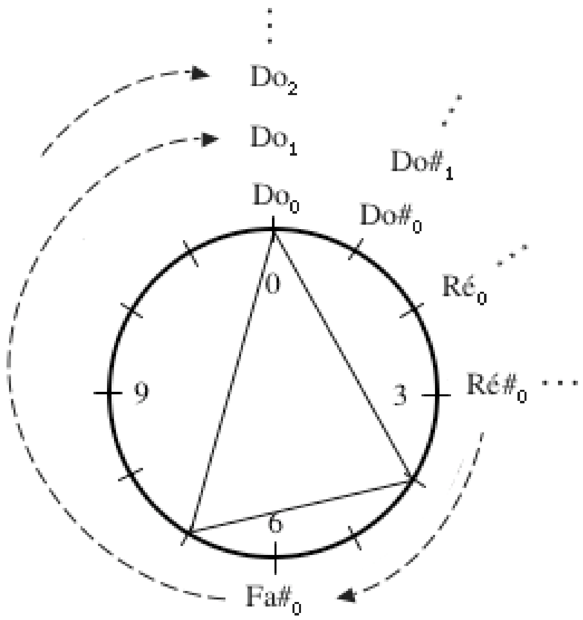
Congruenza modulo 12

Camille Durutte:
- *Technie, ou lois générales du système harmonique* (1855)
- *Résumé élémentaire de la Technie harmonique, et complément de cette Technie* (1876)

« Due elementi sono congruenti modulo 12 se la loro differenza è uguale ad un multiplo di 12 »

(M. Babbitt: *The function of Set Structure in the Twelve-Tone System,* 1946)

L’emergenza della struttura di gruppo in musica



(4,3,5)

Gruppo ciclico
Z/12Z

La congruenza modulo 12 è una relazione di ***equivalenza***

- Proprietà riflessiva: $a \sim a$
- Proprietà simmetrica: $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$
- Proprietà transitiva: $a \sim b,\ b \sim c \Rightarrow a \sim c$

Le classi di equivalenza modulo 12 definiscono una struttura di ***gruppo***

- Chiusura
- Esistenza dell’elemento neutro
- Esistenza dell’inverso
- Associatività

Un approccio algebrico al serialismo integrale

*« Una comprensione della strutturazione dodecafonica dei parametri diversi dalle altezze presuppone una definizione corretta e rigorosa della **natura** del sistema e delle **operazioni** que vi sono associate »*

M. Babbitt : « Some Aspects of Twelve-Tone Composition »,1955

*« [Il sistema] può essere caratterizzato completamente esplicitando gli elementi, le **relazioni** [...] fra gli elementi e le **operazioni** sugli elementi. [...] Ogni considerazione sulle operazioni del sistema deve procedere dalla conscienza della loro natura permutazionale »*

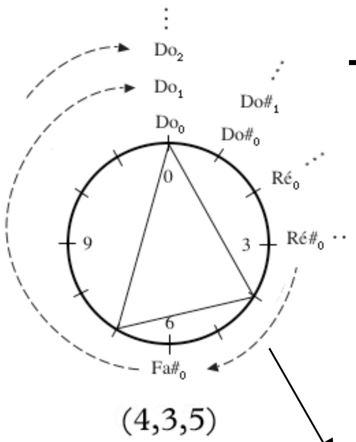
M. Babbitt : « Twelve-Tone Invariants as Compositional Determinants », 1960

*« ...un gran numero di conseguenze compositive sono derivabili direttamente da teoremi della **teoria dei gruppi finiti** »*

M. Babbitt : « Set Structure as a Compositional Determinant », 1961

Il sistema dodecafonico e la teoria dei gruppi

The Twelve-Tone System, un « *insieme di elementi, di **relazioni** fra gli elementi e di **operazioni** sugli elementi* » (Babbitt, 1946)



	S	I	R	RI
S	S	I	R	RI
I	I	S	RI	R
R	R	RI	S	I
RI	RI	R	I	S

S: $(a,b) \to (a,b)$

I: $(a,b) \to (a, \mathbf{12\text{-}}\boldsymbol{b}\ \mathbf{mod.12})$

R: $(a,b) \to (11\text{-}a,b)$.

RI:$(a,b) \to (a,\ 12\text{-}b \text{ mod.}12)$

$\downarrow$

$(11\text{-}a,\ 12\text{-}b \text{ mod.}12)$

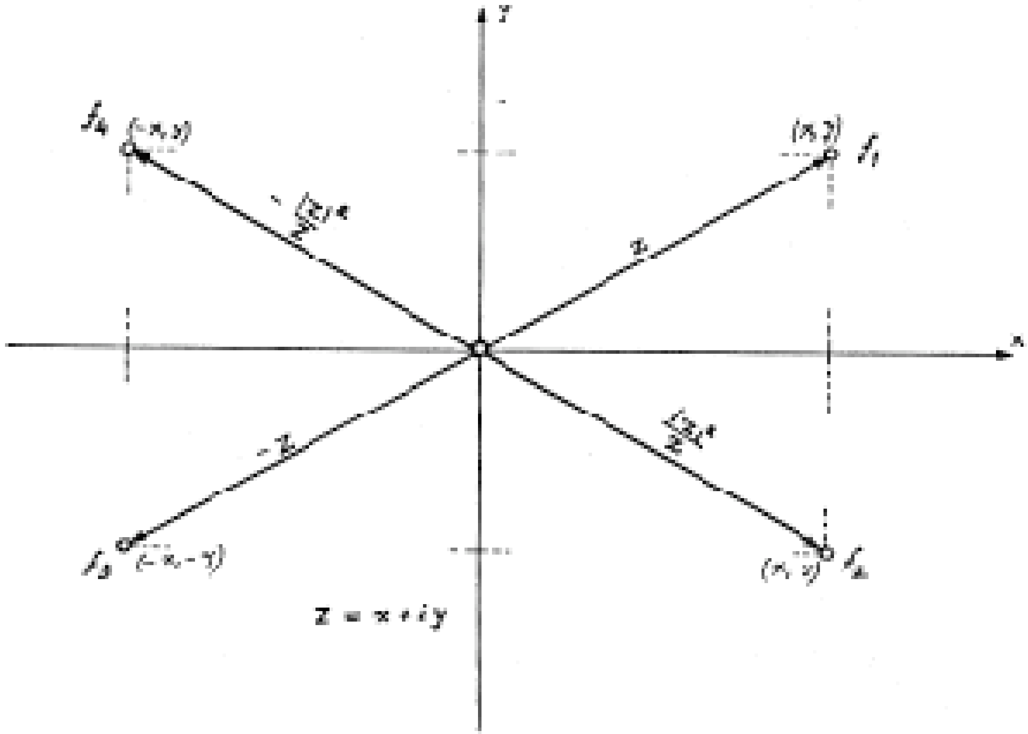
I: $x \to 12\text{-}x$

T_k: $x \to k+x$

$T_{11}I$: $x \to 11\text{-}x$

Dodecafonia e teoria dei gruppi secondo Xenakis

	S	I	R	R
S	S	I	R	R
I	I	S	RI	R
R	R	RI	S	I
RI	RI	R	I	S



$Z = x + yi$

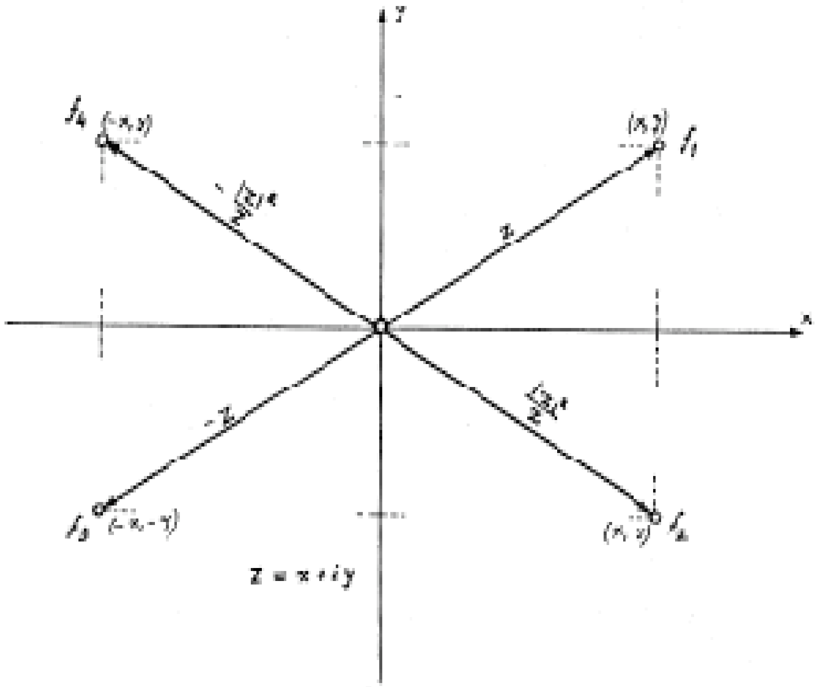
S serie originaria → $f_1 = Z = x + yi = Z = f_1(Z)$ = original form

I inversione → $f_2 = x - yi = |Z|^2/Z = f_2(Z)$ = inversion

RI retrog. inversa → $f_3 = -x - yi = -Z = f_3(Z)$ = inverted retrogradation

R retrogradazione → $f_4 = -x + yi = -(|Z|^2/Z) = f_4(Z)$ = retrogradation

Generalizzazioni geometrico/compositive



$Z = x + yi$

$f_1 = Z = x + yi = Z = f_1(Z)$ = original form

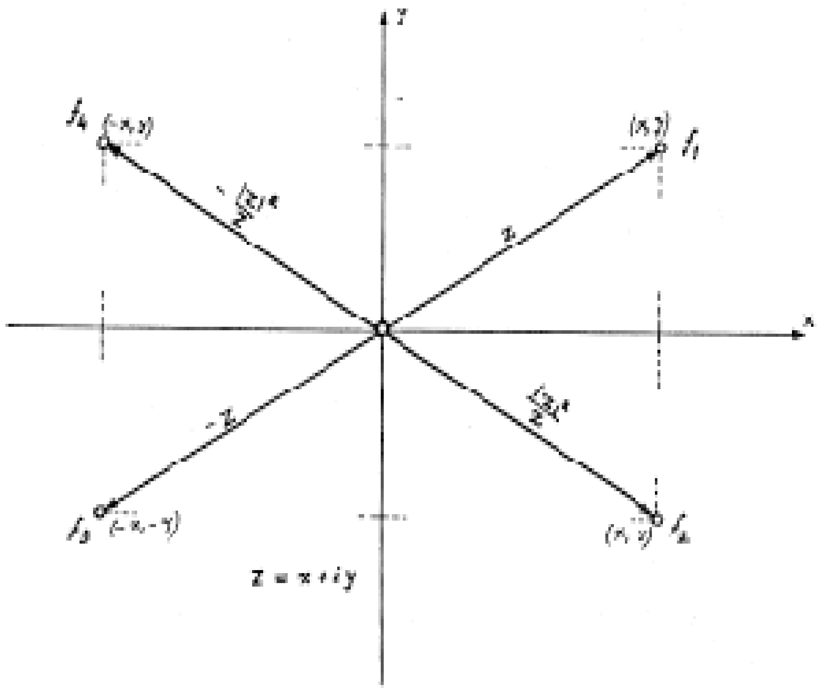
$f_2 = x - yi = |Z|^2/Z = f_2(Z)$ = inversion

$f_3 = -x - yi = -Z = f_3(Z)$ = inverted retrogradation

$f_4 = -x + yi = -(|Z|^2/Z) = f_4(Z)$ = retrogradation

« *Si tratta del gruppo di Klein (...). Ma possiamo immaginare altri tipi di trasformazioni, come una rotazione continua o discontinua, poco importa, di un angolo qualsiasi. Questo offre dei fenomeni nuovi, degli eventi nuovi, anche a partire da una melodia, visto che una semplice linea melodica diventa una polifonia* » (Xenakis/Delalande, p.93)

Generalizzazioni geometrico/compositive



$Z = x + yi$

$f_1 = Z = x + yi = Z = f_1(Z) =$ original form

$f_2 = x - yi = |Z|^2/Z = f_2(Z) =$ inversion

$f_3 = -x - yi = -Z = f_3(Z) =$ inverted retrogradation

$f_4 = -x + yi = -(|Z|^2/Z) = f_4(Z) =$ retrogradation

« Prendiamo un qualsiasi grafico in un sistema di coordinate tempo/altezze. Possiamo fare delle rotazioni (trasformazioni); le rotazioni possono essere considerate come un gruppo. (...) Possiamo usare le trasformazioni tradizionali di un profilo melodico: l'inverso, il retrogrado e l'inverso del retrogrado di una melodia di base. Ma ci sono, evidentemente, molte altre trasformazioni possibili visto che possiamo ruotare un oggetto di un angolo a piacere »

(Xenakis/Varga, 1996, p.89)

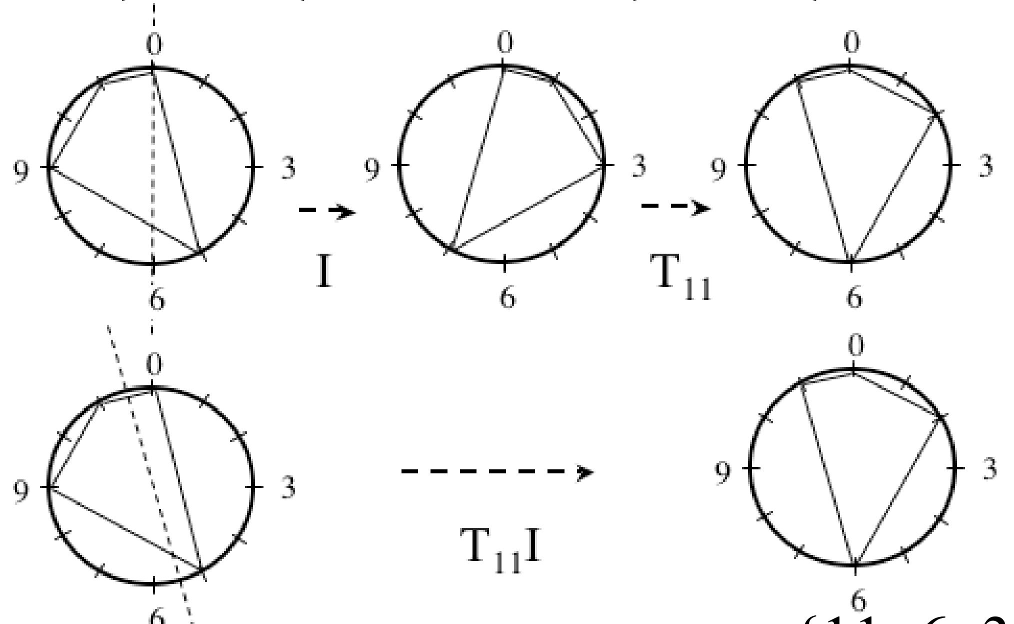
Trasformazioni d’insiemi di classi di altezze

Inversioni e trasposizioni

I: $x \rightarrow 12\text{-}x$

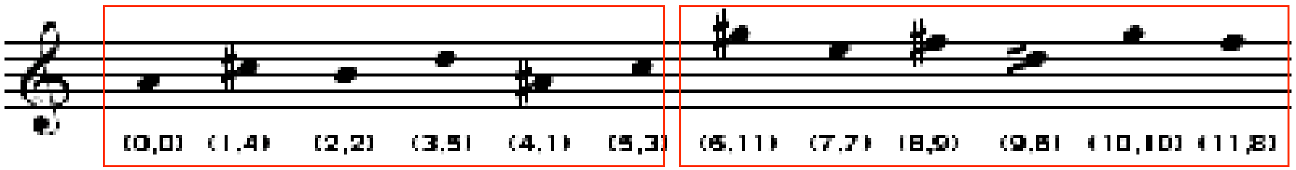
T_k: $x \rightarrow k+x$

$\{0, 5, 9, 11\} \longrightarrow \{0, -5, -9, -11\} \longrightarrow \{11\text{-}0, 11\text{-}5, 11\text{-}9, 11\text{-}11\}$



$\{0, 5, 9, 11\} \longrightarrow \{11, 6, 3, 0\}$

$T_{11}I$: $x \rightarrow 11\text{-}x$



$T_{11}I$: $\{0,4,2,5,1,3\} \rightarrow \{11,7,9,5,10,8\}$ *Combinatorialità inversa*

Applicazioni compositive della formalizzazione algebrica…

«…*derivabili direttamente dalla teoria dei gruppi finiti* » (1961)

• *Data una collezione di altezze (o di classi di altezze), la molteplicità di occorrenza di ciascun intervallo (sotto l'ipotesi di equivalenza fra intervalli complementari) determina il numero di altezze in comune fra la collezione originaria e la sua trasposizione del valore dell'intervallo stesso*

• ***Teorema dell'esacordo***

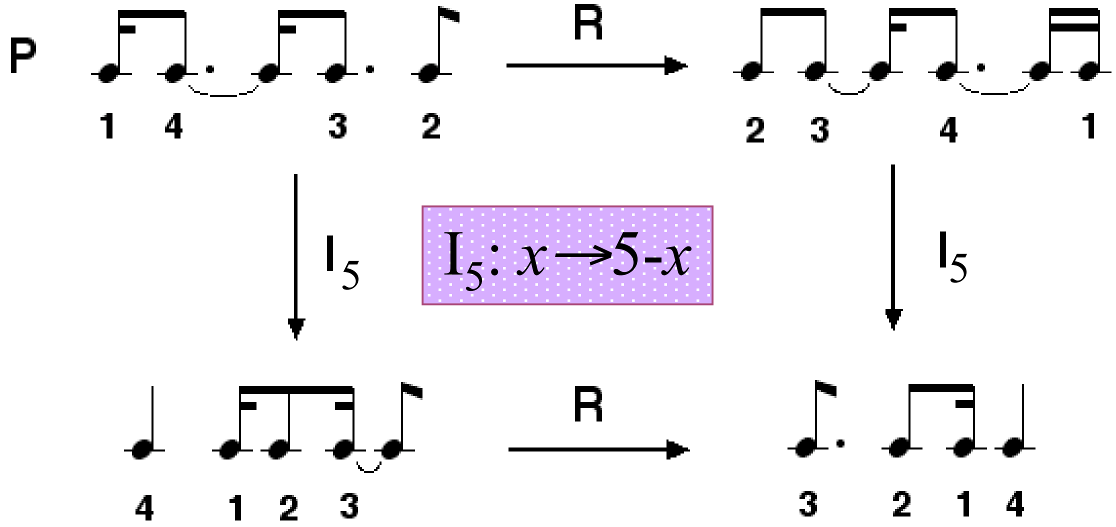
Un intervallo ha la stessa molteplicità di occorrenza all'interno di un esacordo o del suo complementare

Verso una formalizzazione algebrica del serialismo integrale

- La serie delle durate temporali (*durational row*)

Composition for Four Instruments (1948)

I: $x \rightarrow 12-x$



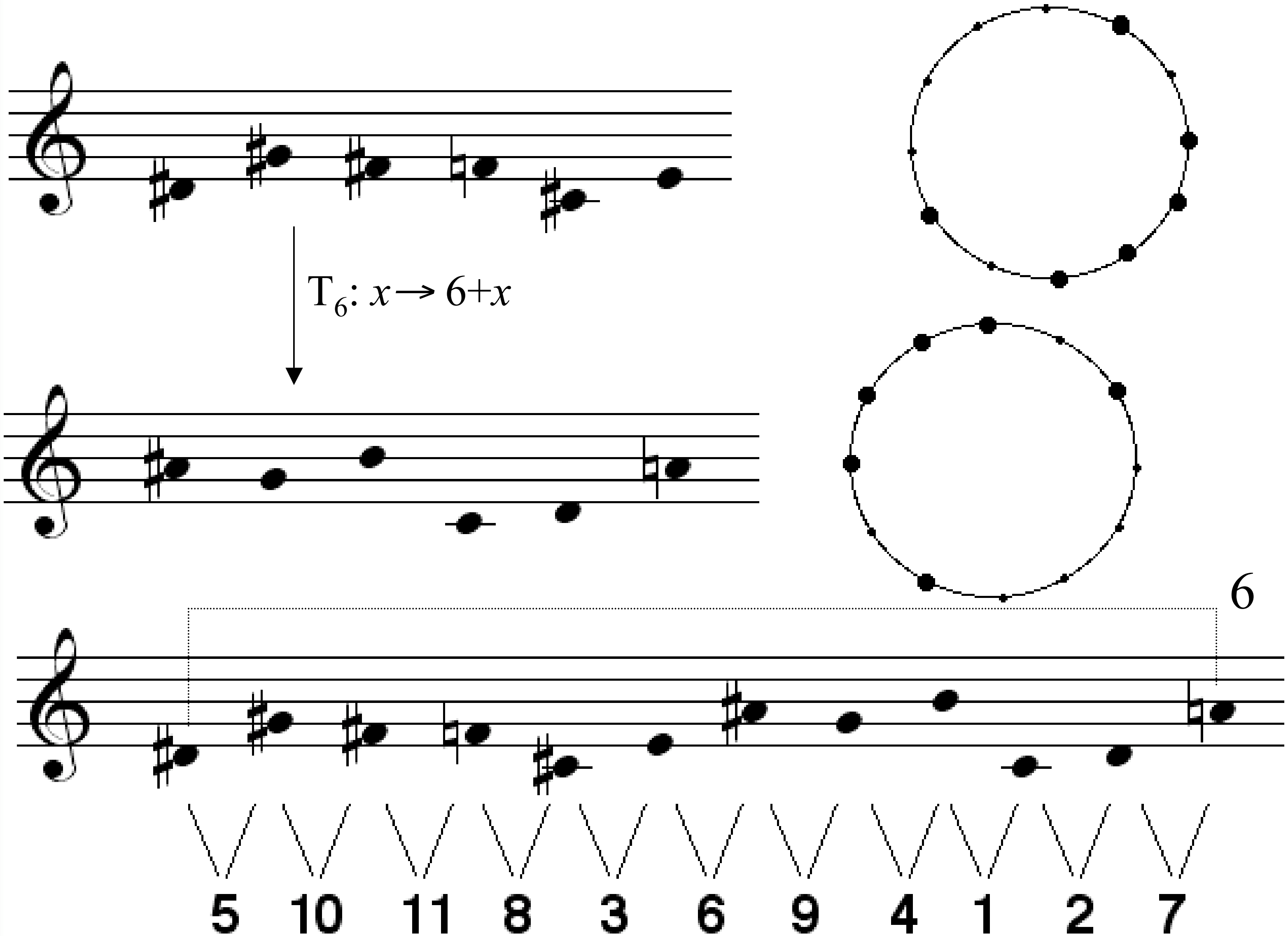
- Il sistema dei valori d'attacco (*Time-Points System*)

$I_{11}: x \rightarrow 11-x$

$T_{11}I: x \rightarrow 11+(12-x)$

Combinatorialità esacordale e serie « omni-intervallari »

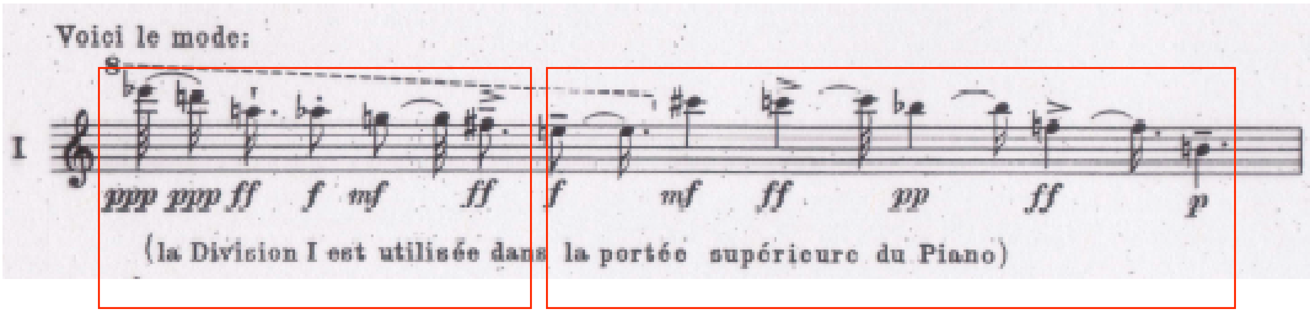
- *Partitions* (1957) → - *Post-Partitions* (1957)

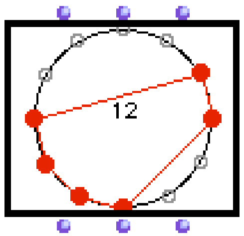


Combinatorialità esacordale e serialismo integrale

La filiazione Babbitt/Messiaen

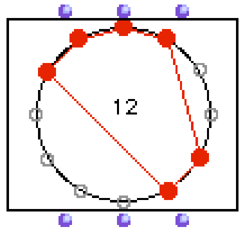
- Mode de valeurs et d'intensités (1950)





$$\{3,2,9,8,7,6\} \longrightarrow \{4,5,10,11,0,1\}$$

$T_7I : x \rightarrow 7\text{-}x$



Combinatorialità e Virtuosismo

D. Leong and E. McNutt: Virtuosity in Babbitt's *Lonely Flute*, MTO 11(1), March 05

Listeners to Milton Babbitt's music have criticized it for being excessively abstract or **perceptually random**. Performers of Babbitt's work have often expressed similar attitudes, feeling straight-jacketed by the score's specificity on the one hand, or glossing over detailed accuracy on the other. The complaints from both sides imply that the rigor of Babbitt's music precludes expressivity and freedom of interpretation. Our paper argues that Babbitt's music finds an **astonishing richness of expression within and because of its constraints**, and that performers can similarly find interpretive freedom within the confines of the notated score. Only by exploring this interpretive freedom can performers communicate the compositional freedom expressed in Babbitt's works. We construe these **tensions between rigor and freedom** as a particular type of virtuosity that lies at the heart of Babbitt's music

http://www.societymusictheory.org/mto

a. Pitch-class array

Register		①	②	③
C6–B6		72		231985
		6		6et0
C5-B5		e	057	
		834	2t9	
C4-B4		5t9	e34	47
		01	168	
Partition		$3^2\ 2^2\ 1^2$	3^4	6 4 2

b. Time-point array (T_6 of pitch-class array)

Dynamic	◇1	◇2
ff	18	
f	0	
mf	5	6e1
mp	29t	843
p	e43	59t
pp	67	702
Partition	$3^2\ 2^2\ 1^2$	3^4

Funzione e struttura di una teoria della musica

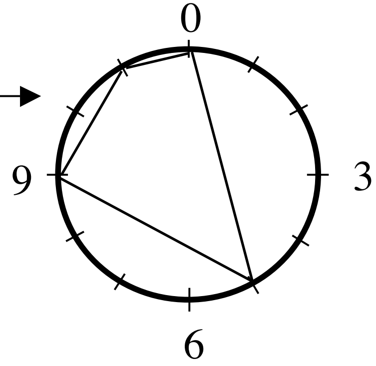
*«…rendere possibile da una parte lo studio della **struttura** dei sistemi musicali […] e la formulazione dei vincoli di questi sistemiin una prospettiva compositiva […] ma anche, come condizione preliminare, una terminologia adequata […] per rendere possibile e stabilire un **modello** che autorizza delle proposizioni ben determinate e verificabili sulle opere musicali»*

M. Babbitt : « The Structure and Function of Music Theory », 1965

La *Set Theory*

- A. Forte : *The Structure of Atonal Music*, 1973.
- D. Lewin : *Generalized Musical Intervals and Transformation*, 1987

- E. Carter : *Harmony Book*, 2002 (sketches 1960)



{do, fa, si, la}

{0, 5, 9, 11}

[1, 1, 1, 1, 1, 1]

4-Z29

23

- A. Vieru : *The Book of modes*, 1993 (orig. 1980)

(5 4 2 1)

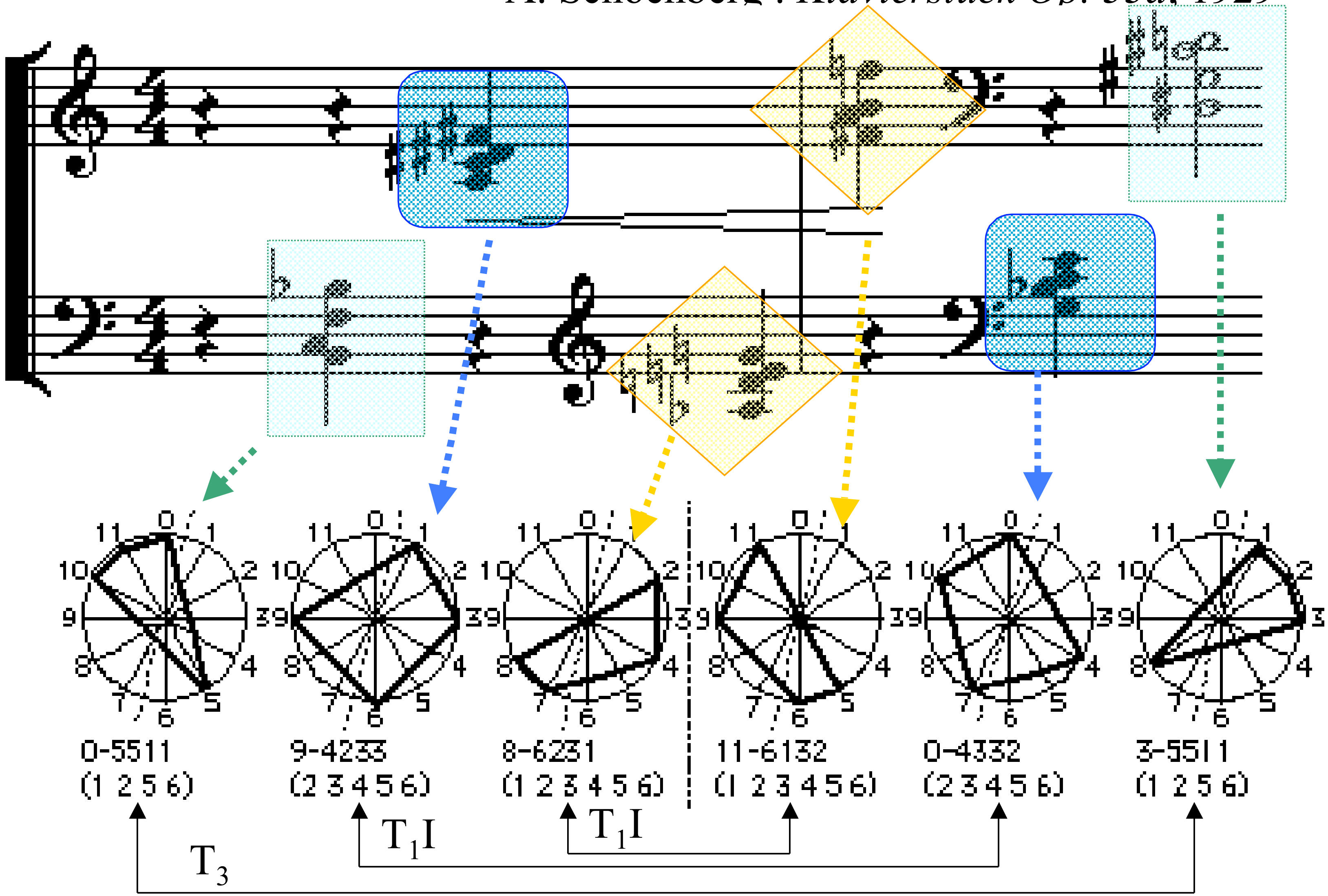
- A. Riotte, M. Mesnage : l'analyse formalisée

0-5421

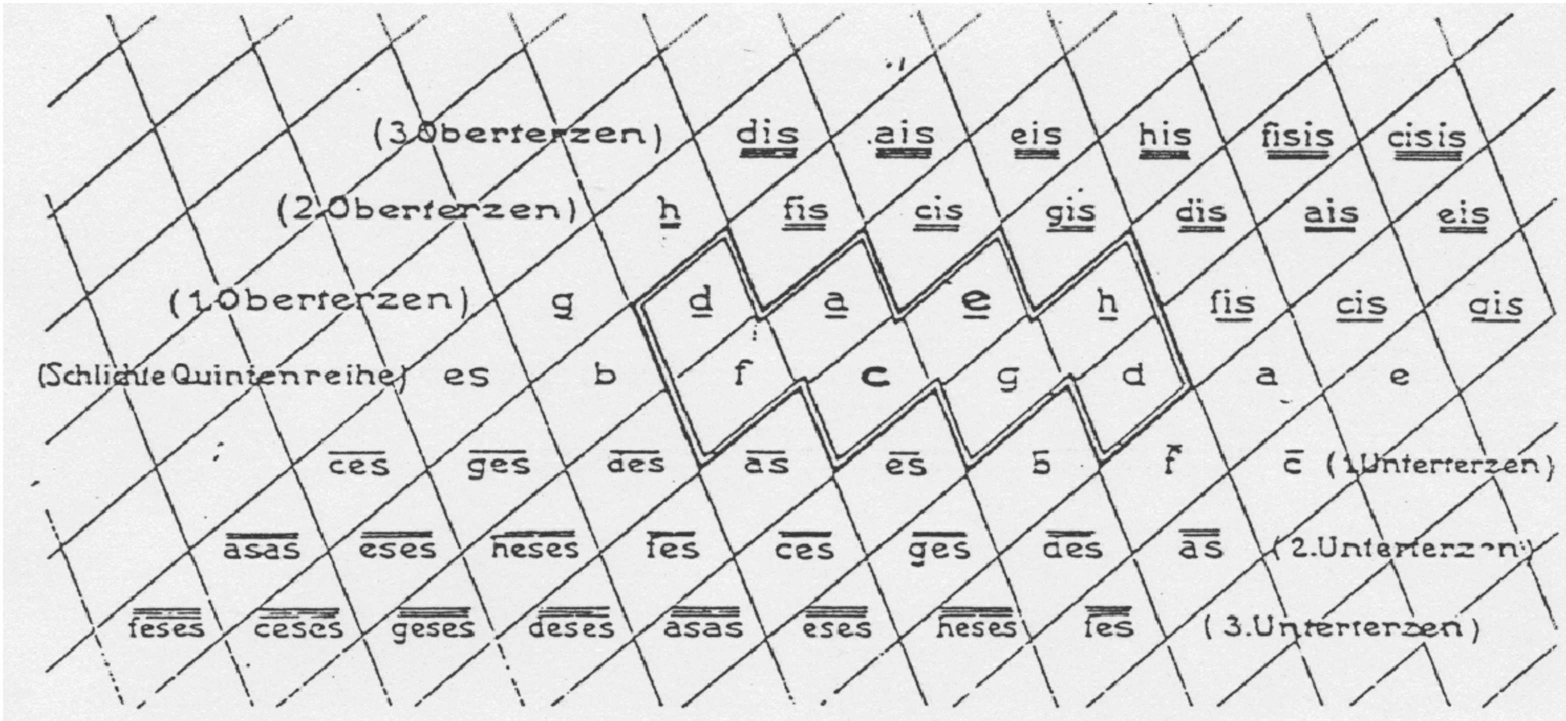
L'analisi formalizzate o le « entités formelles » in musica

André Riotte e Marcel Mesnage

A. Schoenberg : *Klavierstück Op. 33a*, 1929

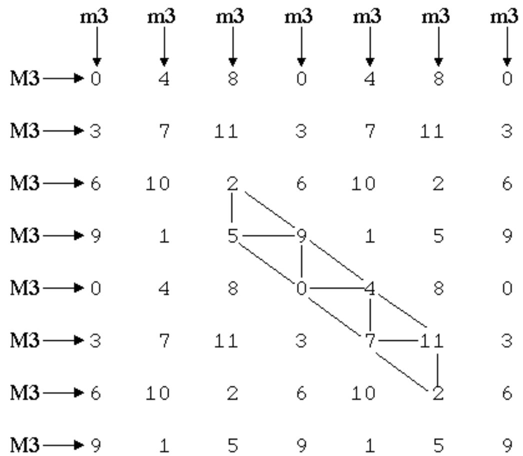


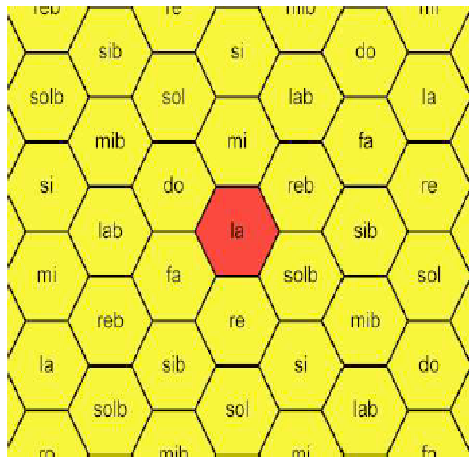
Approcci neo-riemanniani e teorie diatoniche



Hugo Riemann : « Ideen zu einer Lehre von den Tonvorstellung », 1914

A	C#	F	A'	C#'	F'	A"	C#"	F"	A"'
D	F#	A#	D'	F#'	A#'	D"	F#"	A#"	D"'
G	B	D#	G'	B'	D#'	G"	B"	D#"	G"'
C	E	G#	C'	E'	G#'	C"	E"	G#"	C"'
F	A	C#	F'	A'	C#'	F"	A"	C#"	F"'
B♭	D	F#	B♭'	D'	F#'	B♭"	D"	F#"	B♭"'
E♭	G	B	E♭'	G'	B'	E♭"	G"	B"	E♭"'
A♭	C	E	A♭'	C'	E'	A♭"	C"	E"	A♭"'

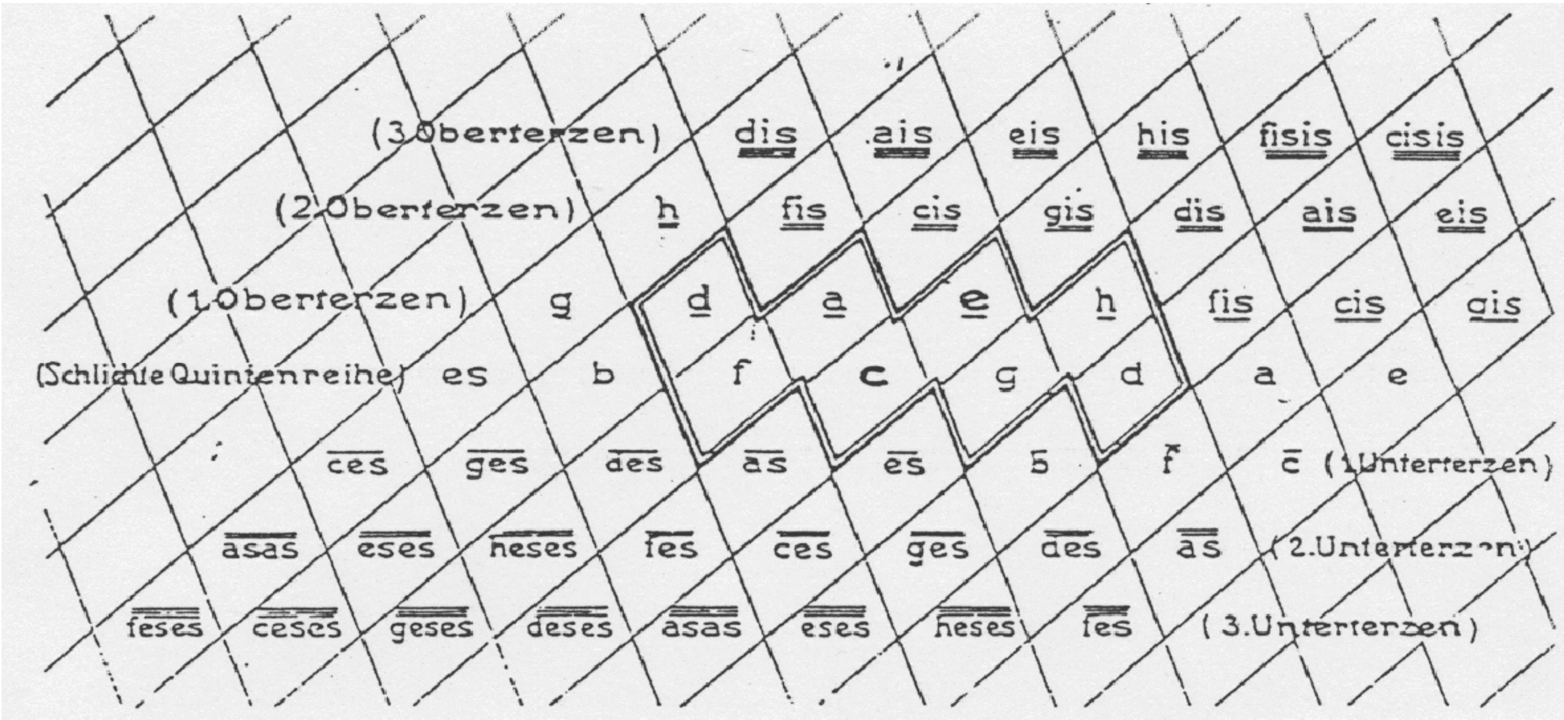




Longuet-Higgins (1962) **Balzano (1980)** **Chouvel (2002)**

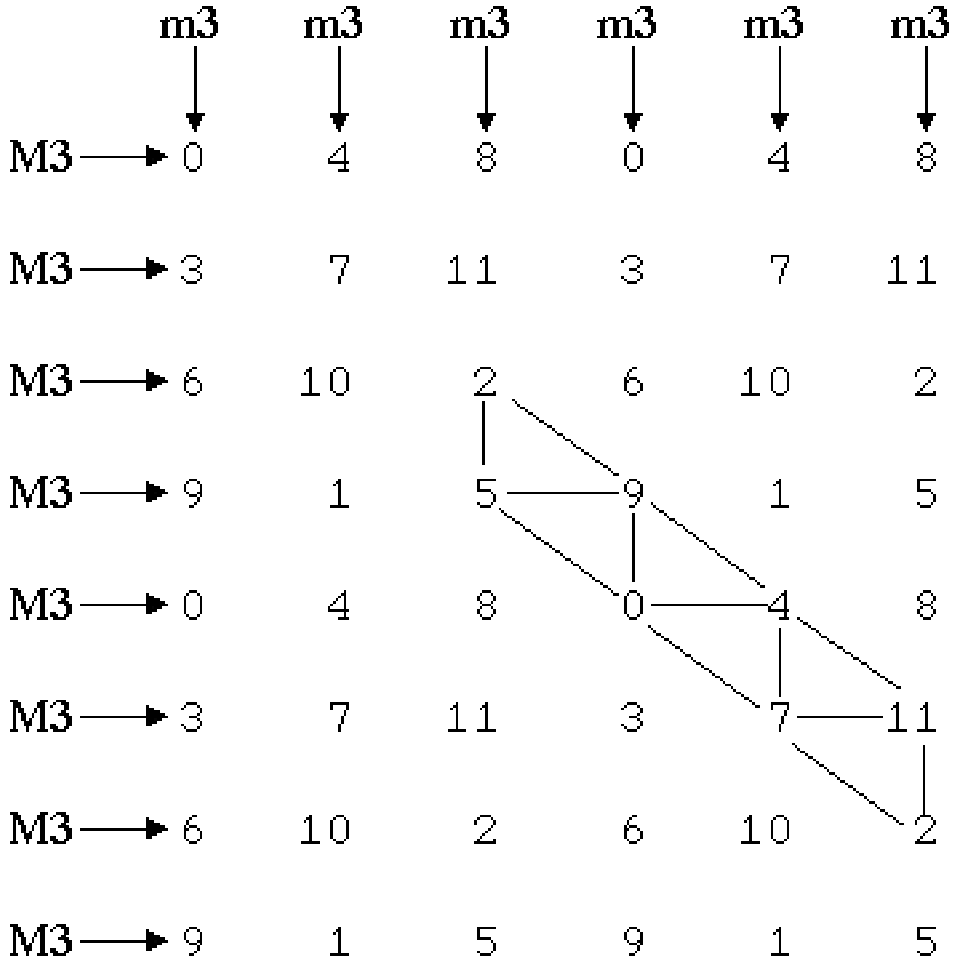
Rappresentazioni geometriche: il reticolo tonale

Hugo Riemann : « Ideen zu einer *Lehre von den Tonvorstellung* », 1914



Proprietà di unicità (convessità e compattezza) della struttura diatonica (Longuet-Higgins, Balzano, …)

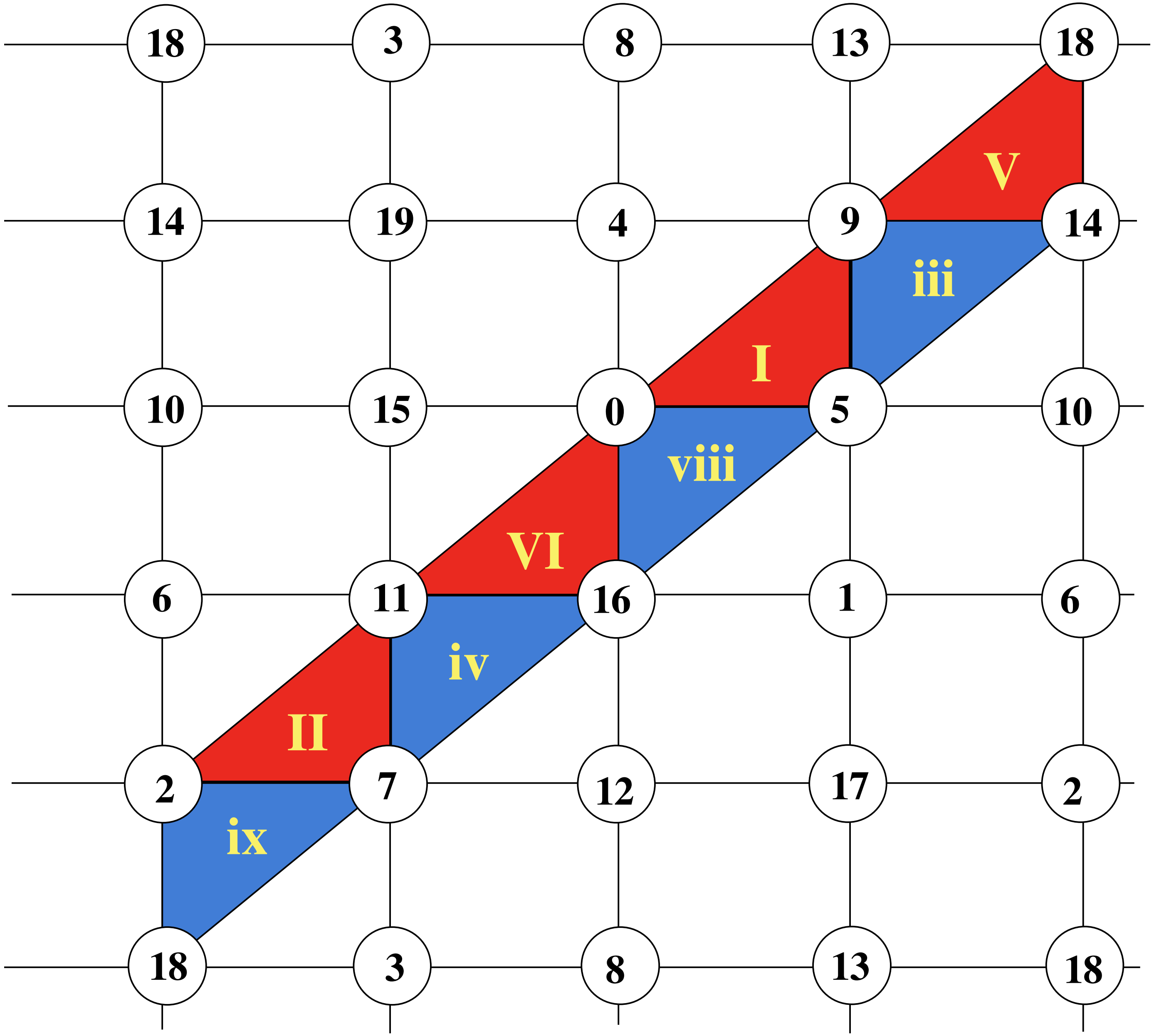
Il reticolo tonale (equivalenza modulo l’ottava)



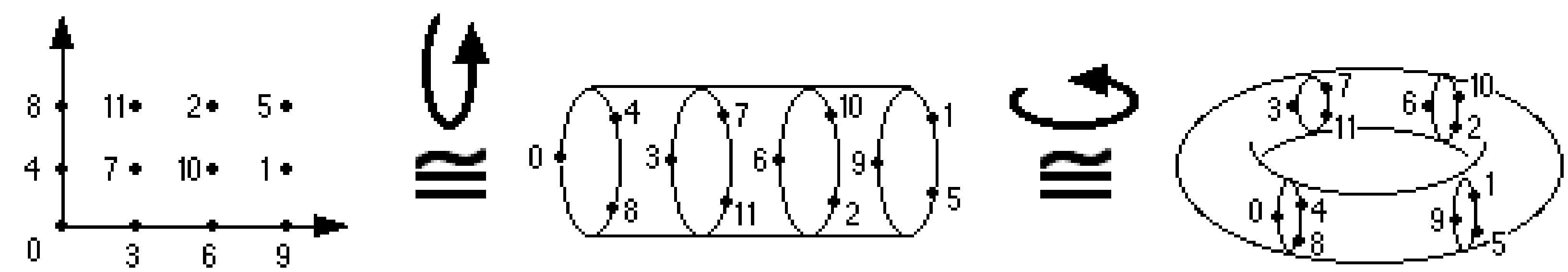
Proprietà di unicità (convessità e compattezza) della struttura diatonica (Longuet-Higgins, Balzano, …)

Generalizzazioni microtonali $\mathbf{Z_n = Z_{k(k+1)}}$ (Balzano,1980)

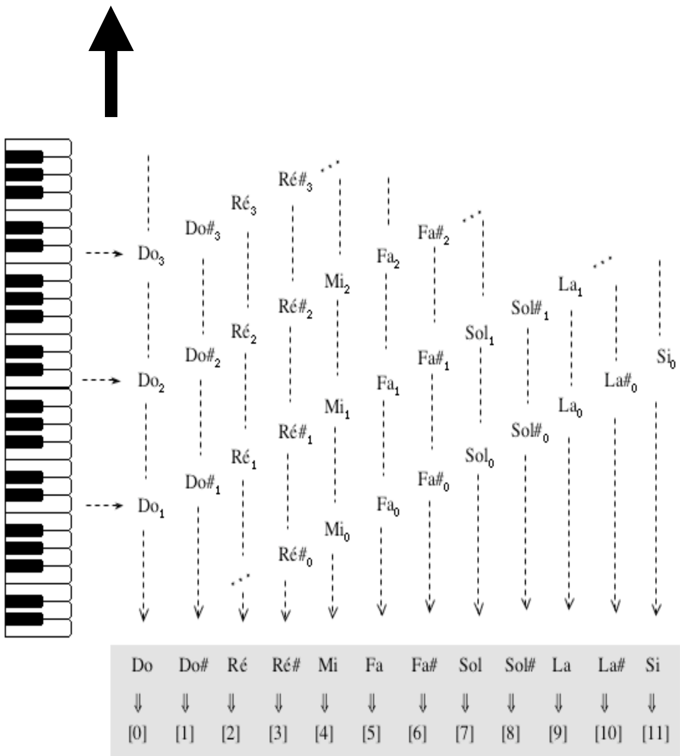
Noll, *MaMuX*, Déc. 2004



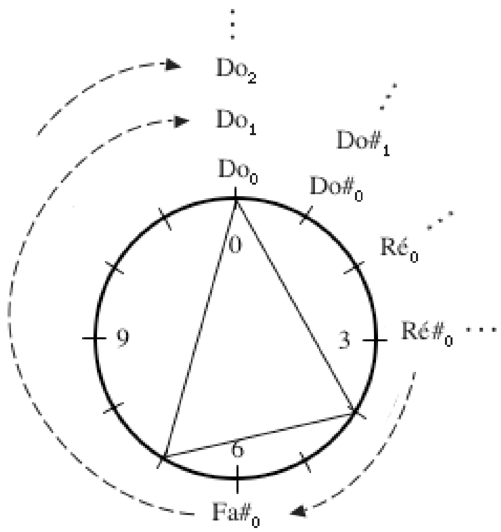
Formalizzazione *vs* rappresentazione



Rappresentazione toroidale



$$\boxed{Z_{12} = Z_3 \times Z_4}$$



(4,3,5)

Rappresentazione circolare

Verso una teoria della musica formalizzata

*« La musica può [...] essere definita come un'organizzazione d'**operazioni** e di **relazioni** elementari fra enti o funzioni d'enti sonori. Comprendiamo lo spazio di scelta [place de choix] che spetta alla **teorie degli insiemi**, non soltanto per la **costruzione** di nuove opere ma anche per l'**analisi** e la migliore comprensione di brani del passato. E così, è difficile comprendere a fondo anche una costruzione stocastica o una ricerca storica [investigation de l'histoire] attraverso strumenti stocastici senza l'aiuto della regina dellescienze e pure delle arti, ovvero la logica o, nella sua forma matematica, l' **algebra** ».*

Iannis Xenakis : « La musique stochastique : éléments sur les procédés probabilistes de composition musicale », *Revue d'Esthétique*, vol. 14 n°4-5, 1961.

Assiomatizzazioni, teoria dei gruppi e dei setacci

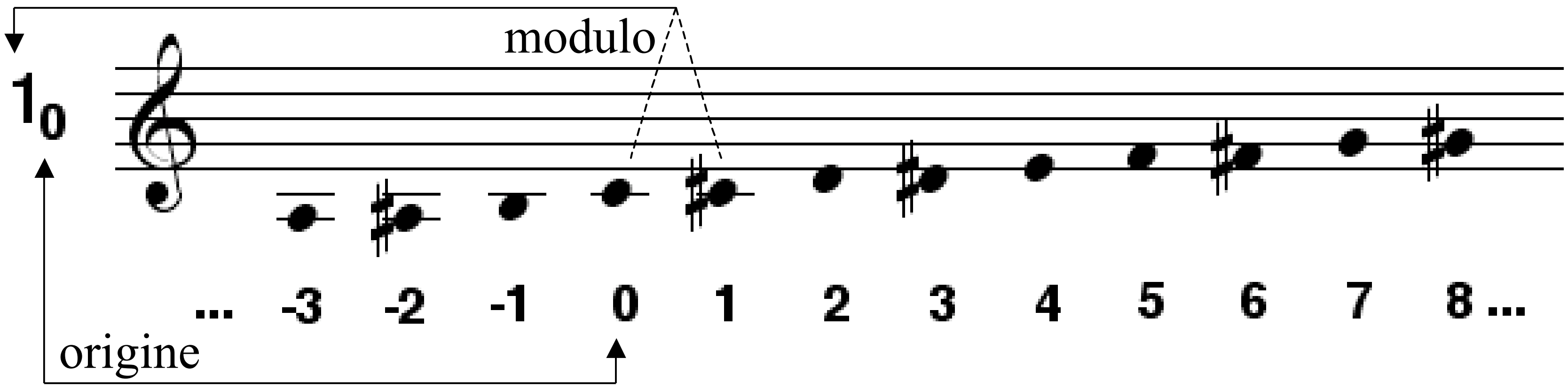
« La formalizzazione e l'assiomatizzazione costituiscono uno strumento procedurale [guide processionnel] più adatto al pensiero moderno in generale »
(Musiques formelles, 1963)

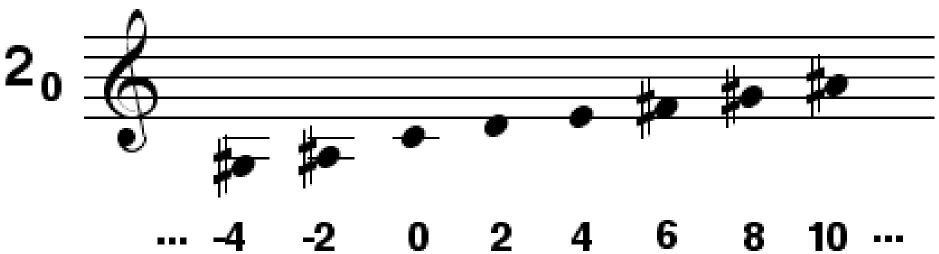
« ...formulazione universale per ciò che riguarda la ***percezione*** *delle altezze: lo spazio degli intervalli melodici è provvisto di una struttura di* ***gruppo*** *avente come legge di composizione interna l'addizione »*
(« La voie de la recherche et de la question », *Preuves,* n° 177, nov. 1965)

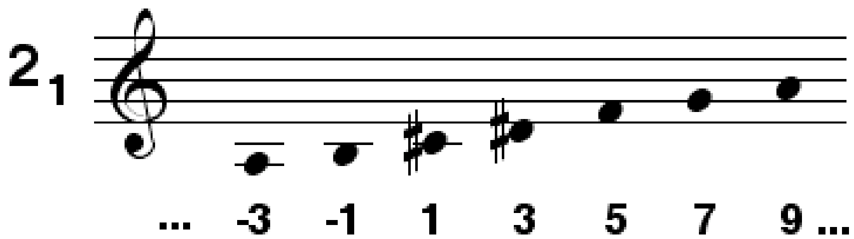
« ...teoria dei setacci [cribles], una teoria che annette le congruenze modulo n e che deriva da un'assiomatizzazione della struttura universale della musica »
(Descrittivo di *Nomos Alpha* per violoncello solo, 1966)

La teoria dei setacci

Formalizzazione algebrica di strutture musicali secondo Xenakis







$1_0 = 2_0 \cup 2_1$

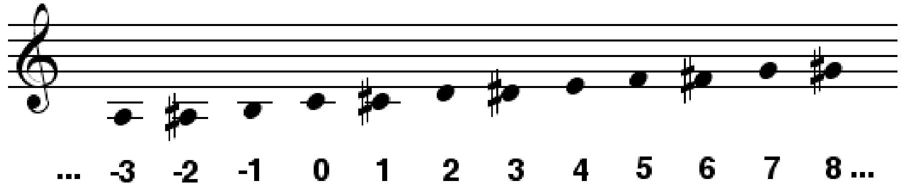
$2_0 \cap 2_1 = \varnothing$

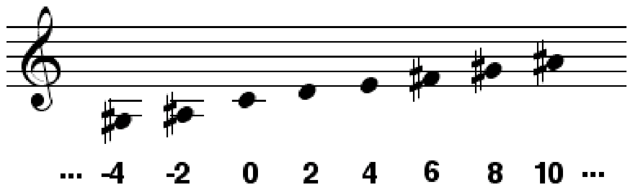
$(2_0)^c = 2_1$

$(2_1)^c = 2_0.$

La teoria dei setacci

I « Modes à transpositions limitées » d'Olivier Messiaen

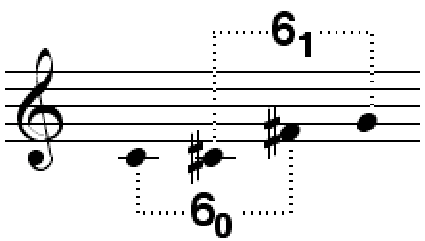
1_0 

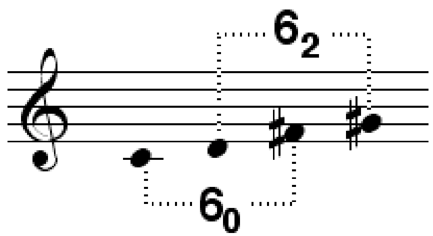
2_0 

$T_m (A)=A$

$m \neq 0 \bmod 12$

(3_0)	Settima diminuita
(4_0)	Triade aumentata
(6_0)	Tritono

$6_0 \cup 6_1$ 



$6_0 \cup 6_2$

$6_0 \cup 6_3$?

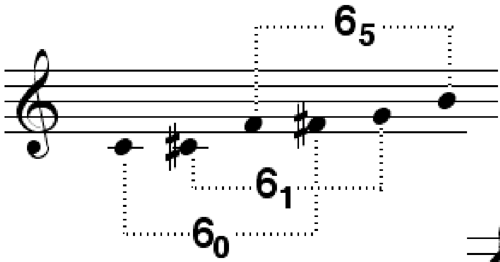
« Cribles » / Messiaen

Verso un catalogo esaustivo

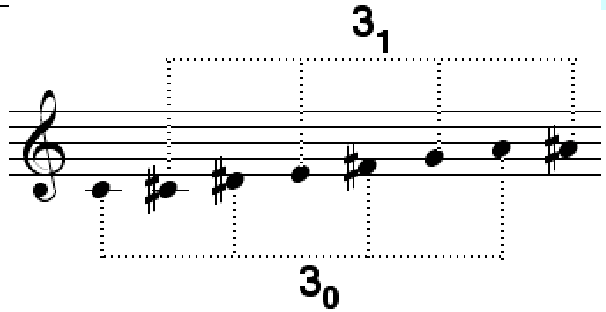
(1_0) (2_0) (3_0) (4_0) (6_0) $6_0 \cup 6_1$ $6_0 \cup 6_2$

$6_0 \cup 6_1 \cup 6_5$

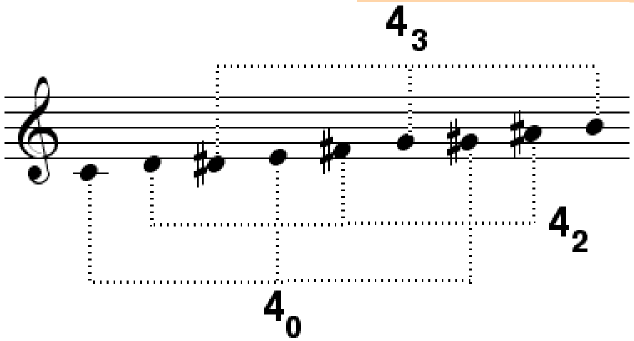
Modo n.5

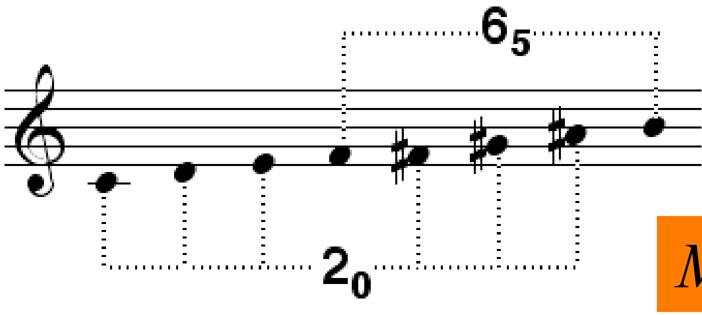


$3_0 \cup 3_1$ *Modo n.2*



$4_0 \cup 4_2 \cup 4_3$ *Modo n.3*

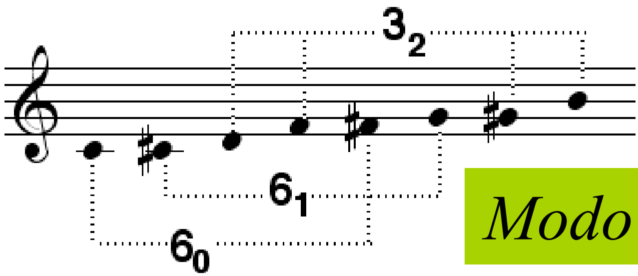




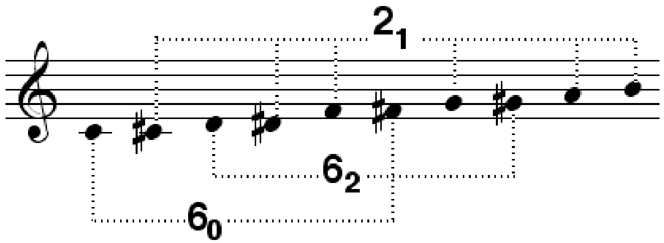
$2_0 \cup 6_5$

Modo n.6

$6_0 \cup 6_1 \cup 3_2$



Modo n.4



Modo n.7 $2_1 \cup 6_0 \cup 6_2$

(6_0) (2_0) $6_0 \cup 6_1$ $6_0 \cup 6_1 \cup 6_5$ $4_0 \cup 4_2 \cup 4_3$ $3_0 \cup 3_1$

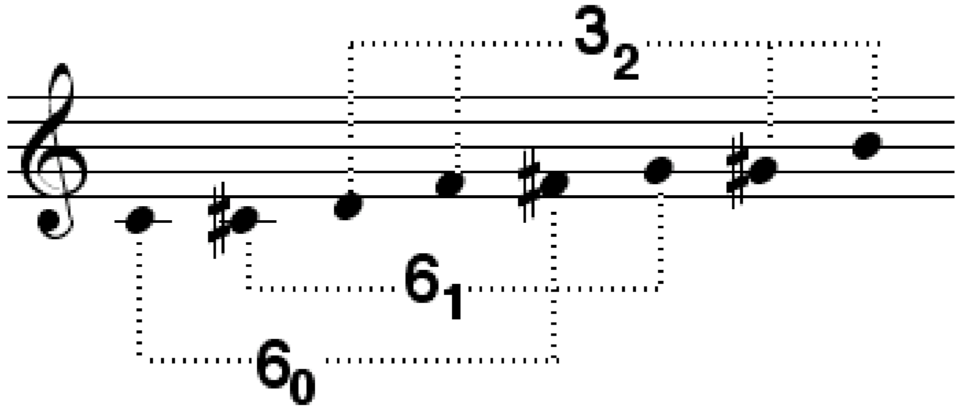
« Cribles » / Messiaen

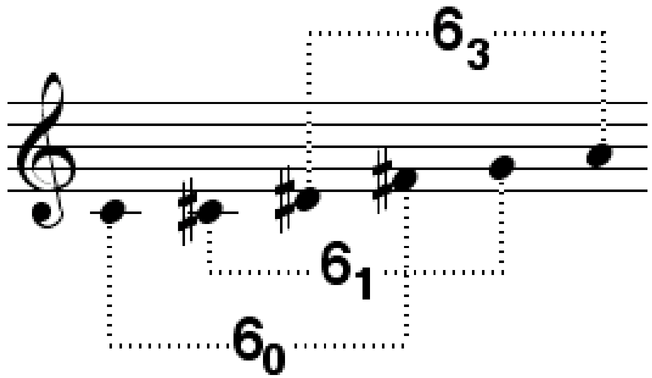
Modi dimenticati…

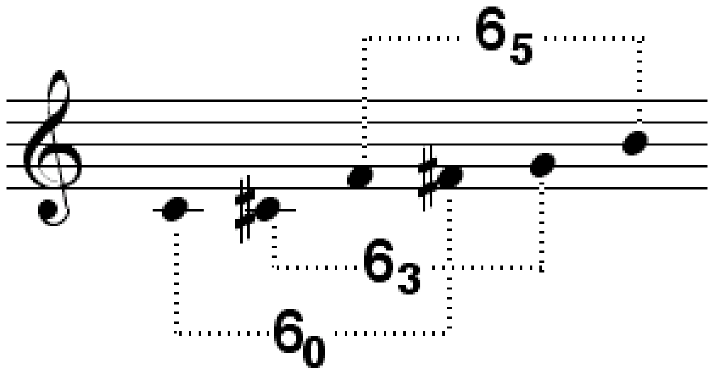
(1_0) (4_0)

$6_0 \cup 6_2$ $6_0 \cup 6_1 \cup 3_2$ $2_0 \cup 6_5$ $2_1 \cup 6_0 \cup 6_2$ (3_0)

$4_0 \cup 4_1$







$6_0 \cup 6_1 \cup 6_3$

$6_0 \cup 6_3 \cup 6_5$

Portata « universale » della teoria dei setacci

« ...teoria dei setacci [cribles], una teoria che annette le congruenze modulo n e che deriva da un'assiomatizzazione della struttura universale della musica »

(Descrittivo di *Nomos Alpha* per violoncello solo, 1966)

« ...la teoria si può applicare ad ogni caratteristica (musicale) dotata di una struttura d'ordine totale, come le intensità, gli attacchi, le densità etc. Inoltre in un futuro immediato assisteremo ad un esplorazione della teoria e delle sue multiple applicazioni attraverso il computer, visto che la essa è completamente implementabile »

(*Arts/Sciences - Alloys*, Stuyvesant: Pendragon Press, 1985)

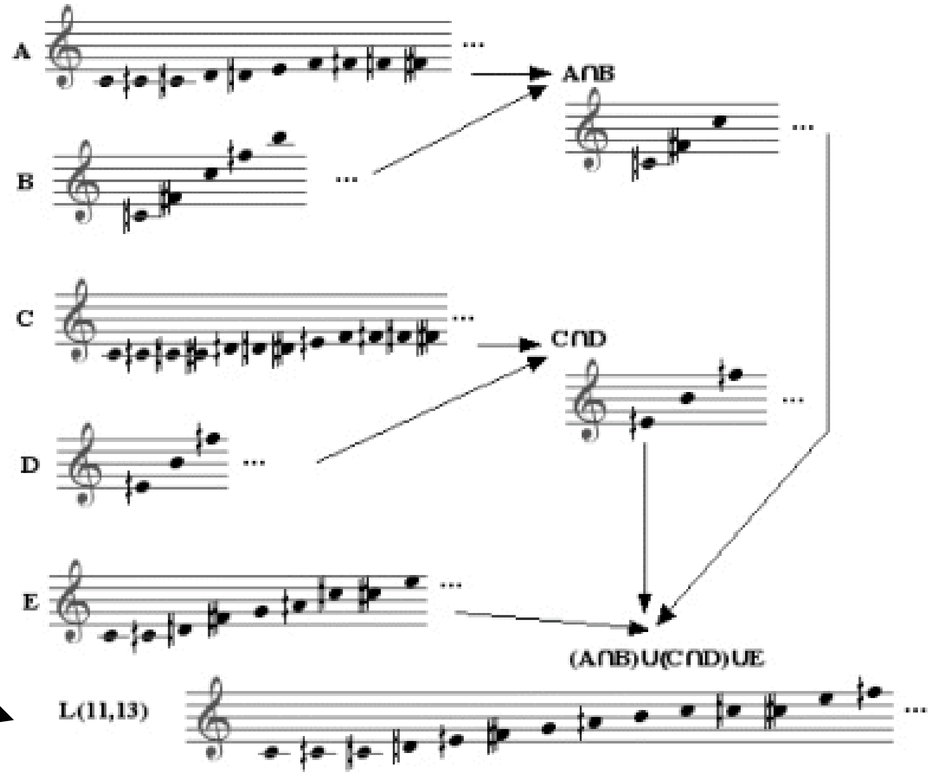
Isomorfismo altezze/ritmi secondo Xenakis

« [Con la teoria dei setacci] si possono costruire delle ***architetture ritmiche*** *estremamente complesse che possono arrivare persino alla distribuzione pseudo-aleatoria di punti si una retta se il periodo è sufficientemente lungo »*
(« Redécouvrir le temps », éditions de l'Université de Bruxelles, 1988)

$A = (\mathbf{13_3} \cup \mathbf{13_5} \cup \mathbf{13_7} \cup \mathbf{13_9})^c$
$B = \mathbf{11_2}$
$C = (\mathbf{11_4} \cup \mathbf{11_8})^c$
$D = \mathbf{13_9}$
$E = \mathbf{13_0} \cup \mathbf{13_1} \cup \mathbf{13_6}$

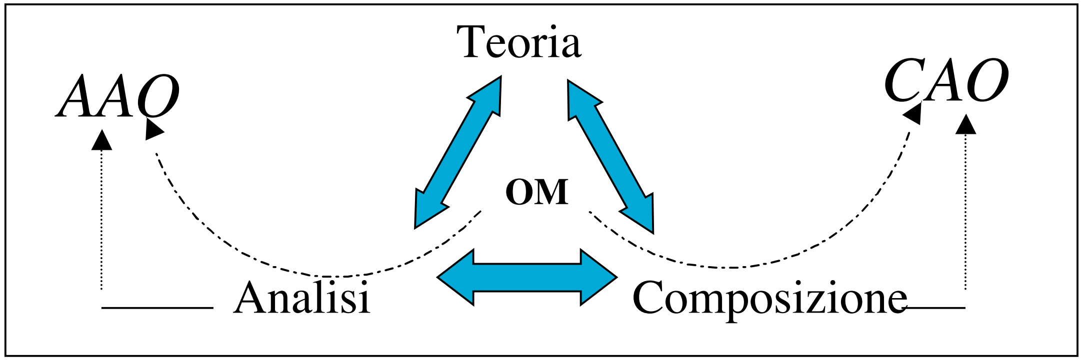
(A∩B)∪(C∩D)∪E

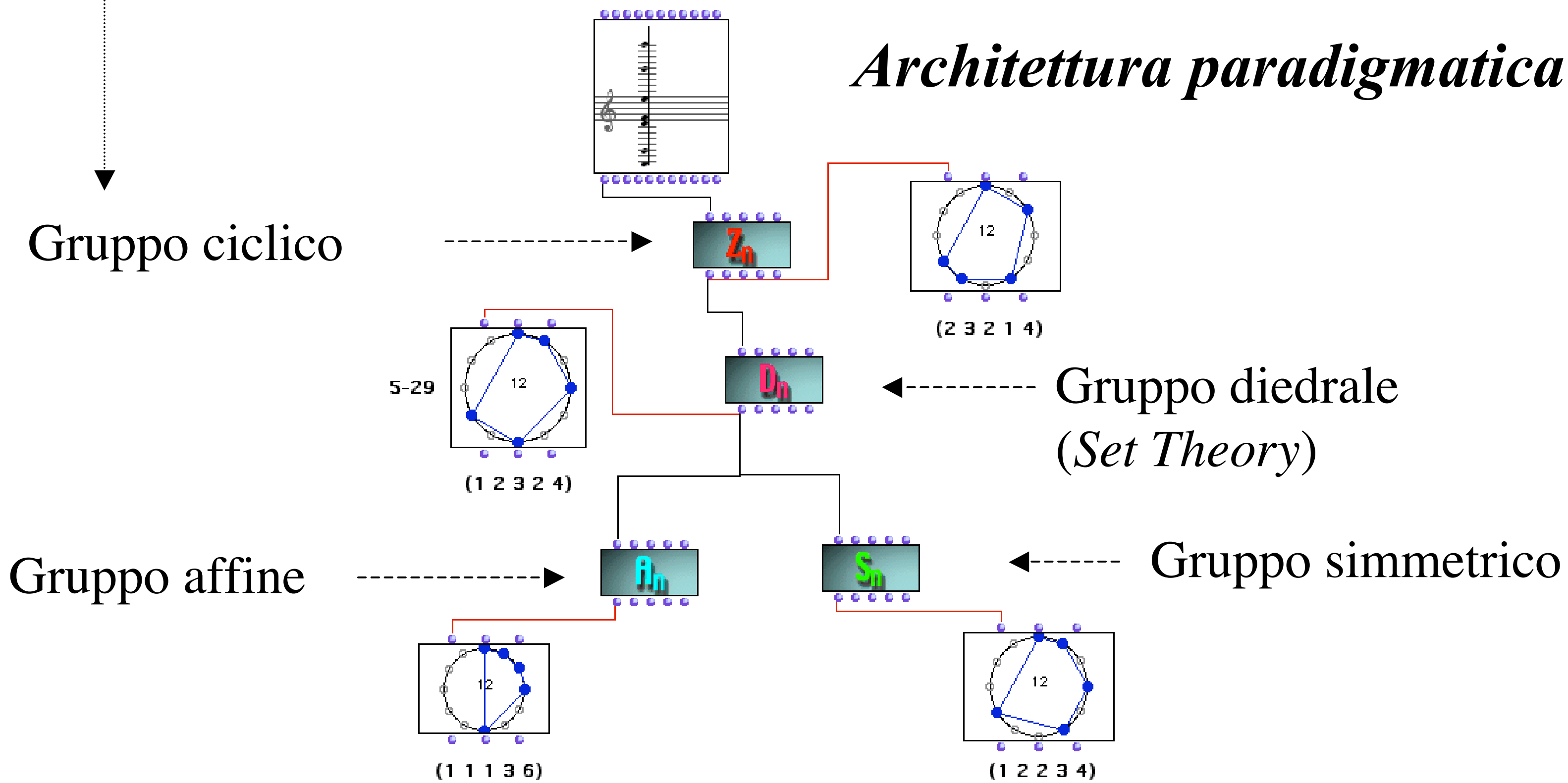
(*Nomos Alpha*, 1966)



0, 2, 13, 24, 35, …

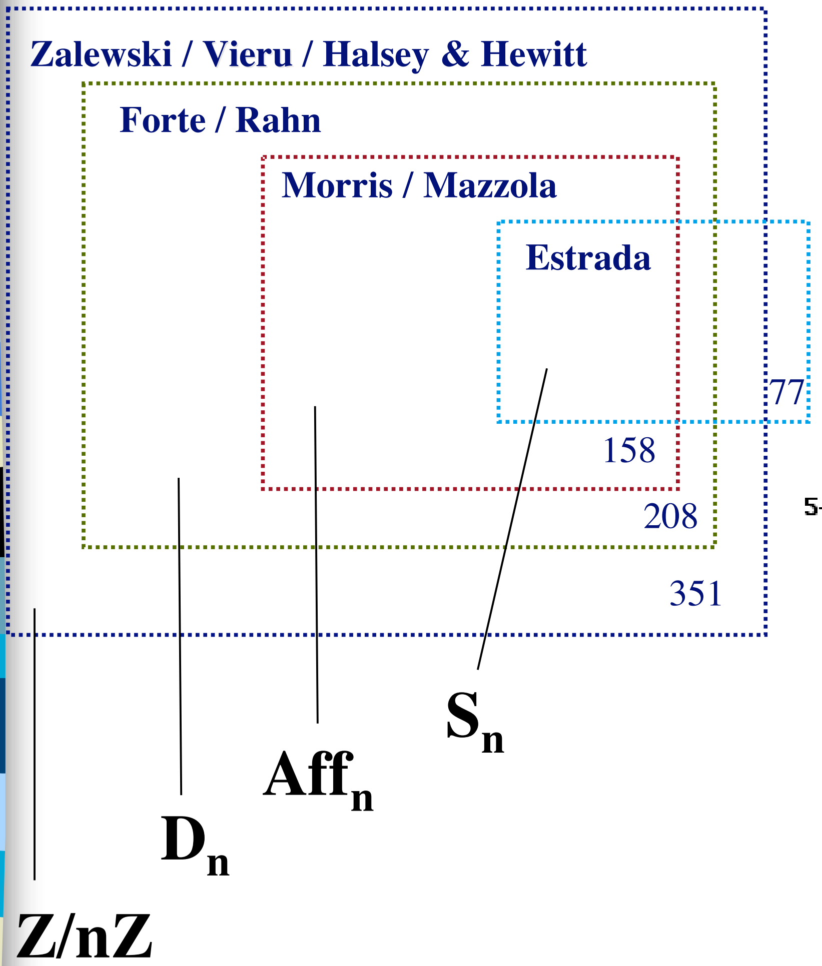
Teoria dei Setacci, CAO, AAO e TAO

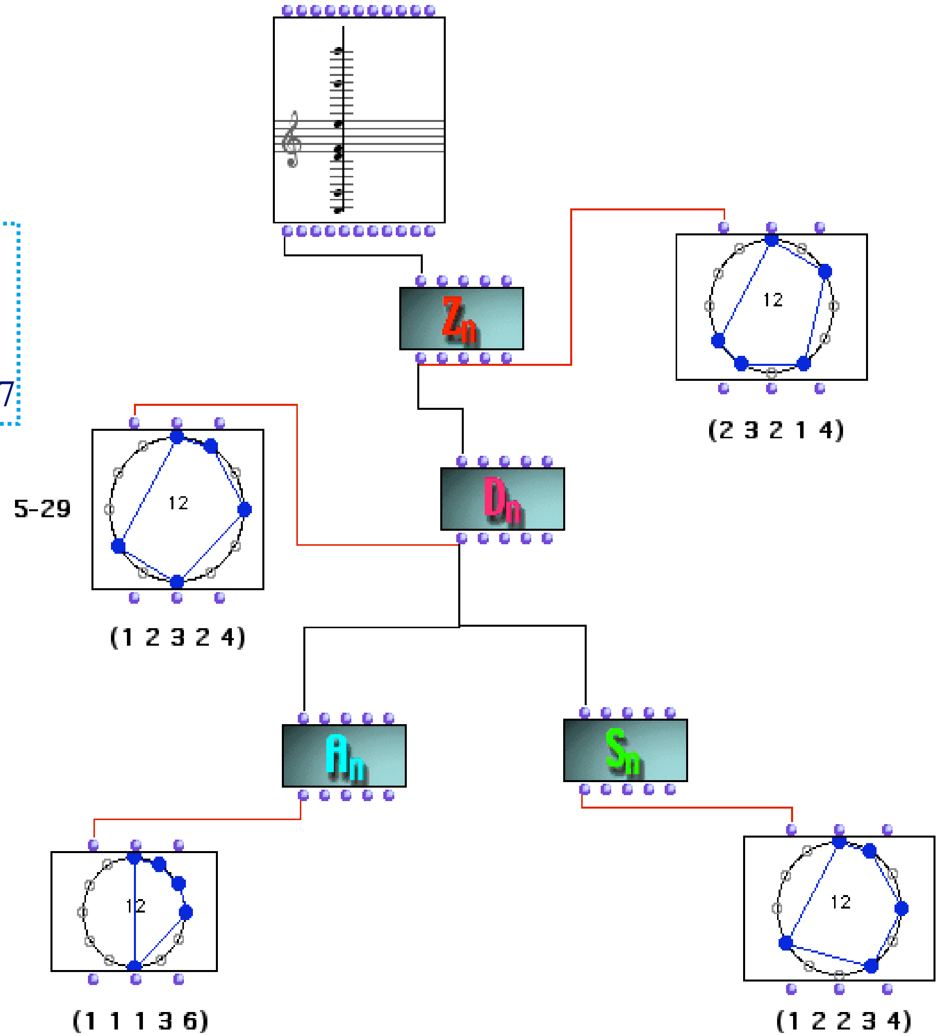




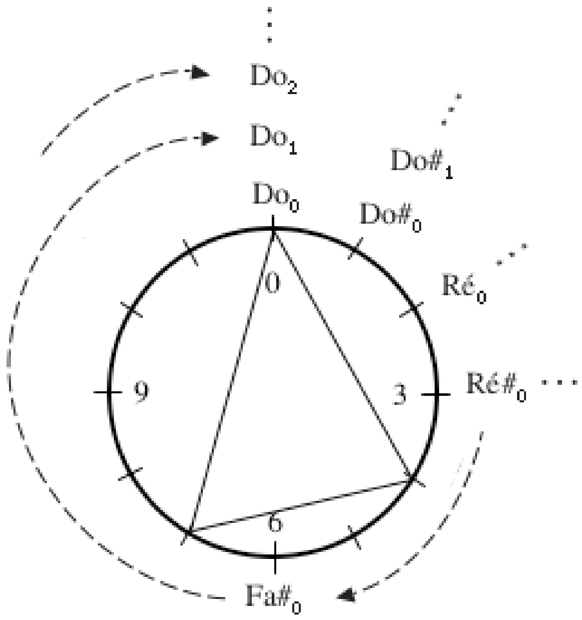
Approccio paradigmatico nella TAO

Cataloghi "ragionati" di strutture musicali (grazie all'azione di un gruppo)





La teoria modale d'Anatol Vieru
« Una teoria delle relazioni fra note e intervalli » (1998)



(4,3,5)

Struttura Intervallare

La congruenza modulo 12 è una relazione di ***equivalenza***

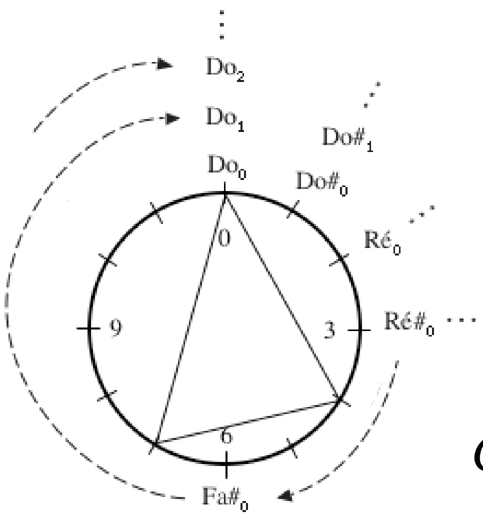
- Proprietà riflessiva: $a \sim a$
- Proprietà simmetrica: $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$
- Proprietà transitiva: $a \sim b,\ b \sim c \Rightarrow a \sim c$

Le classi di equivalenza modulo 12 definiscono una struttura di ***gruppo ciclico*** *(di ordine 12)*

- Chiusura (rispetto all'+ modulo 12)
- Esistenza dell'elemento neutro
- Esistenza dell'inverso
- Associatività
- Esiste (almeno) un elemento che genera tutto il gruppo

Quali e quanti sono i generatori del gruppo ciclico ***Z/12Z ?***

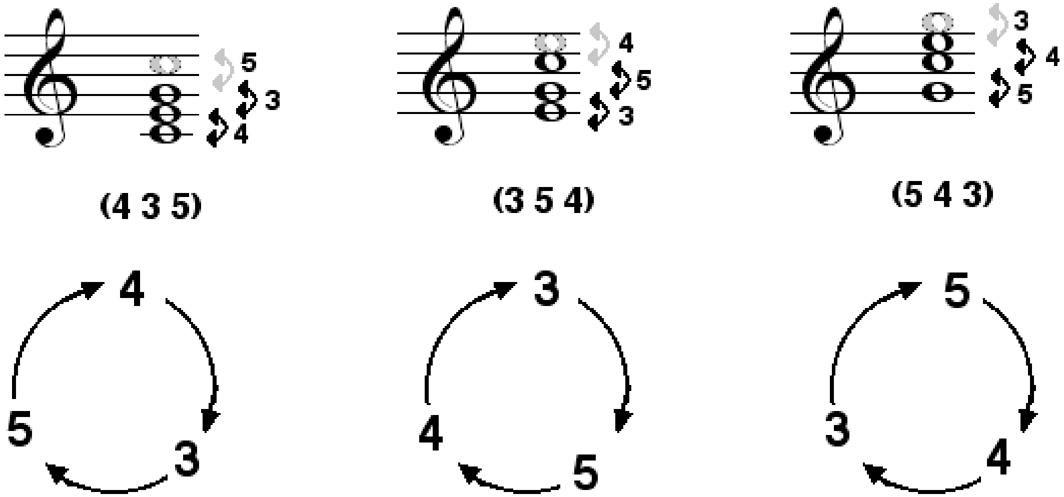
Rappresentazione circolare e struttura intervallare



(4,3,5)

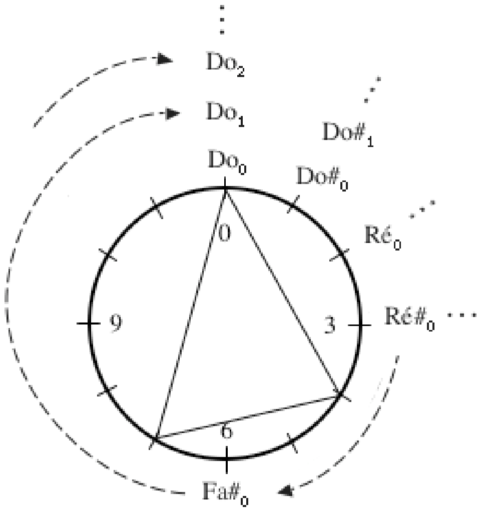
> *« Un **modo** è, per definizione, ogni collezione di classi di equivalenza (o residui) modulo 12 »*

Cartea Modurilor, 1980 (The Book of Modes, 1993)



I rivolti di un accordo sono le permutazioni circolari di una struttura intervallare

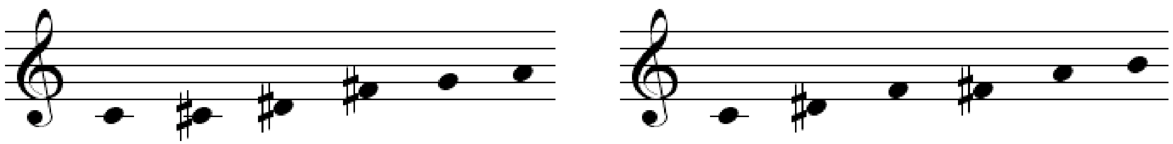
Rappresentazione circolare e struttura intervallare

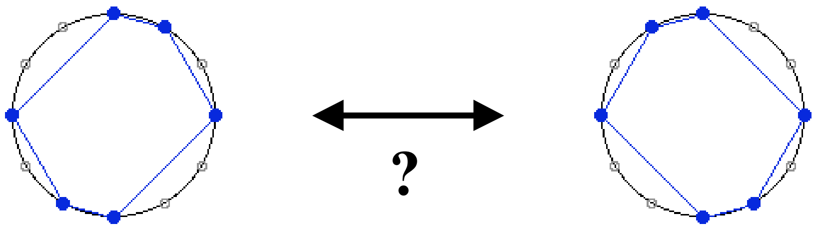


(4,3,5)

La rappresentazione circolare permette di mettere in evidenza le proprietà di ***simmetria*** *di un modo (o accordo, o scala , o ritmo, ...)*

Modi a trasposizione limitata di Messiaen (simmetria trasposizionale)



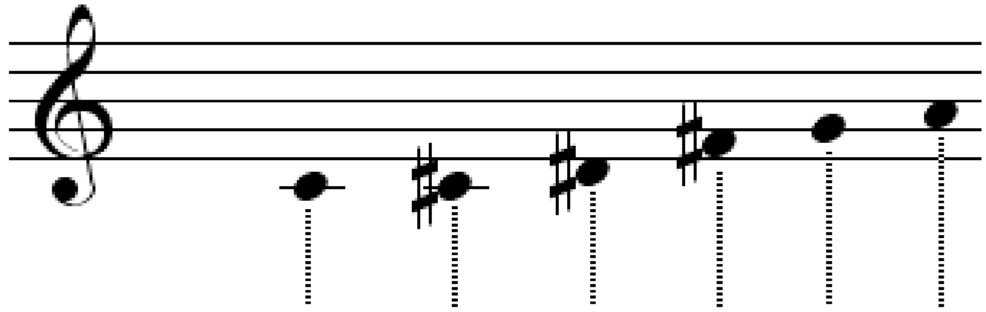


(1 2 3 1 2 3) (3 2 1 3 2 1)

L'operazione di composizione « • »

(fra modi e strutture intervallari)

Passare da una struttura intervallare al modo corrispondente



$(1\ 2\ 3\ 1\ 2\ 3)\bullet\{0\} = \{0,\ 1,\ 3,\ 6,\ 7,\ 9\}$

Composizione di una struttura intervallare e di un modo

$(6\ 6)\bullet\{0, 1, 3\}=?$

$=((6\ 6)\bullet\{0\})\cup((6\ 6)\bullet\{1\})\cup((6\ 6)\bullet\{3\})=$

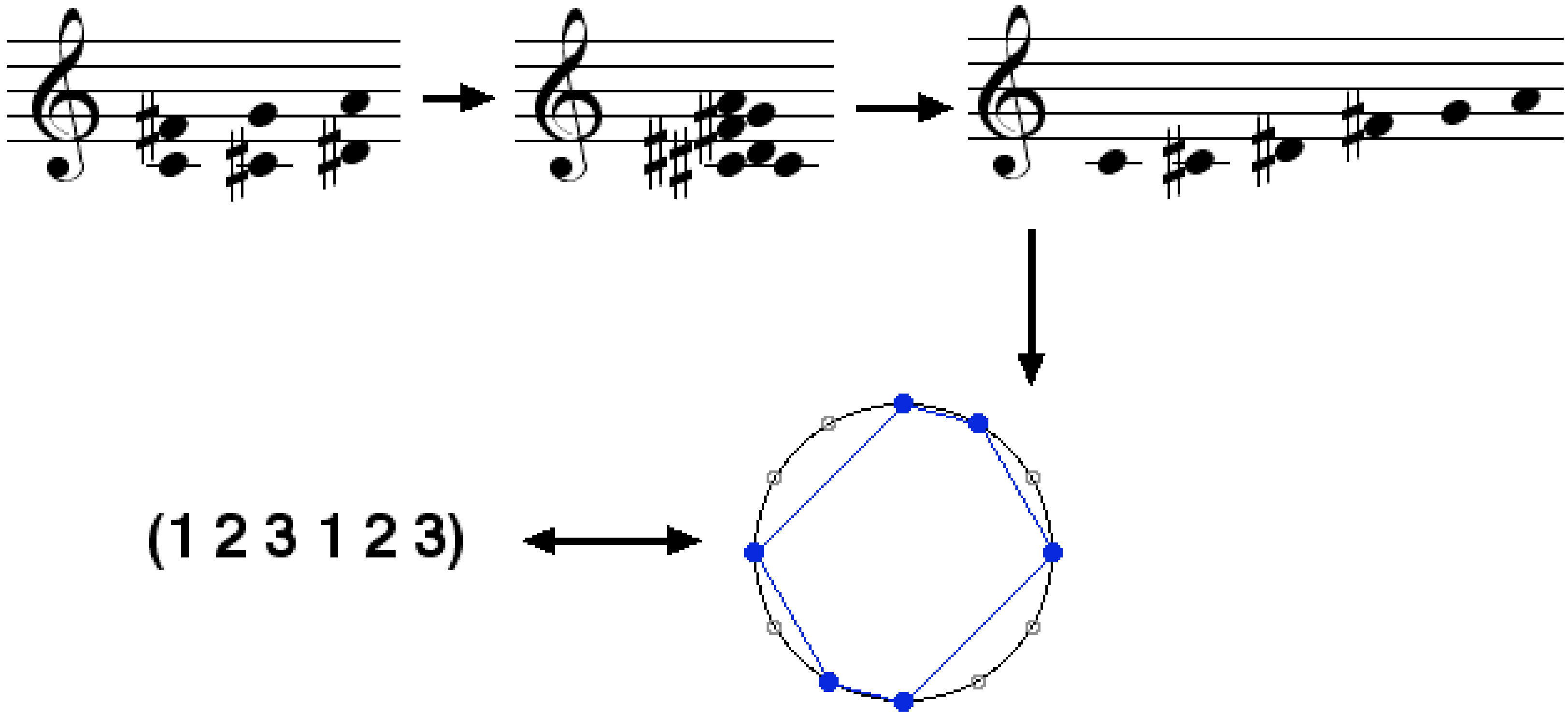
$=\{0,6\}\cup\{1,7\}\cup\{3,9\}=$

$=\{0,1,3,6,7,9\}.$

$\boxed{6_0 \cup 6_1 \cup 6_3}$

setaccio

« • » e « multiplications d'accords » (Boulez)
(o *Transpositional Combination*, Cohn)



Composizione di due strutture intervallari

(6 6) • (1 2 9) = ?

La composizione di due strutture intervallari

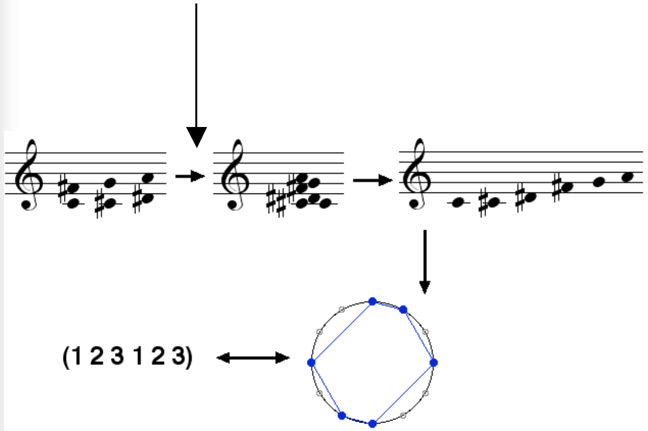
(6 6) • (1 2 9) = **?**

(6 6) • {0, 1, 3} =

…

= {0,1,3,6,7,9}

(1 2 3 1 2 3)

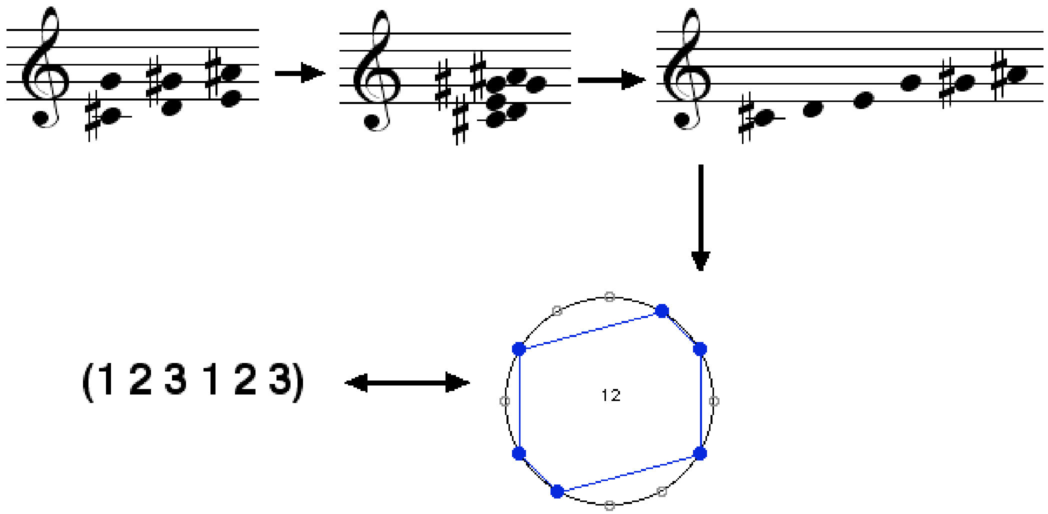


(6 6) • {1, 2, 4} =

={1,7}∪{2,8}∪{4,10}=

={1,2,4,7,8,10}

(1 2 3 1 2 3)



La composizione fra strutture intervallari è ben definita!

Applicazioni dell'operazione di composizione

- Costruzione di modi (generalizzati) di Messiaen
- Costruzione di canoni ritmici

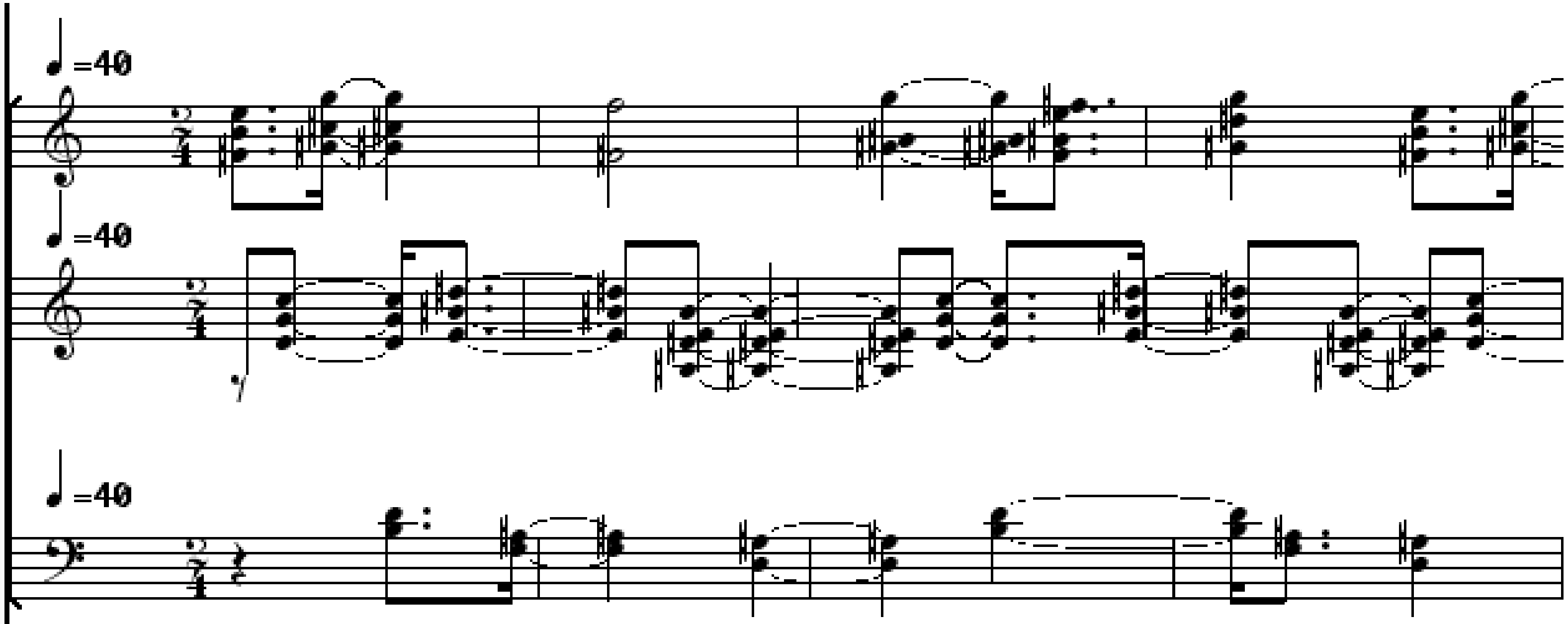
$(6\ 6) \bullet \{0, 1, 3\} = \ldots = \{0, 1, 3, 6, 7\ 9\} \rightarrow (1\ 2\ 3\ 1\ 2\ 3)$

$(6\ 6) \bullet \{0, 1\} = \ldots = \{0, 1, 6, 7\} \rightarrow (1\ 5\ 1\ 5)$

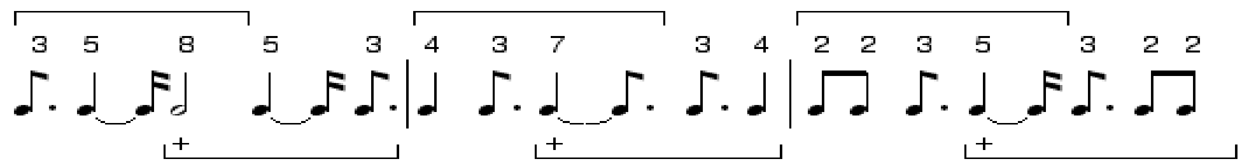
$(6\ 6) \bullet \{\, a, b, c, \ldots\} \rightarrow$ Modo di Messiaen

$A_1=(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$	$\leftrightarrow$	*Totale cromatico*
$A_2=(2,2,2,2,2,2)$		*Scala esatonale*
$A_3=(3,3,3,3)$		*Accordo diminuito*
$A_4=(4,4,4)$		*Triade aumentata*
$A_6=(6, 6)$		*tritono*
$A_7=(0)$		*« Classe di altezza »*

Costruzione di canoni ritmici



O. Messiaen: *Harawi* (1945)

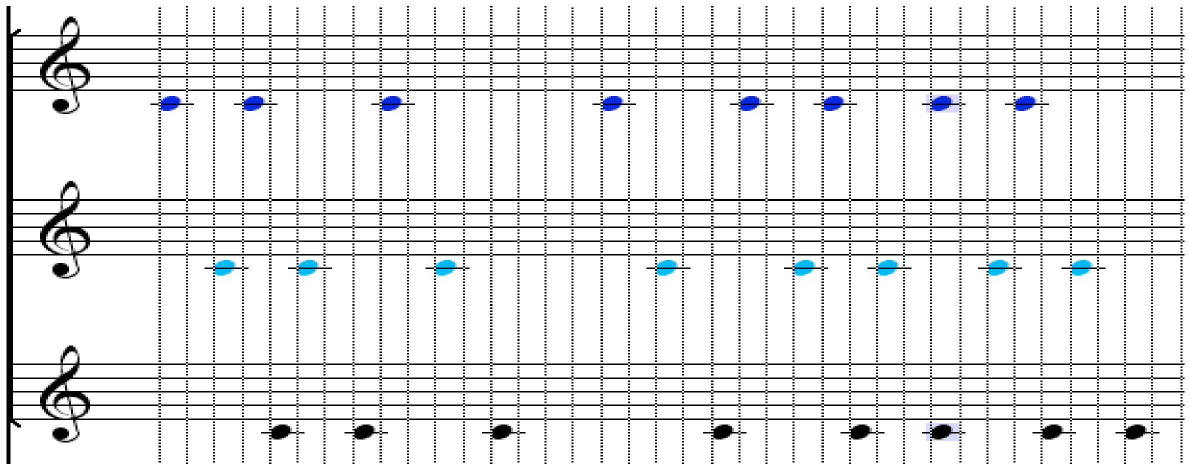


Pedale ritmico

« Remarquons […] que les trois rythmes non rétrogradables divisent les durée en 5+5+7 durées, alors que les termes des trois ostinatos harmoniques contiennent toujours six sonorités pour le supérieur, et trois sonorités pour les deux autres. Ajoutons que les durées sont très inégales »

O. Messiaen : *Traité de Rythme, de Couleur et d'Ornithologie,* tome 2, Alphonse Leduc, Editions Musicales, Paris, 1992.

Costruzione di canoni ritmici

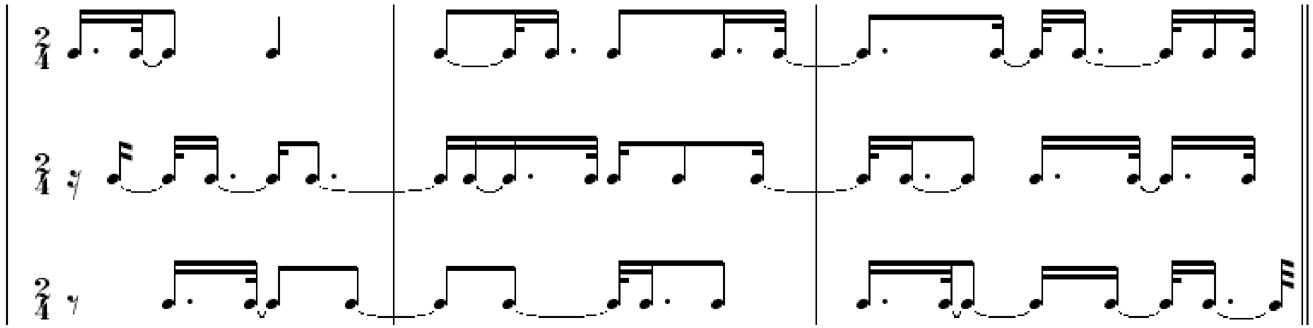


Modello ritmico

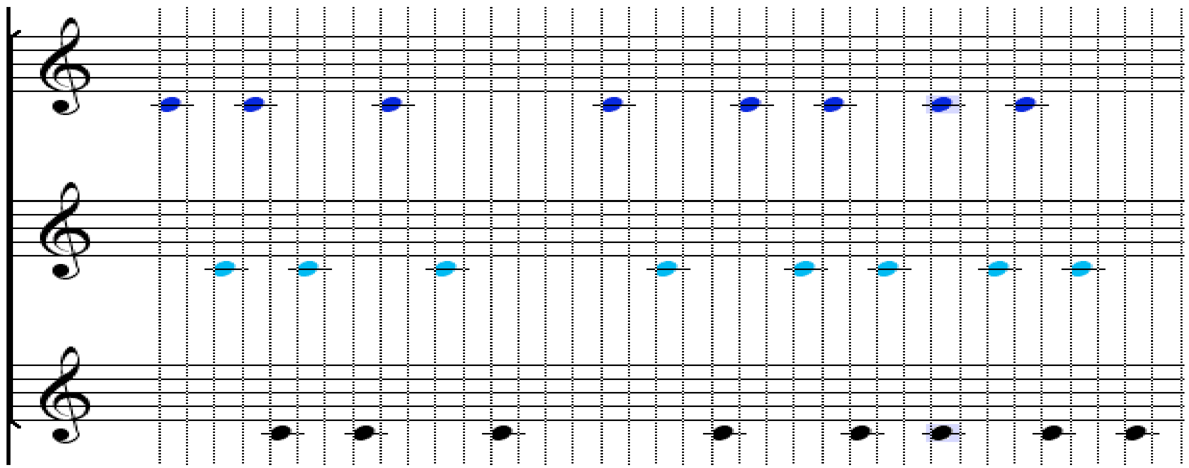
« …l résulte de tout cela que les différentes sonorités se mélangent ou s’opposent de manières très diverses, **jamais au même moment ni au même endroit […]. C’est du désordre organisé** »

O. Messiaen : *Traité de Rythme, de Couleur et d’Ornithologie,* tome 2, Alphonse Leduc, Editions Musicales, Paris, 1992.

Stessa struttura formale



Visions de l'Amen (1943)

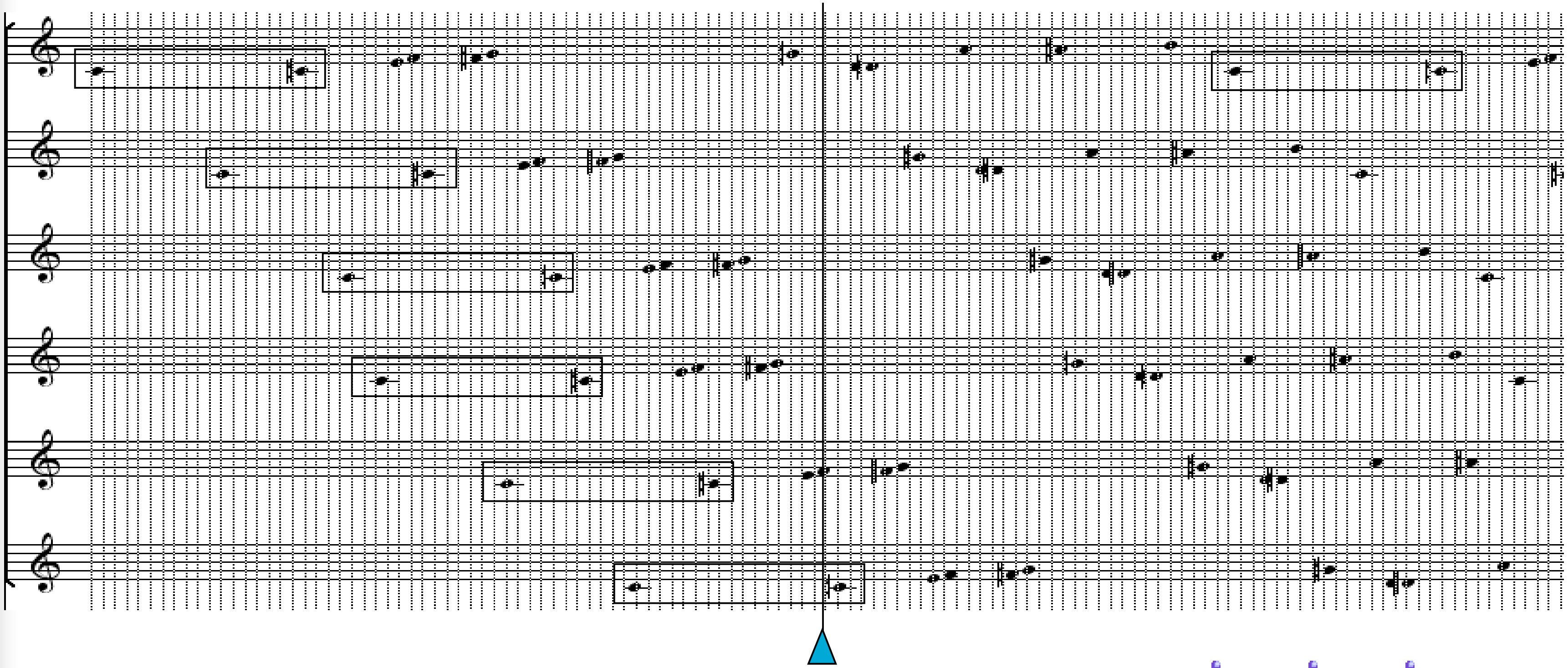


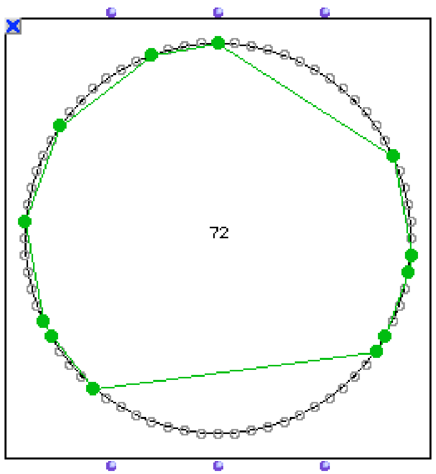
Modello ritmico

« …l résulte de tout cela que les différentes sonorités se mélangent ou s'opposent de manières très diverses, **jamais au même moment ni au même endroit […]. C'est du désordre organisé** »

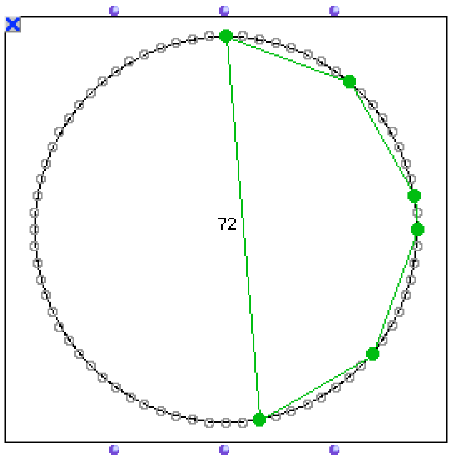
O. Messiaen : *Traité de Rythme, de Couleur et d'Ornithologie,* tome 2, Alphonse Leduc, Editions Musicales, Paris, 1992.

Canoni ritmici « a mosaico » (Tiling)

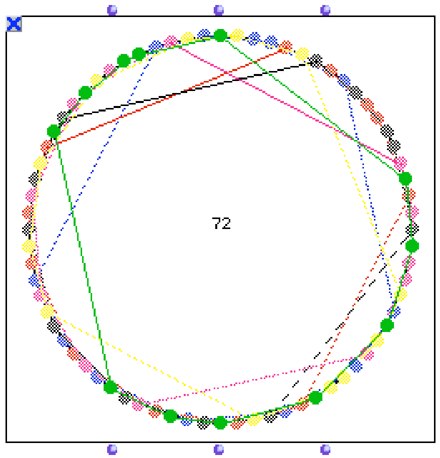




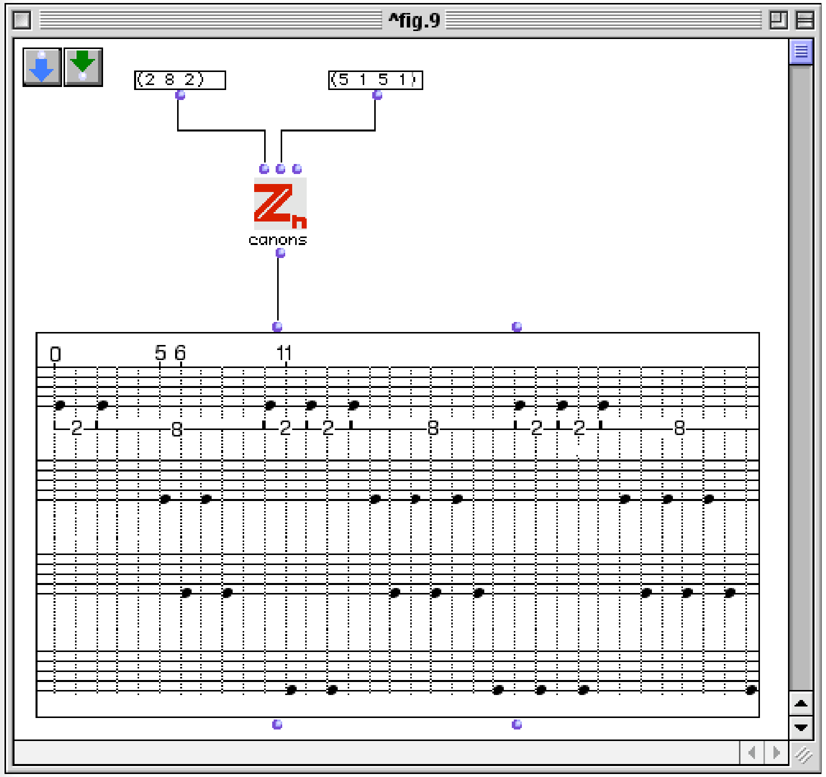
+

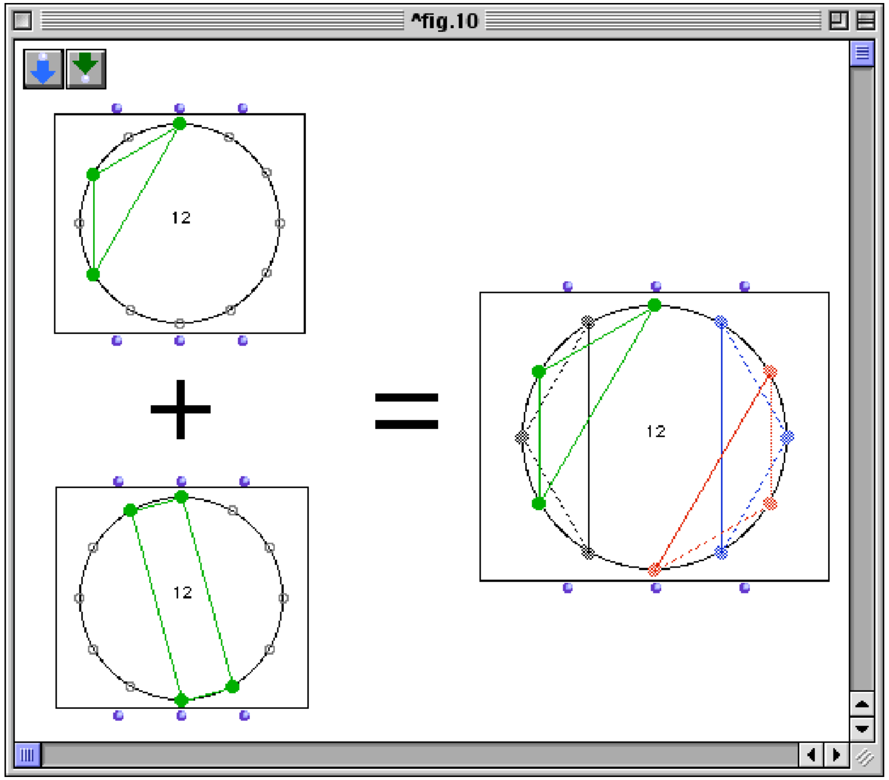


=



Operazione di composizione e canoni a mosaico

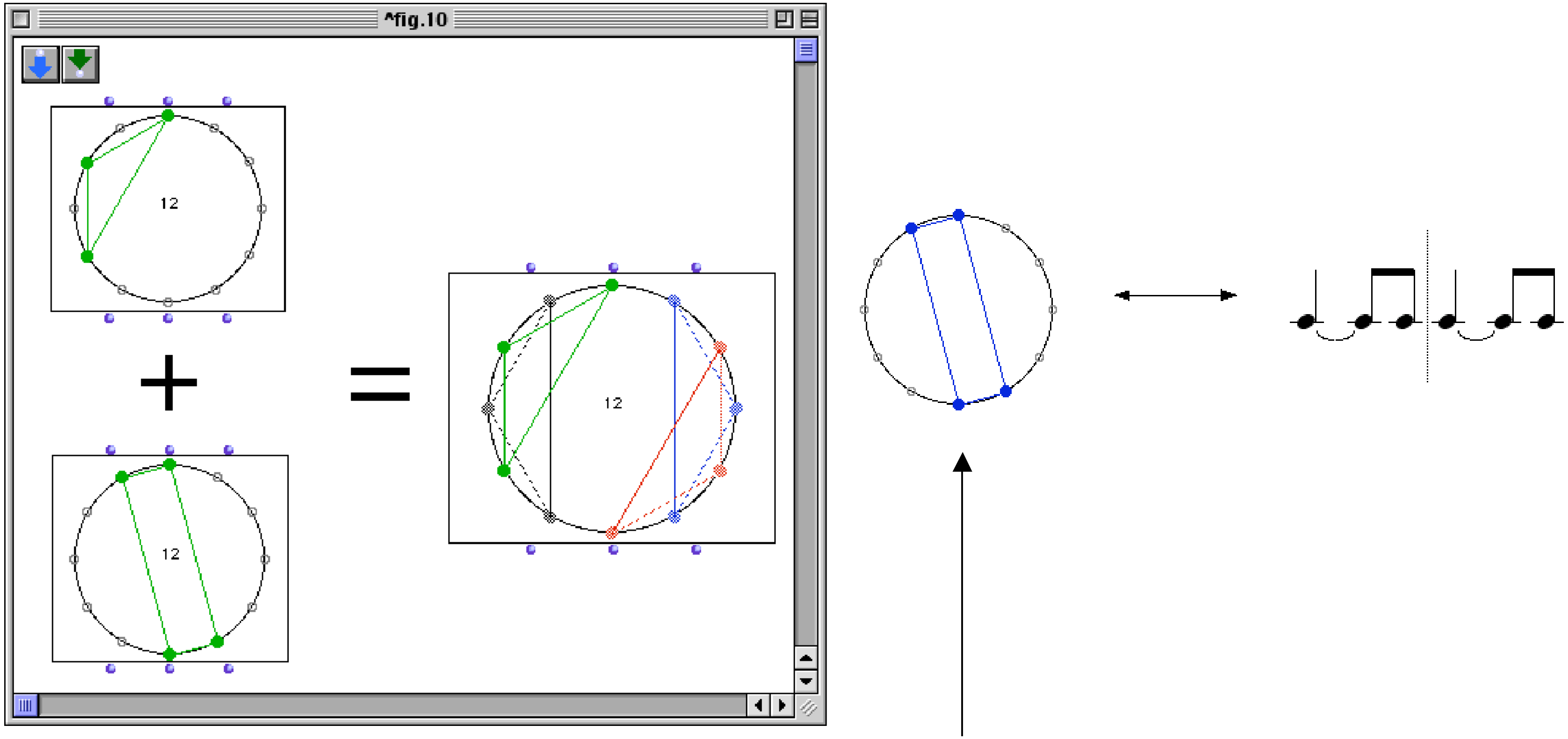




$$(2\ 8\ 2) \bullet (5\ 1\ 5\ 1) = \mathbf{Z/12Z}$$

Modo a trasposizione limitata

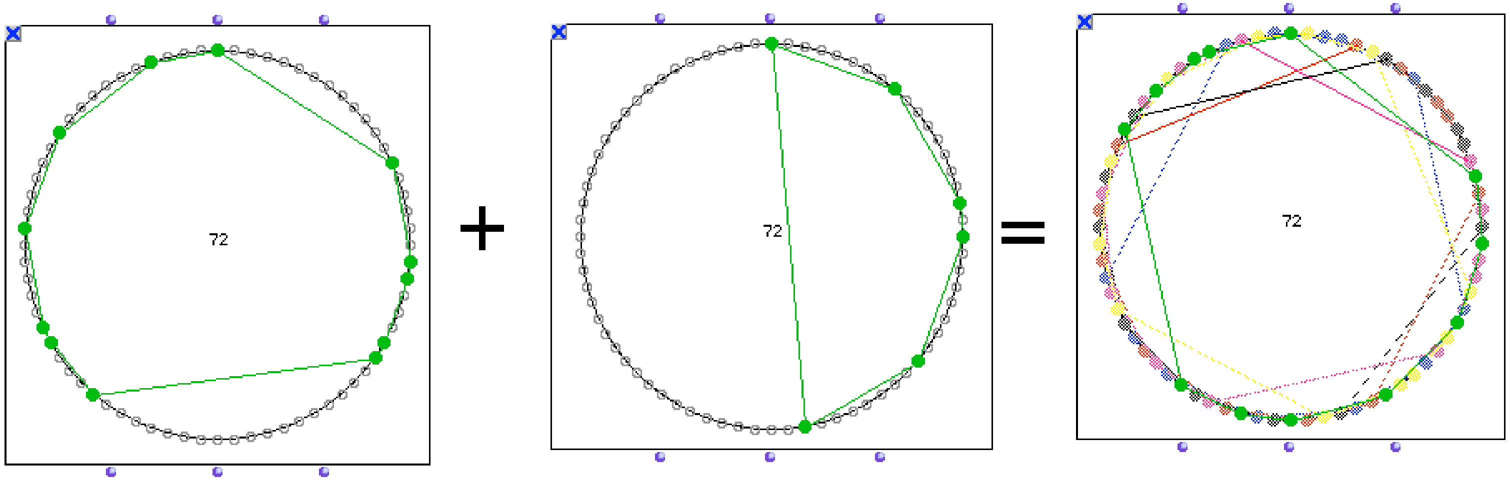
Necessità di togliere la proprietà di Messiaen



$$(2\ 8\ 2) \bullet (5\ 1\ 5\ 1) = \mathbf{Z/12Z}$$

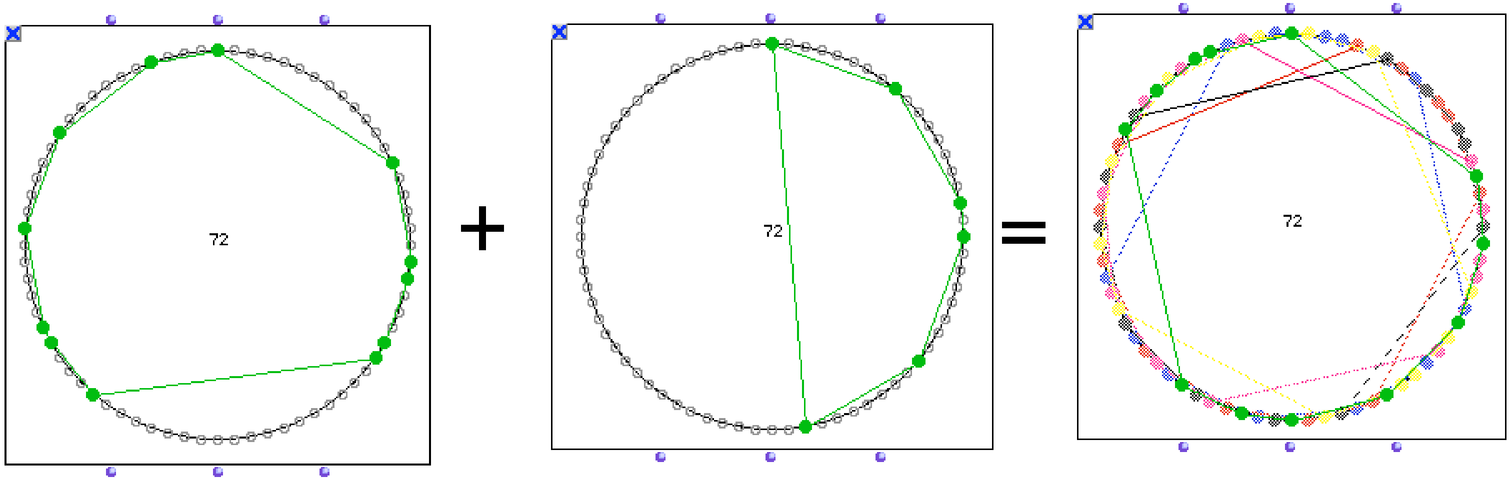
Modo a trasposizione limitata

La famiglia dei canoni ritmici RCCM



$n \in$ (72 108 120 144 168 180 200 216 240 252 264 270 280 288 300 312 324 336 360 378 392 396 400 408 432 440 450 456 468 480 500 504 520 528 540 552 560 576 588 594 600 612 616 624 648 672 675 680 684 696 700 702 720 728 744 750 756 760 784 792 800 810 816 828 864 880 882 888 900 912 918 920 936 945 952 960 968 972 980 984 1000)

Verso una classificazione dei canoni RCCM

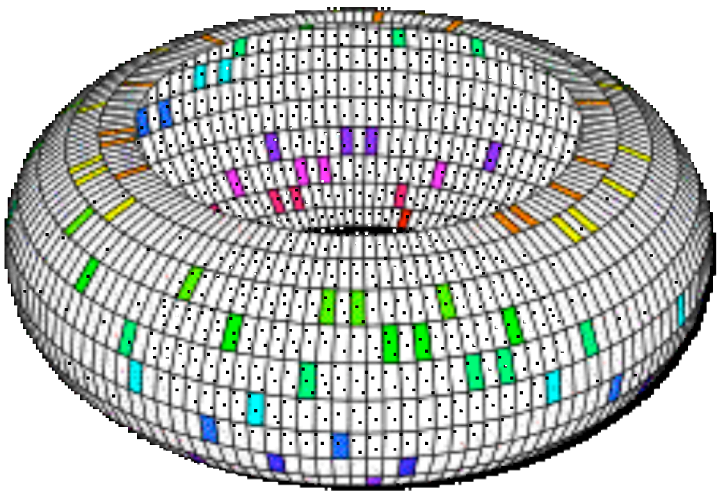


R

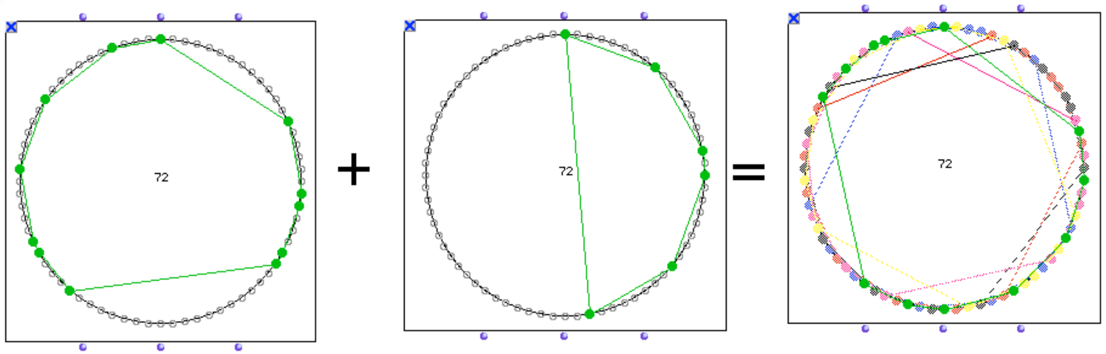
(1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)
(20 3 1 5 6 9 4 11 6 3 3 1)
(1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6)
(6 13 4 7 6 6 1 4 19 1 4 1)
(1 5 15 4 5 6 6 3 4 17 3 3)
(3 3 17 4 3 6 6 5 4 15 5 1)

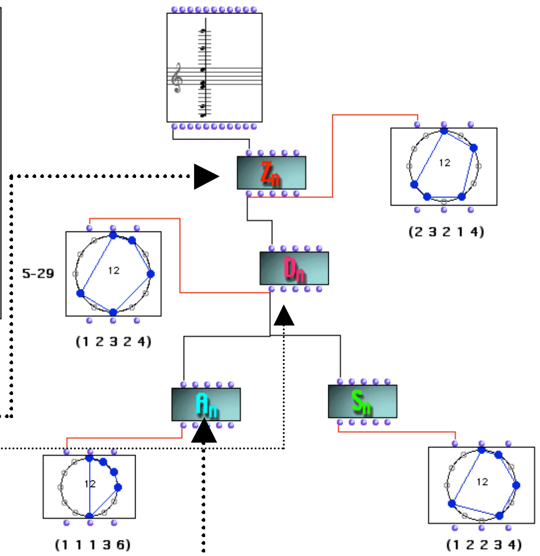
S

(8 8 2 8 8 38)
(16 2 14 2 16 22)
(14 8 10 8 14 18)



Classificazione (paradigmatica) dei canoni RCCM





R

(1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)
(20 3 1 5 6 9 4 11 6 3 3 1)
(1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6)
(6 13 4 7 6 6 1 4 19 1 4 1)
(1 5 15 4 5 6 6 3 4 17 3 3)
(3 3 17 4 3 6 6 5 4 15 5 1)

(8 8 2 8 8 38)
(16 2 14 2 16 22)
(14 8 10 8 14 18)

S

R

(1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)
(1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6)
(1 5 15 4 5 6 6 3 4 17 3 3)

(8 8 2 8 8 38)
(16 2 14 2 16 22)
(14 8 10 8 14 18)

S

=> *OpenMusic*

R

(1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)

(14 8 10 8 14 18)

S

Georges Bloch (2001-2004)

Strategie compositive a partire da un modello formale

- Organizzazione metrica di un canone a mosaico
- Riduzione di un canone a mosaico in canoni auto-similari
- Modulazione metrica fra canoni
- Trasformazione di un canone ritmico in « texture »

- *Projet Beyeler* (2001)
- *Projet Hitchcock*
- *Visite des tours de la cathédrale de Reims*
- *Noël des Chasseurs*
- *Canons à marcher*
- *Canon à eau*
- *Harawun* (2004)

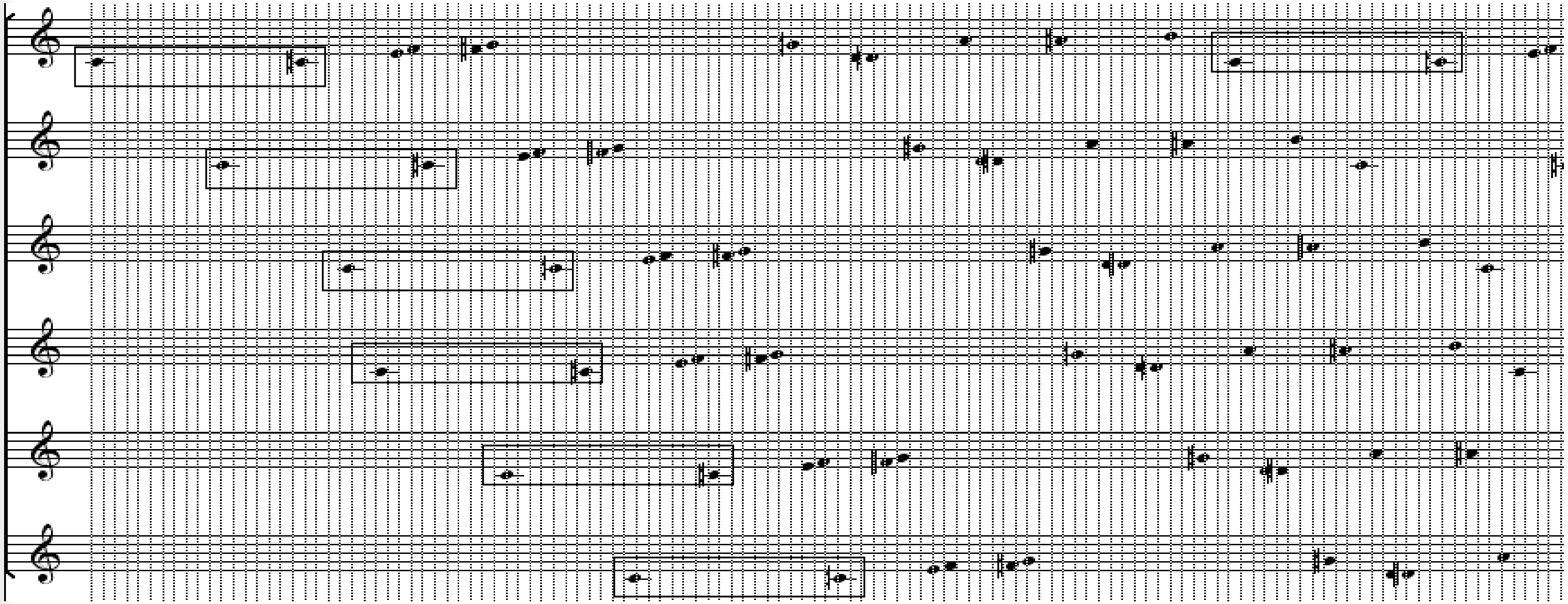
Harawun: L'entata di un canone RCCM (su *Harawi*)

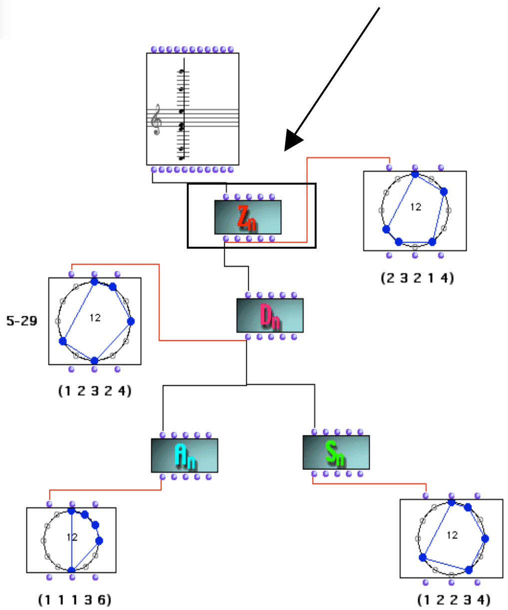
Georges Bloch (2001-2004)

Strategie compositive a partire dal modello formale

Canon Final : trasformazione di un canon ritmico in « texture »

Aspetti computazionali



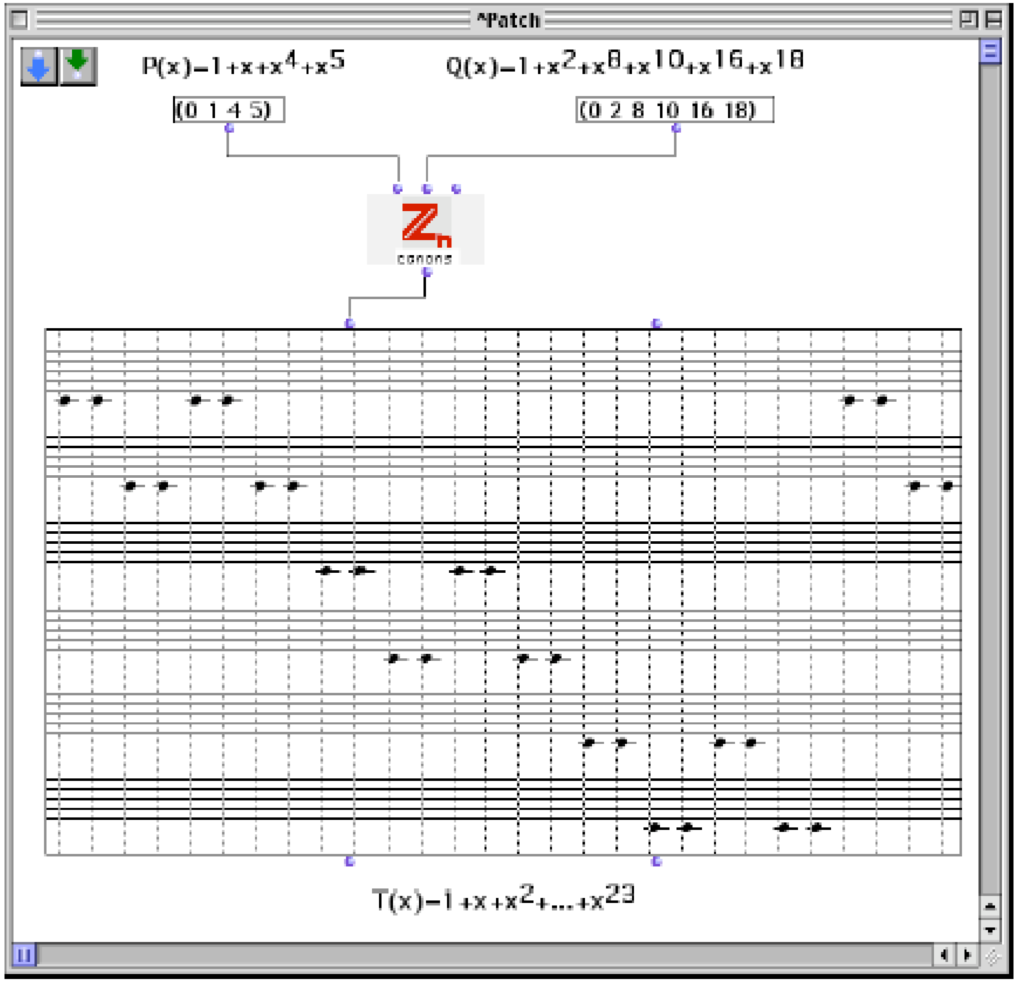


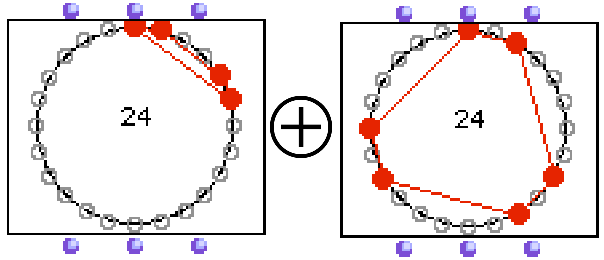
- Enumerazione delle soluzioni
- Classificazione paradigmatica
- Compattaggio e modulazioni
- Mosaici e percezione/cognizione
- Dualità locale/globale

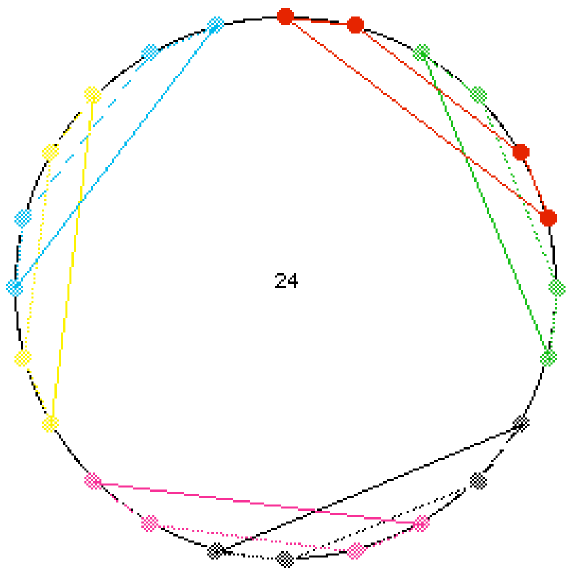
Canoni a mosaico e polinomi

$$A \oplus B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow A(x) = \sum_{k \in A} x^k$$

$$A(x) \times B(x) = (A \oplus B)(x) \equiv 1 + x + \dots x^{n-1} \pmod{X^n - 1}$$







La dualité son/intervalles

Séquences périodiques et différences finies

$Df(x)=f(x)-f(x-1)$.

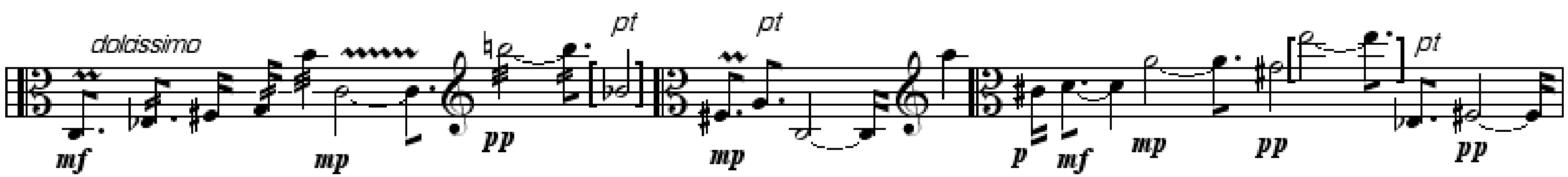
$$f \quad = \quad 7\ 11\ 10\ 11\ 7\ 2\ \ 7\ 11\ 10\ 11\ 7\ 2\ \ 7\ 11\ldots$$

$$Df \quad = \quad 4\ 11\ 1\ 8\ 7\ 5\ \ 4\ 11\ 1\ 8\ 7\ 5\ \ 4\ 11\ldots$$

$$D^2 f \quad = \quad 11\ 7\ 2\ 7\ 11\ 0\ \ 11\ 7\ 2\ 7\ 11\ 0\ldots$$

$$D^3 f \quad = \quad 1\ 8\ 7\ 5\ 4\ 11\ \ 1\ 8\ 7\ 5\ 4\ 11\ldots$$

$$D^k f \quad = \quad \ldots\ldots$$



V	0	3	8	7	11	0	11	10	6	9	0	9	1	2	9	8	4	3	6
VIII	0	0	0	0	3	3	7	2	0	0	0	6	3	3	3	4	8	0	0
IV	3	3	4	4	1	11	11	8	3	3	9	4	1	7	11	8	11	3	9
IX	0	0	0	0	0	3	6	[1]	3	3	3	3	9	0	3	6	[10]	6	6
IV	0	10	3	9	10	0	9	7	0	6	7	9	6	4	9	3	4	6	3

Zone d'oubli pour alto (1973)

Altre applicazioni compositive della teoria modale
Le sequenze periodiche (*Cartea Modurilor*, 1980)

f = 11 6 7 2 3 10 11 6 7 2 3 10…

Df = 7 1 7 1 7 1 7 1…

$D^2 f$ = 6 6 6 6 6…

$D^3 f$ = 0 0 0…

$Df(x)=f(x)-f(x-1)$.

Sequenze riduttibili: esiste un intero $k \geq 1$ tale che $D^k f = 0$

f = 11 10 11 7 2 7 11 10 11 7 2 7 11 10 11 7 2 7…

Df = 4 11 1 8 7 5 4 11 1 8 7 5 4 11 1 8 7 5…

$D^2 f$ = 11 7 2 7 11 0 11 7 2 7 11 0…

$D^3 f$ = 1 8 7 5 4 11 1 8 7 5 4 11…

$D^4 f$ = 2 7 11 10 11 7 2 7 11 10 11 7 2 7 11 10 11 7 …

Sequenze riptoduttibili: esiste un intero $k \geq 1$ tale che $D^k f = f$

Altre applicazioni analitiche della teoria modale

Diatonismo/cromatismo nelle strutture intervallari

« *Oggi possiamo affermare che il diatonismo, che era sinonimo di semplicità musicale, è in realtà un fenomeno complesso. [...] Diatonismo e cromatismo non possono essere spiegati in termini di semplicità o di complessità, come si pensava un tempo. Si tratta invece di una questione di unità dei contrari nel gruppo* $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ »

A. Vieru : « The Musical signification of Multiplication by 7. Diatonicity and Chromaticity », *Muzica*, 1, pp. 64-67, 1995.

Verso un approccio algebrico in analisi musicale

L'articolazione teoria/analisi

« Teoria ed analisi sono per certi aspetti discipline reciproche. L'analisi permette di abordare una **struttura musicale** o uno **stile** attraverso l'esplorazione [inspection], l'inventario delle sue componenti e l'identificazione delle sue forze connettive, dando nello stesso tempo una descrizione adeguata di una certa esperienza vissuta. La teoria permette di **generalizzare** a partire da questi dati concreti prevedendo ciò che l'analista troverà in altri casi all'interno di **un'orbita strutturale** o **stilistica** e inventando [devising] dei **sistemi** attraverso i quali delle altre opere, anche quelle che non sono ancora state scritte, possono essere prodotte. Viceversa, se la teoria ha l'intuizione di come i sistemi musicali operano, allora l'analisi offre delle ripercussioni [feedbacks] a quelle intuizioni immaginifiche rendendole più penetranti [insightful] »

Ian Bent (in E. Kurth : *Selected writings*, Cambridge Studies in Music Theory and Analysis, Cambridge University Press, 1991).

Tipologie per l’analisi musicale

I quattro grossi periodi storici secondo Ian Bent (*Analisi*, 1987)

1. 1920 - 1945 : Teoria della tensione e dei livelli strutturali (Kurth/teoria della *Gestalt* e Heinrich Schenker)

2. 1945 - 1960 : linguistica, cibernetica, e unità tematica (Chomsky, Moles e Meyer, Reti)

3. 1960 - 1975 : *Set Theory*, computer-music e altri sviluppi (fenomenologia, Xenakis, semiologia musicale)

4. Dopo il 1975: grammatiche della musica (Lerdahl et Jackendoff, Baroni).

Tipologie per l'analisi musicale
(Nicholas Cook : *A Guide to Musical Analysis*, 1987)

1. Metodi tradizionali nell'analisi (Donald Tovey, A. B. Marx, C. Rosen)
2. Analisi schenkeriana
3. Approcci psicologici dell'analisi (Thomas Clifton, Leonard Meyer, Rudolph Reti)
4. Approcci formali nell'analisi
5. Set Theory : Allen Forte
6. Semiotica : Nattiez
7. Tecniche d'analisi comparativa (su computer : Michael Kassler)
8. Analisi melodica ed etnomusicologia : Charles Adams
9. Approccio funzionalista in etnomusicologia (indagine sul terreno) : John Blacking.

Tipologia minimale: 3+1

Approcci teorico/analitici nella musicologia del XX° secolo

1. Teorie « informazionali » (*Information Theory*)
   - George Birkhoff: la natura matematica dell'originalità (1933)
   - Shannon e Weaver: codice, messaggio e ridondanza (1949)
   - Leonard Meyer: la natura probabilista dello stile musicale (1957)
   - Abraham Moles: teoria dell'informazione e percezione estetica (1958)
   - Eugene Narmour: modello implicazione/realizzazione (1989/1992)

2. Teorie semiotiche
   - Nicolas Ruwet: analisi paradigmatica (1966/1972)
   - Jean-Jacques Nattiez/Jean Molino: la tripartizione
   - David Osmond-Smith: relazioni iconiche e trasformazioni (1973)

3. Teorie generative e grammatiche musicali
   - Noam Chomski: grammatica generativa (1956)
   - C. Longuet-Higgins: la percezione (generativa) delle melodie (1976)
   - Lerdahl e Jackendoff (1983)
   - Mario Baroni: modelli computazionali per le grammatiche musicali

Tipologia minimale: 3+1

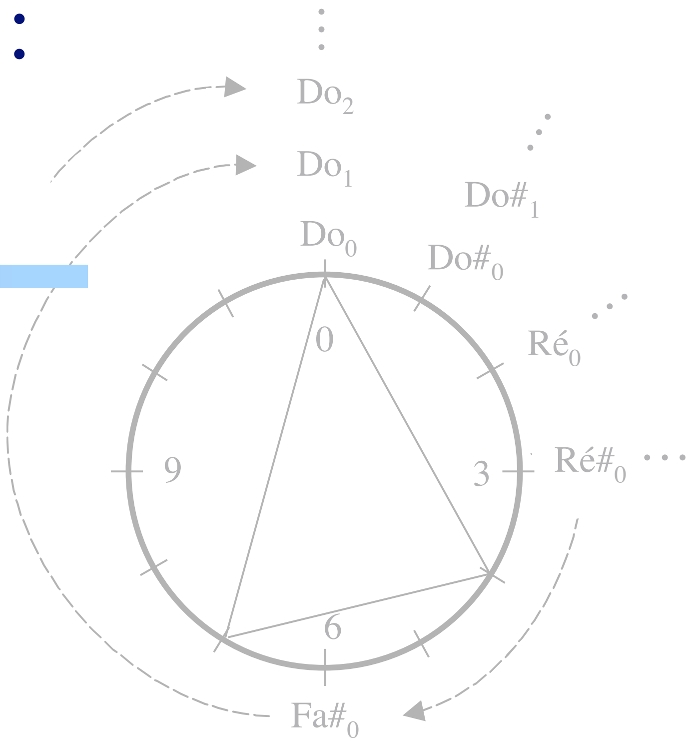
Approcci teorico/analitici nella musicologia del XX° secolo

1. Teorie « informazionali » (*Information Theory*)
2. Teorie semiotiche
3. Teorie generative e grammatiche musicali

4. Teorie algebriche:
   - Tradizione americana:
     - *Set Theory* « classica » (Forte, Rahn, Morris, …) e « trasformazionale » (Babbitt, Lewin, Klumpenhouwer, …)
     - Teorie neo-riemanniane (Lewin, Cohn, Gollin, …)
     - Teorie diatoniche (Clough, Carey, Clampitt, …)
   - Tradizione europea (+Europa dell'Est)
     - *Analyse formalisée* (Riotte, Mesnage, Assayag, …)
     - Teoria modale (Vieru, Zalewski, Brediceanu, …)
     - Teoria matematica della musica (Mazzola, Noll, Amiot, …)
     - Etnomusicologia formalizzata e grammatiche (Chemillier)

Les principes de base de la *Set Theory* : une introduction

Set Theory « classique » et Approches Transformationnelles



{0, 4, 7}

Moreno Andreatta
Stéphan Schaub

Colloque international
Autour de la *Set Theory*
Résonances 2003 - IRCAM

(Cf. *Musurgia*, X, 1, 2003)

I principi di base della *Set Theory* : un'introduzione

The basic principles of Set Theory: an introduction

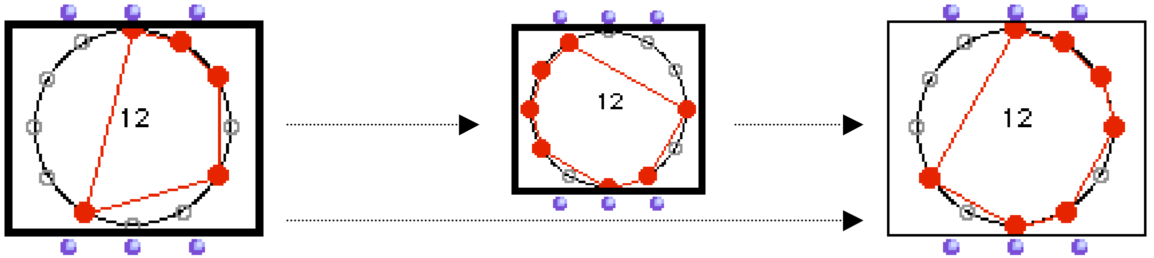
Set Theory « classica »

Insieme di classi di altezze (Ensembles de Classes de Hauteurs ECH o PCS)
Contenuto intervallare
Trasformationi algebrico/musicali e problemi di catalogazione
Relazioni fra PCS's

Approcci trasformazionali

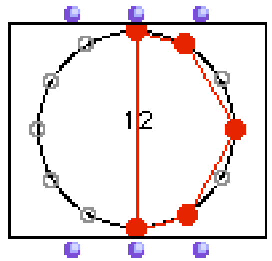
Costruzione di un sistema generalizzato di intervalli: GIS
Alcune generalizzazioni della *Set Theory* tradizionale
Analisi trasformazionale (a partire dal *Klavierstück III* di K. Stockhausen)

Le catalogue des *pcs* d'Allen Forte (1973)



5-Z36	0,1,2,4,7	222121

7-Z36	0,1,2,3,5,6,8	444342



5-Z12

Insieme (letterale) di classi di altezze

(Literal) pitch class set (pcs)

A. Schoenberg *Sechs kleine Klavierstücke* op. 19 no. 4, 1911 (Forte 2003)

A

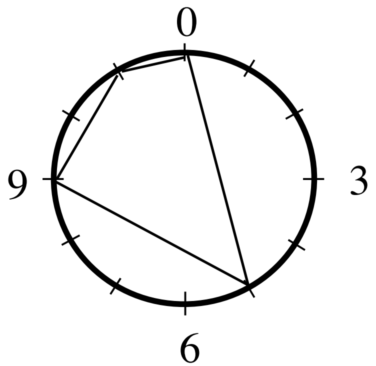
m. 2

↓

{do, fa, si, la}

{0, 5, 11, 9}

{0, 5, 9, 11}



B

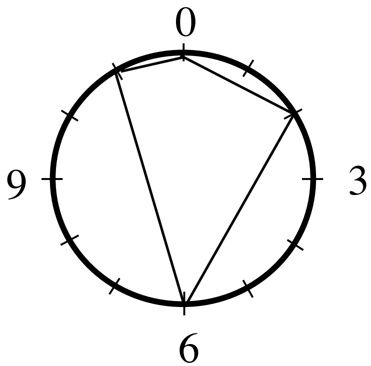
m. 5

↓

{si, do, ré; fa$^\#$}

{11, 0, 2; 6}

{0, 2, 6, 11}



C

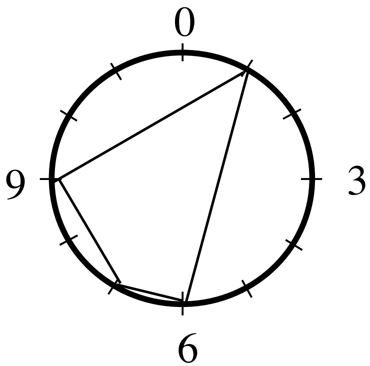
m. 8

↓

{sol, la, fa$^\#$, do$^\#$}

{7, 9, 6, 1}

{1, 6, 7, 9}



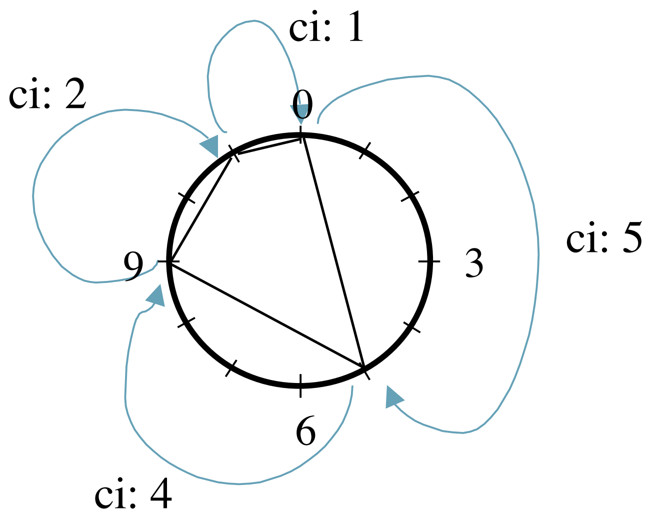
Classi d'intervalli e contenuto intervallare di un pcs (1)

Interval Classes and Interval Content of a pcs

Come per le altezze, gli intervalli sono riuniti in « classi » modulo l'ottava. Le classi di intervalli sono rappresentate numericamente dal numero di semitoni che contengono (modulo l'ottava). Si ha quindi:

- unisono: 0
- seconda minore: 1
- seconda maggiore: 2
- terza maggiore: 3
- …
- settima maggiore: 11.

La struttura intervallare (Zalewski, Vieru) recensisce gli intervalli consecutivi fra classi di altezze poste in ordine crescente



A = {0, 5, 9, 11}

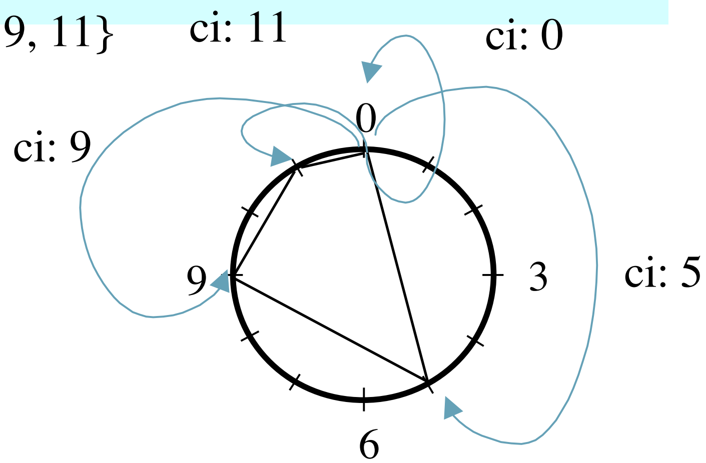
SI(A) = (5, 4, 2, 1)

Classi d'intervalli e contenuto intervallare di un pcs (2)

Interval Classes and Interval Content of a pcs

Il vettore IFUNC (Lewin) recensisce la frequenza di apparizione delle classi d'intervalli contenute in un pcs

A = {0, 5, 9, 11}



IFUNC(A, A) = [4 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]

ci 0 ci 1 ci 2 … ci 11.

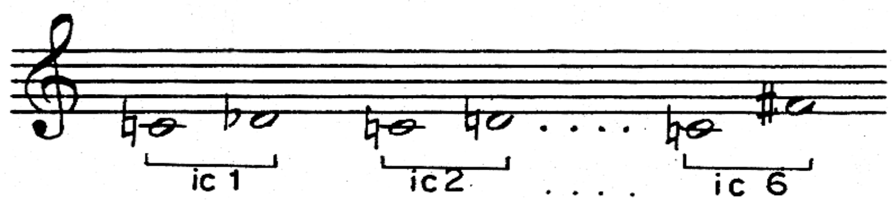
Nell'approccio tradizionale l'informazione è ancora più condensata visto che un intervallo ed il suo inverso sono considerati come equivalenti (quindi appartenenti alla stessa classe)

- Seconda minore/settima maggiore: 1.
- Seconda maggiore/settima minore: 2
- …
- tritono: 6.

VI(A) = [1 1 1 1 1 1]

ci 1 ci 2 ci 3 … ci 6.

Ex. E. Interval classes

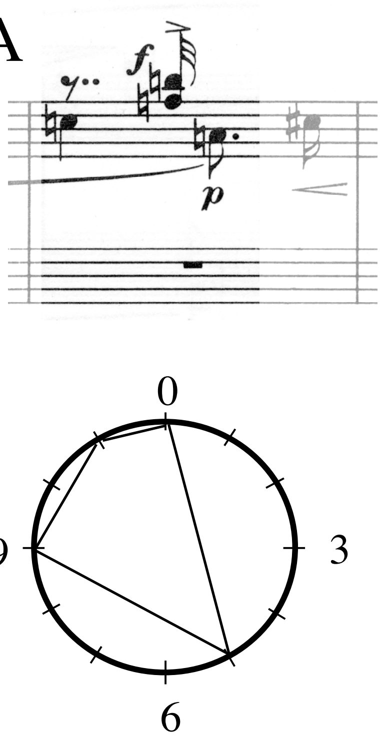


Il vettore intervallare (Forte) recensisce la frequenza di apparizione delle classi d'intervalli contenute in un pcs (modulo la relazione d'équivalenza precedente).

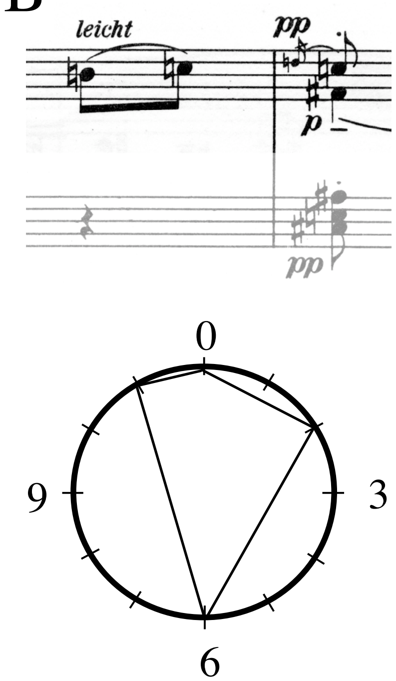
Classi di intervalli e contenuto intervallare di un pcs

Interval Classes and Interval Content of a pcs

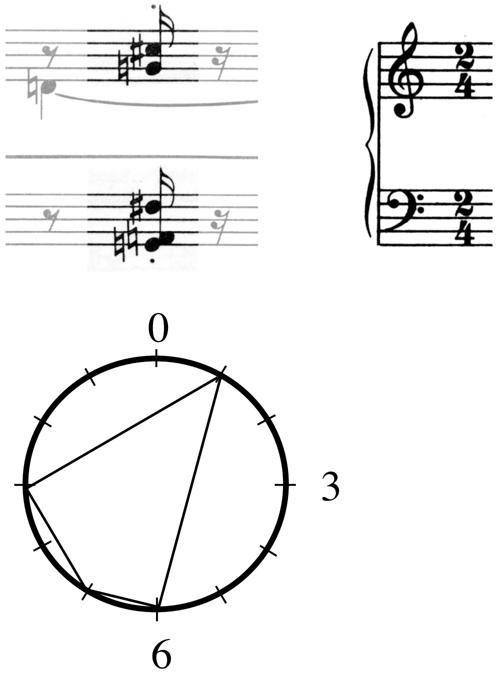
A



B



C



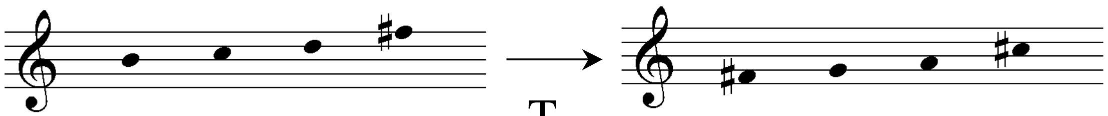
	A	B	C
SI:	(5, 4, 2, 1)	(2, 4, 5, 1)	(5, 1, 2, 4)
IFUNC:	[4 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]	[4 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]	[4 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]
VI:	[1 1 1 1 1 1]	[1 1 1 1 1 1]	[1 1 1 1 1 1]

Transformations d'ECH : la Transposition

Pcs Transformations: Transposition

Trasporre un insieme di classi di altezze di un numero *n* di semitoni significa trasporre ciscuno degli elementi dell'insieme di *n* semitoni (ascendenti)

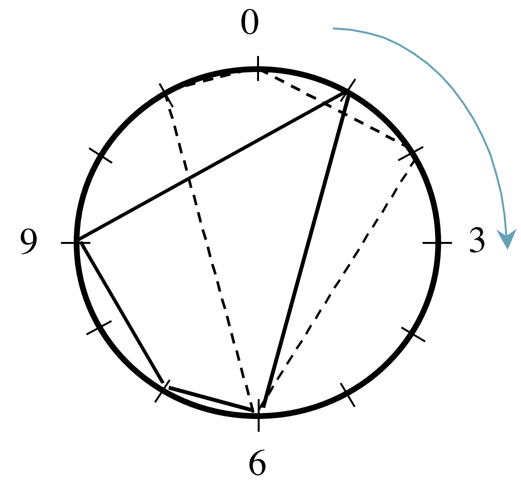
Exemple:



T_7

{11, 0, 2, 6} → {6, 7, 9, 1}

Transposzione di sette semitoni (quinta giusta)



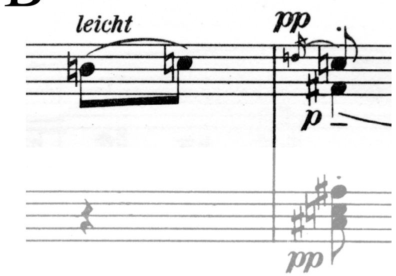
Nell'aritmetica modulo 12, l'operazione si esprime nel seguente modo:

$T_n\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} = \{a_1 + n \text{ Mod } 12,\ a_2 + n \text{ Mod } 12, \ldots, a_k + n \text{ Mod } 12\}$

Trasformazoni d’insiemi di classi di altezze: la Trasposizione

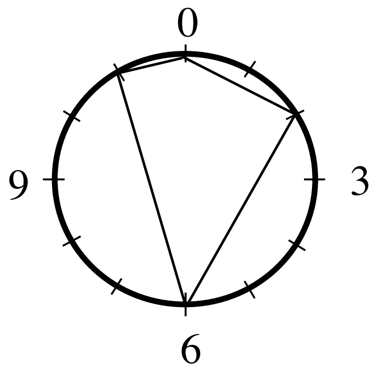
Pcs Transformations : Transposition

B



↓

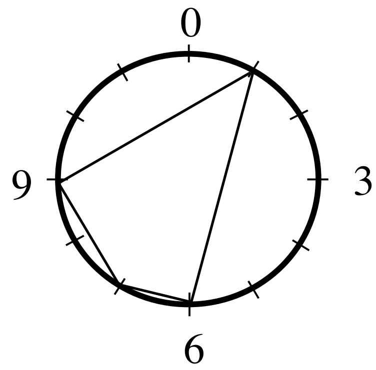
{0, 2, 6, 11}



C

↓

{1, 6, 7, 9}



- - - -→ T_7

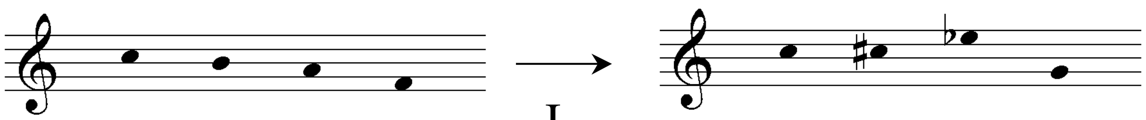
$T_7(B) = C$

Trasformazioni d’insiemi di classi d’altezze : l’Inversione

Pcs Transformations: Inversion

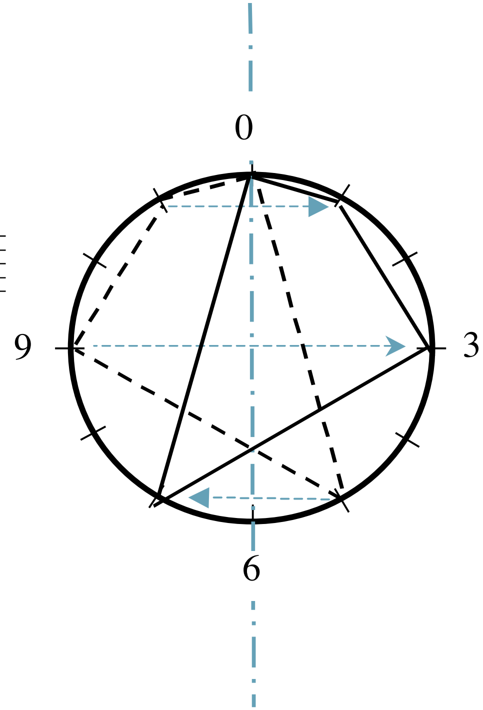
L’inversione (rispetto ad un « polo », es. 0) consiste nell’invertire l’ordine (ascendente diventa discendente e viceversa) di ogni intervallo rispetto allo 0

Esempio:



$\{0, 11, 9, 5\} \xrightarrow{I_0} \{0, 1, 3, 5\}$

Inversione (rispetto allo 0)

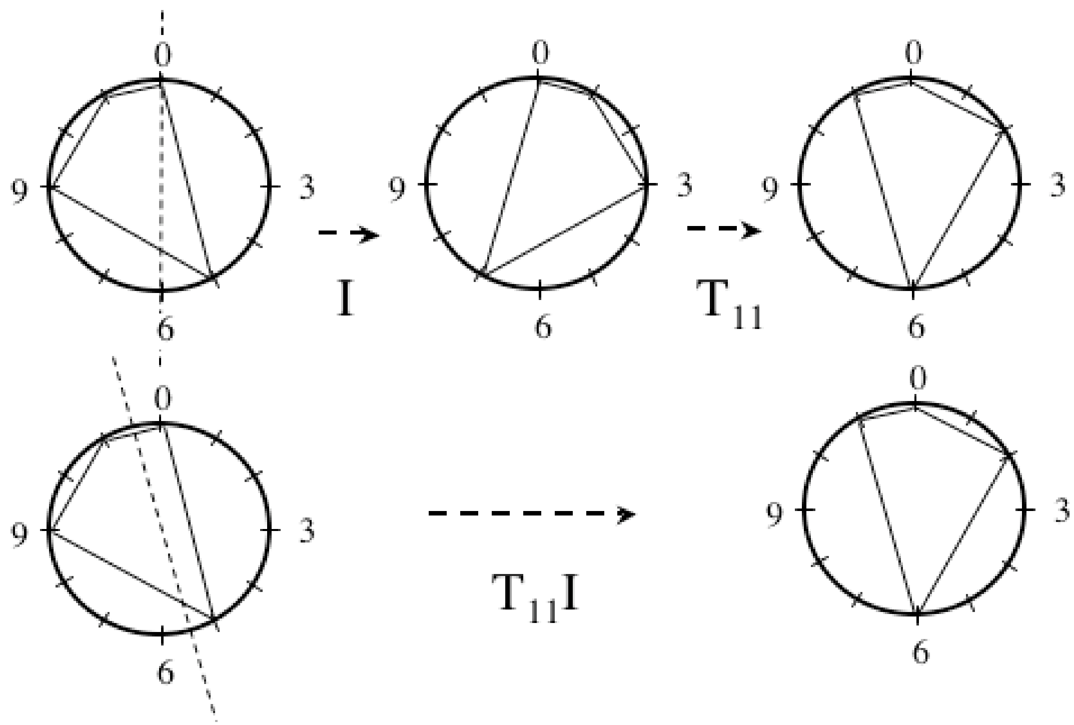


Formalmente:

$I\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} = \{- a_1 \text{ Mod } 12, \; - a_2 \text{ Mod } 12, \ldots, - a_k \text{ Mod } 12\}$

Trasformatiozioni di pcs: Inversioni e Trasposizioni

Pcs Transformations : Inversion and Transposition

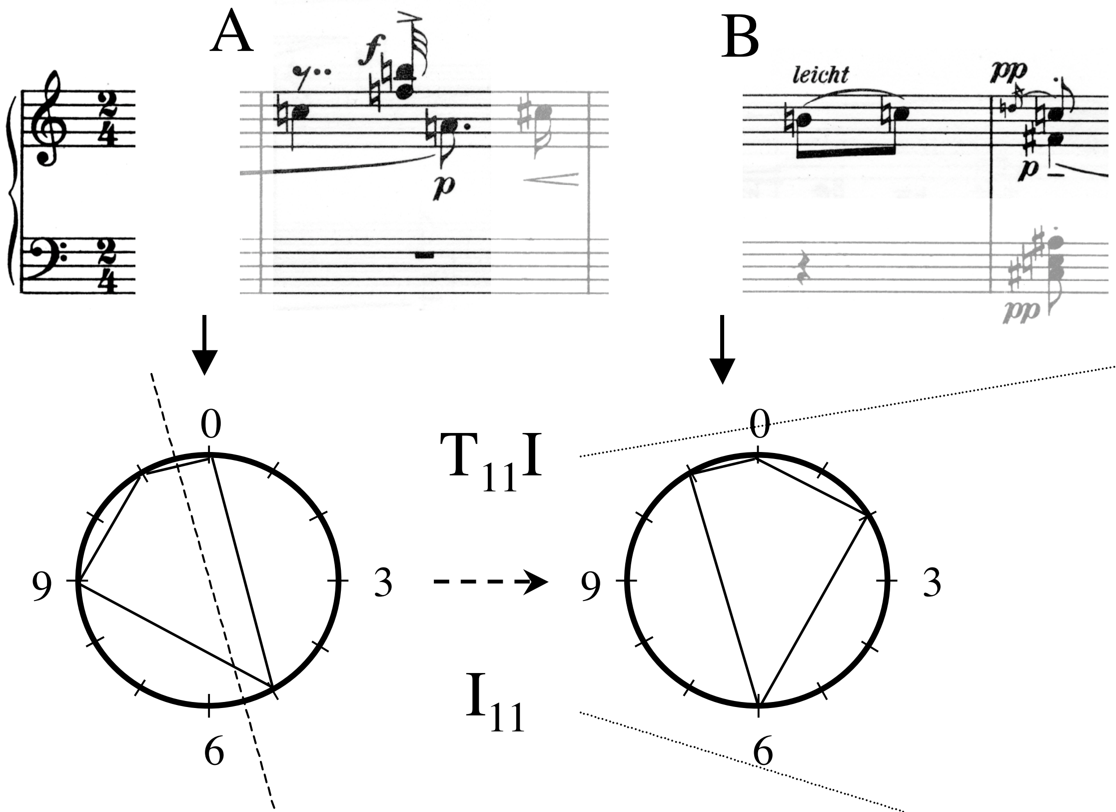


L'inversione / trasposizion din un pcs si può definire formalmente nel seguente modo:

$$T_nI\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} = \{- a_1 + n \text{ Mod } 12,\ - a_2 + n \text{ Mod } 12, \ldots, - a_k + n \text{ Mod } 12\}$$

Trasformazioni di pcs: l’inversione generica (rispetto ad un polo)

Pcs Transformations : Inversion



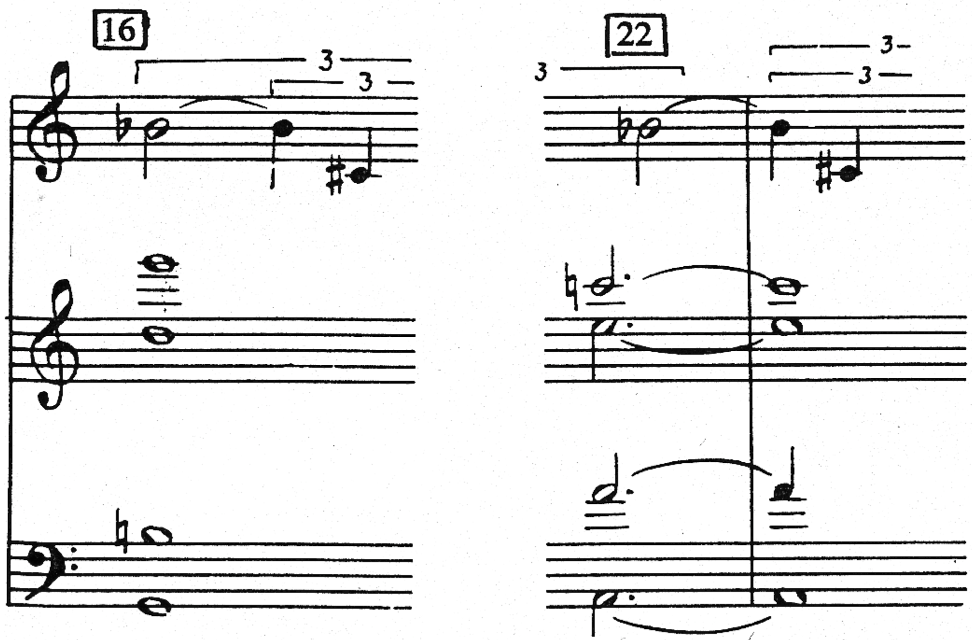
$T_{11}I(A) = B$

$I_{11}(A) = B$

Trasformazioni di pcs: l’inversione generica (rispetto ad un polo)

Pcs Transformations : Inversion

Ives, *The Unanswered Question*



A : [7,10,11,2] B : [7,11,1,2] C : [9,10,0,4] D : [9,0,1,4]

Copyright 1953 by Southern Music Publishing Co., Inc.
Used by permission.

$$A \xrightarrow{T_2} D$$

$$B \xrightarrow[I\,T_{11}]{} C$$

$T_2(A) = D$

$IT_{11}(B) = C$

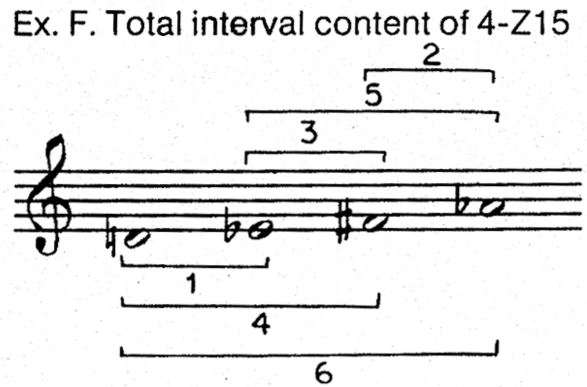
$I\,T = T\,I$

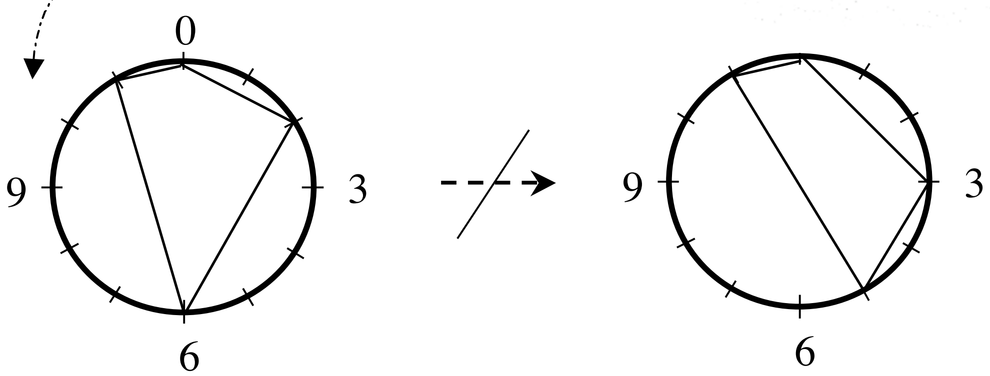
?

La Relazione Z

Z-relation

Due insiemi di classi di altezze possono avere lo stesso contenuto intervallare senza essere equivalenti (via trasposizione o inversione)

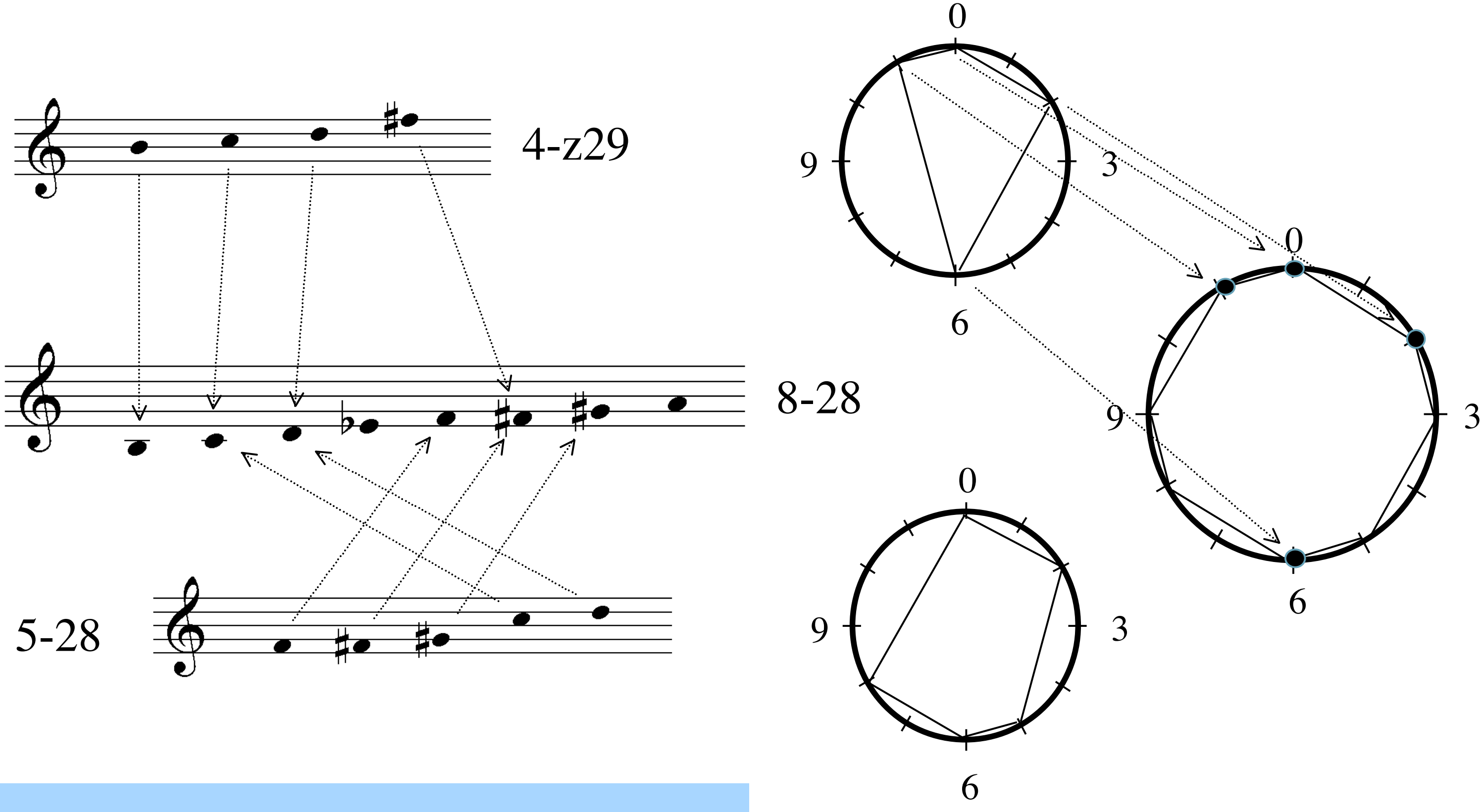




VI: [1 1 1 1 1 1] - - - → [1 1 1 1 1 1]

Relazioni fra pcs: l'inclusione « letterale »

Relations between pcs: literal inclusion

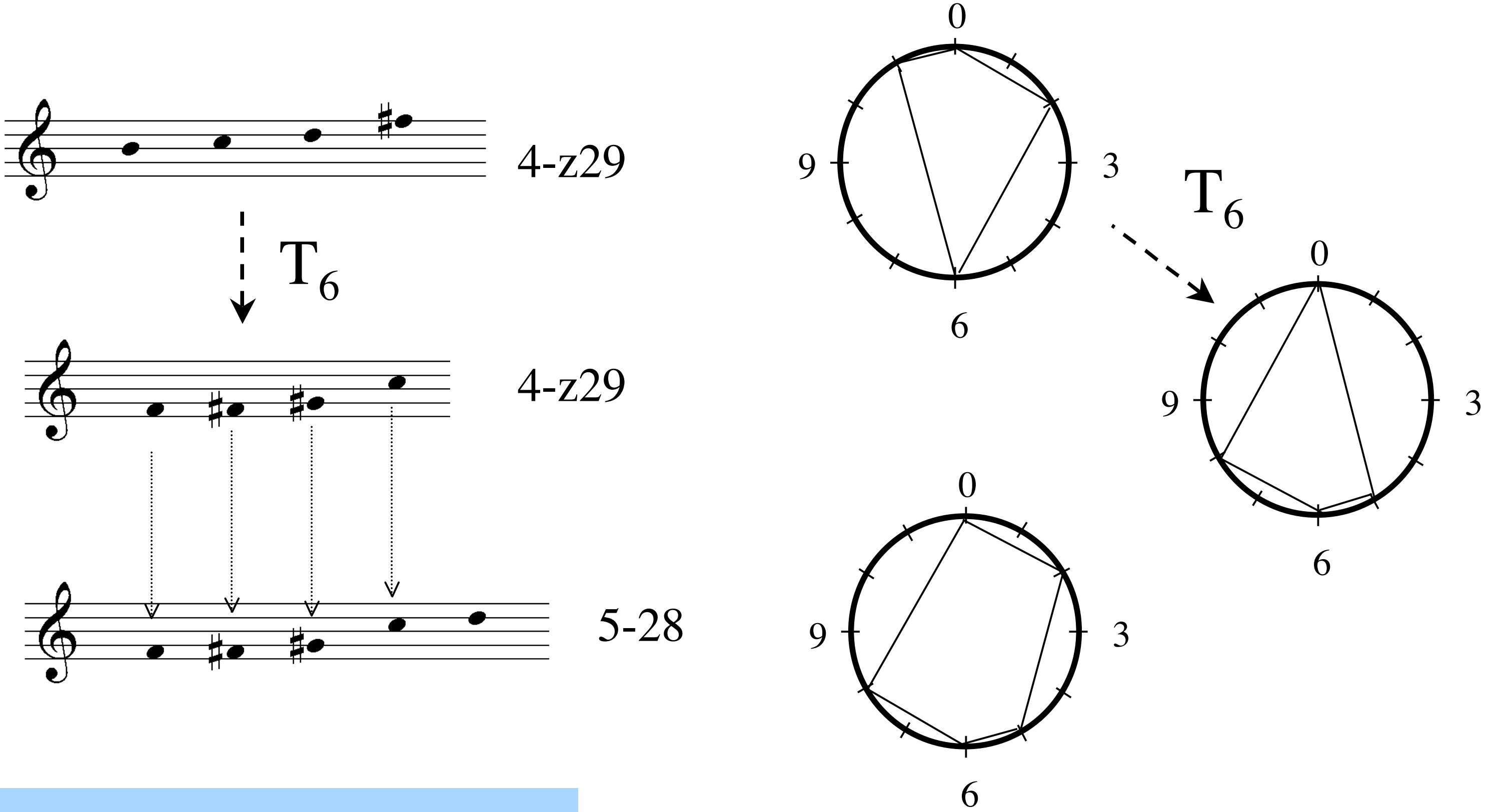


4-z29 ⊂ 8-28 5-28 ⊂ 8-28

Relazioni fra pcs: l’inclusione « astratta »

Relations between pcs: abstract inclusion

Un pcs A è incluso (in senso astratto) nell’insieme B se tutte le classi di altezze contenute in una trasformazione $T_n I(A)$ di A sono contenute ugualmente in B. L’inclusione è stretta se la cardinalità di A è strettamente inferiore a quella di B



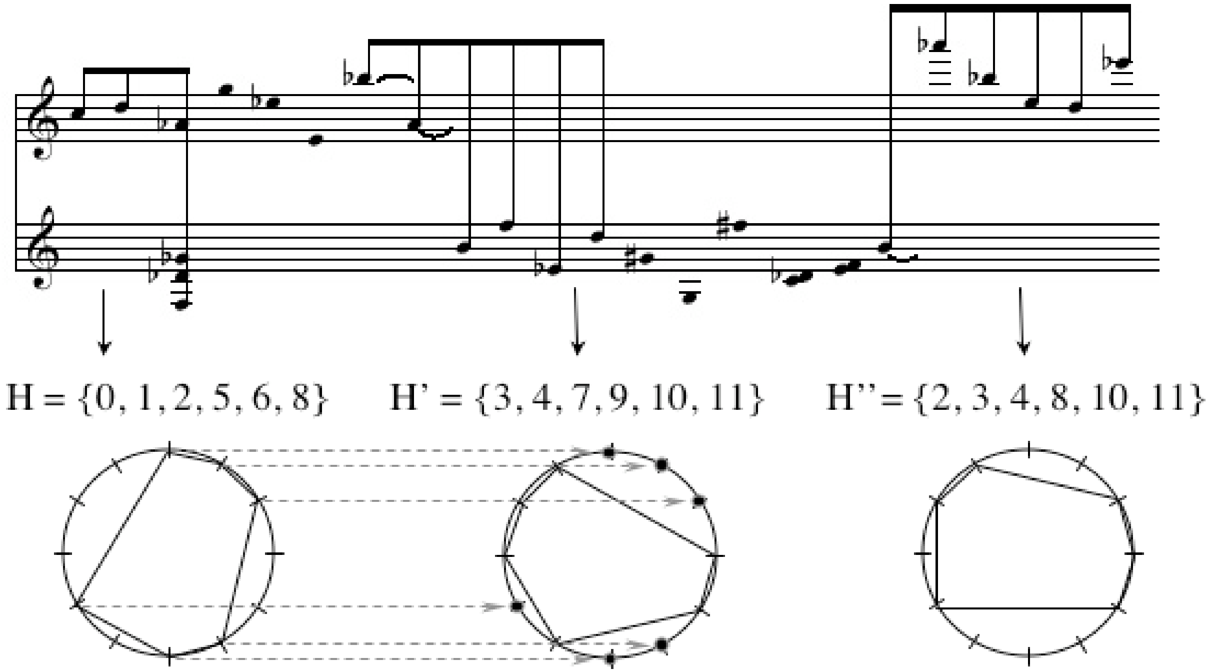
4-z29 ⊂ 5-28 ⊂ 8-28

Relazioni fra pcs: il complementare « letterale »

Relations between pcs: literal complement

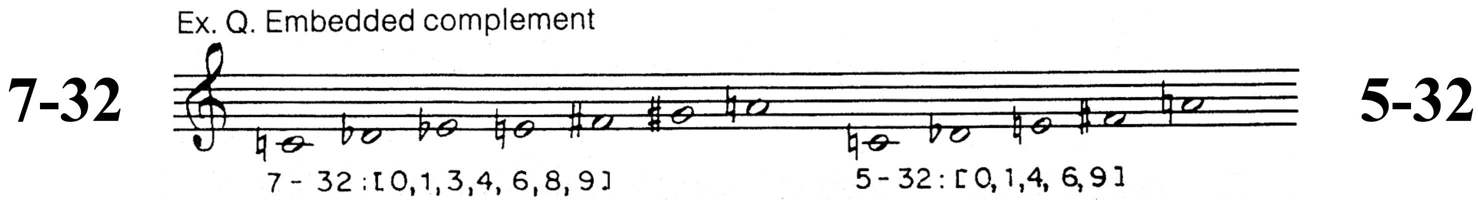
B è il complementare (letterale) di A se B contiene tutte e sole le classi di altezze che non appartengono ad A

A. Webern *Fünf Stücke* op. 10 no. 4, 1913 (Forte 1973 / Lewin 1987)

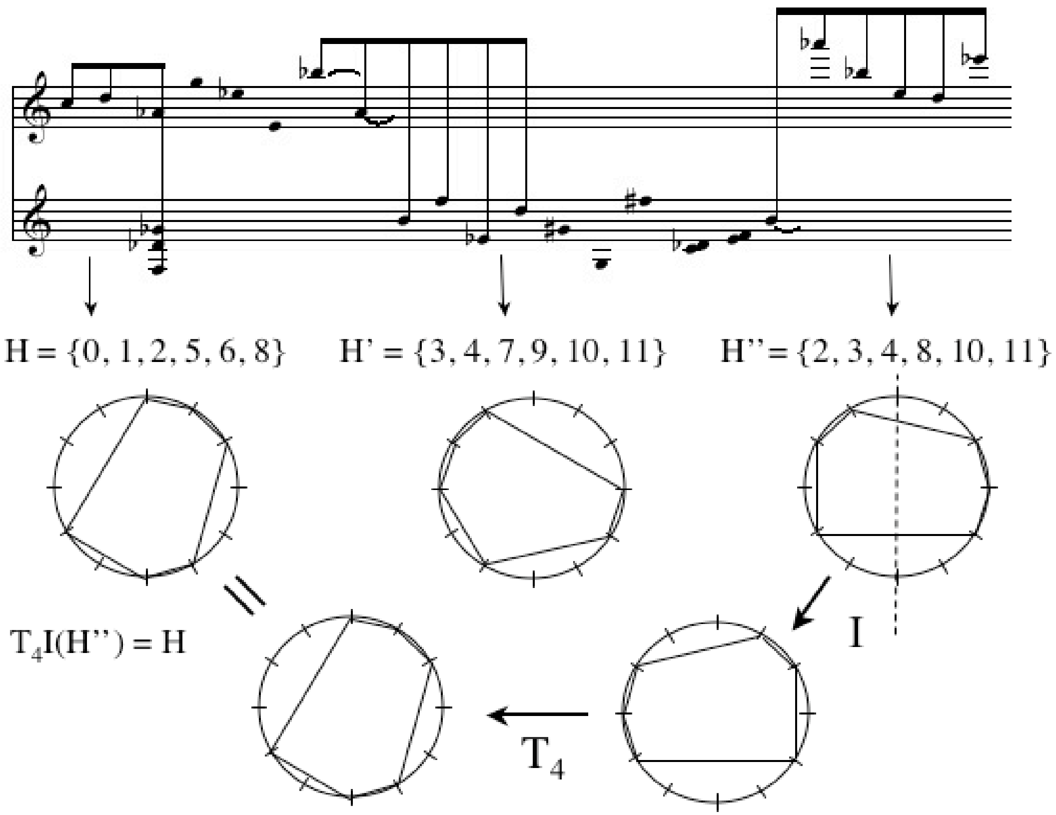


Relazioni fra pcs: il complementare « astratto »

Relations between pcs: abstract complement



B è il complementare di A (in senso astratto) se esiste una trasformazione T_nI tale che $T_nI(B)$ diventa il complementare letterale di A.



Strategie analitiche della *Set Theory* d'Allen Forte

Complessi K, sottocomplessi Kh e "nessi" (nexus)

Dato un pcs N, il suo complesso **K** èn formato da tutti i pcs A che sono in relazione d'inclusione con l'insieme N **oppure** con il suo complementare. L'insieme N si chiama il « nesso » del complesso K

$$A \in K(N) \Leftrightarrow A \supset\subset N \textbf{ oppure } A \supset\subset N'$$

$4\text{-z}29 \in K(8\text{-}28)$

Dato un pcs N, il suo sottocomplesso **Kh** èn formato da tutti i pcs A che sono in relazione d'inclusione con l'insieme N **e** con il suo complementare. L'insieme N si chiama il « nesso » del sottocomplesso **Kh**

$$A \in Kh(N) \Leftrightarrow A \supset\subset N \textbf{ et } A \supset\subset N'$$

$4\text{-z}29 \in Kh(8\text{-}28)$

Un esempio di applicazione della teoria dei complessi

L'analisi del *Sacre du Printemps* (Forte, 1978)

(Cf. Presentazione di Stephan Schaub: Séminaire *MaMuX*, 23 marzo 2002)

`www.ircam.fr/equipes/repmus/mamux`

« Questo studio presenta in dettaglio gli aspetti 'armonici' generali del *Sacre du Printemps,* ovvero non soltanto gli accordi (…) ma ugualmente gli insiemi di classi di altezze che formano delle configurazioni melodiche, combinazioni di linee orizzontali e di segmenti di varie forme »

A. Forte : *The Harmonic Organization of* « *The Rite of Spring* », New Haven, Yale University Press, 1978.

- „Statistica" degli accordi presenti nel *Sacre*
- Specificità degli elementi armonici nei punti di transizione
- Riduzione di un passaggio ad un' armonia primaria („Nexus")
- Ricerca degli elementi comuni sull'insieme dell'opera

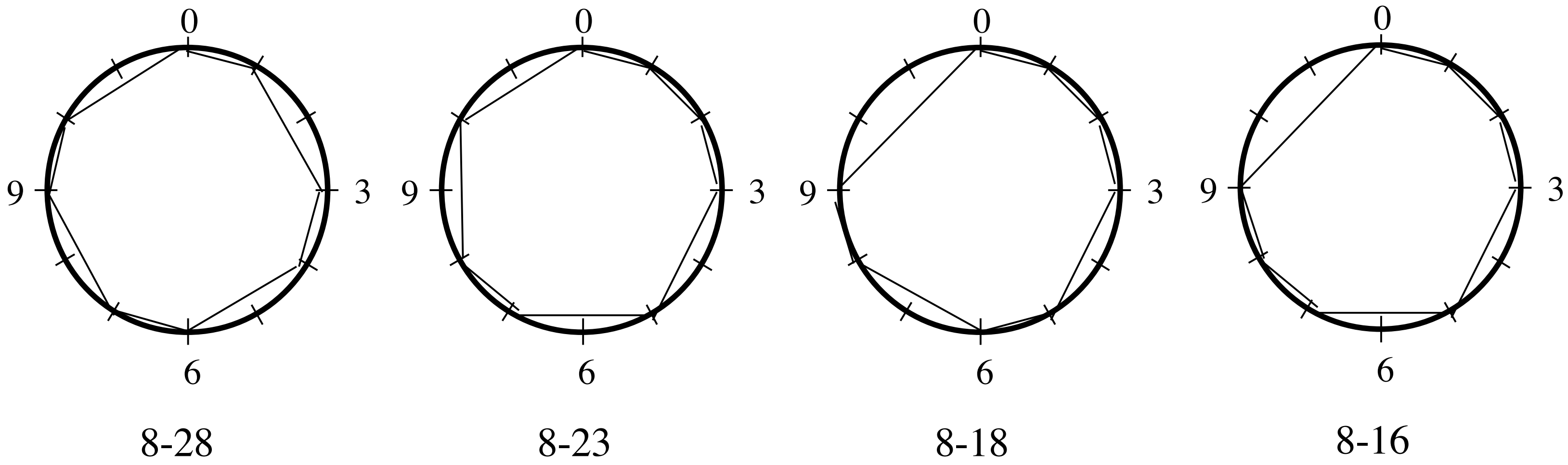
Indagine statistica delle *armonie* presenti nel *Sacre* (all'interno dei 14 movimenti)

- Presenza di tutti i 38 pentacordi
- Buona percentuale di esacordi (35 su un totale di 50)
- ...

Table 2
Sets and Movements (Pentachords)

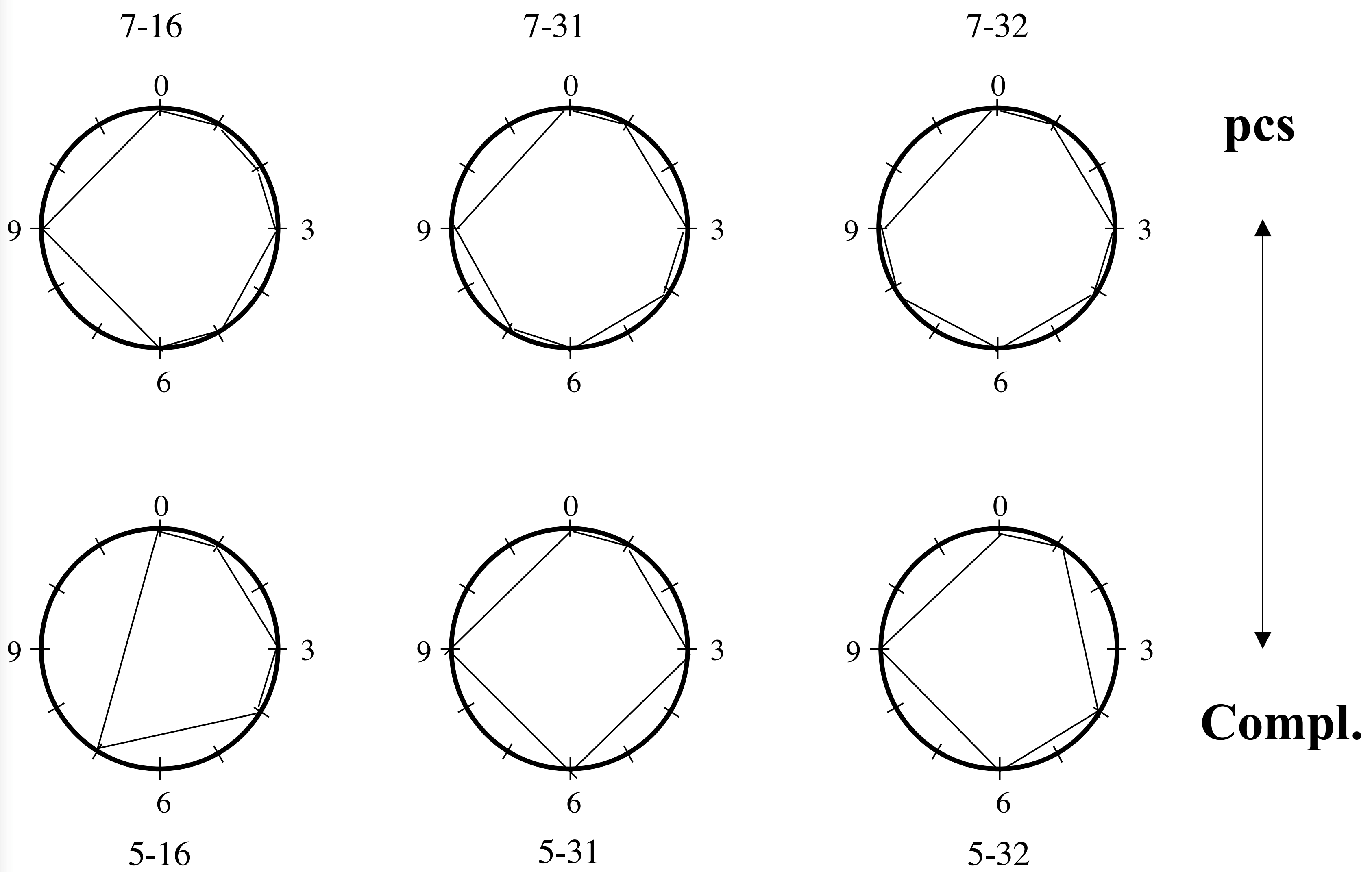
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5-1		*								*			*	
5-2	*	*												
5-3													*	
5-4	*									*	*			
5-5											*			*
5-6										*	*			*
5-7						*					*			*
5-8											*			*
5-9						*			*	*	*			
5-10		*						*					*	*
5-11					*	*					*		*	*
5-Z12		*			*								*	*
5-13			*											*
5-14					*				*		*			*
5-15										*				
5-16			*	*	*					*				*
5-Z17	*												*	*
5-Z18				*			*		*	*	*			
5-19	*					*				*				*
5-20	*										*			*
5-21		*		*					*				*	*
5-22		*		*			*							*
5-23	*	*	*							*				*
5-24							*							
5-25		*		*					*	*	*			*
5-26	*			*	*			*	*		*		*	
5-27			*						*	*				*
5-28						*			*	*	*			*
5-29	*			*						*				*
5-30				*	*									*
5-31	*	*	*	*	*	*			*	*	*		*	*
5-32	*	*	*	*					*	*		*	*	*
5-33		*												
5-34	*	*						*	*				*	*
5-35	*	*		*										
5-Z36					*	*					*			
5-Z37						*								
5-Z38				*		*			*		*		*	*

Insieme minimale di armonie principali del *Sacre*



«Tenuto conto del gran numero di armonie presenti nel Sacre du Printemps, è importante selezionare le armonie principali con attenzione e con un certo grado di flessibilità. Uno schema di complessi di insiemi che contiene quasi tutti gli insiemi è utile ma richiede un'interpretazione intelligente» (p.132).

Ricerca di armonie ricorrenti all'interno del *Sacre*



Ruolo strutturale dell‘insieme 4-18

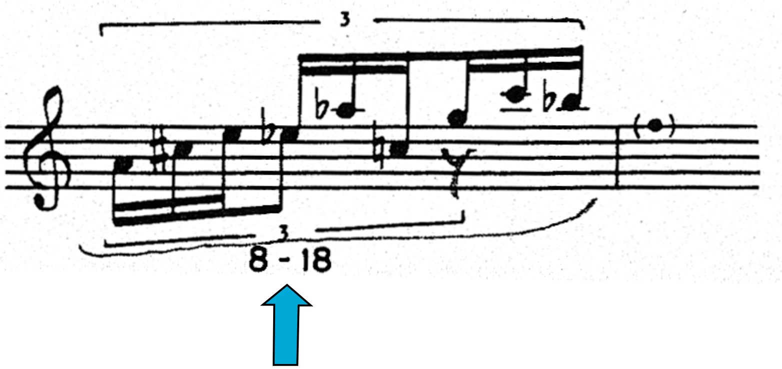
Ex. 4. *Introduction to Part 2:* R84

Ex. 5. *The Chosen One:* R105+2

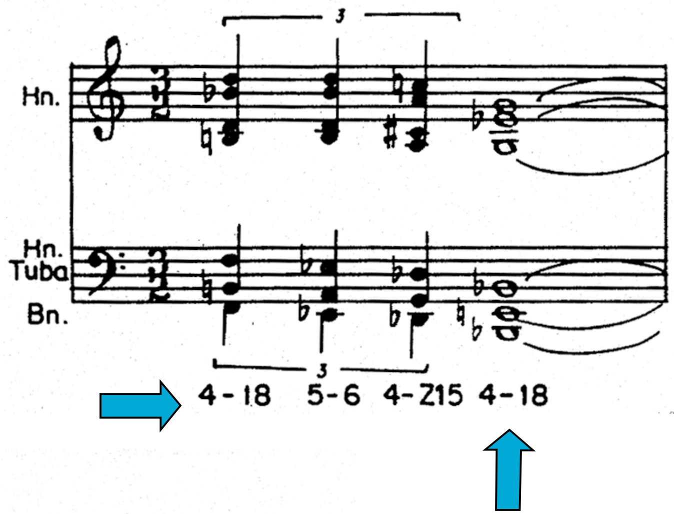
«L‘unità del Sacre du Printemps non è dovuta tanto a delle configurazioni che si ripetono in maniera letterale (benché queste siano presenti) o a delle relazioni tematiche di tipo tradizionale, ma piuttosto ad un’ ***unità armonica soggiacente*** *formata da insiemi di classi di altezze considerati indipendentemente dagli attributi delle loro apparizioni specifiche» (Forte p. 23).*

Specificità di alcuni elementi armonici nei punti di transizione

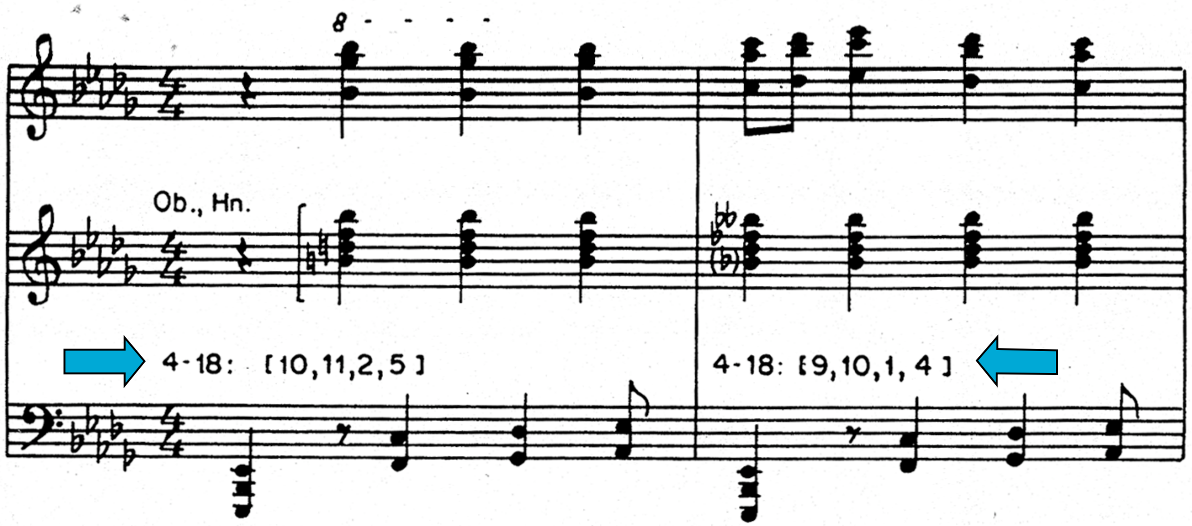
Ex. 1. *Introduction to Part 1:* R6+10



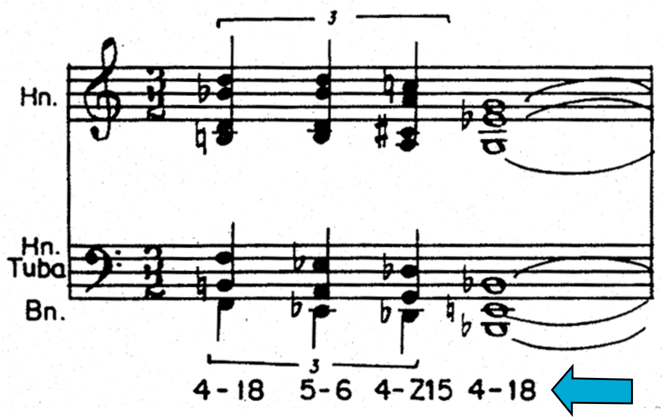
Ex. 3a. *Ritual of the Rival Tribes:* R58+5



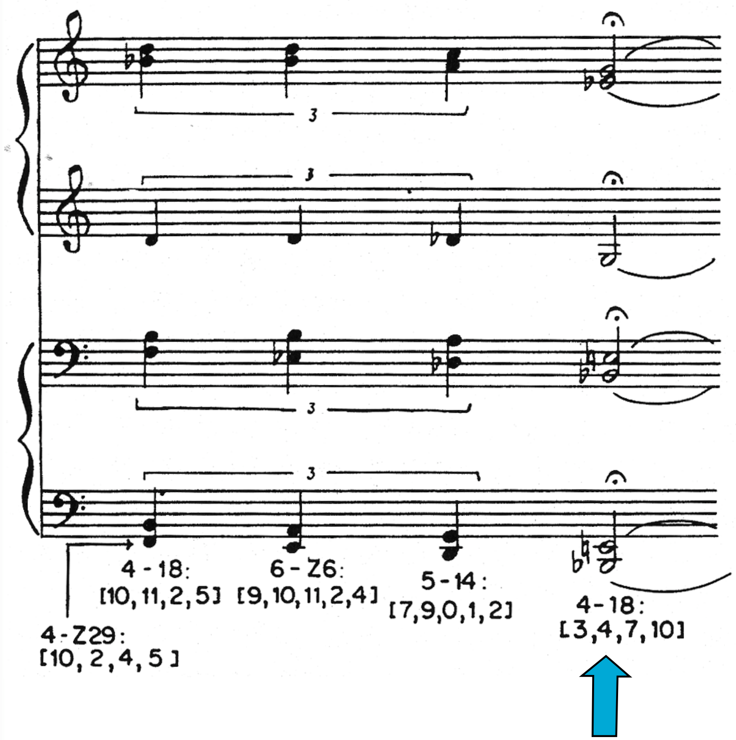
Ex. 2. *Spring Rounds:* R53



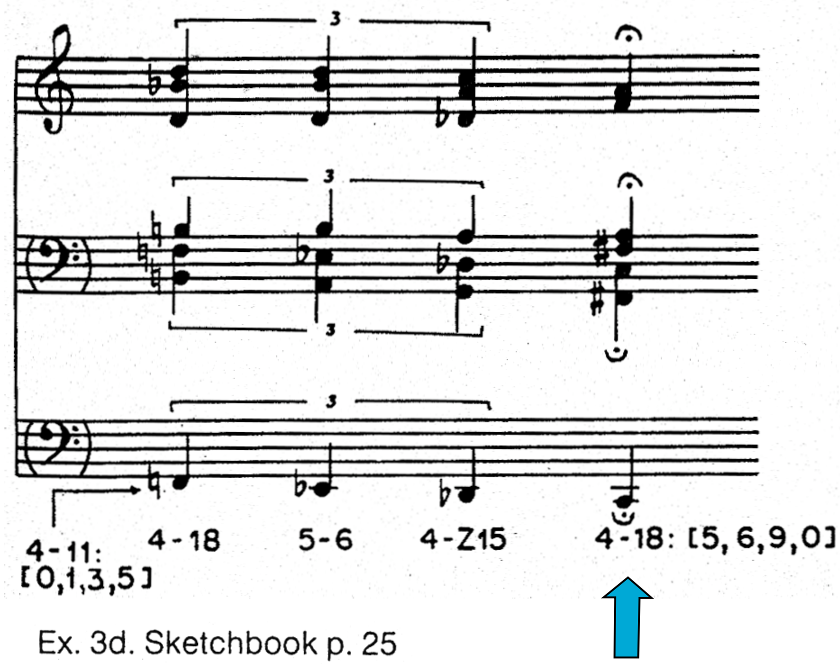
Ex. 3a. *Ritual of the Rival Tribes:* R58+5



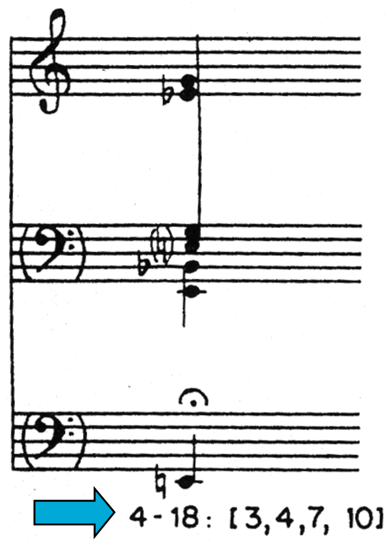
Ex. 3b. Piano Duet: R58+5



Ex. 3c. Sketchbook p. 25



Ex. 3d. Sketchbook p. 25



«È possibile concludere che l'armonia finale 4-18 era lo scopo iniziale e prestabilito della progressione» (Forte p. 26).

Alla ricerca di un'armonia primaria o *Nexus*

6-z45
6-27
6-30
6-z42

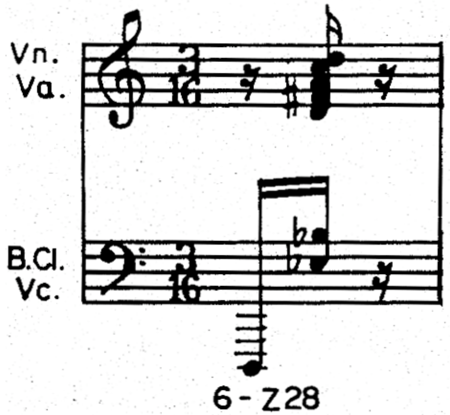
⊂ **K (5-31)**

7-16
5-31
7-32

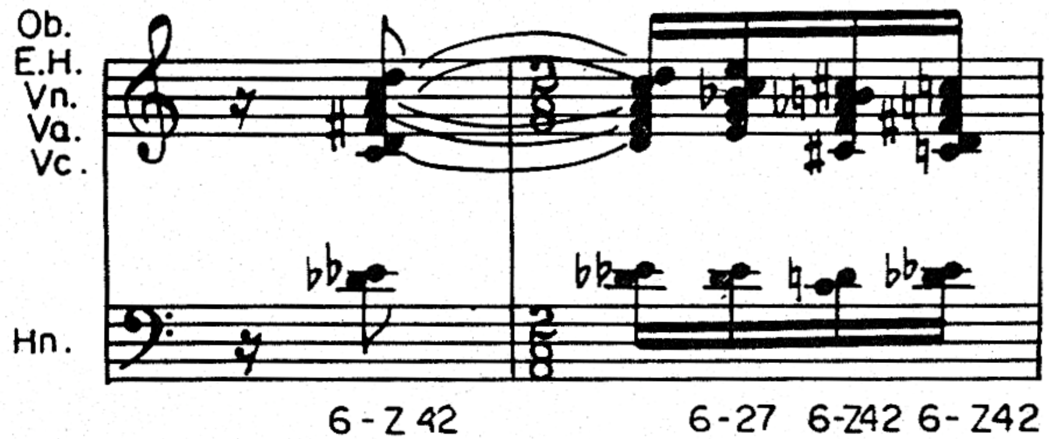
⊂ **Kh (6-27)**

Ex. 104. *Sacrificial Dance:* R192

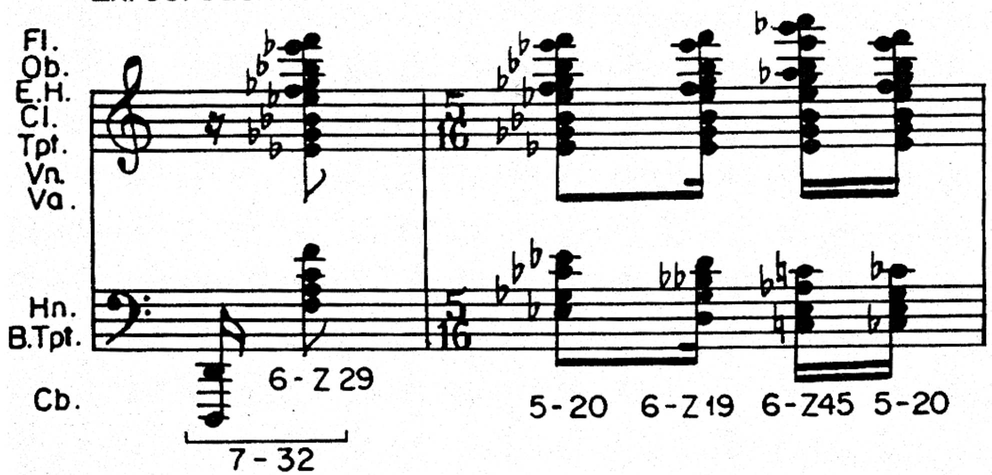
Ex. 88a. *Sacrificial Dance:* R142



Ex. 89. *Sacrificial Dance:* R142+3



Ex. 90. *Sacrificial Dance:* R144



$$\left.\begin{array}{l}\textbf{5-16}\\\textbf{5-31}\\\textbf{5-32}\end{array}\right\} \subset \textbf{6-27} \subset \left\{\begin{array}{l}\textbf{7-16}\\\textbf{7-31}\\\textbf{7-32}\end{array}\right.$$

$$\textbf{5-31} \subset \left\{\begin{array}{l}\textbf{6-z42}\\\textbf{6-27}\\\textbf{6-z28}\end{array}\right.$$

L ’approccio trasformazionale di David Lewin
Transformation(al) Theory/Analysis

1. GIS = *Generalized Interval System*

Sistema d’Intervalli Generalizzati
Sistema Generalizzato d’Intervalli

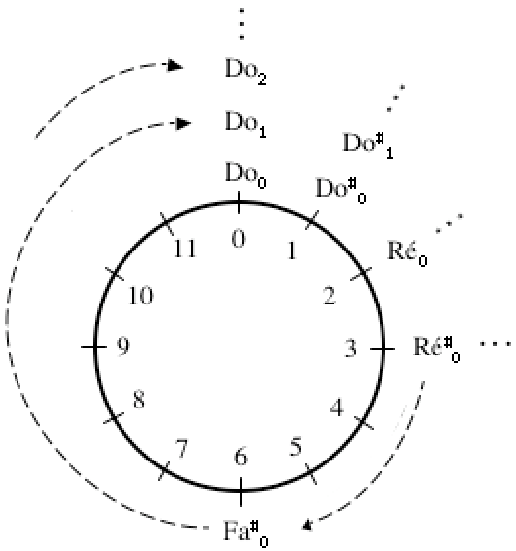
2. Generalizzazioni della *Set Theory* tradizionale
   - Funzione intervallare (IFUNC)
   - Funzione d’iniezione (INJ)
   - Teorema generalizzato dell’esacordo

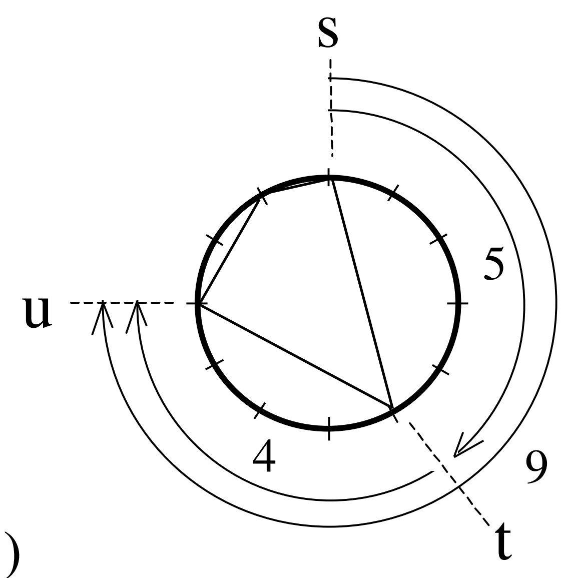
3. Analisi trasformazionale
   - Progressione trasformazionale
   - Reticolo transformazionale (Network)

- *Generalized Musical Intervals and Transformations*, 1987
- *Musical Form and Transformation: 4 Analytic Essays*, 1993

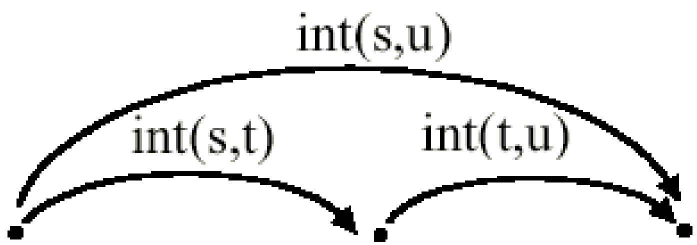
Verso la generalizzazione della nozione di intervallo

Towards a Generalized Interval System





(5, 4, 2, 1)



Sistema d'Intervalli generalizzati/Sistema Generalizzato d'intervalli

Generalized Interval System

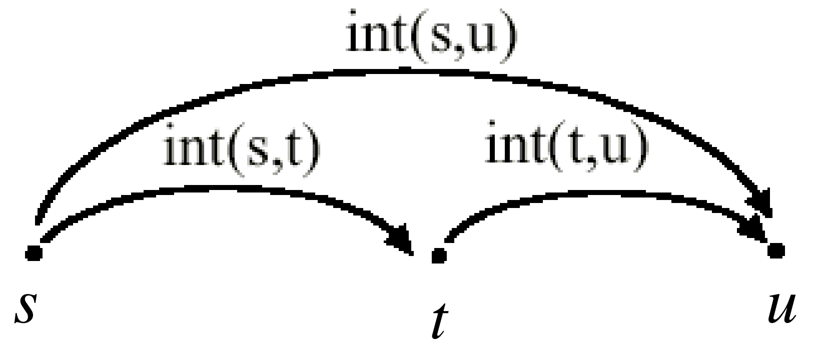
GIS = (S, G, int)

S=insieme

(G,•) = gruppo d'intervalli

int = funzione intervallare

$$S \times S \dashrightarrow G$$



• Dati tre elementi s, t, u nell'insieme S :

$$\mathrm{int}(s,t) \bullet \mathrm{int}(t,u) = \mathrm{int}(s,u)$$

• Per ogni elemento s in S e ogni intervallo i nel gruppo G vi è un (solo) elemento u dell'insieme S che dista un intervallo i dall'elemento s:

$$\mathrm{int}(s,u) = i$$

$\Leftrightarrow$

Azione semplicemente transitiva di un gruppo su un insieme

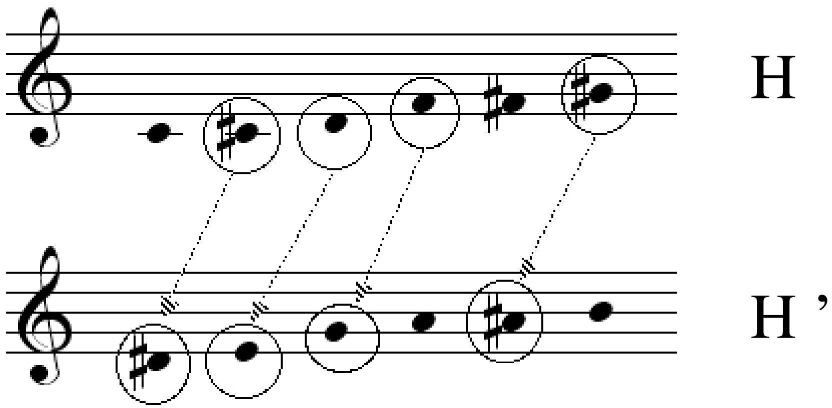
Funzione Intervallare IFUNC in un GIS

Interval Function IFUNC in a GIS

GIS = (S, G, int)

S insieme

H e H' due sottoinsiemi di S

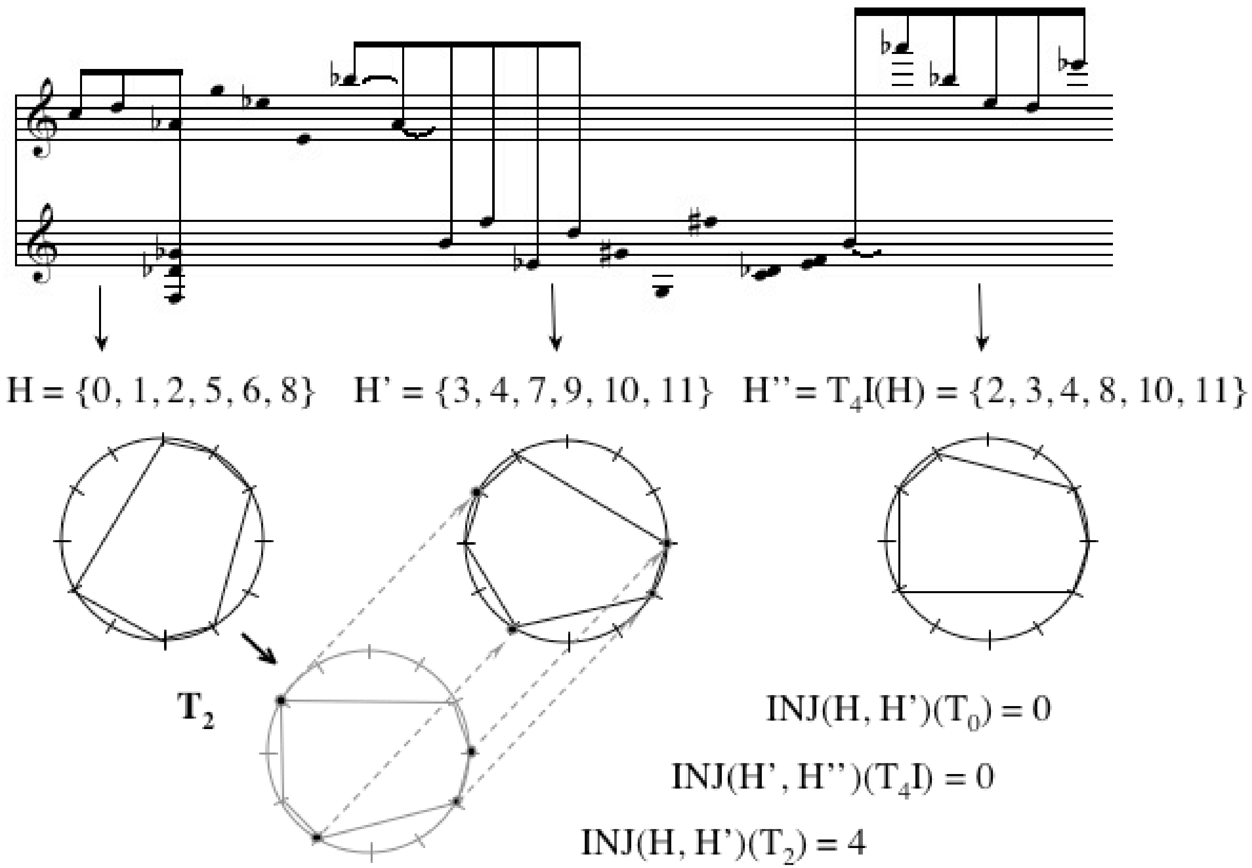


IFUNC(H, H')(i) =
= numeri di coppie (a,b)
in H × H ' i cui elementi
hanno distanza
reciproca uguale ad i
ovvero int(a,b) = i

IFUNC(H, H ')(2) = 4

Funzione d'iniezione e relazione inclusione/complementare

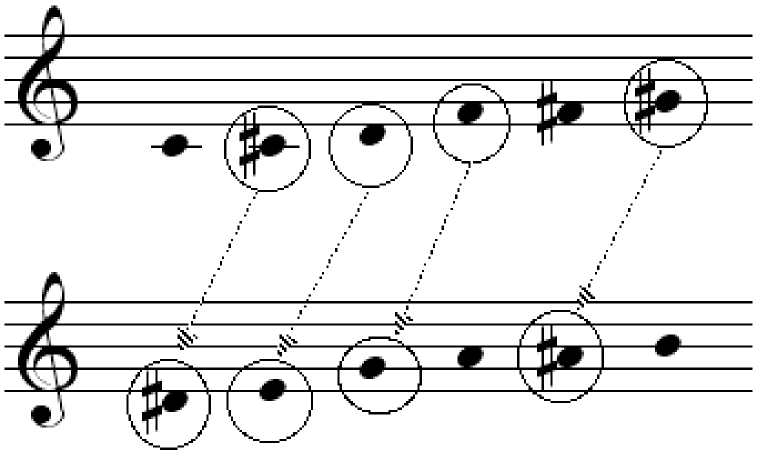
Injection function and the inclusion/complementary relation



INJ(H,H ')(T_n) = numero di elementi *a* di H tali che $T_n(a) \in$ H'

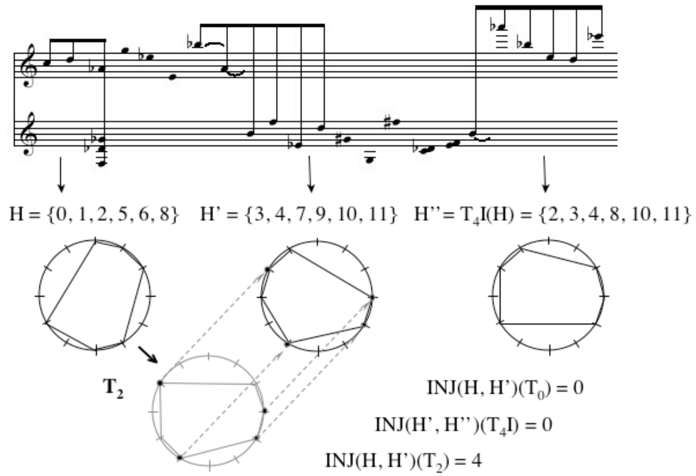
Relazione fra funzione d'iniezione e funzione intervallare

Injection Function and IFUNC



?

<-->



GIS = (S, G, int)

f trasformazione dell'insieme S

INJ(A,B)(f) = numero di elementi a di A tali che f(a) appartiene a B

?

IFUNC(A,B)(i) = numero di elementi (a,b) di AxB tali che int(a,b) = i

INJ, IFUNC e il « sistema dodecafonico » di Babbitt

Injection Function, IFUNC and the twelve-tone system

« Here the basic hierarchical scope of the (twelve-tone) system is contained essentially in the simple theorem that:

Given a collection of pitches (pitch classes), the multiplicity of occurrence of any interval (…) determines the number of common pitches between the original collection and the transposition by the interval »

(Milton Babbitt, *Past and Present Concepts*, 1961)

$$\mathrm{INJ}(A,B)(\mathrm{T}_i) \quad = \quad \mathrm{IFUNC}(A,B)(i)$$

Funzione d 'Iniezione, IFUNC e teoria trasformazionale

Injection Function, IFUNC and transformational theory

« …il concetto di intervallo in un GIS può essere completamente sostituito col conetto di trasposizione in uno spazio »

« …si può quindi sostituire il concetto stesso di GIS con l'idea di uno spazio S sul quale opera un gruppo di operazioni »

(David Lewin, *Generalized Musical Intervals and Transformations,* 1987)

$$\mathrm{INJ}(A,B)(\mathrm{T_i}) = \mathrm{IFUNC}(A,B)(\mathrm{i})$$

Teorema generalizzato dell’esacordo
Generalized Hexachord Theorem

Un esacordo ed il suo complementare hanno lo stesso contenuto intervallare

$$\mathrm{IFUNC}(A, A)(\mathrm{i}) = \mathrm{IFUNC}(A', A')(\mathrm{i})$$

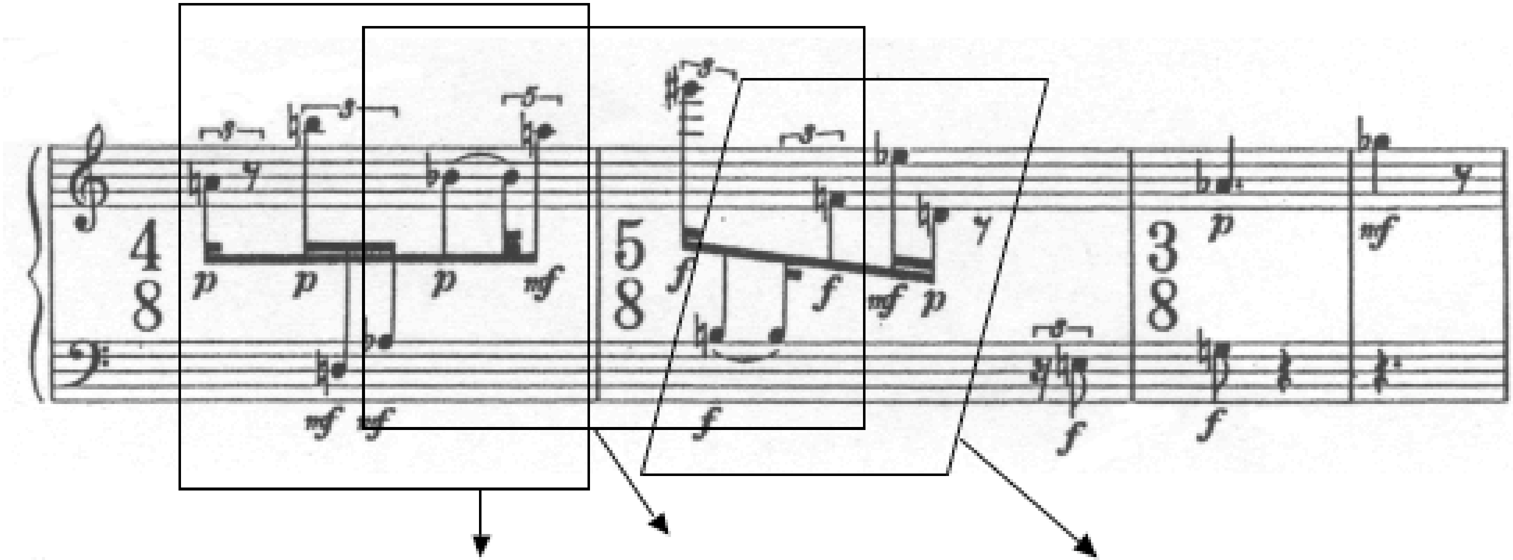
Un esacordo ed il suo complementare hanno la stessa funzione d’iniezione rispetto ad ogni applicazione biiettiva

$$\mathrm{INJ}(A, A)(f) = \mathrm{INJ}(A', A')(f)$$

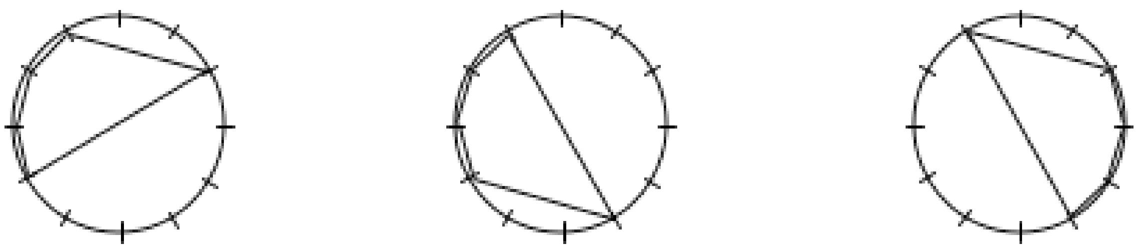
$$\mathrm{INJ}(A, A')(f) = \mathrm{INJ}(A', A)(f)$$

Un esempio di analisi trasformazionale

Stockhausen: *Klavierstück III* (Analisi di D. Lewin)

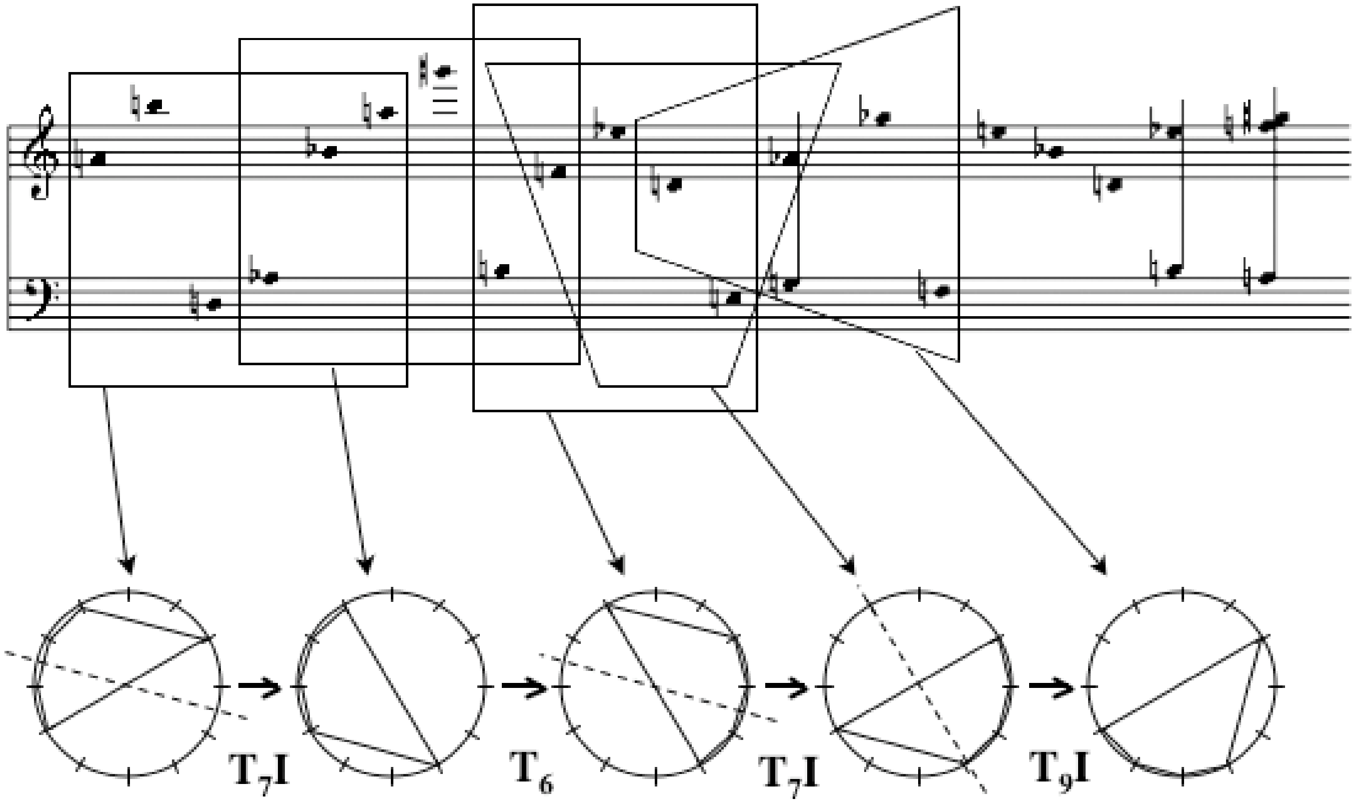


SI:	(1, 1, 1, 3, 6)	(6, 3, 1, 1, 1)	(6, 3, 1, 1, 1)
IFUNC:	[5 3 2 2 1 1 1 1 1 2 2 3]	[5 3 2 2 1 1 1 1 1 2 2 3]	[5 3 2 2 1 1 1 1 1 2 2 3]
VI:	[3 2 2 1 1 1]	[3 2 2 1 1 1]	[3 2 2 1 1 1]

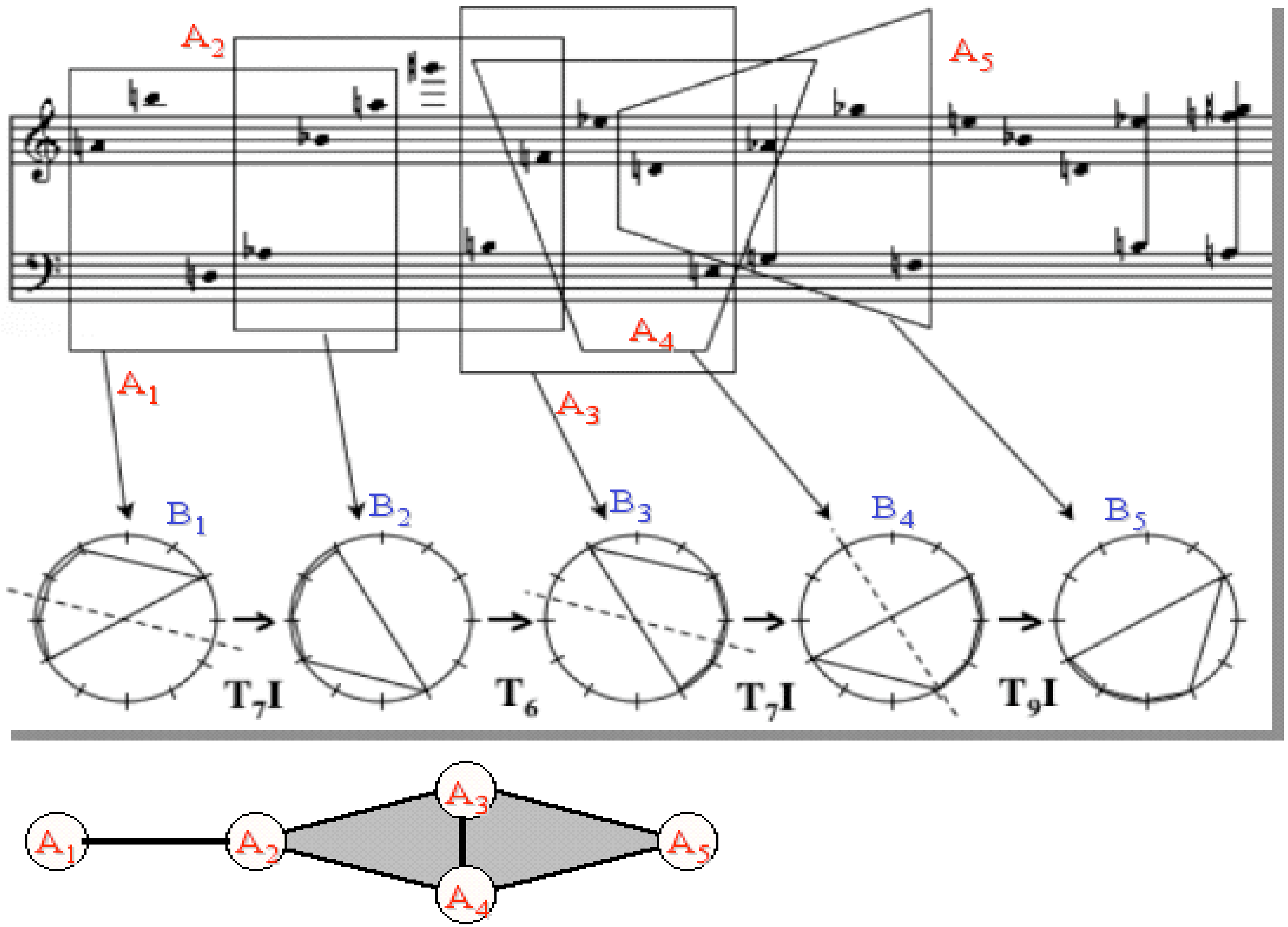


Progressione trasformazionale

Transformational progression



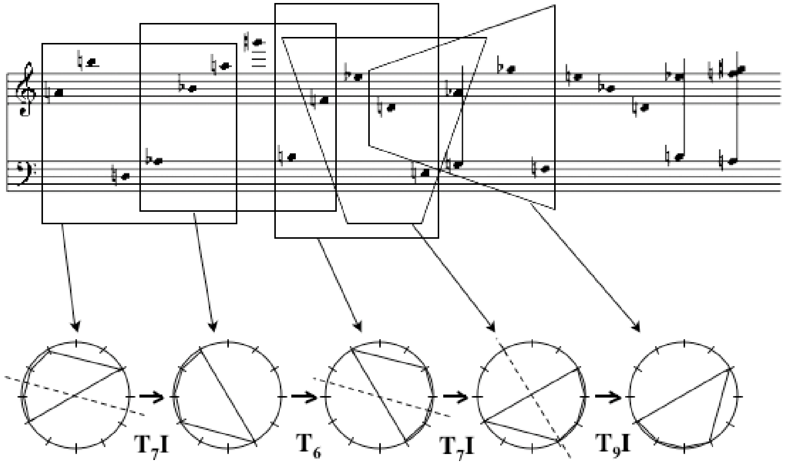
Costruzione di un «complesso simpliciale»

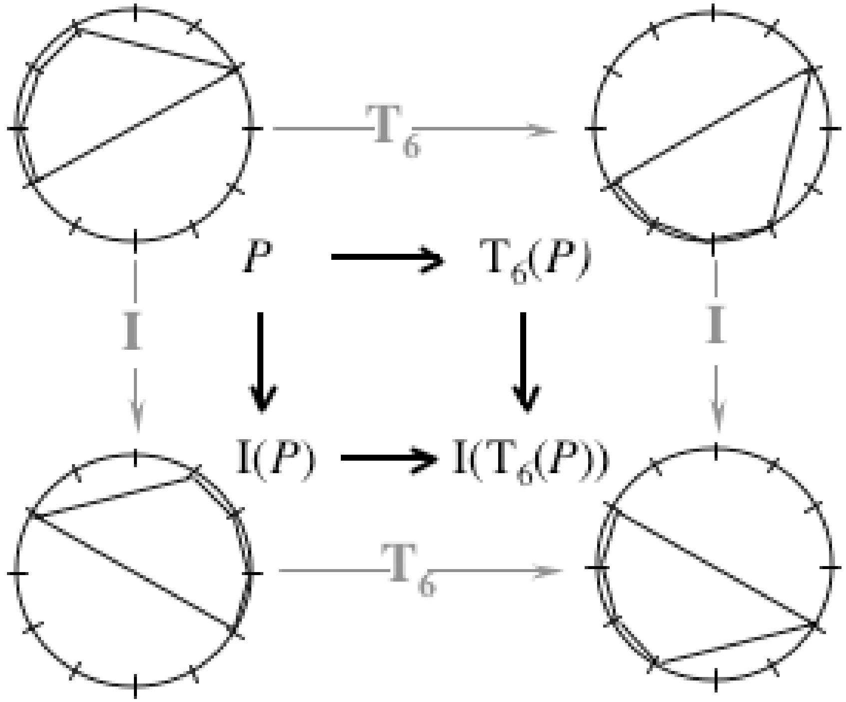


Complesso simpliciale (o nervo)

Reticoli (o diagrammi) di trasformazioni

Transformational networks

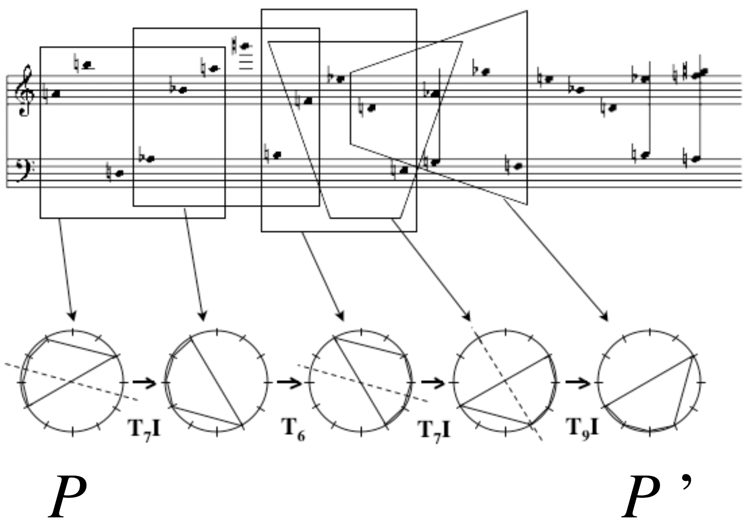


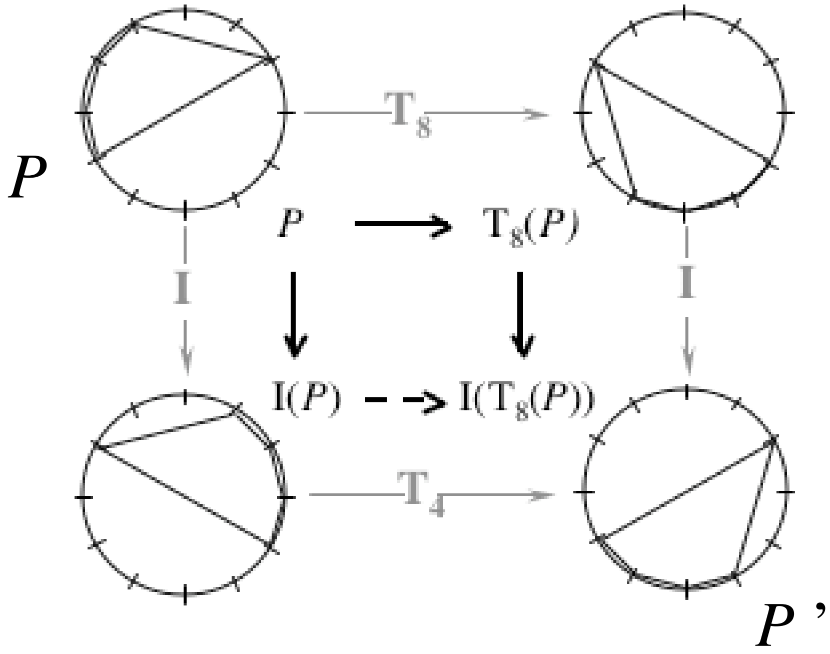


$IT_6 = T_6\, I$

Diagrammi non commutativi

Non-commutative Transformational networks





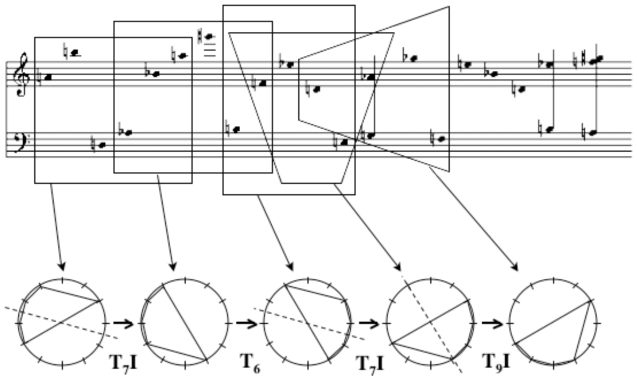
In generale la trasposizione non commuta con l'inversione

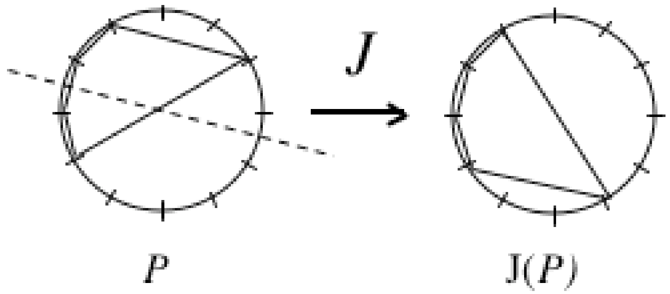
$$IT_8 \neq T_8 I$$

$$IT_n = T_{(12-n)} I$$

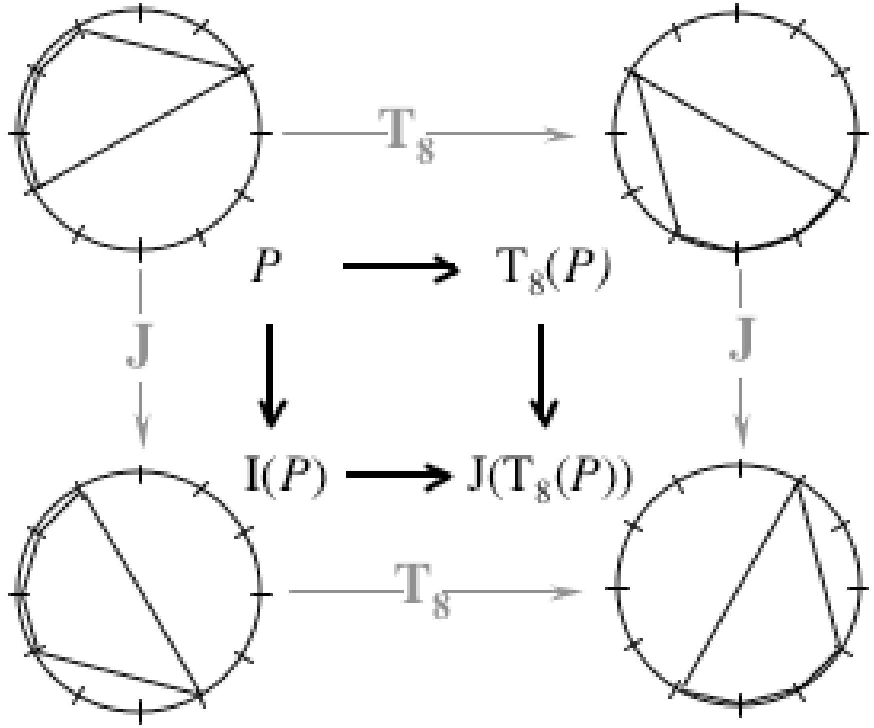
Trasformazioni « contestuali » e diagrammi commutativi

Contextual Transformations and commutative diagrams





Inversione contestuale

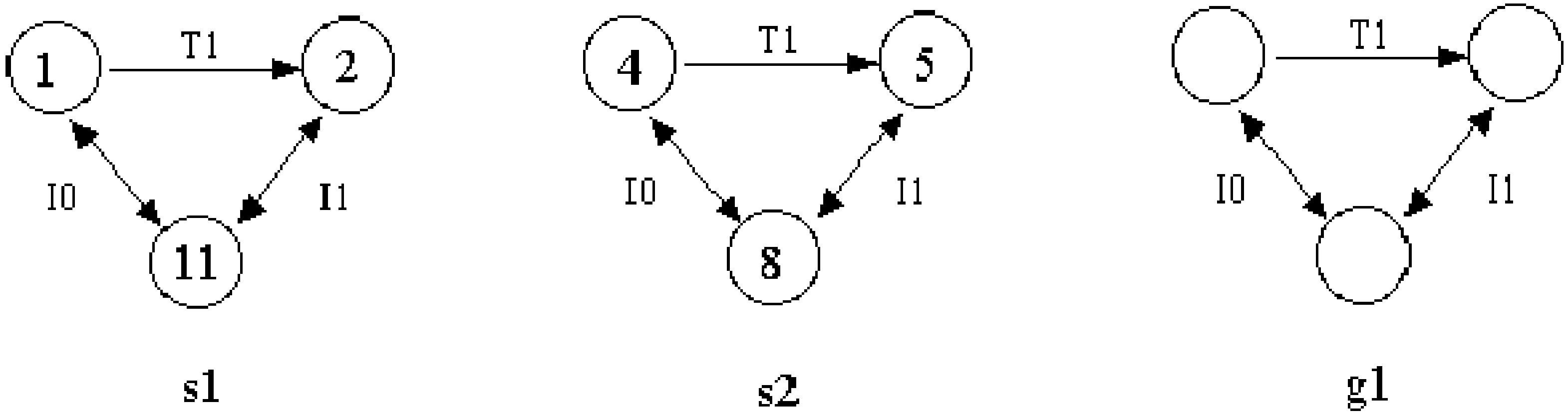


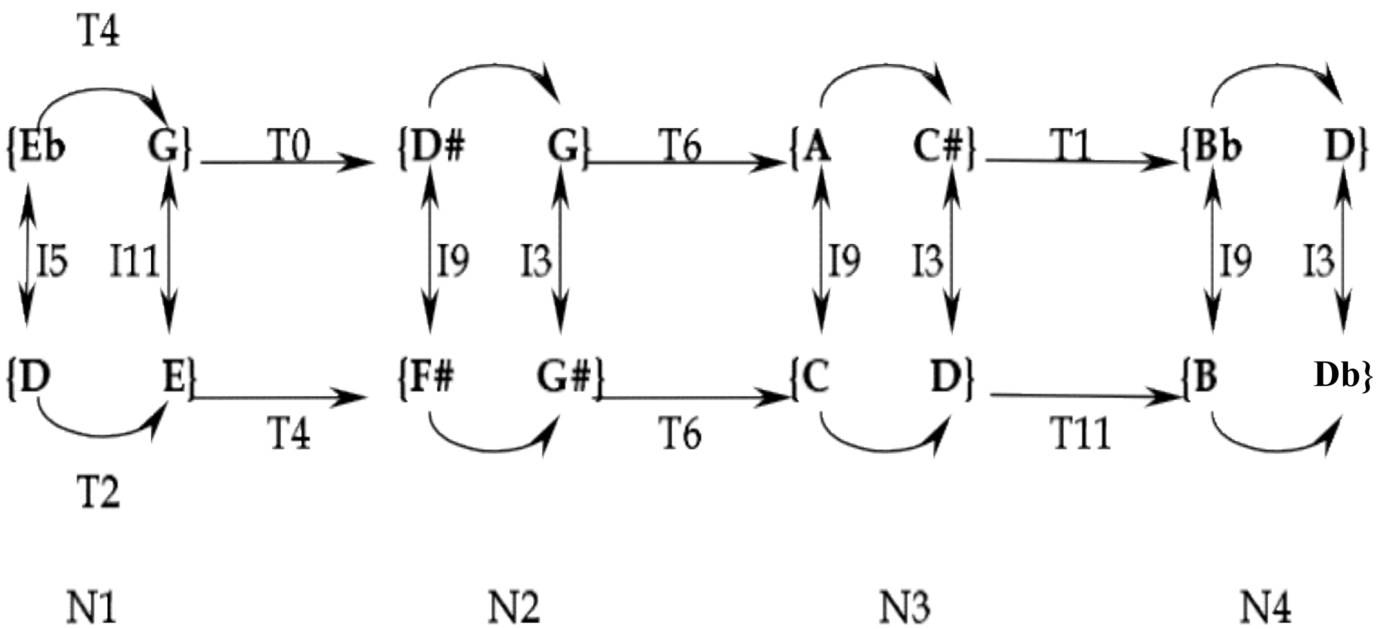
$$JT_8 = T_8\,J$$

$$JT_n = T_n\,J$$

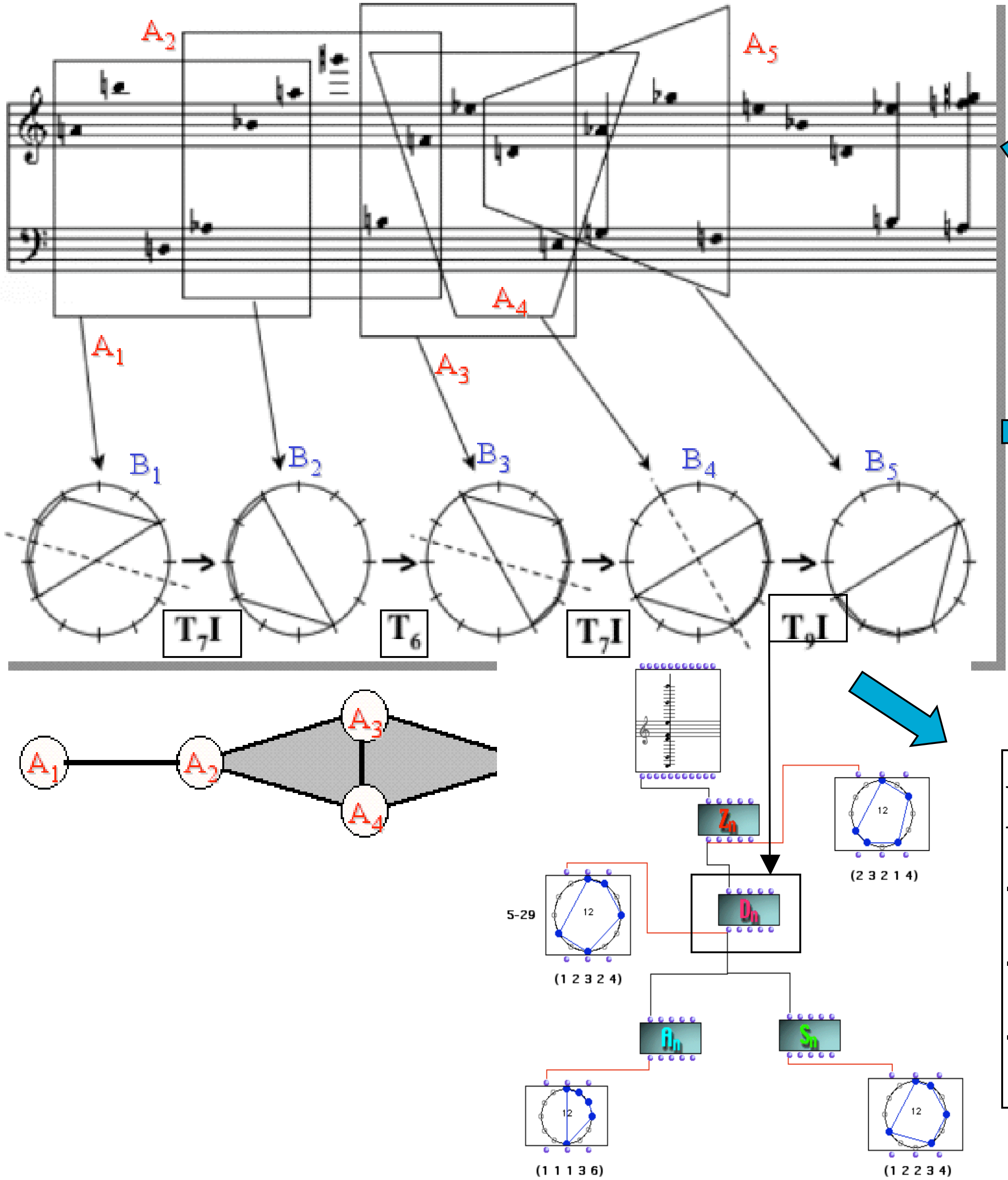
Reti di Klumpenhouwer

K-nets





Ramificazioni dell'analisi trasformazionale



Matematica

- Trasformazioni e tipologie di accordi

Epistemologia

- Segmentazione
- Equivalenza
- Transformazioni

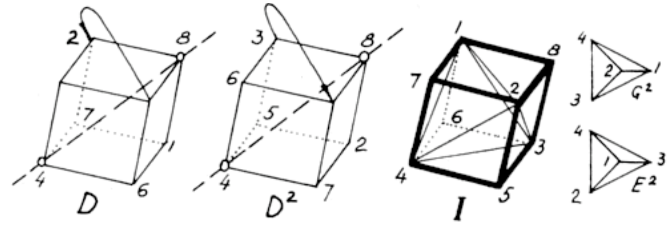
Filosofia

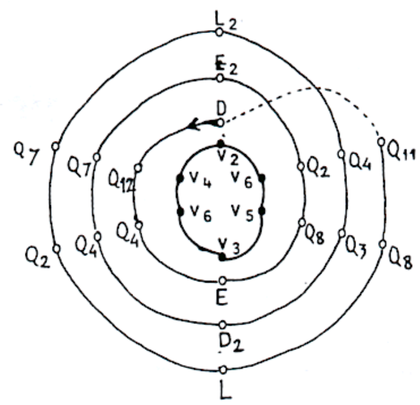
- Dualità oggetto/oper.
- Dualità locale/globale
- Gli universali

Implementazione di *Nomos Alpha* (1966)

analisi ⟷ composizione

- *« Musique symbolique pour violoncelle seul, possède une architecture « hors-temps » fondée sur la théorie des groupes de transformations. Il y fait usage de la théorie des cribles, théorie qui annexe les congruence modulo n et qui est issue d 'une axiomatique de la structure universelle de la musique ».*

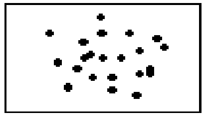


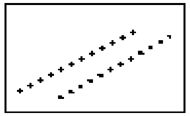


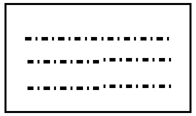
→ *OpenMusic*

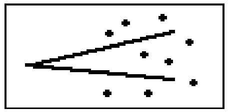
Nomos Alpha : implementazione in OM

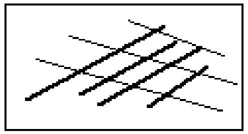
Complexes sonores

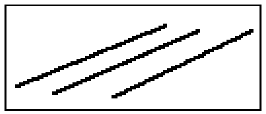
S1  Nuage ataxique de sons pontuels

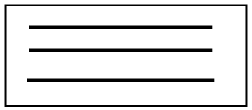
S2  Nuage relativement ordonné, ascendant ou descendant, de sons ponctuels

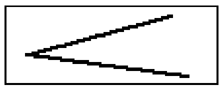
S3  Nuage relativement ordonné, ni ascendant ni descendant de sons ponctuels

S4  Atome ionisé, représenté au violoncelle par des interferences d'un quasi-unisson accompagnés de pizzicati

S5  Champ ataxique de sons glissés

S6  Champ relativement ordonné, ascendant ou descendant, de sons glissés

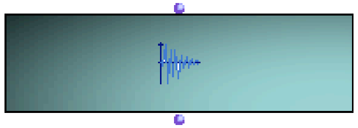
S7  Champ relativement ordonné, ni ascendant ni descendant, de sons glissés

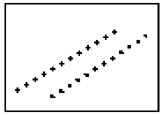
S8  Champ représenté au violoncelle par des interferences d'un quasi-unisson

Nomos Alpha : implementazione in OM

Complexe sonore n. 2
(section Beta)

D S2

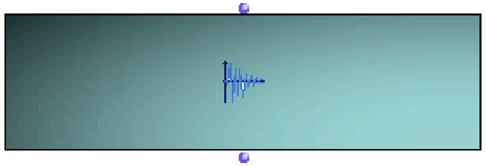




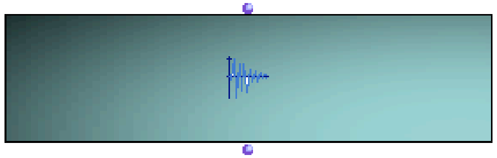
D S2

mes. 1

Q12 S2

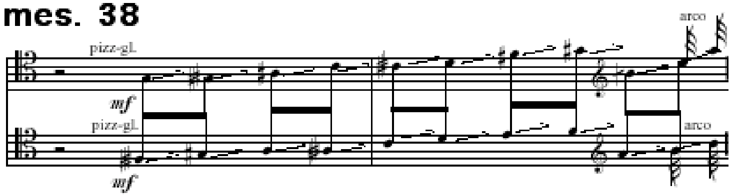


Q4 S2



Nuage relativement ordonné, ascendant ou descentend, de sons ponctuels

mes. 38

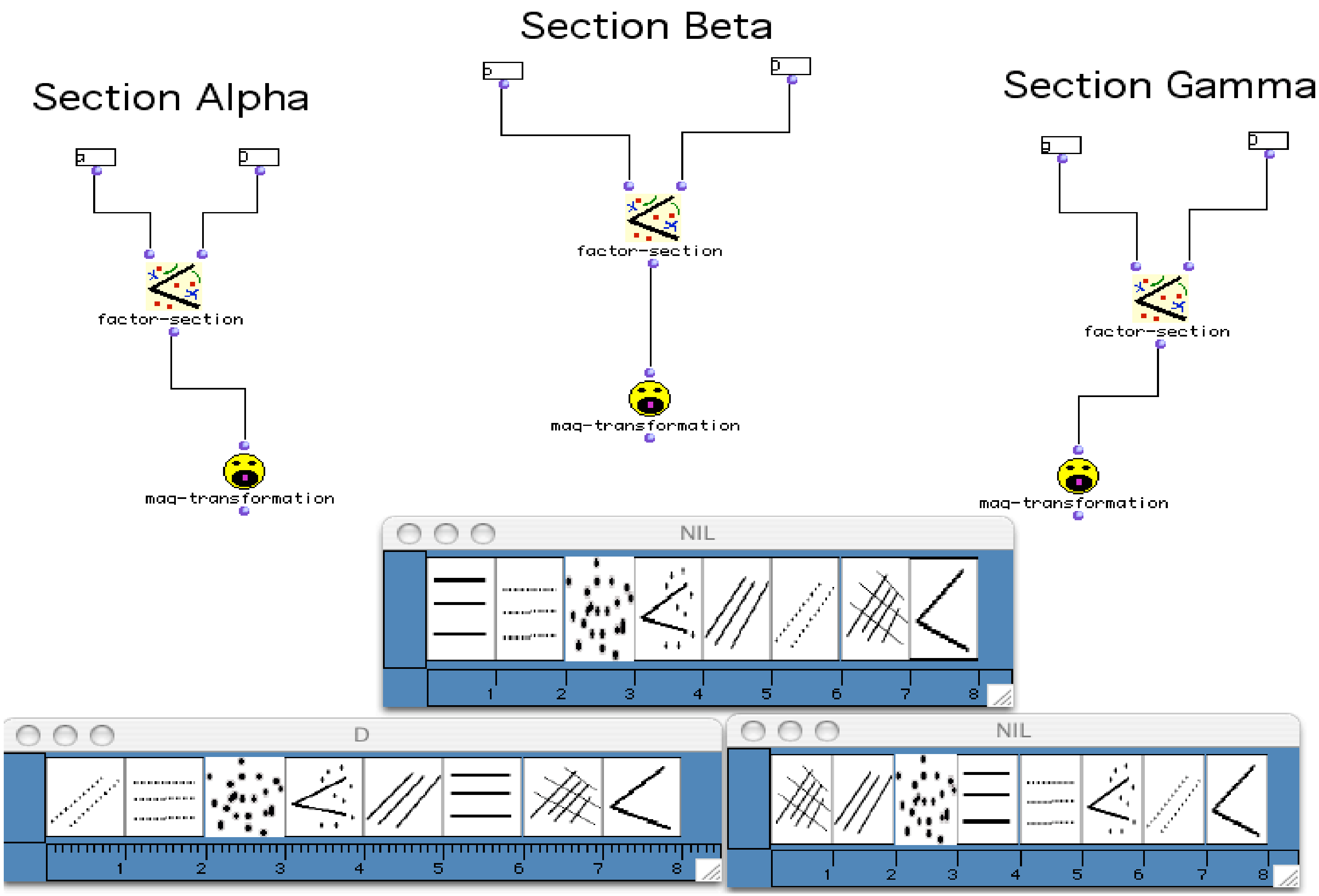


(Cf. R. Peck: "Toward an interpretation of Nomos Alpha", PNM, 41(1), 106-157, 2003)

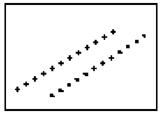
Nomos Alpha : implementazione in OM

Changement de section

(permutation des indices des complexes sonores)



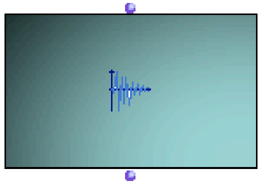
Nomos Alpha : implementazione in OM



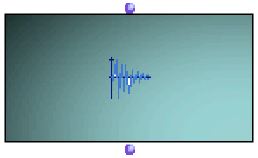
Complexe sonore n. 2

Nuage relativement ordonné, ascendant ou descentend, de sons ponctuels

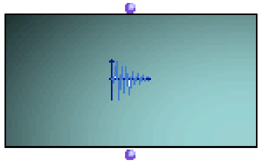
E S5



Q8 S5



Q2 S5



$\kappa^{\alpha}_{1} = 1 \,.\, mf \,.\, 2 = 2.mf$

$\kappa^{\alpha}_{2} = 1 \,.\, fff \,.\, 4.5 = 4.5.fff$

$\kappa^{\alpha}_{3} = 2.5 \,.\, fff \,.\, 4.5 = 11.25.fff$

$\kappa^{\alpha}_{4} = 2.5 \,.\, mf \,.\, 2 = 5.mf$

$\kappa^{\alpha}_{5} = 1.5 \,.\, f \,.\, 2.62 = 3.93.f$

$\kappa^{\alpha}_{6} = 1.5 \,.\, ff \,.\, 3.44 = 5.15.ff$

$\kappa^{\alpha}_{7} = 2.0 \,.\, ff \,.\, 3.44 = 6.88.ff$

$\kappa^{\alpha}_{8} = 2.0 \,.\, f \,.\, 2.62 = 5.24.f$

<=== (section Alpha)

$\kappa^{\beta}_{1} = 0.5 \,.\, mf \,.\, 2 = 1.mf$

$\kappa^{\beta}_{2} = 0.5 \,.\, fff \,.\, 4.5 = 2.25.fff$

$\kappa^{\beta}_{3} = 5 \,.\, fff \,.\, 4.5 = 22.5.fff$

$\kappa^{\beta}_{4} = 5.0 \,.\, mf \,.\, 2 = 10.0.mf$

$\kappa^{\beta}_{5} = 1.08 \,.\, f \,.\, 2.62 = 2.83.f$

$\kappa^{\beta}_{6} = 1.08 \,.\, ff \,.\, 3.44 = 3.72.ff$

$\kappa^{\beta}_{7} = 2.32 \,.\, ff \,.\, 3.44 = 7.98.ff$

$\kappa^{\beta}_{8} = 2.32 \,.\, f \,.\, 2.62 = 6.08.f$

(section Gamma) ===>

$\kappa^{\gamma}_{1} = 1 \,.\, mf \,.\, 2 = 2.mf$

$\kappa^{\gamma}_{2} = 1 \,.\, fff \,.\, 2 = 2.fff$

$\kappa^{\gamma}_{3} = 4.0 \,.\, fff \,.\, 4.5 = 18.0.fff$

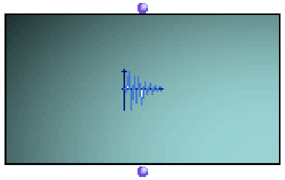
$\kappa^{\gamma}_{4} = 4.0 \,.\, mf \,.\, 2.0 = 8.0.mf$

$\kappa^{\gamma}_{5} = 2.0 \,.\, f \,.\, 2.62 = 5.24.f$

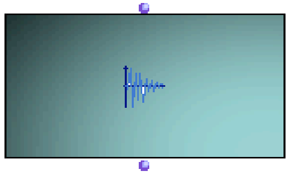
$\kappa^{\gamma}_{6} = 2.0 \,.\, ff \,.\, 3.44 = 6.88.ff$

$\kappa^{\gamma}_{7} = 3.0 \,.\, ff \,.\, 3.44 = 10.32.ff$

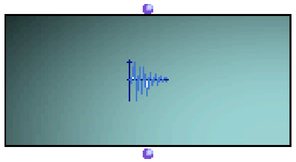
$\kappa^{\gamma}_{8} = 3.0 \,.\, f \,.\, 2.62 = 7.86.f$



E^2 S7



Q7 S7



Q4 S7

Nomos Alpha : implementazione in OM

Label	Order of Vertices
I	12345678
A	21436587
B	34127856
C	43218765
D	23146758
D^2	31247568
E	24316875
E^2	41328576
G	32417685
G^2	42138657
L	13425786
L^2	14235867
Q_1	78653421
Q_2	76583214
Q_3	86754231
Q_4	67852341
Q_5	68572413
Q_6	65782134
Q_7	87564312
Q_8	75863142
Q_9	58761432
Q_{10}	57681324
Q_{11}	85674123
Q_{12}	56871243

Structure de la pièce

Beta X1 ---> X2 ---> X3 ---> Intermezzo 1

Gamma ---> X4 ---> X5 ---> X6 ---> Intermezzo 2

Alpha ---> X7 ---> X8 ---> X9 ---> Intermezzo 3

Beta ---> X10 ---> X11 ---> X12 ---> Intermezzo 4

Gamma ---> X13 ---> X14 ---> X15 ---> Intermezzo 5

Alpha ---> X16 ---> X17 ---> X18 ---> Intermezzo 6

(Théorie des cribles)
+
(Théorie des groupes)

(Théorie des cribles)

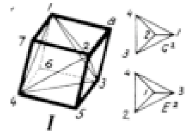
Nomos Alpha : implementazione in OM

Label	Order of Vertices
I	12345678
A	21436587
B	34127856
C	43218765
D	23146758
D^2	31247568
E	24316875
E^2	41328576
G	32417685
G^2	42138657
L	13425786
L^2	14235867
Q_1	78653421
Q_2	76583214
Q_3	86754231
Q_4	67852341
Q_5	68572413
Q_6	65782134
Q_7	87564312
Q_8	75863142
Q_9	58761432
Q_{10}	57681324
Q_{11}	85674123
Q_{12}	56871243

Groupe de rotations du cube dans l'espace

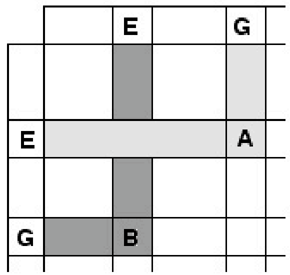
isomorphe au groupe des permutations de 4 éléments S4

isomorphe au groupe des symétries du tétraèdre

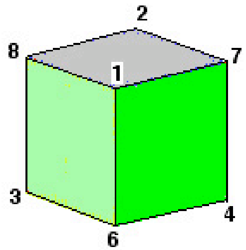


<===

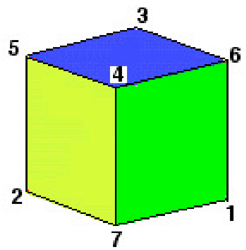
<===

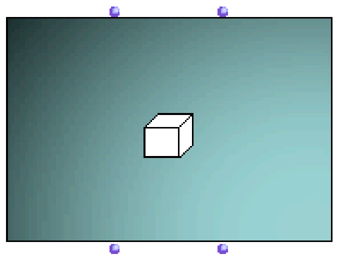


E (G) = A =



G(E) = B =





(24316875)°(32417685)=(21436587)

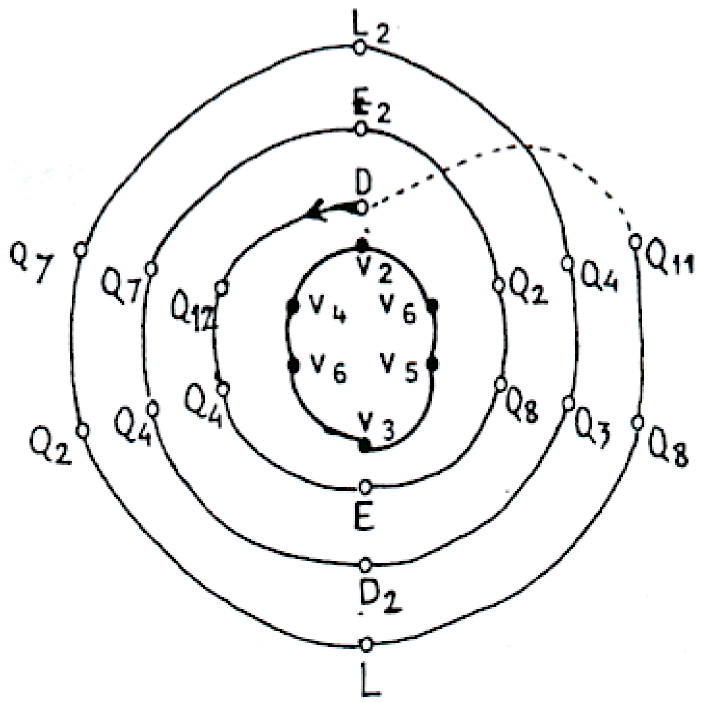
=(12)(34)(56)(78)

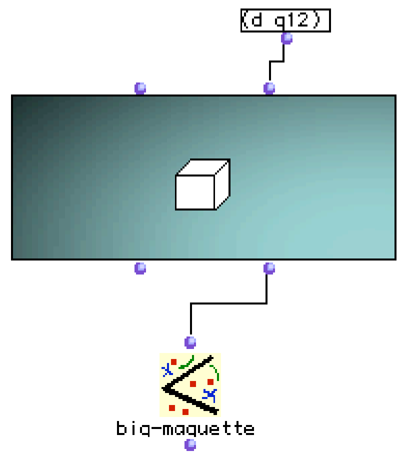
<===>

1-->2
2-->1
3-->4
4-->3
5-->6
6-->5
7-->8
8-->7

Nomos Alpha : implementazione in OM

Processus de Fibonacci généralisé

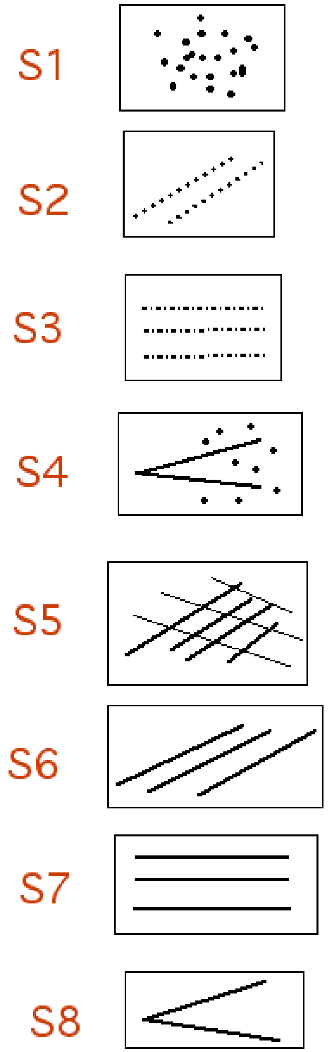


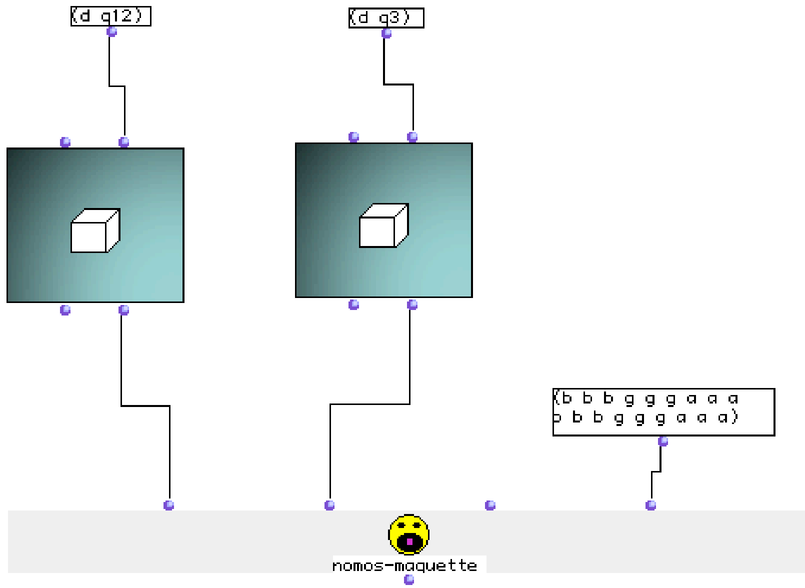


- Caractère cyclique
- Longueur maximale = 18
- Degré maximal = 13

Nomos Alpha : implementazione in OM

Deux processus de Fibonacci en parallèle





$\kappa^{\alpha}_{1} = 1 . \mathit{mf} . 2 = 2 . \mathit{mf}$

$\kappa^{\alpha}_{2} = 1 . \mathit{fff} . 4.5 = 4.5 . \mathit{fff}$

$\kappa^{\alpha}_{3} = 2.5 . \mathit{fff} . 4.5 = 11.25 . \mathit{fff}$

$\kappa^{\alpha}_{4} = 2.5 . \mathit{mf} . 2 = 5 . \mathit{mf}$

$\kappa^{\alpha}_{5} = 1.5 . \mathit{f} . 2.62 = 3.93 . \mathit{f}$

$\kappa^{\alpha}_{6} = 1.5 . \mathit{ff} . 3.44 = 5.15 . \mathit{ff}$

$\kappa^{\alpha}_{7} = 2.0 . \mathit{ff} . 3.44 = 6.88 . \mathit{ff}$

$\kappa^{\alpha}_{8} = 2.0 . \mathit{f} . 2.62 = 5.24 . \mathit{f}$

$\kappa^{\beta}_{1} = 0.5 . \mathit{mf} . 2 = 1 . \mathit{mf}$

$\kappa^{\beta}_{2} = 0.5 . \mathit{fff} . 4.5 = 2.25 . \mathit{fff}$

$\kappa^{\beta}_{3} = 5 . \mathit{fff} . 4.5 = 22.5 . \mathit{fff}$

$\kappa^{\beta}_{4} = 5.0 . \mathit{mf} . 2 = 10.0 . \mathit{mf}$

$\kappa^{\beta}_{5} = 1.08 . \mathit{f} . 2.62 = 2.83 . \mathit{f}$

$\kappa^{\beta}_{6} = 1.08 . \mathit{ff} . 3.44 = 3.72 . \mathit{ff}$

$\kappa^{\beta}_{7} = 2.32 . \mathit{ff} . 3.44 = 7.98 . \mathit{ff}$

$\kappa^{\beta}_{8} = 2.32 . \mathit{f} . 2.62 = 6.08 . \mathit{f}$

$\kappa^{\gamma}_{1} = 1 . \mathit{mf} . 2 = 2 . \mathit{mf}$

$\kappa^{\gamma}_{2} = 1 . \mathit{fff} . 2 = 2 . \mathit{fff}$

$\kappa^{\gamma}_{3} = 4.0 . \mathit{fff} . 4.5 = 18.0 . \mathit{fff}$

$\kappa^{\gamma}_{4} = 4.0 . \mathit{mf} . 2.0 = 8.0 . \mathit{mf}$

$\kappa^{\gamma}_{5} = 2.0 . \mathit{f} . 2.62 = 5.24 . \mathit{f}$

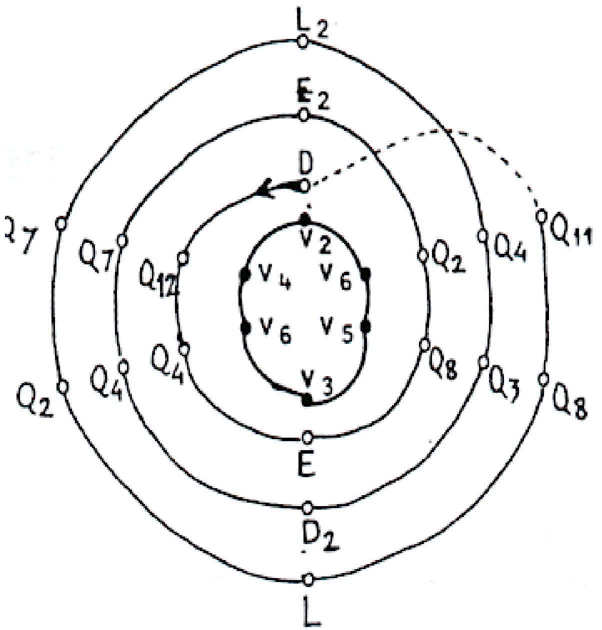
$\kappa^{\gamma}_{6} = 2.0 . \mathit{ff} . 3.44 = 6.88 . \mathit{ff}$

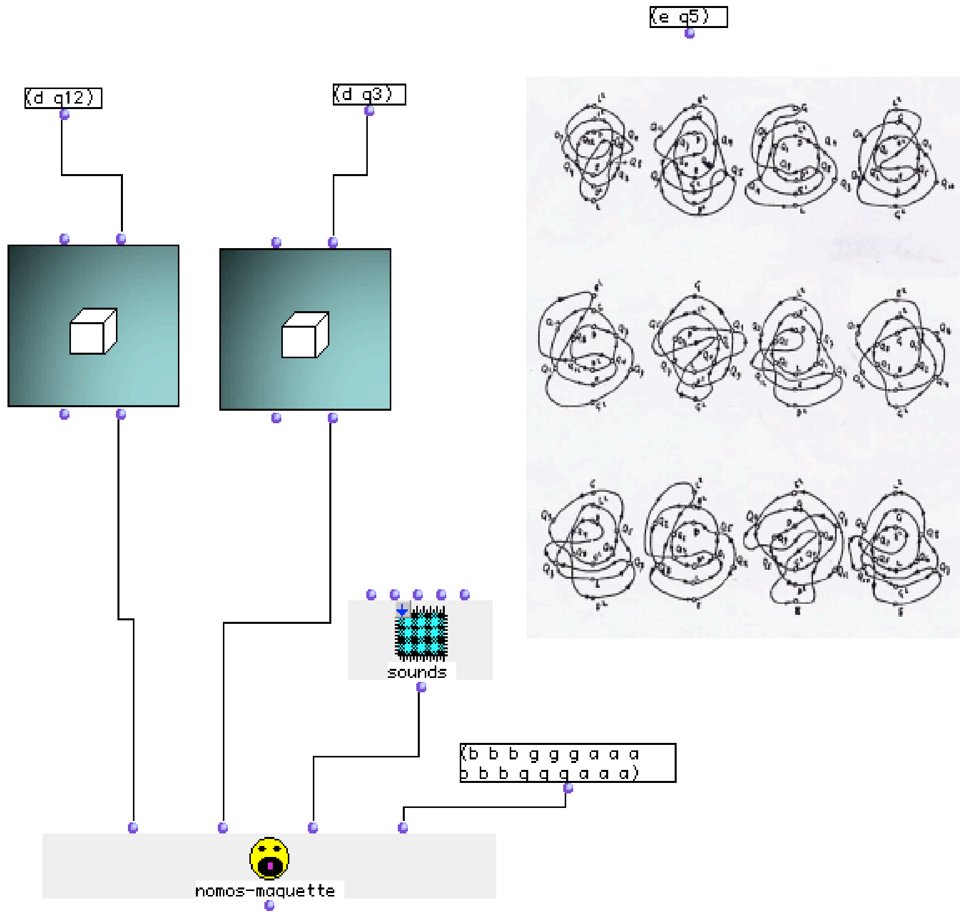
$\kappa^{\gamma}_{7} = 3.0 . \mathit{ff} . 3.44 = 10.32 . \mathit{ff}$

$\kappa^{\gamma}_{8} = 3.0 . \mathit{f} . 2.62 = 7.86 . \mathit{f}$

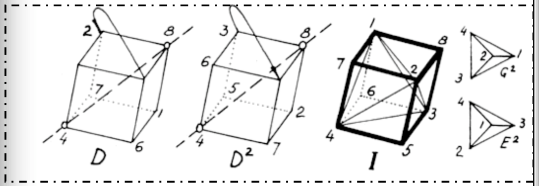
Nomos Alpha : implementazione in OM

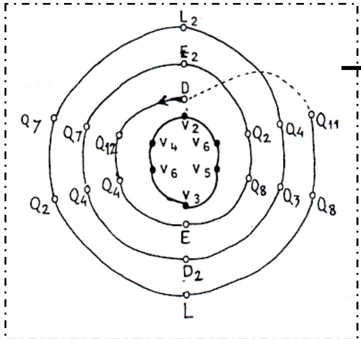
La pièce... ... et ses variantes

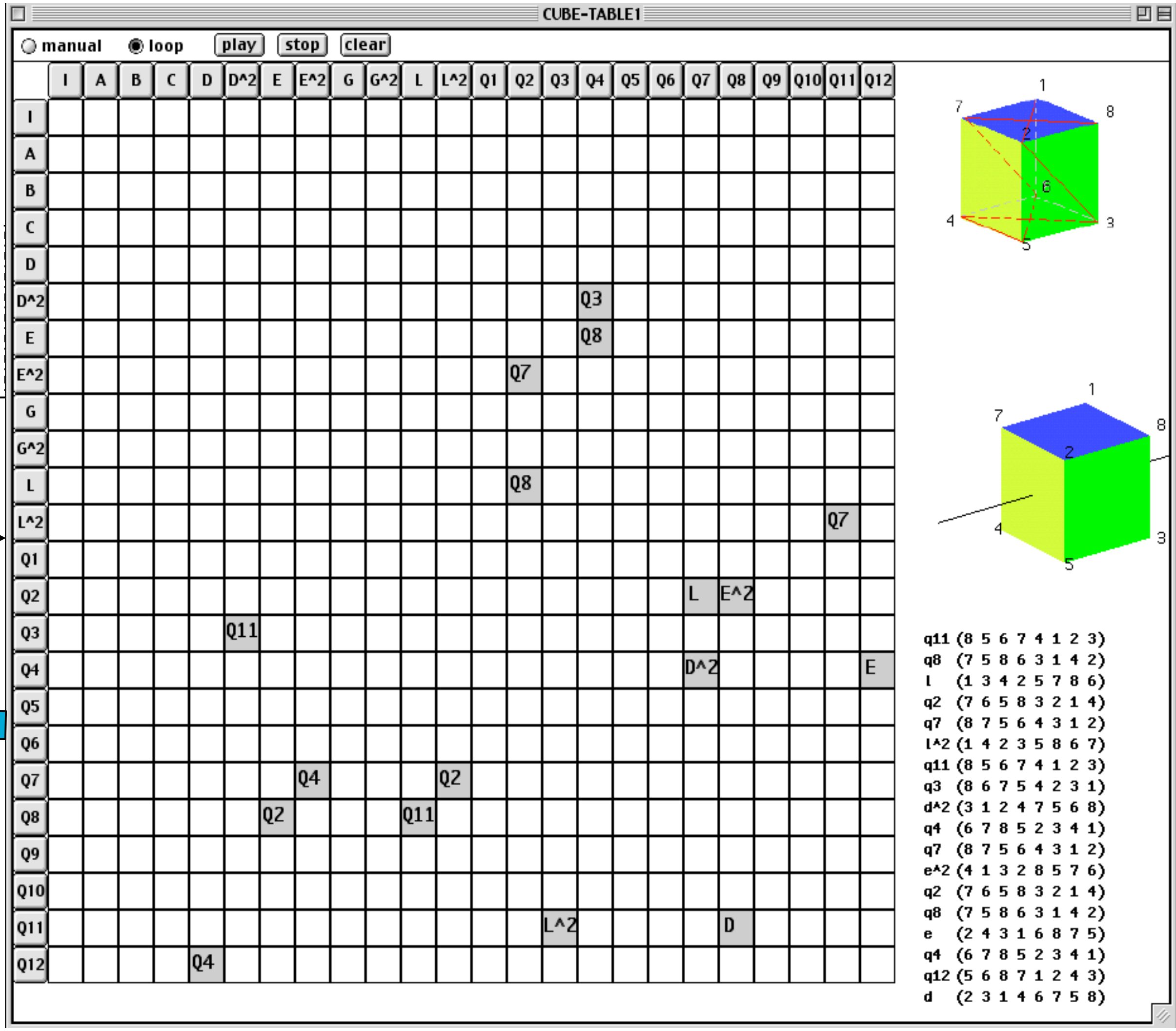




Teoria dei gruppi e percezione







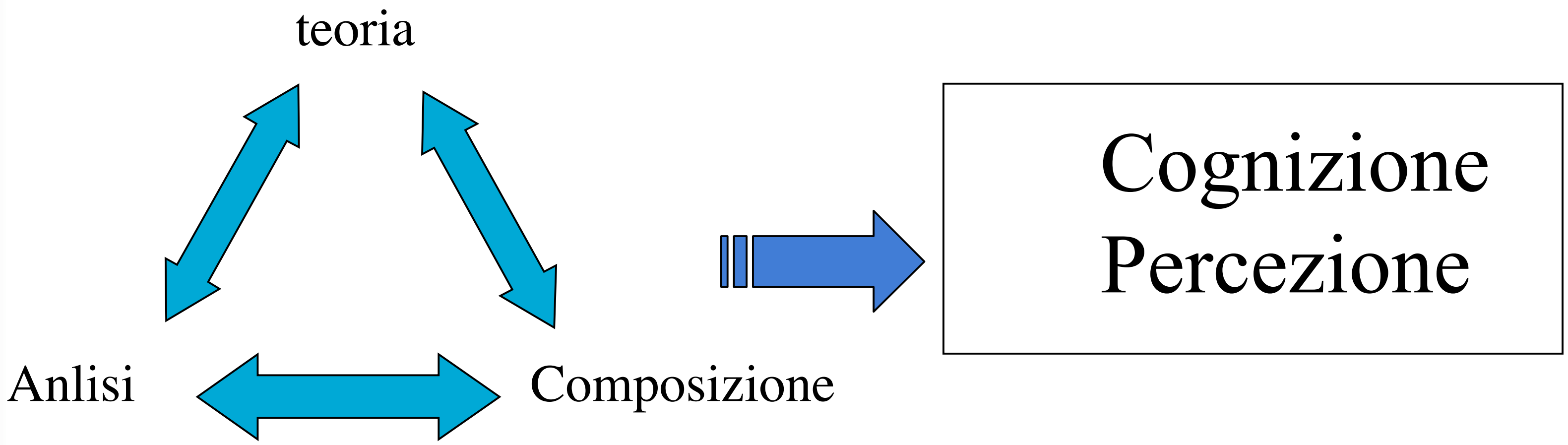
	I	A	B	C	D	D^2	E	E^2	G	G^2	L	L^2	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12
I																								
A																								
B																								
C																								
D																								
D^2																Q3								
E																Q8								
E^2														Q7										
G																								
G^2																								
L														Q8										
L^2																							Q7	
Q1																								
Q2																			L	E^2				
Q3						Q11																		
Q4																			D^2					E
Q5																								
Q6																								
Q7								Q4				Q2												
Q8							Q2				Q11													
Q9																								
Q10																								
Q11															L^2					D				
Q12					Q4																			

Cognizione/percezione
- Trasformazione di gruppo e processo di Fibonacci

Epistemologia
- Modellizzazione informatica di un processo compositivo

Verso un modello interattivo

Matematica/Musica/Filosofia



- Articolazione *objectal/opératoire* (Granger)
- Teoria dei gruppi e percezione musicale (Cassirer, Balzano)
- Tepria delle categorie, cognizione e fenomenologia (Petitot, Patras)

Teoria dei gruppi e percezione

- Da Cassirer a Balzano...

- The concept of group and the theory of perception [CASSIRER1944]

- *« …Una descrizione fondata sulla teoria dei gruppi promette di essere un valido approccio per trattare problemi di percezione musicale. In maniera speculativa possiamo affermare che il carattere singolare* [uniqueness] *dell'esperienza musicale è dovuto in parte alle strutture particolari di gruppo che la musica rende possibile all'uditore »* [BALZANO 1980, 83].