

# Séminaire *Musique et mathématiques*



Problèmes musicaux et conjectures  
mathématiques. Essai d'une typologie  
mathémusicale.



Mileno ANDRETTA

Equipe Représentations Musicales

IRCAM/CNRS UMR 9912

# ...une histoire récente

• 1999 : 4<sup>e</sup> Forum Diderot (Paris, Vienne, Lisbonne),  
*Mathematics and Music* (Assayag et al., 2001)

• 2000 - 2003 : MaMuTh Seminar (Mexique, Zürich, Berlin).  
*Perspectives in Mathematical and Computational Music Theory*  
(Mazzola, Noll, Luis-Puebla, epOs, 2004)

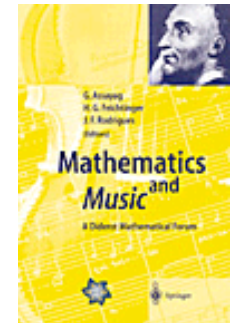
• 2000 - 2001 : Séminaire *MaMuPhi* (Ircam). *Penser la musique  
avec les mathématiques ?* (Assayag, Mazzola, Nicolas, Collection  
Musique-Science, 2005)

• 2003 : *The Topos of Music* (G. Mazzola et al.)

• 2001 - 2005 : Séminaire *MaMuX* de l'IRCAM  
<http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/>

• 2003 - 2005 : AMS Conferences. Special Session on  
Mathematical Techniques in Music Analysis (Bateau Rouge,  
Chicago, Phoenix, Evanston)

• 2005 : Création d'une revue internationale sur musique et  
mathématiques (*Journal of Mathematics and Music*).



Perspectives  
in Mathematical  
and Computational  
Music Theory

Edited by Gernot Mazzola,  
Thomas Noll, and Emilio Luis Puebla

epOs  
MUSIC



# Problèmes « mathémusicaux »

## *Set Theory*, théorie diatonique et théorie modale

Théorème de l'Hexacorde (Babbitt, Lewin, Fox[?])

La relation Z (Forte, Lewin)

Propriétés de la gamme diatonique (Balzano, Clough&Myerson)

Ensembles à régularité maximale ou *ME-sets* (Clough & Douthett)

Enumération d'orbites (Halsey&Hewitt, Reiner, Fripertinger, Read, Noll)

Canons rythmiques de pavage (Vuza, Andreatta, Amiot, Fripertinger, ...)

Suites modales et calcul de différences finies (Vuza, Andreatta, Agon)

## Approches topologiques en musique

Théorie des gammes naturelles (Yves Hellegouarch)

Tresses et nœuds des tempéraments musicaux (Franck Jedrzejewski)

Topologies motiviques (C. Buteau, A. Nestke, E. Chew)

## Théorie mathématique de la musique

Théorie des dénotateurs, des compositions et réseaux globaux (Mazzola)



## *Modern Algebra and the Rise of Mathematical (Music) Structures* (L. Corry)

- F. Klein : *Le Programme d'Erlangen*, 1872
- G. Adler: «Umfang, Methode und Ziel der Musikwissenschaft», 1885
- D. Hilbert : *Grundlagen der Geometrie*, 1899
- B. L. van der Waerden : *Moderne Algebra*, Springer, 1930
- E. Krenek : *Über Neue Musik. Sechs Vorlesungen zur Einführung in die theoretischen Grundlagen* 1937
- M. Babbitt : *The function of Set Structure in the Twelve-Tone System*, PhD, Princeton University, 1946/1992
- N. Bourbaki : « L'architecture des mathématiques », 1948
- S. Eilenberg, S. Mac Lane: « Gen. th. of natural equivalences », 1945
- I. Xenakis : *Musiques Formelles*, 1963 (*Formalized Music*, 1992)
- A. Vieru : *Elements d'une théorie générale des modes*, 1967
- A. Forte : *The Structure of Atonal Music*, 1973
- D. Lewin : *Generalized Musical Intervals and Transformation*, 1987
- J. Piaget, G. Henriques, E. Ascher : *Morphismes et Catégories*, 1990
- G. Mazzola : *The Topos of Music*, 2003



# Musique et théorie des groupes

- G. Birkhoff : *Aesthetic Measure*, Harvard University Press, 1933

- Ch. V : The diatonic chords
  - Musical Notes, Intervals, Triads, and Chords
  - The Equally Tempered Diatonic and Chromatic Scale. Modulation.
  - ....
- Ch. VI : Diatonic Harmony
  - The Problem of Chordal Sequences
  - ....
- Ch. VII : Melody
  - The Problem of Melody and the Role of Harmony
  - Definition of  $O$ ,  $C$ , and  $M$  (aesthetic measure) for simple melody
  - ...
  - The Problem of Rhythm

- F. Le Lionnais : *Les grands courants de la pensée mathématique* 1948

- Les mathématiques, la beauté, l'esthétique et les beaux-arts
  - Andréas Speiser : La notion de Groupe et les arts
  - Henri Martin : Les Mathématiques et la Musique

# Vers l'émergence des structures algébriques en musique

## *Ernst Krenek et la méthode axiomatique*

---

- *The Relativity of Scientific Systems*
- *The Significance of Axioms*
- *Axioms in music*
- *Musical Theory and Musical Practice*

Ernst Krenek : *Über Neue Musik*, 1937  
(Engl. Transl. *Music here and now*, 1939).

«*Physicists and mathematicians are far in advance of musicians in realizing that their respective sciences do not serve to establish a concept of the universe conforming to an objectively existent nature*»

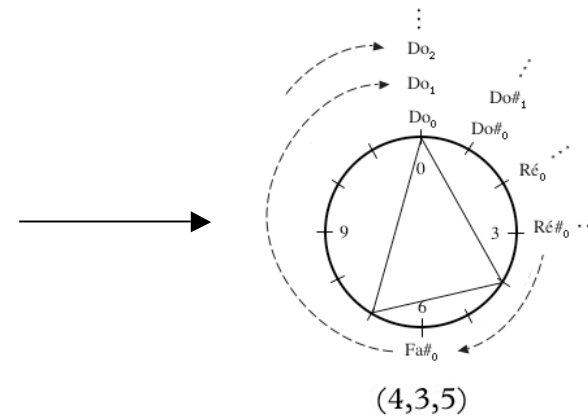
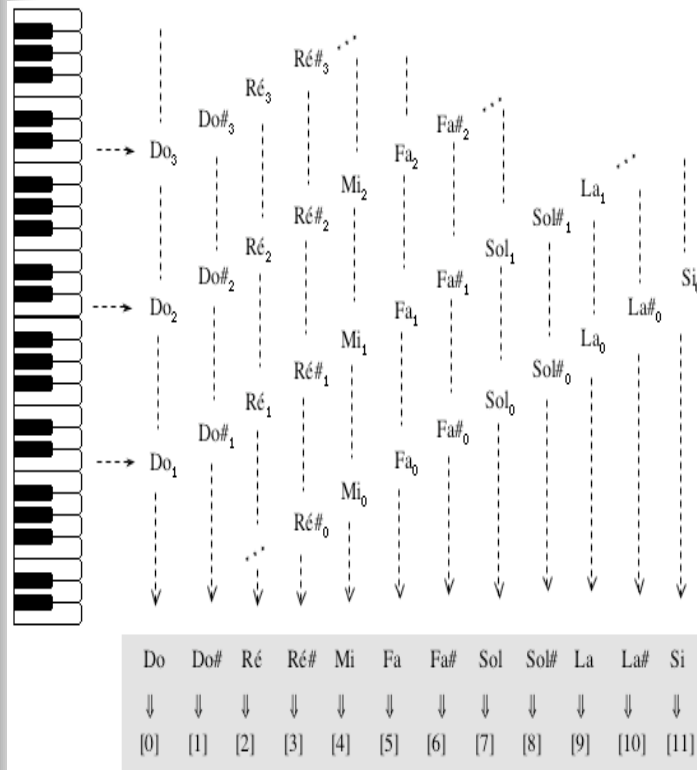
«*As the study of axioms eliminates the idea that axioms are something absolute, conceiving them instead as **free propositions of the human mind**, just so would this **musical theory** free us from the concept of major/minor tonality [...] as an irrevocable law of nature*».

# L'émergence de la structure de groupe en musique

## *La relation de congruence mod 12*

Camille Durutte:

- *Technie, ou lois générales du système harmonique (1855)*
- *Résumé élémentaire de la Technie harmonique, et complément de cette Technie (1876)*



The Twelve-Tone System, is a «set of elements, *relations* between elements and *operations* upon elements»  
 (M. Babbitt: *The function of Set Structure in the Twelve-Tone System*, 1946)

## Une démarche algébrique pour le sérialisme intégral

*« Une compréhension de la structuration dodécaphonique des composantes autres que les hauteurs ne peut que passer par une définition correcte et rigoureuse de la **nature** du système et des **opérations** qui lui sont associées »*

M. Babbitt : « Some Aspects of Twelve-Tone Composition », 1955

*« [Le système] peut être caractérisée complètement en explicitant les éléments, les **relations** [...] entre ces éléments et les **opérations** sur les éléments ainsi reliés. [...] Toute considération sur les opérations du système doit procéder de la conscience de leur nature permutationnelle »*

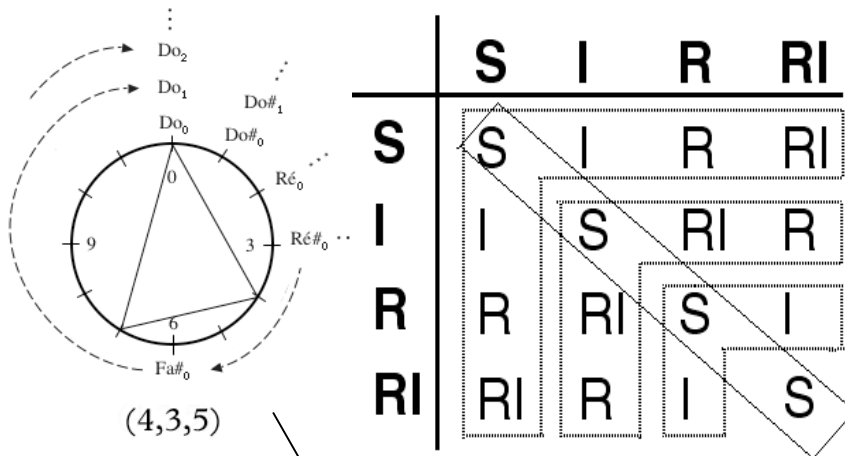
M. Babbitt : « Twelve-Tone Invariants as Compositional Determinants », 1960

*« ...un large nombre de conséquences compositionnelles sont dérivables directement de théorèmes de **théorie des groupes finis** »*

M. Babbitt : « Set Structure as a Compositional Determinant », 1961

# Le système dodécaphonique et la théorie des groupes

The Twelve-Tone System, is a «*set of elements, relations between elements and operations upon elements*» (Babbitt, 1946)



$$S: (a,b) \rightarrow (a,b)$$

$$I: (a,b) \rightarrow (a, 12-b \text{ mod. } 12)$$

$$R: (a,b) \rightarrow (11-a, b).$$

$$RI: (a,b) \rightarrow (a, 12-b \text{ mod. } 12)$$

$$(11-a, 12-b \text{ mod. } 12)$$

S

I

R

IR

$$S(a,b) = (a,b)$$

$$I(a,b) = (a, 12-b \text{ mod. } 12)$$

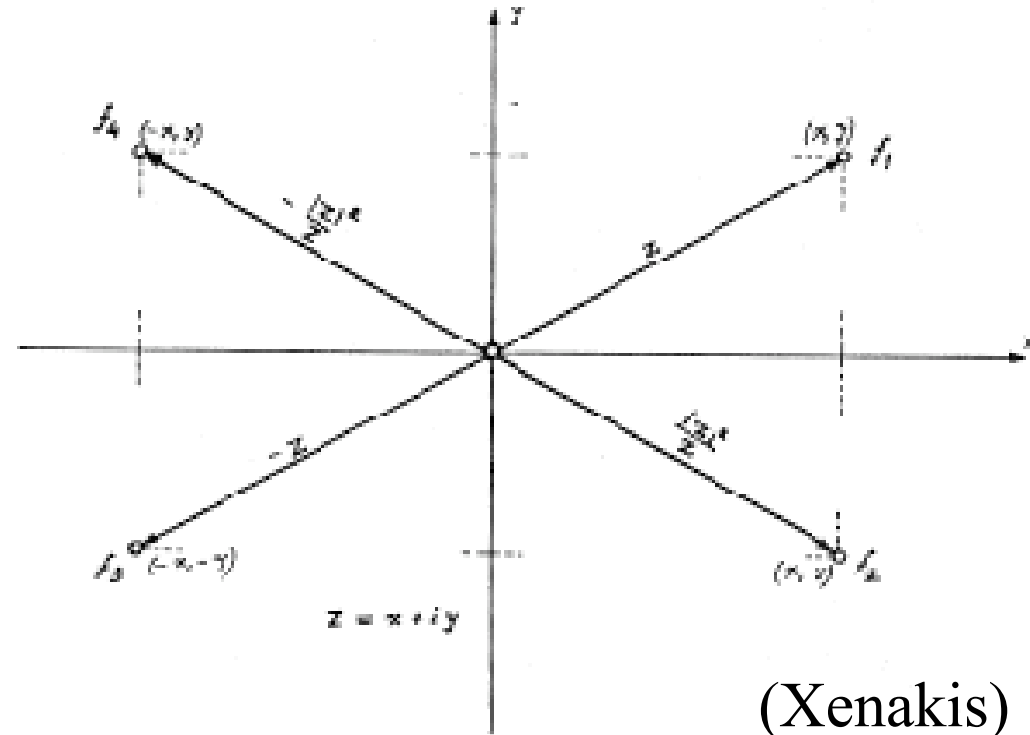
$$R(a,b) = (11-a, b).$$

$$IR(a,b) = R(11-a, b) = (11-a, 12-b \text{ mod. } 12)$$

# La notion (moderne) de symétrie en musique

	S	I	R	R
S	S	I	R	R
I	I	S	RI	R
R	R	RI	S	I
RI	RI	R	I	S

(Babbitt)



(Xenakis)

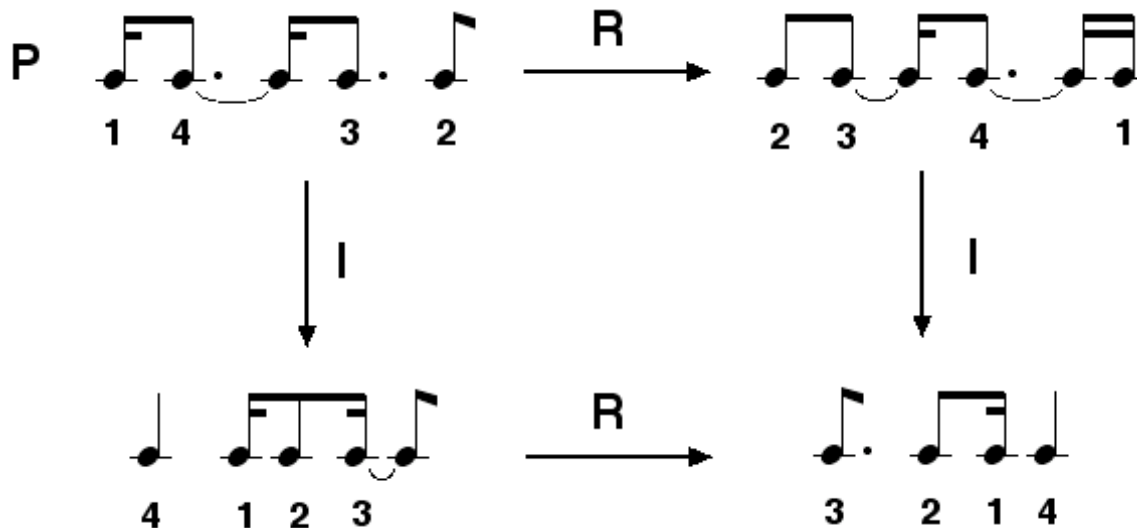
- $Z = x + yi$
- S série de base  $\longrightarrow f_1 = Z = x + yi = Z = f_1(Z) = \text{original form}$
  - I inversion  $\longrightarrow f_2 = x - yi = |Z|^{-2} Z = f_2(Z) = \text{inversion}$
  - RI rétrog. inverse  $\longrightarrow f_3 = -x - yi = -Z = f_3(Z) = \text{inverted retrogradation}$
  - R rétrogradation  $\longrightarrow f_4 = -x + yi = -( |Z|^{-2} Z) = f_4(Z) = \text{retrogradation}$

# Vers une formalisation algébrique du sérialisme intégrale

« [Le système] peut être caractérisée complètement en explicitant les éléments, les **relations** [...] entre ces éléments et les **opérations** sur les éléments ainsi reliés. [...] Toute considération sur les opérations du système doit procéder de la conscience de leur nature permutationnelle »

M. Babbitt : « Twelve-Tone Invariants as Compositional Determinants », 1960

Série des durées temporelles  
(*durational row*)



Three compositions  
for piano (1947)

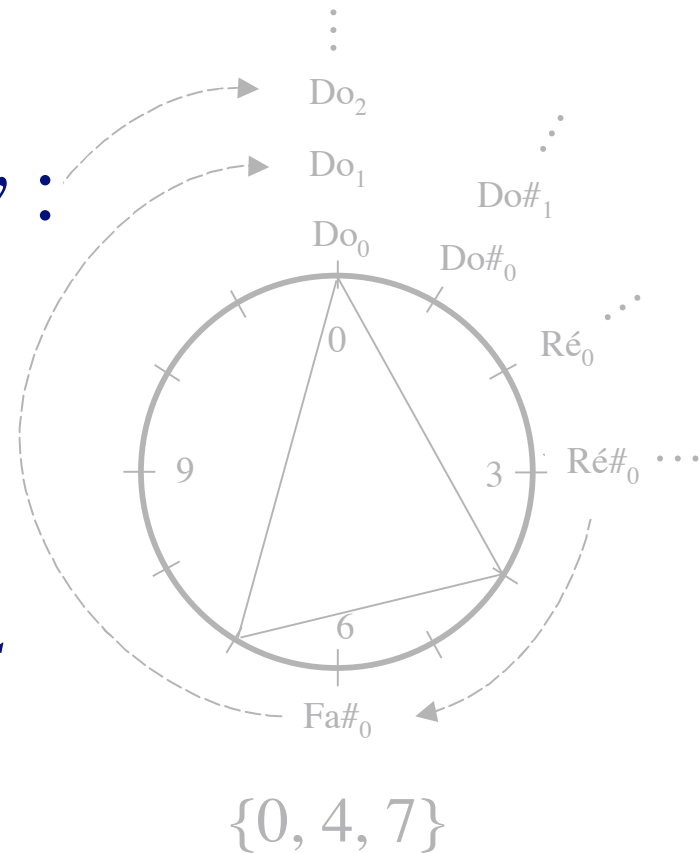
$P$  (0,0) (1,4) (2,2) (3,5) (4,1) (5,3) (6,11) (7,7) (8,9) (9,6) (10,10) (11,8)  
 $I$  (0,0) (1,8) (2,10) (3,7) (4,11) (5,9) (6,1) (7,5) (8,3) (9,6) (10,2) (11,4)  
 $R$  (0,8) (1,10) (2,6) (3,9) (4,7) (5,11) (6,3) (7,1) (8,5) (9,2) (10,4) (11,0)  
 $IR$  (0,4) (1,2) (2,6) (3,3) (4,5) (5,1) (6,9) (7,11) (8,7) (9,10) (10,8) (11,0)

$$\begin{aligned}
 P(a,b) &= (a,b) \\
 I(a,b) &= (a, 12-b \text{ mod. } 12) \\
 R(a,b) &= (11-a,b). \\
 IR(a,b) &= R(11-a, b) = \\
 &= (11-a, 12-b \text{ mod. } 12)
 \end{aligned}$$

# Les principes de base de la *Set Theory* : une introduction

*Set Theory* « classique » et  
Approches Transformationnelles

Moreno Andreatta  
Stéphan Schaub



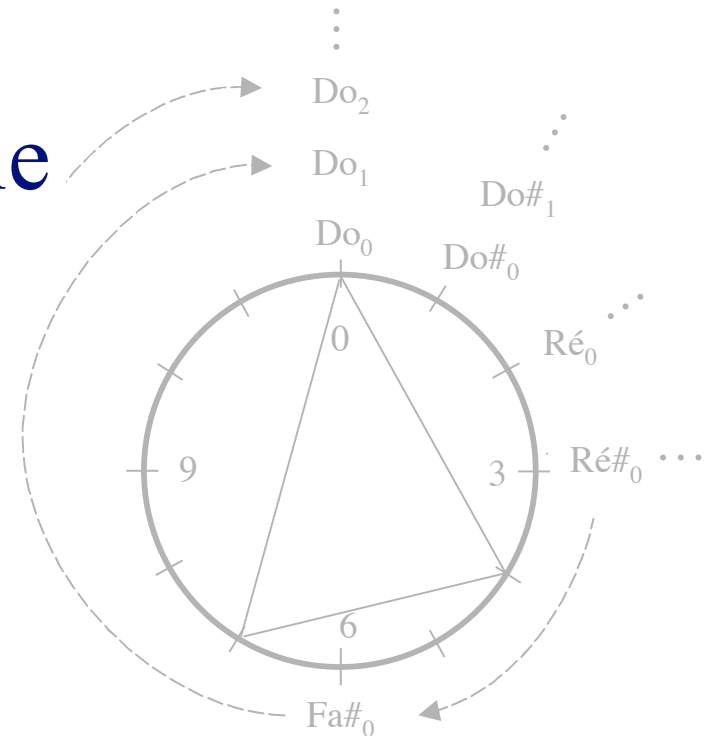
*Colloque International*  
Autour de la *Set Theory*  
IRCAM Octobre 2003

« Une introduction à la *Set Theory* : Les concepts à la base des théories d'Allen Forte et de David Lewin », *Musurgia*, Vol. X/1, 2003, 73-92.

# Les origines de la théorie transformationnelle

*la filiation Babbitt/Lewin*

Stéphan Schaub  
Moreno Andreatta



$\{0, 4, 7\}$

*Journée d'étude sur les  
Théories transformationnelles  
et néo-riemanniennes  
IRCAM Février 2005*



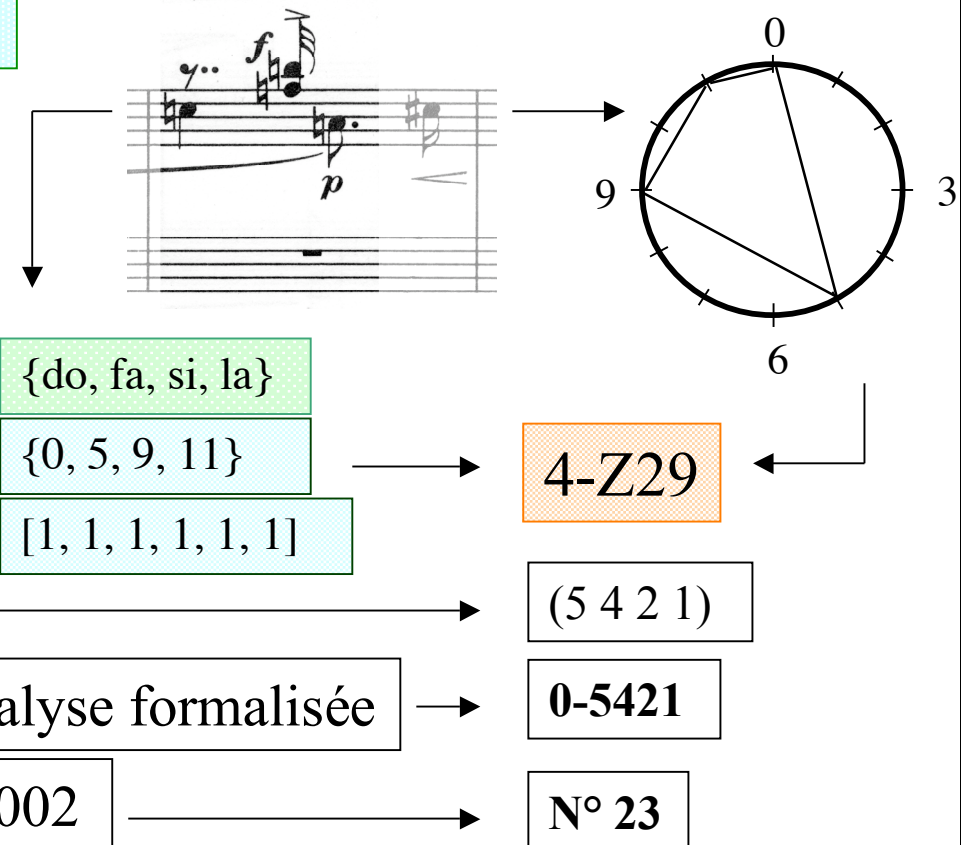
# Fonction et structure d'une théorie de la musique

« ...rendre possible d'un côté l'étude de la **structure** des systèmes musicaux [...] et la formulation des contraintes de ces systèmes dans une perspective compositionnelle [...] mais aussi, comme étape préalable, une terminologie adéquate [...] pour rendre possible et établir un **modèle** qui autorise des énoncés bien déterminés et vérifiables sur les œuvres musicales »

M. Babbitt : « The Structure and Function of Music Theory », 1965

## Approches 'set-theoriques'

- A. Forte : *The Structure of Atonal Music*, 1973.
- D. Lewin : *Generalized Musical Intervals and Transformation*, 1987
- A. Vieru : *The Book of modes*, 1993 (orig. 1980)
- A. Riotte, M. Mesnage : l'analyse formalisée
- E. Carter : *Harmony Book*, 2002



# L'analyse formalisée ou les « entités formelles » en musique

*André Riotte et Marcel Mesnage*

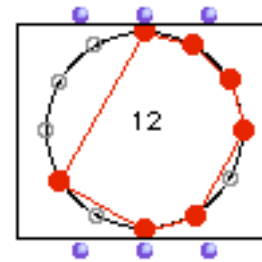
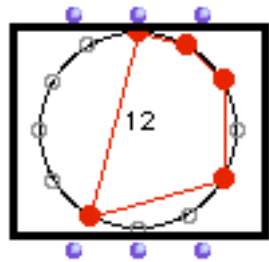
A. Schoenberg : *Klavierstück Op. 33a*, 1929

The image displays a musical score for the first system of Schoenberg's *Klavierstück Op. 33a*. The score is written in 4/4 time and consists of two staves. Several musical phrases are highlighted with colored boxes: blue rounded rectangles, yellow diamonds, and light blue dotted rectangles. Below the score, six circular diagrams (pitch-class sets) are shown, each with a corresponding label. Dotted arrows connect the highlighted musical phrases to their respective diagrams.

The diagrams are arranged in two groups of three, separated by a vertical dashed line. Each diagram is a circle with 12 points representing pitch classes, numbered 0 through 11. The diagrams show different chordal structures:

- Diagram 1: 0-5511 (1 2 5 6)
- Diagram 2: 9-4233 (2 3 4 5 6)
- Diagram 3: 8-6231 (1 2 3 4 5 6)
- Diagram 4: 11-6132 (1 2 3 4 5 6)
- Diagram 5: 0-4332 (2 3 4 5 6)
- Diagram 6: 3-5511 (1 2 5 6)

# Le catalogue des *pcs* d'Allen Forte (1973)



5-Z36

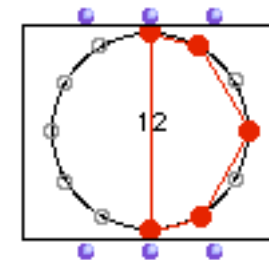
0,1,2,4,7

222121

7-Z36

0,1,2,3,5,6,8

444342



5-Z12

# A la recherche des bons *invariants* pour un ECH

**La fonction intervallique IFUNC (Lewin)** répertorie la fréquence d'apparition des classes d'intervalles contenues dans un ECH.

$$\text{IFUNC}(A, A) = [4 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

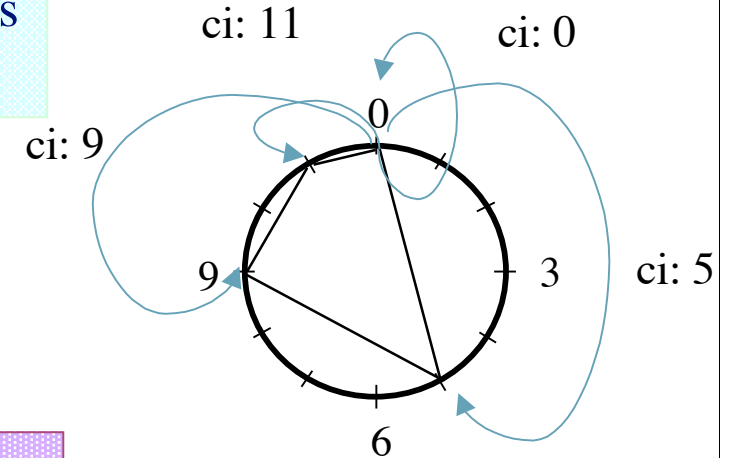
$\begin{array}{cccccccccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & & & & & & & & & \uparrow \\ \text{ci } 0 & \text{ci } 1 & \text{ci } 2 & \dots & & & & & & & & \text{ci } 11. \end{array}$

**Le vecteur intervallique (Forte)** répertorie la fréquence d'apparition des classes d'intervalles modulo l'équivalence :  $\text{cii} = \text{ci}(12-i)$

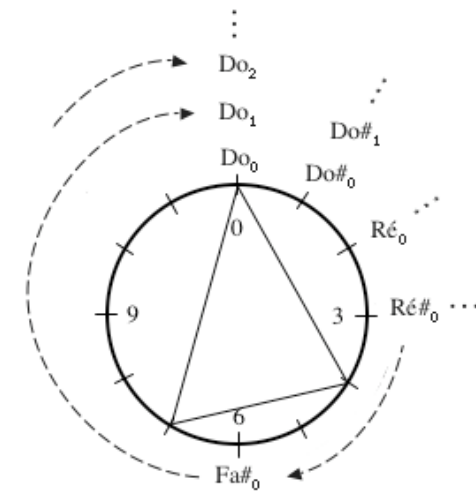
$$\text{VI}(A) = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

$\begin{array}{cccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & & & \uparrow \\ \text{ci } 1 & \text{ci } 2 & \text{ci } 3 & \dots & & \text{ci } 6. \end{array}$

**La structure intervallique (Vieru)** répertorie les classes d'intervalles successives dans un ensemble des classes de hauteurs.



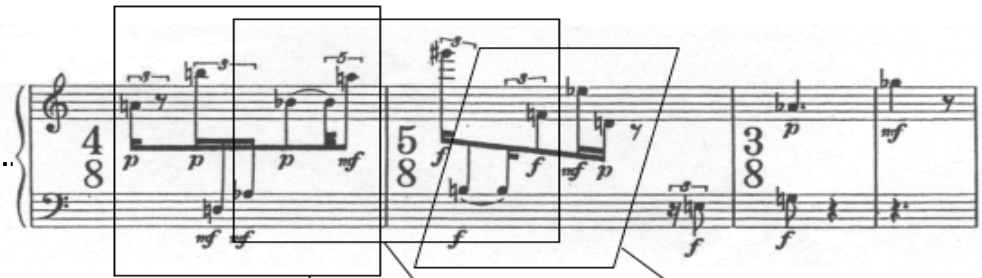
$$A = \{0, 5, 9, 11\}$$



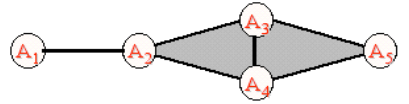
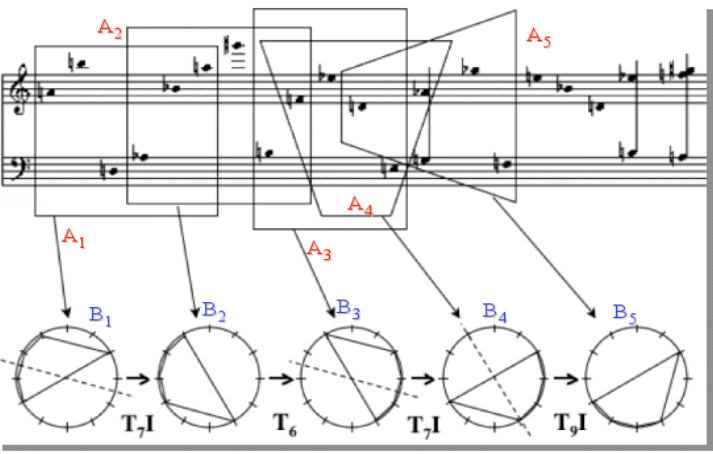
$$(4,3,5)$$

# Set Theory, analyse transformationnelle et théorie des catégories

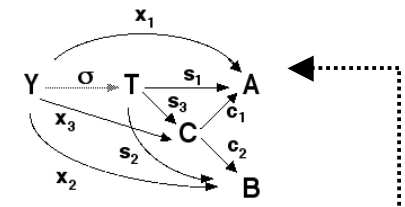
## Stockhausen's *Klavierstück III* (Analyse de David Lewin, 1992)



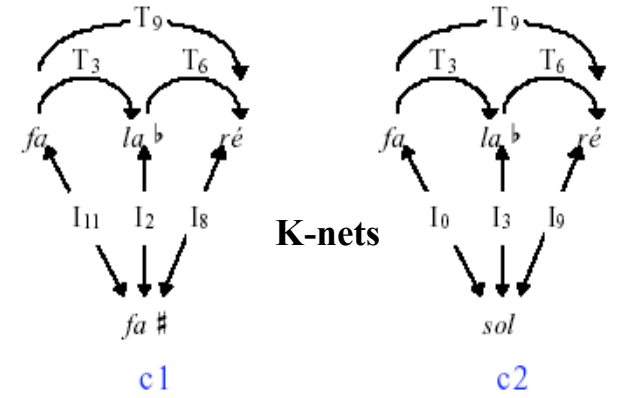
**SI:** (1, 1, 1, 3, 6)      (6, 3, 1, 1, 1)      (6, 3, 1, 1, 1)  
**IFUNC:** [5 3 2 2 1 1 1 1 2 2 3]    [5 3 2 2 1 1 1 1 2 2 3]    [5 3 2 2 1 1 1 1 2 2 3]  
**VI:** [3 2 2 1 1 1]      [3 2 2 1 1 1]      [3 2 2 1 1 1]



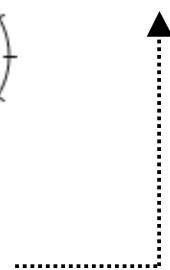
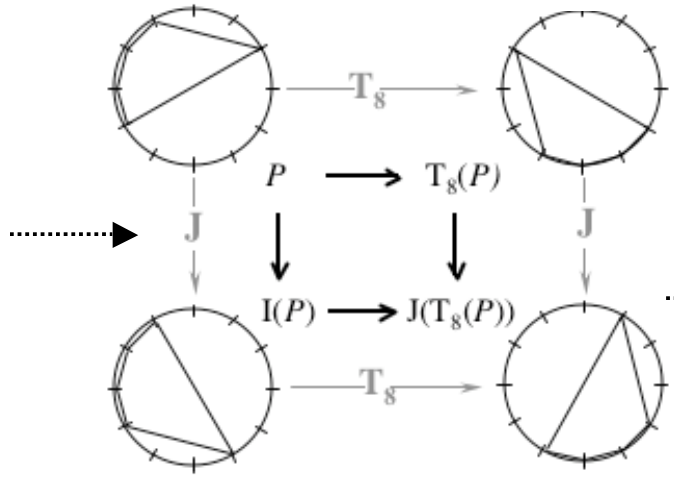
Nerf topologique



Diagrammes catégoriels



K-nets



# Systeme d'Intervalles Généralisés - Systeme Généralisé d'Intervalles

## David Lewin's *Generalized Interval System*

---

$$\text{GIS} = (S, G, \text{int})$$

$S$  = ensemble

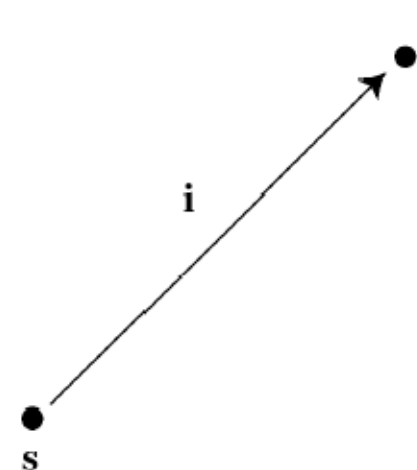
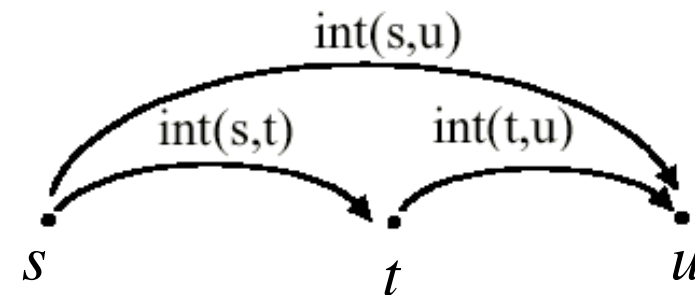
$(G, \bullet)$  = groupe d'intervalles

int = fonction intervallique

$$S \times S \xrightarrow{\text{int}} G$$

1. Pour tout objets  $s, t, u$  dans  $S$  :  
 $\text{int}(s,t) \bullet \text{int}(t,u) = \text{int}(s,u)$

2. Pour tout objet  $s$  dans  $S$  et tout intervalle  $i$  dans  $G$  il y a un seul objet  $t$  dans  $S$  tel que  
 $\text{int}(s,t) = i$



- « On Generalized Intervals and Transformations », *JMT*, 1980
- « A Formal Theory of Generalized Tonal Function », *JMT*, 1982
- « On Formal Intervals between Time-Spans », *Music Perception*, 1984
- *Generalized Musica Intervals and Transformations*, 1987

# Fonction Intervallique IFUNC dans un GIS

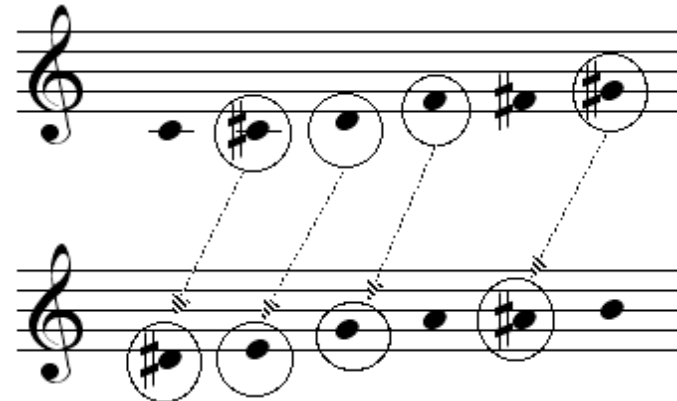
*Interval Function IFUNC in a GIS*

GIS =  $(S, G, \text{int})$

$S$  ensemble

$H$  et  $H'$  dans  $S$

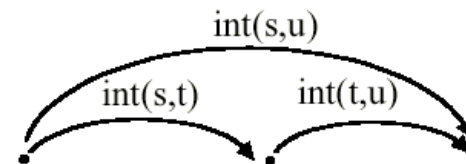
$$H = \{0, 1, 2, 5, 6, 8\}$$



$$H' = \{3, 4, 7, 9, 10, 11\}$$

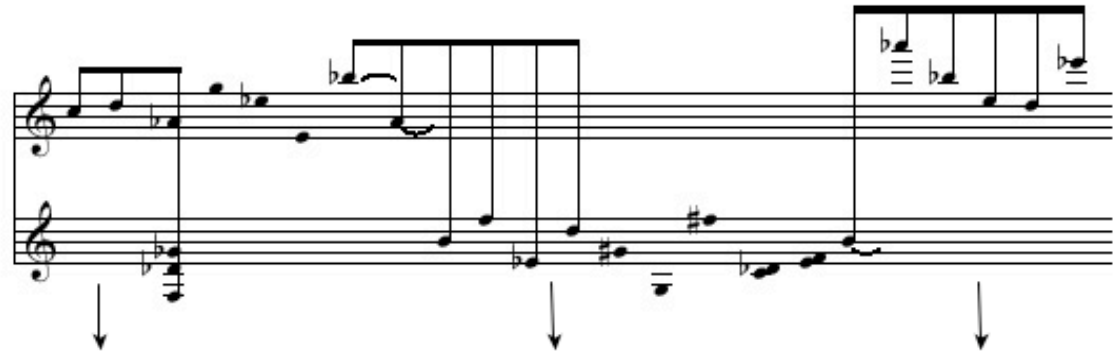
$$\text{IFUNC}(H, H')(i) = \#\{(a, b) \in H \times H' \mid \text{int}(a, b) = i\}$$

$$\text{IFUNC}(H, H')(2) = 4$$

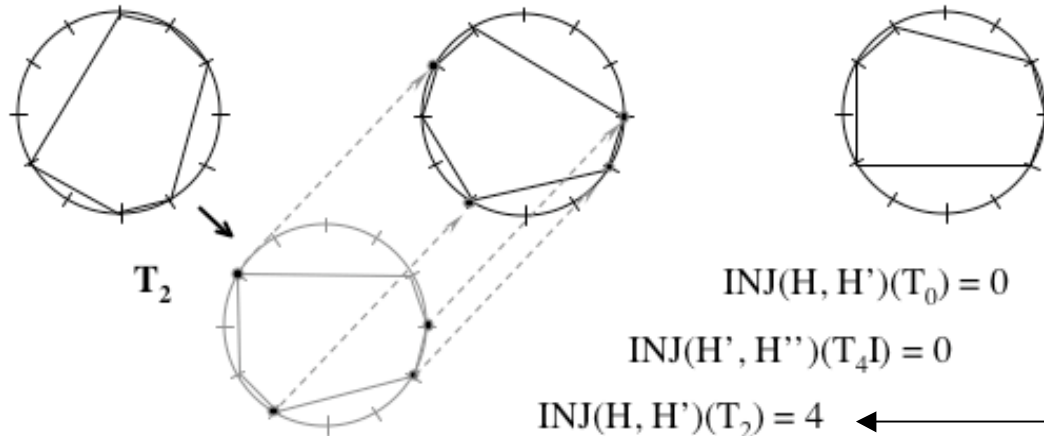


# Fonction d'Injection et relation d'inclusion/complémentaire

## *Injection function and the inclusion/complementary relation*



$$H = \{0, 1, 2, 5, 6, 8\} \quad H' = \{3, 4, 7, 9, 10, 11\} \quad H'' = T_4 I(H) = \{2, 3, 4, 8, 10, 11\}$$



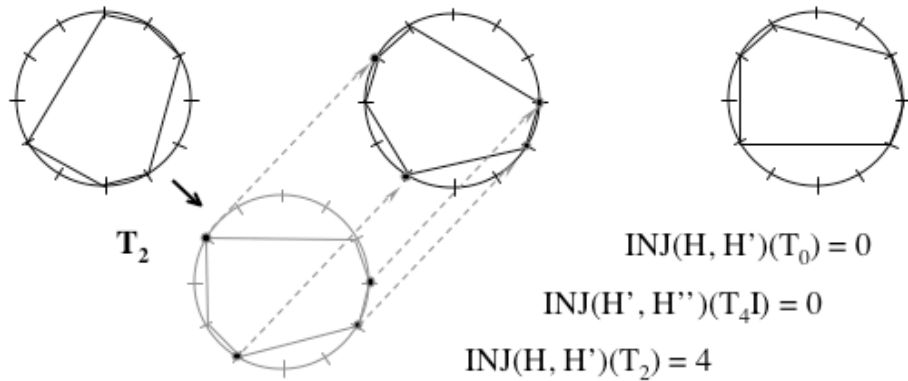
$$\text{INJ}(H, H')(T_n) = \#\{a \in H \mid T_n(a) \in H'\}$$

n=2

# Fonction d'Injection et relation d'inclusion/complémentaire

## *Injection function and the inclusion/complementary relation*

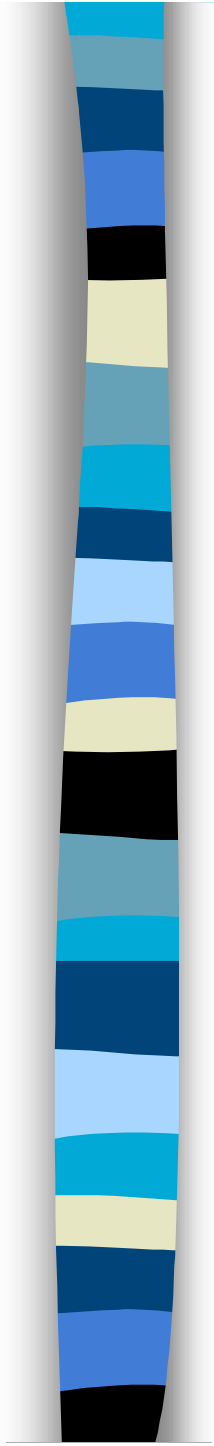
$H = \{0, 1, 2, 5, 6, 8\}$    
  $H' = \{3, 4, 7, 9, 10, 11\}$    
 $H'' = T_4 I(H) = \{2, 3, 4, 8, 10, 11\}$



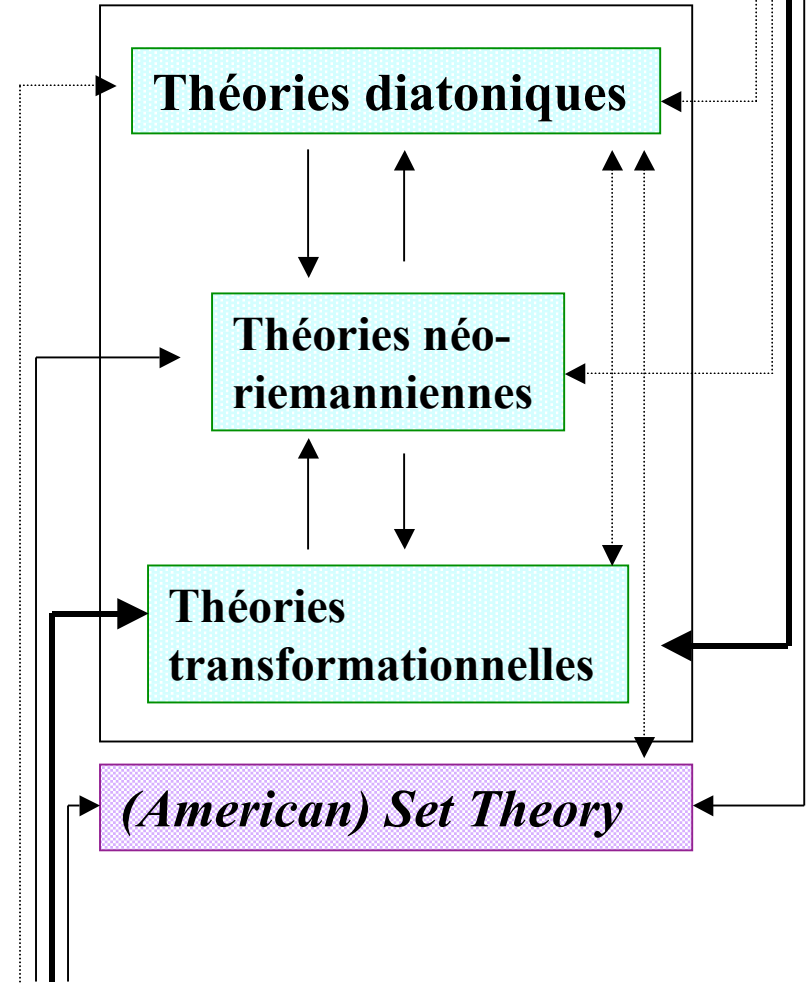
$INJ(H, H')(T_n) =$   
 nombre d'éléments  $a$   
 de  $H$  tels que  $T_n(a) \in H'$

||

$IFUNC(H, H')(i) =$   
 nombre d'éléments  $(a, b)$   
 dans  $H \times H'$  tels que  
 $int(a, b) = i$



**Babbitt**



« Here the basic hierarchical scope of the (twelve-tone) system is contained essentially in the simple **theorem** that:

Given a collection of pitches (pitch classes), the multiplicity of occurrence of any interval (...) determines the number of common pitches between the original collection and the transposition by the interval »

(Milton Babbitt, *Past and Present Concepts*, 1961)

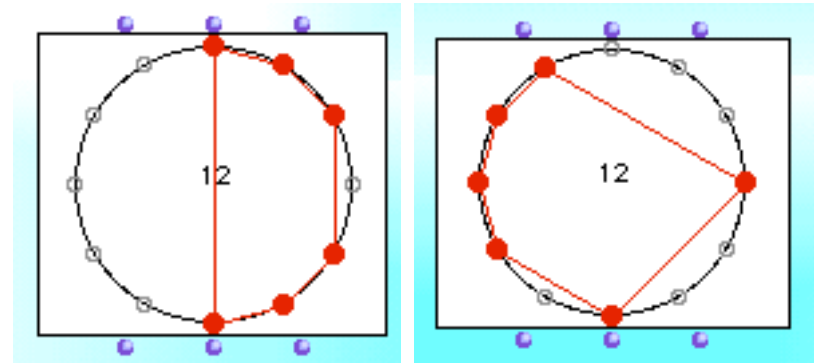
↕ GIS

**Lewin**

$$\text{INJ}(A,B)(T_i) = \text{IFUNC}(A,B)(i)$$

# Théorème (généralisé) de l'hexacorde

P  
 RP  
 IIP  
 RIIP



« Un hexacorde et son complémentaire ont le même contenu intervallique »

$$IV(A) = [4, 3, 2, 3, 2, 1] = [4, 3, 2, 3, 2, 1] = IV(A)$$

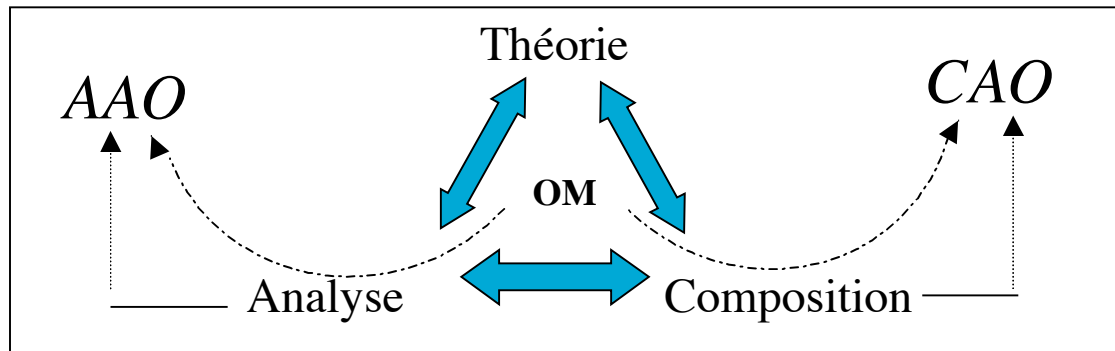
$$IFUNC(A, A)(i) = IFUNC(A', A')(i)$$

« Un hexacorde et son complémentaire ont la même fonction d'injection par rapport à toute transformation bijective »

$$INJ(A, A')(f) = INJ(A', A)(f)$$

?? (Démonstration topologique par Ralph Fox et problème de Waring) ??

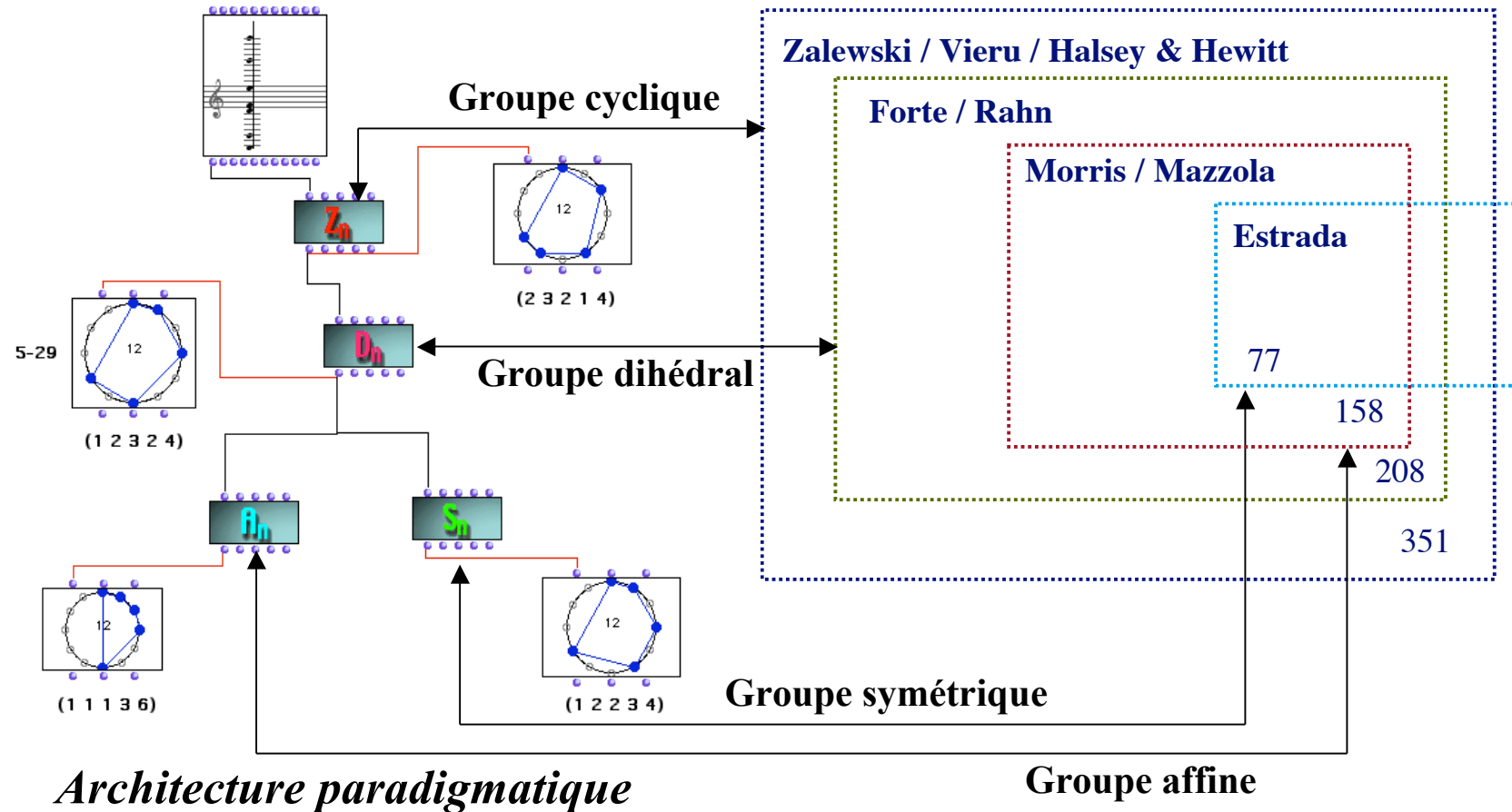
# Classification 'paradigmatique' des structures musicales



$$\mathbf{Z}_n = \langle T : T^n = e \rangle$$

$$\mathbf{D}_n = \langle T, I : T^n = I^2 = e, TI = IT^{-1} \rangle$$

$$\mathbf{Aff}_n = \{ax+b : a \in \mathbf{Z}_n^*, b \in \mathbf{Z}_n\}$$



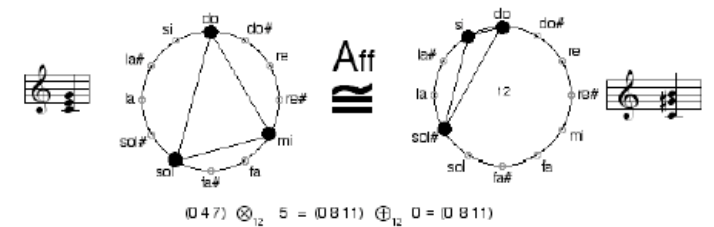
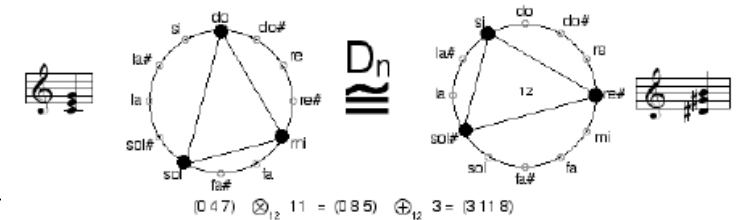
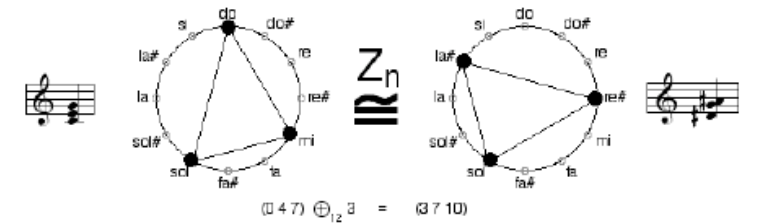
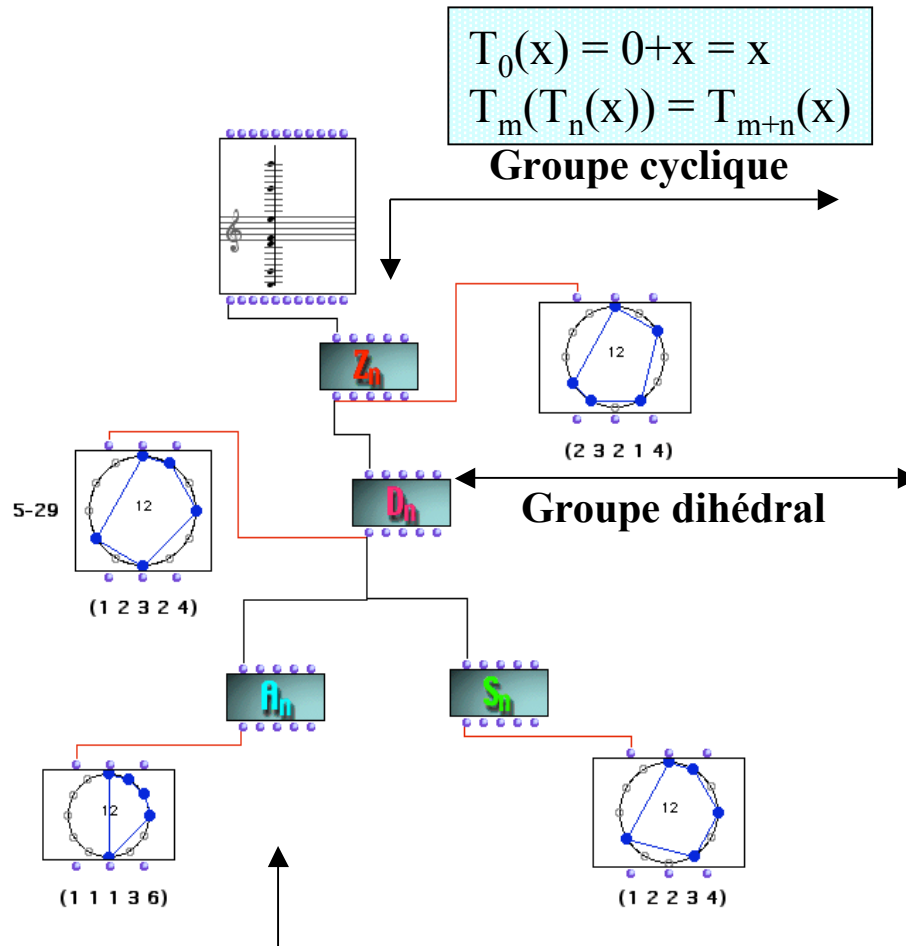
# Action de groupe et classes d'équivalence d'accords

*Les-Mathematiques.net*

On dira que le groupe  $G$  agit (ou opère) sur l'ensemble  $X$  si il existe une application  $\theta : G \times X \rightarrow X$  telle que:

- Pour tout  $x$  dans  $X$ ,  $\theta(e, x) = x$ .
- Pour tout  $g_1, g_2 \in G$ ,  $\theta(g_1, \theta(g_2, x)) = \theta(g_1 \cdot g_2, x)$ .

L'action d'un groupe induit une relation d'équivalence



*Architecture paradigmatique*

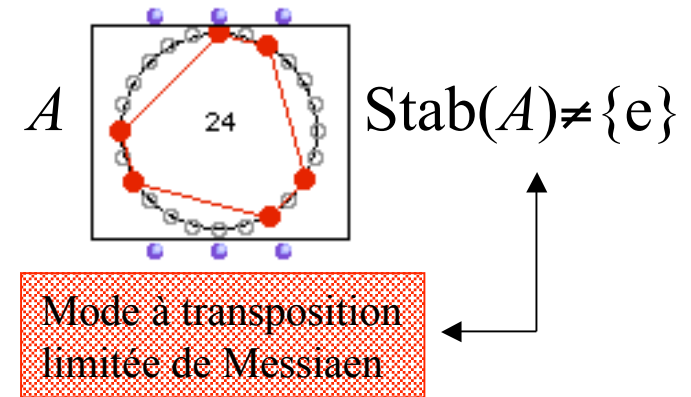
**Groupe affine**

# Lemme de Burnside (ou Lemme de Cauchy-Frobenius)

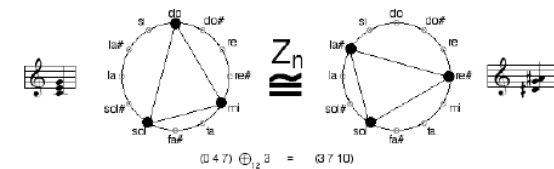
*Les-Mathematiques.net*

**Définition** Soit  $x \in X$  et soit  $\theta$  une action de  $G$  sur  $X$ .

- On appelle **stabilisateur de  $x$**  et on note  $\text{stab}(x)$  le sous ensemble de  $G$  donné par  $\text{stab}(x) = \{g \in G / g.x = x\}$ .
- On appelle **orbite de  $x$**  et on note  $w(x)$  le sous ensemble de  $X$  donné par  $\{g.x / g \in G\}$ .



**Définition** Si  $g$  est élément de  $G$  et que  $\theta$  est une action de  $G$  sur  $X$ , on appelle **fixateur de  $g$**  et on note  $\text{fix}(g)$  ou  $X^g$  le sous ensemble de  $X$  donné par  $\text{fix}(g) = \{x \in X / g.x = x\}$ .



**Théorème Formule de la moyenne** On suppose  $G$  de cardinal fini et agissant sur un ensemble  $X$ . Alors si  $n$  désigne le nombre d'orbites distinctes de l'action, si  $\mathcal{A}$  désigne le sous ensemble de  $X$  composé d'un représentant pour chacune de ces orbites, on a:

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

Le nombre d'orbites sous l'action d'un groupe fini  $G$  sur un ensemble  $X$  est la moyenne des fixateurs des éléments du groupe.

## Énumération d'orbites dans un espace tempéré $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

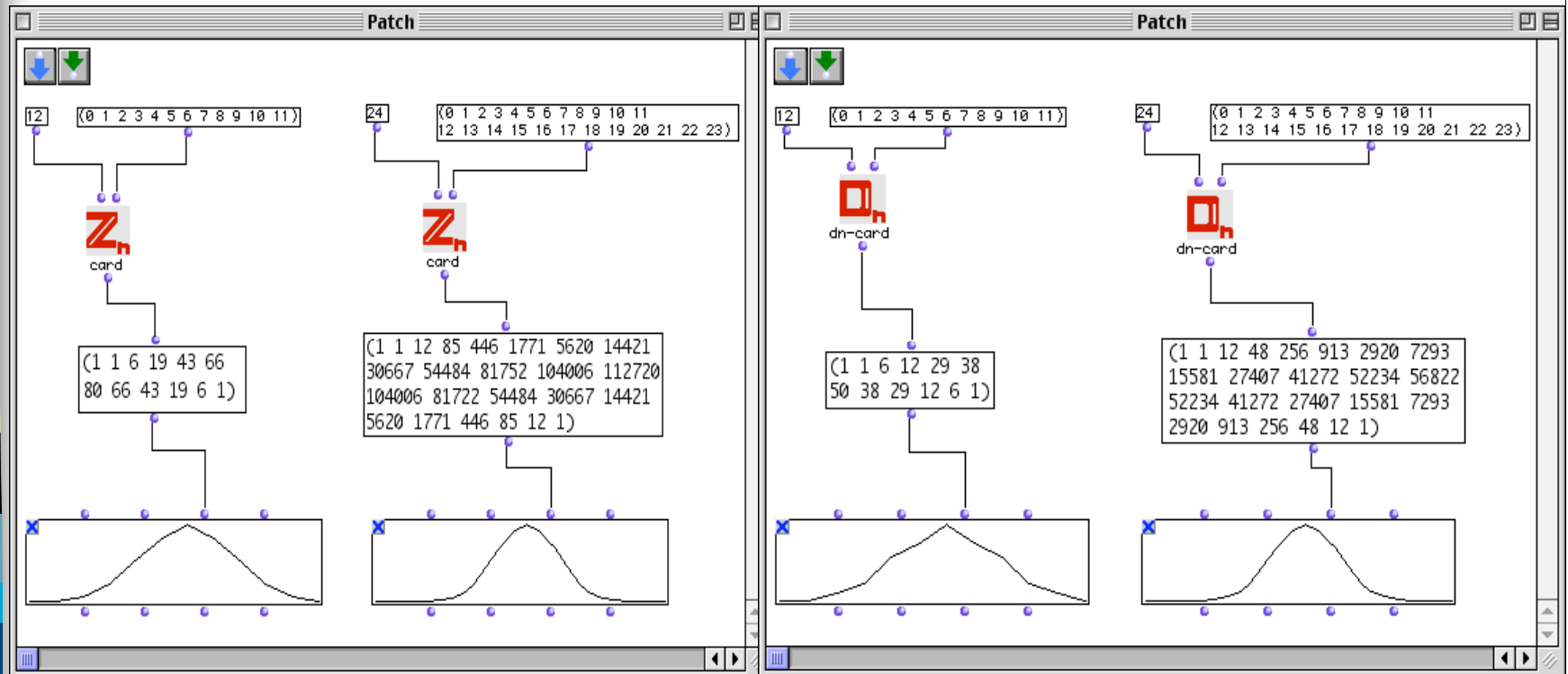
$G \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$C_{12}$	1	6	19	43	66	80	66	43	19	6	1	1
$D_{12}$	1	6	12	29	38	50	38	29	12	6	1	1
$\text{Aff}_1(\mathbb{Z}_{12})$	1	5	9	21	25	34	25	21	9	5	1	1

(Friperinger, 1992 / 1999)

- D. Halsey & E. Hewitt: « Eine gruppentheoretische Methode in der Musik-theorie », *Jahresber. Der Dt. Math.-Vereinigung*, 80, 1978.
- D. Reiner: « Enumeration in Music Theory », *Amer. Math. Month.* 92:51-54, 1985
- H. Friperinger: « Enumeration in Musical Theory », *Beiträge zur Elektr. Musik*, 1, 1992
- R.C. Read: « Combinatorial problems in the theory of music », *Discrete Math.*, 1997
- H. Friperinger: « Enumeration of mosaics », *Discrete Math.*, 1999
- H. Friperinger: « Enumeration of non-isomorphic canons », *Tatra Mt. Math. Publ.*, 2001
- H. Friperinger: « Tiling problems in music theory », in *Perspectives in Mathematical and Computational Music Theory* (Mazzola, Noll, Puebla ed., Epos, 2004)
- Rachel W. Hall & P. Klingsberg: « Asymmetric Rhythms, Tiling Canons, and Burnside's Lemma », *Bridge Proceedings*, 2004
- ...

# Aspects computationnels

## *Énumération d'orbites dans un espace tempéré $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et catalogues musicaux*



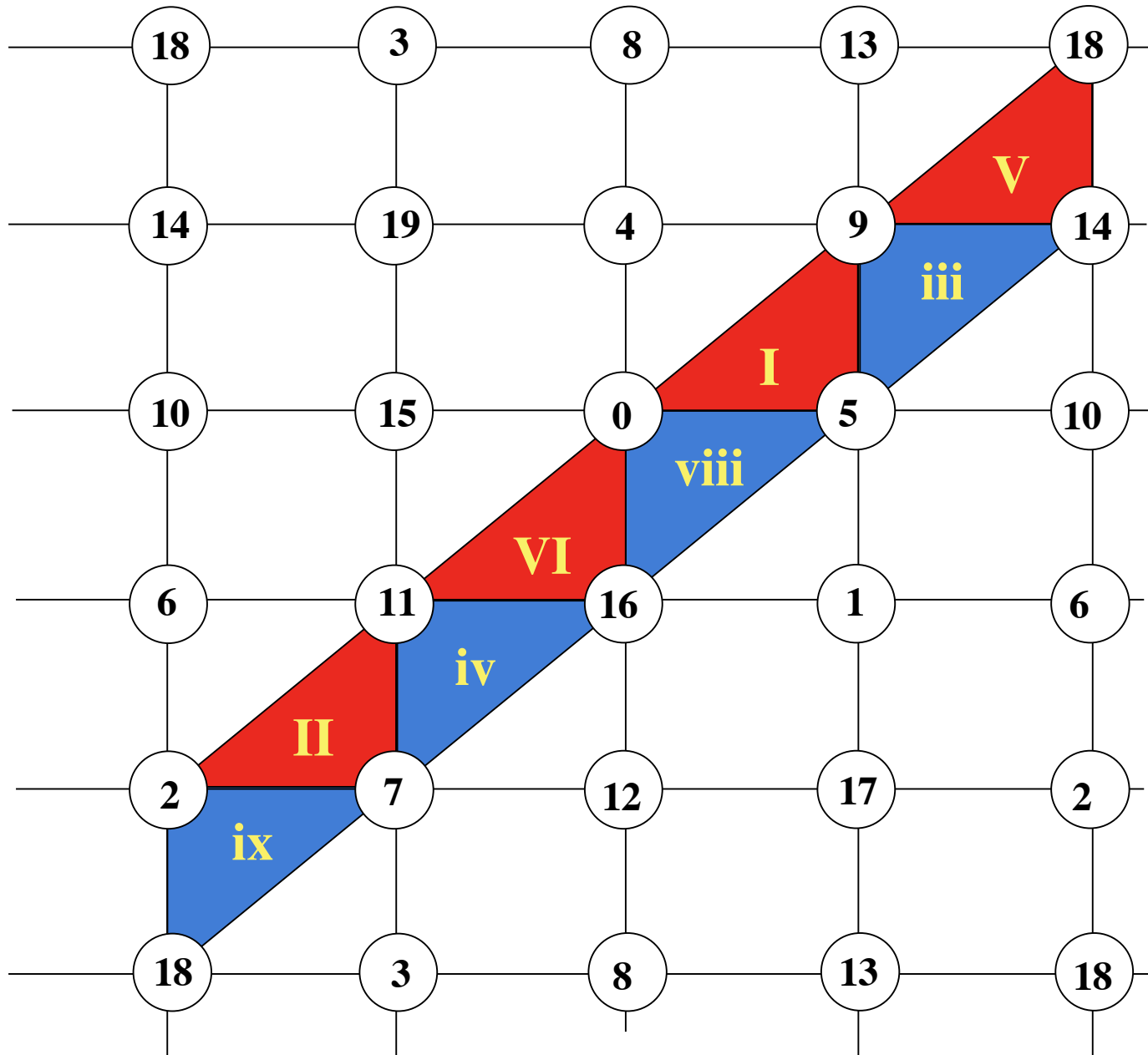
*Énumération des classes de transposition dans un espace tempéré  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$*

*Énumération des 'Pitch-class sets' (Forte) dans un espace tempéré  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$*

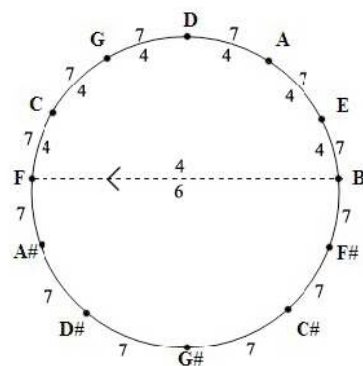
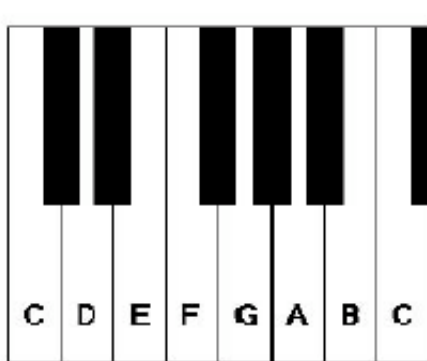


# Généralisations pour $Z_n = Z_{k(k+1)}$

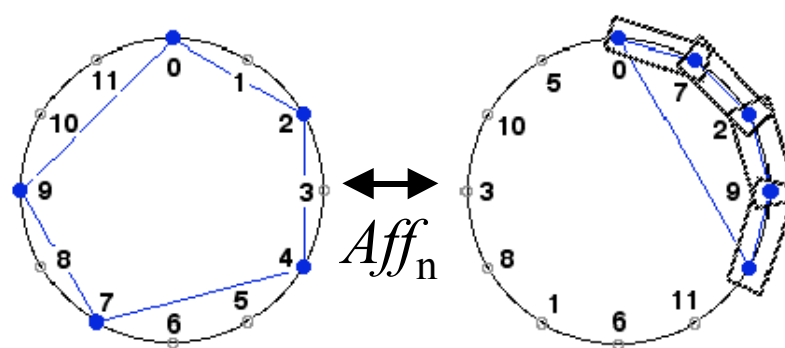
(Noll, *MaMuX*, Déc. 2004)



## Propriétés mathématiques de la gamme diatonique



(Clough & Myerson, 1985)

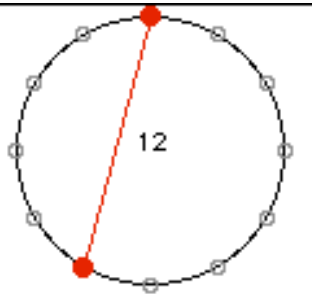


(Vieru, 1980)

- G. Balzano : « The group theoretic description of 12-fold and microtonal pitch systems », *Computer Music Journal*, 1980.
- A. Vieru : *Cartea Modurilor* 1980 (*The Book of Modes*, 1993)
- Y. Hellegouarch : « Gammes naturelles », *Publ. APMEP*, 1983
- J. Clough & G. Myerson : « Musical scales and the generalized circle of fifths », *American Math. Month.*, 1986.
- D. Clampitt: « Some Refinements of the **Three Gap Theorem** with applications to music », *Muzica*, 1995
- E. Agmon: « Diatonicism and Farey Series », *Muzica*, 1995
- J. Clough & J. Douthett: « **Maximally Even Sets** », *JMT*, 1999
- D. Silverman & J. Wiseman: « Noting the difference: Musical scales and permutations » (à paraître dans *American Math. Month.*, 2005)
- ...

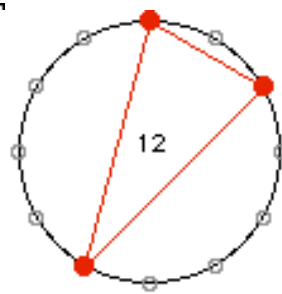
## Gammes engendrées par un intervalle (ex. quinte = 7)

{0 7}



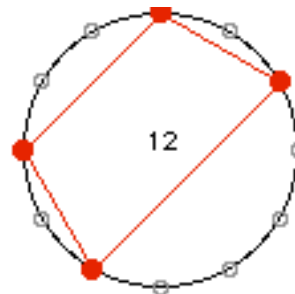
(7 5)

{0 7 14}



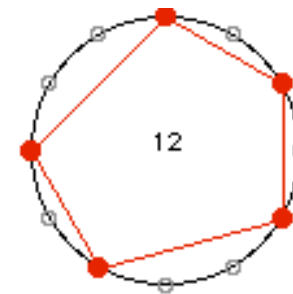
(2 5 5)

{0 7 14 21}



(2 5 2 3)

{0 7 14 21 28}



(2 2 3 2 3)

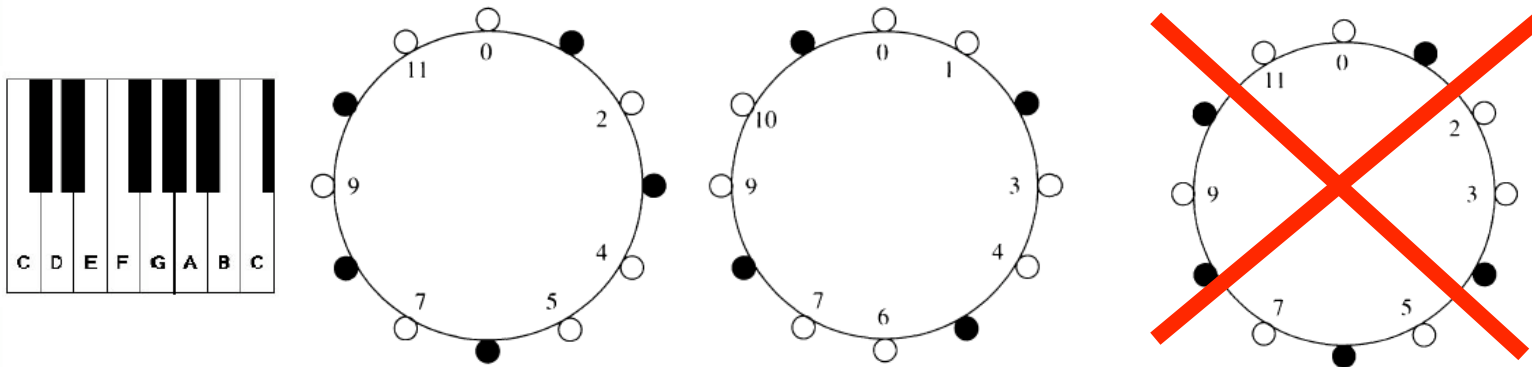
o o o

• D. Clampitt: « Some Refinements of the Three Gap Theorem with applications to music », *Muzica*, 1995

*Théorème des trois intervalles (conjecture de Steinhaus)*

*Soient  $k$  points placés consécutivement autour d'un cercle modulo un angle  $\alpha$ . Les  $k$  points partitionnent le cercle en au plus trois longueurs différentes d'intervalle.*

# Théorie diatonique et problèmes mathématiques (et physiques !)



- D. Clampitt: « Some Refinements of the Three Gap Theorem with applications to music », *Muzica*, 1995
- E. Agmon: « Diatonicism and Farey Series », *Muzica*, 1995
- **J. Clough & J. Douthett: « Maximally Even Sets », *JMT*, 1999**

The one-dimensional antiferromagnetic spin-1/2 **Ising model** is investigated using the formalism of **Maximally/Minimally Even sets**. The salient features of Maximally/Minimally Even set theory are introduced. Energy and spin content vectors are defined to facilitate the use of interval spectra used in Maximally/Minimally Even set theory. It is shown that Maximally Even sets of up- and down-spins minimize the configurational energy per spin and that Minimally Even sets maximize configurational energy per spin. An exponentially decreasing antiferromagnetic pairwise interaction of arbitrary range is used as an example interaction. The asymptotic ( $N \rightarrow \infty$ ) configurational energy per spin and the energy per spin calculated for seven-near neighbors are compared

**J. Douthett & R. Krantz: « Energy extremes and spin configurations for the one-dimensional antiferromagnetic Ising model with arbitrary-range interaction », *Journal of Mathematical Physics*, 37(7), 1996.**

# La dualité son/intervalles

## Séquences périodiques et différences finies

$$Df(x) = f(x) - f(x-1).$$

$$\begin{aligned}
 f &= 7 \ 11 \ 10 \ 11 \ 7 \ 2 \ 7 \ 11 \ 10 \ 11 \ 7 \ 2 \ 7 \ 11 \dots \\
 Df &= 4 \ 11 \ 1 \ 8 \ 7 \ 5 \ 4 \ 11 \ 1 \ 8 \ 7 \ 5 \ 4 \ 11 \dots \\
 D^2 f &= 11 \ 7 \ 2 \ 7 \ 11 \ 0 \ 11 \ 7 \ 2 \ 7 \ 11 \ 0 \dots \\
 D^3 f &= 1 \ 8 \ 7 \ 5 \ 4 \ 11 \ 1 \ 8 \ 7 \ 5 \ 4 \ 11 \dots \\
 D^k f &= \dots\dots
 \end{aligned}$$

*dolcissimo*  
*mf*      *mp*      *pp*      *mp*      *p*      *mf*      *mp*      *pp*      *pp*

V	0	3	8	7	11	0	11	10	6	9	0	9	1	2	9	8	4	3	6
VIII	0	0	0	0	3	3	7	2	0	0	0	6	3	3	3	4	8	0	0
IV	3	3	4	4	1	11	11	8	3	3	9	4	1	7	11	8	11	3	9
IX	0	0	0	0	0	3	6	(1)	3	3	3	3	9	0	3	6	[10]	6	6
IV	0	10	3	9	10	0	9	7	0	6	7	9	6	4	9	3	4	6	3

*Zone d'oubli* pour alto (1973)

# Séquences périodiques et calcul des différences finies

Vers une théorie générale des phénomènes périodiques

$$f = 11 \ 6 \ 7 \ 2 \ 3 \ 10 \ 11 \ 6 \ \dots \quad Df(x) = f(x) - f(x-1).$$

$$Df = \begin{array}{cccccccc} & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown \\ 7 & & 1 & 7 & 1 & 7 & 1 & 7 & 1 \dots \end{array}$$

$$D^2 f = \begin{array}{cccccccc} & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown \\ & 6 & & 6 & & 6 & & 6 & \dots \end{array}$$

$$D^3 f = \begin{array}{cccccccc} & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \dots \end{array}$$

Séquences réductibles :  
 $\exists k \geq 1$  t.q.  $D^k f = 0$

$$f = 7 \ 11 \ 10 \ 11 \ 7 \ 2 \ 7 \ 11 \ \dots$$

$$Df = \begin{array}{cccccccc} & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown \\ 4 & & 11 & & 1 & & 8 & & 7 & & 5 & & 4 & & 11 & \dots \end{array}$$

$$D^2 f = \begin{array}{cccccccc} & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown \\ & 11 & & 7 & & 2 & & 7 & & 11 & & 0 & & 11 & & 7 & \dots \end{array}$$

$$D^3 f = \begin{array}{cccccccc} & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown \\ & & 1 & & 8 & & 7 & & 5 & & 4 & & 11 & & 1 & & 8 & \dots \end{array}$$

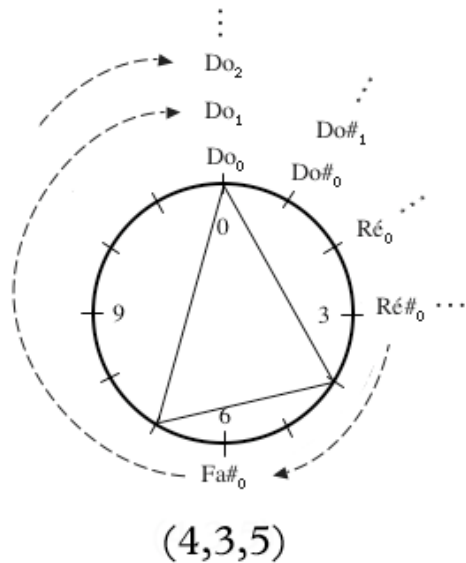
$$D^4 f = \begin{array}{cccccccc} & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown \\ & & & 7 & & 11 & & 10 & & 11 & & 7 & & 2 & & 7 & & 11 & \dots \end{array}$$

Séquences reproductibles :  
 $\exists k \geq 1$  s.t.  $D^k f = f$

**Théorème de décomposition:** Toute suite périodique à valeurs dans un groupe cyclique  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  est décomposable (de façon unique) en une somme d'une suite réductible et d'une suite reproductible (Vuza/Andreatta, 2001)

# La dualité son/intervalles

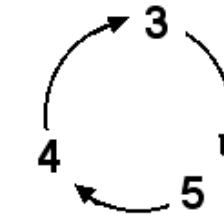
La « structure intervallique » et l'opération de « composition »



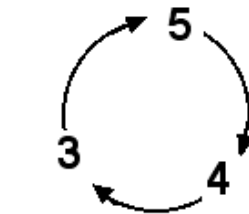
(4 3 5)



(3 5 4)



(5 4 3)



$(1\ 2\ 3\ 1\ 2\ 3) \bullet \{0\} = \{0, 1, 3, 6, 7, 9\}$

$$(6\ 6) \bullet \{0, 1, 3\} =$$

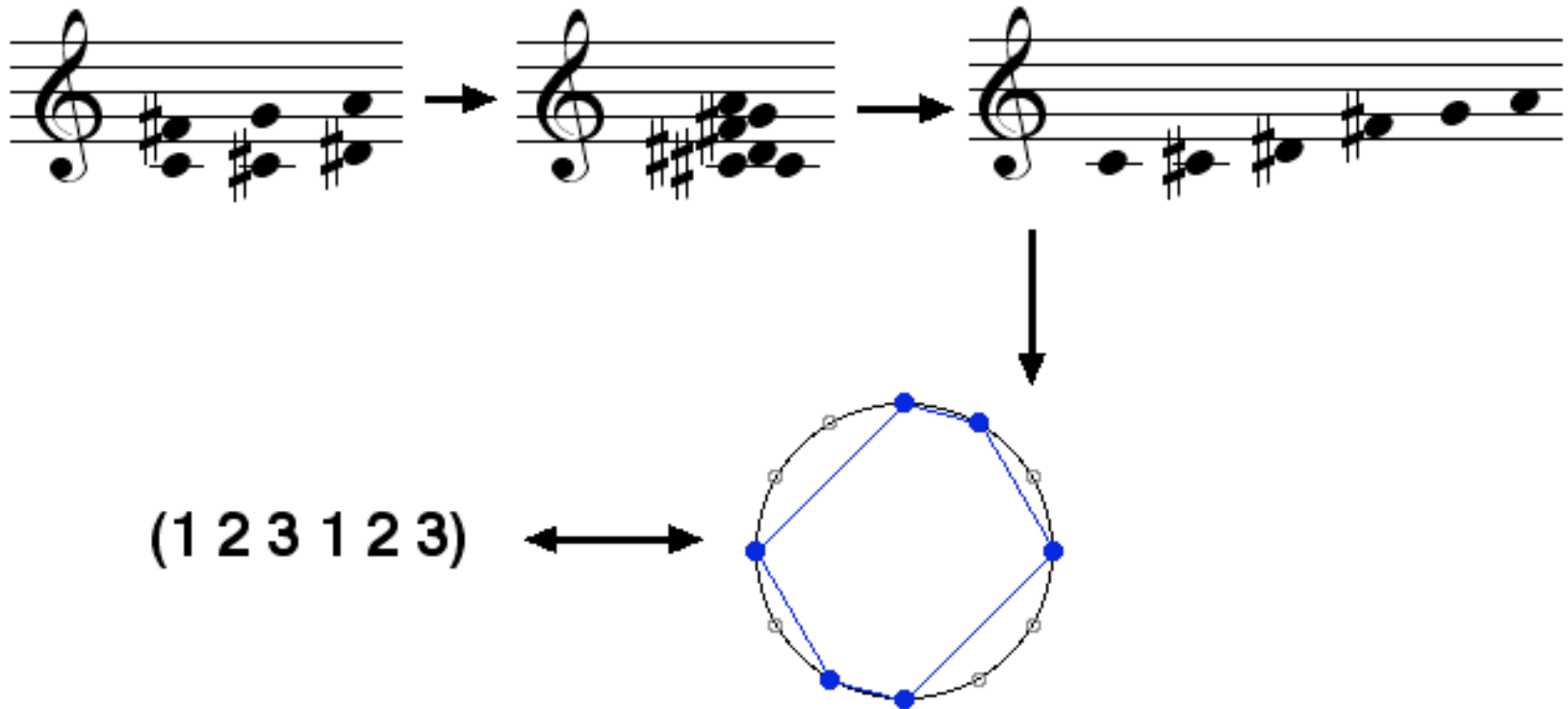
$$= ((6\ 6) \bullet \{0\}) \cup ((6\ 6) \bullet \{1\}) \cup ((6\ 6) \bullet \{3\}) =$$

$$= \{0, 6\} \cup \{1, 7\} \cup \{3, 9\} =$$

$$= \{0, 1, 3, 6, 7, 9\}.$$

$6_0 \cup 6_1 \cup 6_3$   
crible

« • » et la « multiplications d'accords » (Boulez)  
(ou *Transpositional Combination*, Richard Cohn)



Composition de deux structures intervalliques

$$(6\ 6) \cdot (1\ 2\ 9) = ?$$

# La composition de deux structure intervalliques

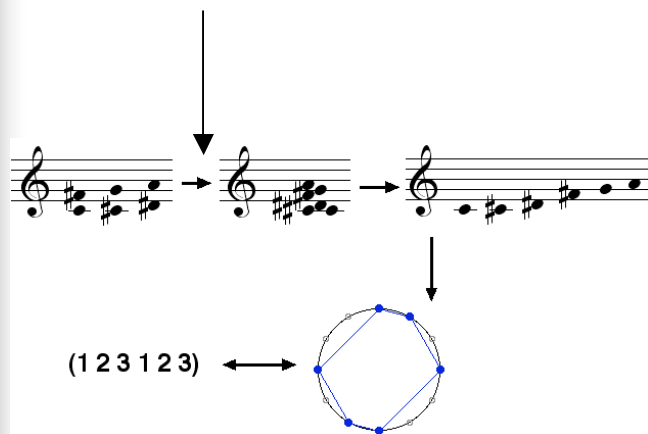
$$(6\ 6) \bullet (1\ 2\ 9) = ?$$

$$(6\ 6) \bullet \{0, 1, 3\} =$$

...

$$= \{0, 1, 3, 6, 7, 9\}$$

$$(1\ 2\ 3\ 1\ 2\ 3)$$



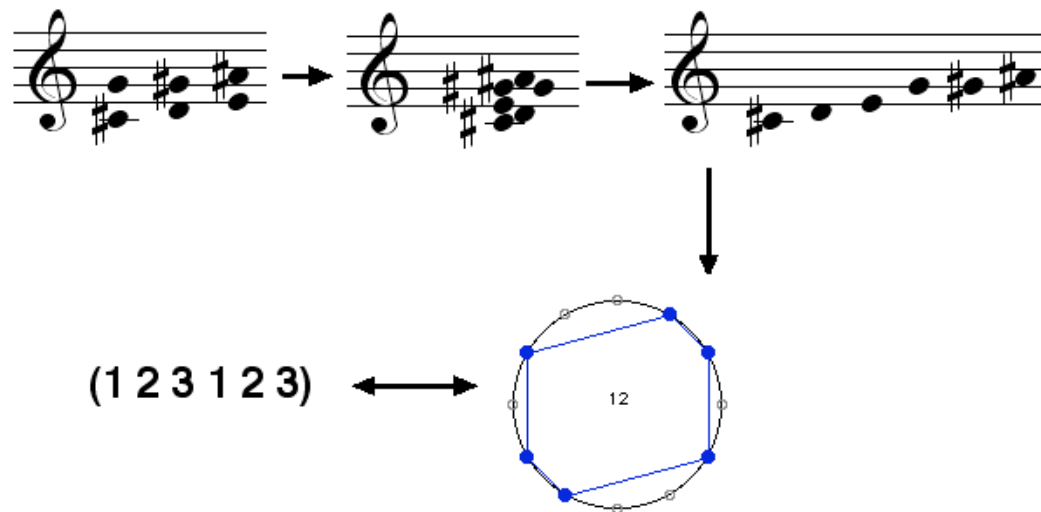
(1 2 3 1 2 3)

$$(6\ 6) \bullet \{1, 2, 4\} =$$

$$= \{1, 7\} \cup \{2, 8\} \cup \{4, 10\} =$$

$$= \{1, 2, 4, 7, 8, 10\}$$

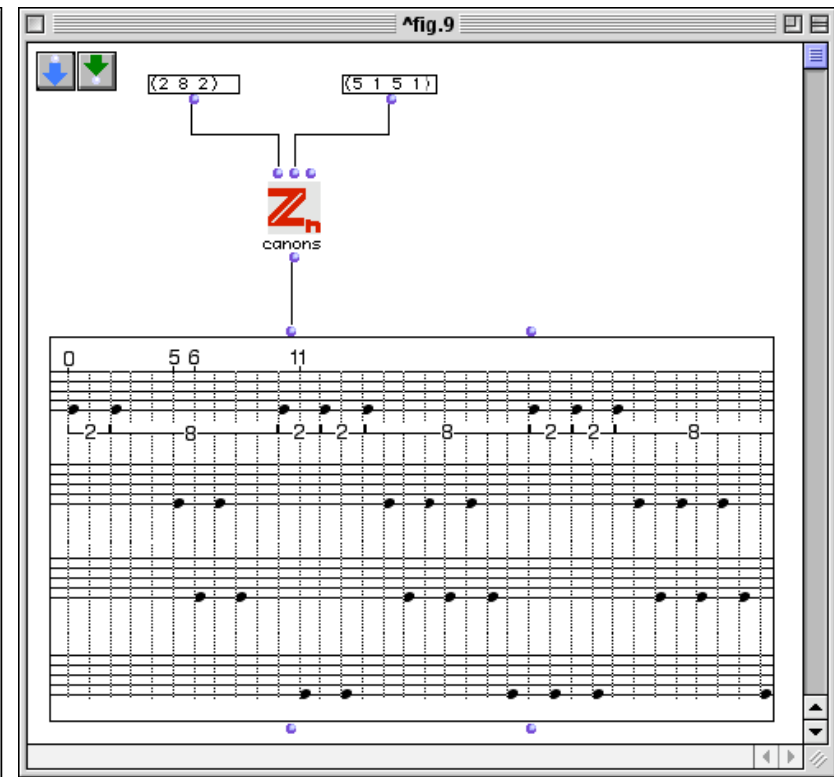
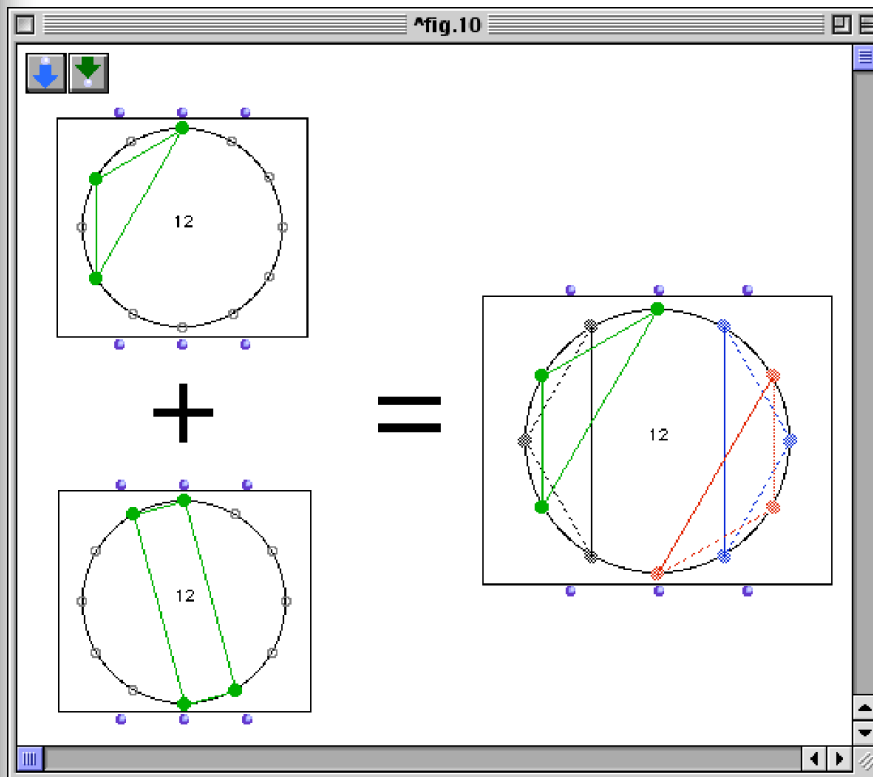
$$(1\ 2\ 3\ 1\ 2\ 3)$$



(1 2 3 1 2 3)

Elle est bien définie !

# Factorisation et canons rythmiques de pavage



'transpositional combination'

$$\{0,8,10\} \oplus \{0,5,6,11\} = \mathbf{Z}_{12} = (2\ 8\ 2) \bullet (5\ 1\ 5\ 1)$$

Un des facteurs est un mode à transposition limitée

# La construction des canons rythmiques

The image displays two musical scores. The top score, titled 'Harawi (1945)', consists of three staves (treble, alto, and bass clefs) with a tempo marking of quarter note = 40. The bottom score, titled 'Visions de l'Amen (1943)', consists of three staves in 2/4 time, showing a rhythmic canon structure with overlapping phrases.

*Harawi* (1945)

A diagram illustrating the rhythmic canon structure. It shows three staves with blue dots indicating the rhythmic patterns of the different voices. A downward arrow points from the 'Harawi' score to this diagram, and an upward arrow points from the 'Visions de l'Amen' score to this diagram.

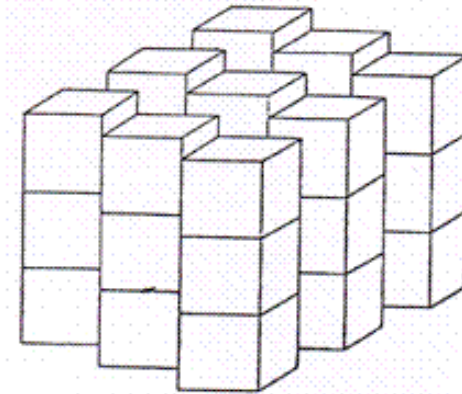
*Visions de  
l'Amen* (1943)

« ...il résulte de tout cela que les différentes sonorités se mélangent ou s'opposent de manières très diverses, **jamais au même moment ni au même endroit [...]. C'est du désordre organisé** »

O. Messiaen : *Traité de Rythme, de Couleur et d'Ornithologie*,  
tome 2, Alphonse Leduc, Editions Musicales, Paris, 1992.

# Conjectures mathématiques et pavages rythmiques

théorie ↔ composition

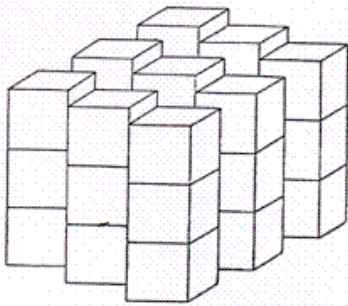


- La conjecture de Minkowski (version géométrique)
- La solution algébrique de Hajos
- Les intuitions du « rythmicien » Messiaen
- Le modèle algébrique de Vieru/Vuza (1991-)
- Le modèle informatique généralisé (en collaboration avec Carlos Agon et Thomas Noll)
- Applications compositionnelles (G. Bloch)
- L'énumération des solutions: un problème ouvert (Vuza, Andreatta, Fripertinger, Amiot, Noll, Tangian, Jedrzejewski...)

## ***Conjecture de Minkowski (1896/1907)***

*Dans un pavage simple [simple lattice tiling] d'un espace à  $n$  dimensions par des cubes unités, il y a au moins un couple de cubes qui ont en commun une face entière de dimension  $n-1$ . (Cf. S. Stein, S. Szabó : *Algebra and Tiling*, 1994)*

# Conjecture de Minkowski et théorème de Hajos



## **Conjecture de Minkowski (1896/1907)**

*Dans un pavage simple [simple lattice tiling] d'un espace à  $n$  dimensions par des cubes unités, il y a au moins un couple de cubes qui ont en commun une face entière de dimension  $n-1$ .*

## ***Théorème de Hajós (1942)***

Soit  $G$  un groupe abélien fini et soient  $a_1, a_2, \dots, a_n$   $n$  éléments de  $G$ .  
Si l'on suppose que le groupe admet comme factorisation la somme directe des sous-ensembles  $A_1, A_2, \dots, A_n$  suivants :

$$A_1 = \{1, a_1, \dots, a_1^{m_1-1}\}, A_2 = \{1, a_2, \dots, a_2^{m_2-1}\}, \dots, A_n = \{1, a_n, \dots, a_n^{m_n-1}\}$$

avec  $m_i > 0$  pour tout  $i=1, 2, \dots, n$ , alors un des facteurs  $A_i$  est un groupe

## ***Théorème de Redei (1965)***

Soit  $G$  un groupe abélien fini et soient  $A_1, A_2, \dots, A_n$   $n$  sous-ensembles de  $G$ , chacun contenant l'élément neutre du groupe et chacun ayant un nombre premier d'éléments et supposons que le groupe admette comme factorisation la somme directe des sous-ensembles  $A_i, i=1, \dots, n$ . Alors, un des sous-ensembles  $A_i$  est périodique

# Groupes de Hajós et canons de pavage

Un groupe  $G$  est “ groupe de Hajós ” si pour toute factorisation du groupe en somme directe de ses sous-ensembles  $A_1, A_2, \dots, A_k$ , au moins un des facteurs est périodique.

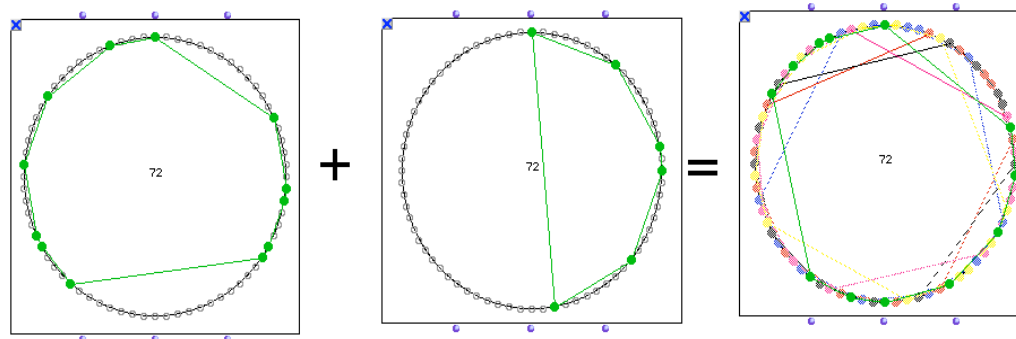
Rédei 1947	$(p, p)$
Hajós 1950	$\mathbf{Z}$
De Brujin 1953	$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ avec $n = p^\alpha$
Sands 1957	$(p^\alpha, q)$ $(p, q, r)$ $(p^2, q^2)$ $(p^2, q, r)$ $(p, q, r, s)$

## Groupes non-Hajos (bad groups)

72  
108 120 144 168 180  
200 216 240 252 264 270 280 288  
300 312 324 336 360 378 392 396  
400 408 432 440 450 456 468 480  
500 504 520 528 540 552 560 576 588 594  
600 612 616 624 648 672 675 680 684 696  
700 702 720 728 744 750 756 760 784 792  
800 810 816 828 864 880 882 888...

Sands 1959	$(2^2, 2^2)$ $(3^2, 3)$ $(2^n, 2)$
Sands 1962	$(p, 3, 3)$ $(p, 2^2, 2)$ $(p, 2, 2, 2, 2)$ $(p^2, 2, 2, 2)$ $(p^3, 2, 2)$ $(p, q, 2, 2)$

Sands 1964	$\mathbf{Q}$ $\mathbf{Z} + \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ $\mathbf{Q} + \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$
------------	--



# Nombres remarquables en mathématiques

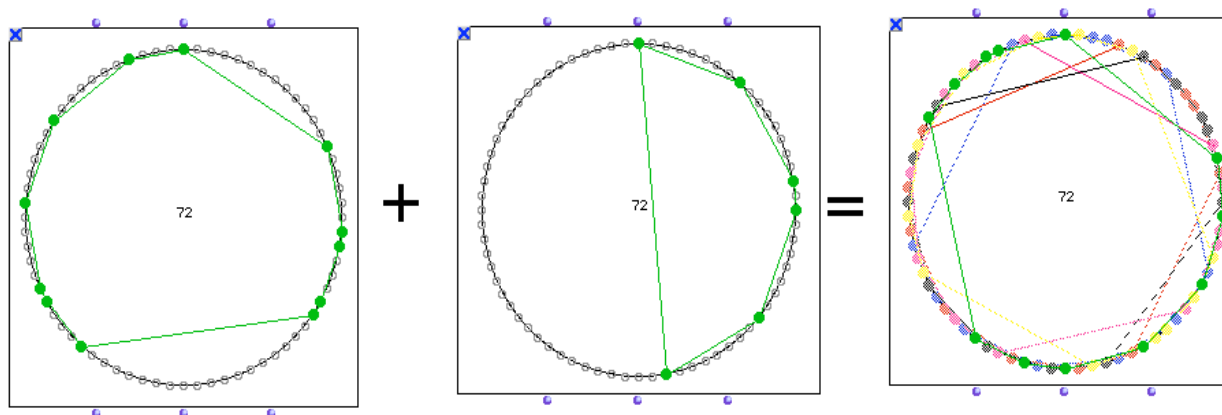
F. Le Lionnais, *Les nombres remarquables*, Hermann, 1983

Soit  $G$  un groupe cyclique et  $S, T$  deux sous-ensembles de  $G$  dont il est la somme directe [...]. Une telle décomposition  $G=S+T$  peut être faite si  $S$  est un sous-groupe de  $G$  (s'il en existe  $\neq \{0\}$  et  $G$ ) et si  $T$  contient un représentant de chaque classe de  $G/S$ . Mais il en existe d'autres telles que ni  $S$  ni  $T$  ne sont des sous-groupes. [...] 72 est le plus petit nombre positif tel que le groupe cyclique correspondant se décompose sous la forme  $S+T$  avec  $S$  et  $T$  non périodiques. On peut prendre  
 $S = (0, 8, 16, 18, 26, 34)$   
 $T = (0, 1, 5, 6, 12, 25, 29, 36, 42, 48, 49, 53)$

## Groupes non-Hajos

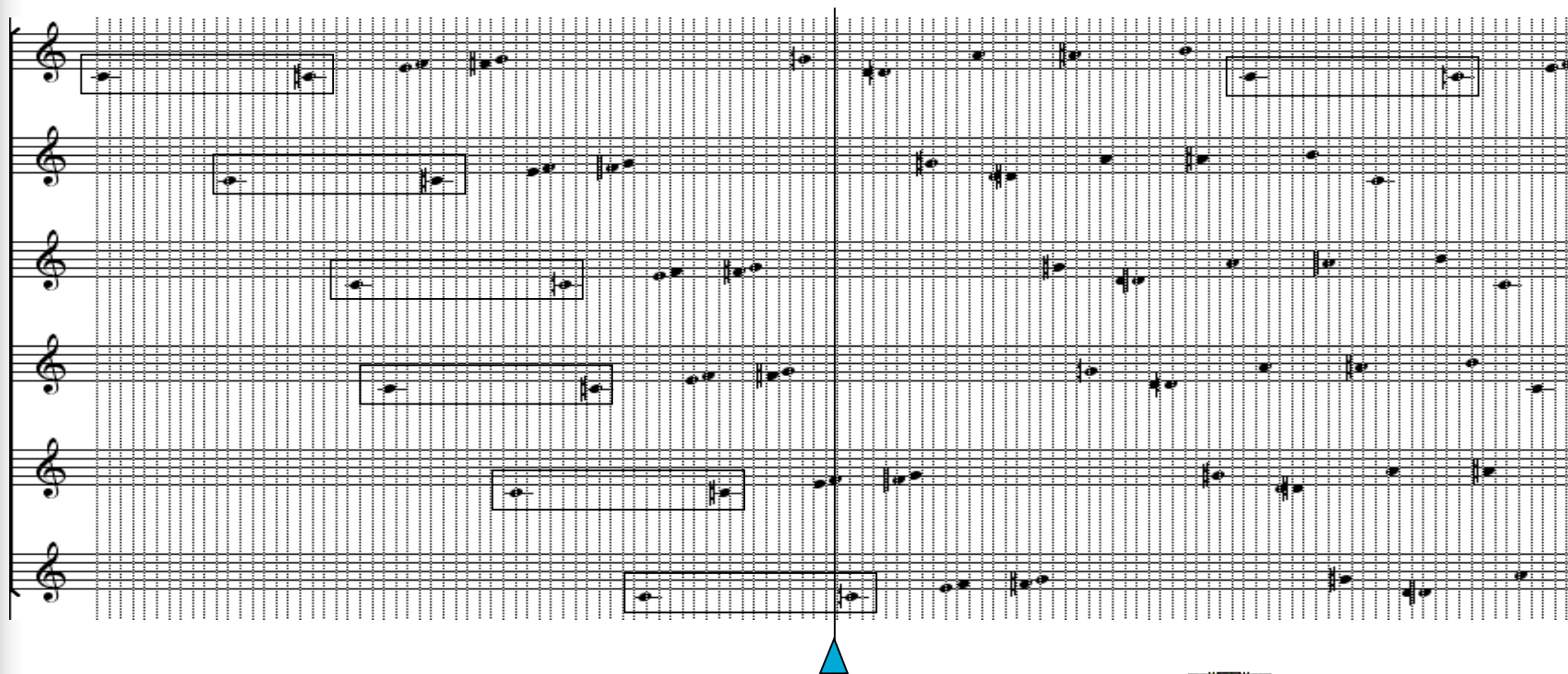
72  
108 120 144 168 180  
200 216 240 252 264 270 280 288  
300 312 324 336 360 378 392 396  
400 408 432 440 450 456 468 480  
500 504 520 528 540 552 560 576 588 594  
600 612 616 624 648 672 675 680 684 696  
700 702 720 728 744 750 756 760 784 792  
800 810 816 828 864 880 882 888...

L. Fuchs, *Abelian Groups*, 1960

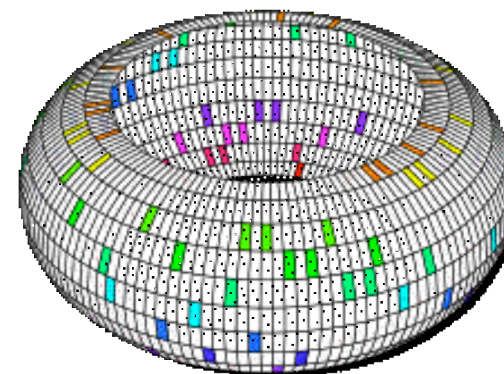
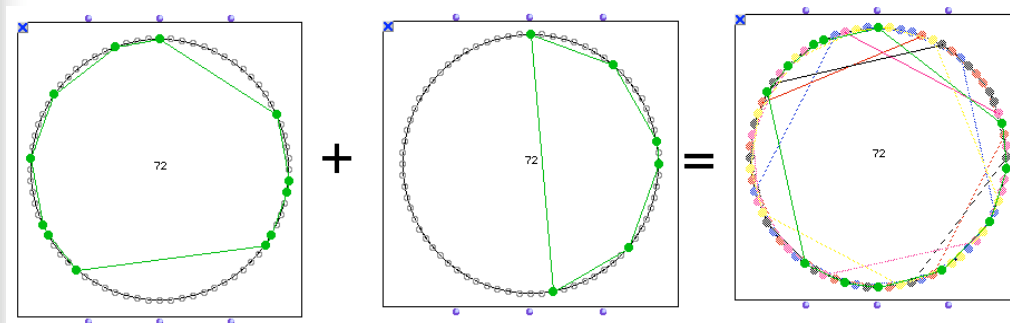


# Structures remarquables en musique

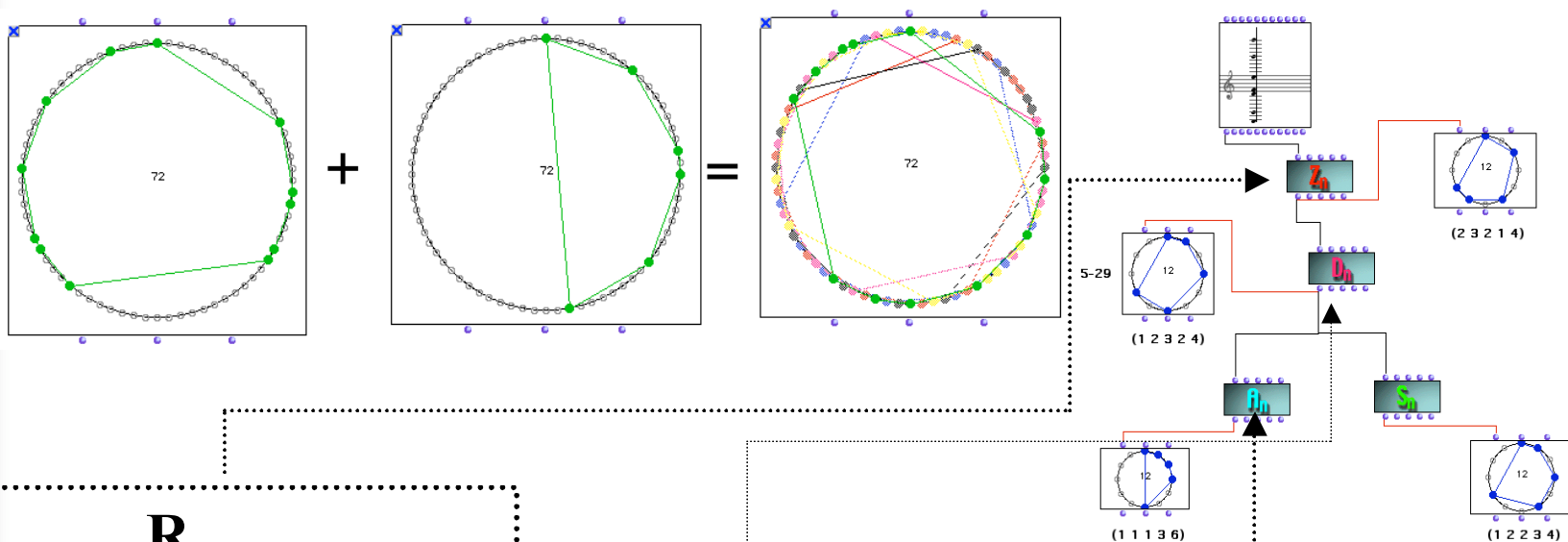
## 'Bad groups' et canons RCCM (Vuza, 1991 - 1995)



A musical score consisting of six staves. Each staff contains a sequence of notes and rests. Several segments of the score are enclosed in rectangular boxes, highlighting specific rhythmic or melodic motifs. A vertical line is drawn through the center of the score, with a small blue triangle pointing upwards from the bottom staff.



# Vers une classification (paradigmatique) des canons RCCM



**R**

(1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)  
 (20 3 1 5 6 9 4 11 6 3 3 1)  
**(1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6)**  
 (6 13 4 7 6 6 1 4 19 1 4 1)  
 (1 5 15 4 5 6 6 3 4 17 3 3)  
 (3 3 17 4 3 6 6 5 4 15 5 1)

**(8 8 2 8 8 38)**  
 (16 2 14 2 16 22)  
 (14 8 10 8 14 18)

**S**

**R**

(1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)  
 (1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6)  
 (1 5 15 4 5 6 6 3 4 17 3 3)

**(8 8 2 8 8 38)**  
 (16 2 14 2 16 22)  
 (14 8 10 8 14 18)

**S**

**R**

(1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)

**(14 8 10 8 14 18)**

**S**

# Georges Bloch (2001-2004)

## Stratégies compositionnelles nouvelles à partir du modèle formel

- Organisation métrique d'un canon de pavage
- Réduction d'un canon de pavage en canons auto-similaires
- Modulation métrique entre canons
- *Transformation* d'un canon rythmique en « texture »

- *Projet Beyeler* (2001)
- *Projet Hitchcock*
- *Visite des tours de la cathédrale de Reims*
- *Noël des Chasseurs*
- *Canons à marcher*
- *Canon à eau*
- *Harawun* (2004)

harawun  $\text{♩} = 40$   
GB

Piano 1 *mf*

Piano 2 *f* *mf* *p*

Cymbale *pp*

*mp* *pp* *f*

*Harawun*: L'entrée d'un canon RCCM modélisé sur *Harawi*

# Georges Bloch (2001-2004)

## Stratégies compositionnelles nouvelles à partir du modèle formel

The image displays a musical score for five instruments: Bb Cl., Sax. T., Vib., Vln., and Cb. The score is written in a complex, rhythmic style characteristic of Georges Bloch's late work. The notation includes numerous triplets, sixteenth notes, and slurs, indicating a dense and intricate texture. The instruments are arranged vertically, with Bb Cl. at the top and Cb. at the bottom. The score is presented in a clean, black-and-white format with red labels for the instrument names on the left side of each staff.

*Canon Final* : transformation d'un canon rythmique en « texture »



# Évolutions récentes: le pavage de la ligne

---

- Tom Johnson (2001): pavage de la ligne avec un pattern rythmique donné
    - ex. 11001
  - Andranik Tangian (2001): Représentation polynomial
    - $J(X) = 1 + X + X^4$  (**JOHNSON's polynomial**).
  - Emmanuel Amiot (2002): A solution to Johnson-Tangian conjecture
    - **Theorem:** *Any tiling of the line by the pattern 1 1 0 0 1 and its binary augmentations (eg 1 0 1 0 0 0 0 1, 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1...) has a length that is a multiple of 15.*
  - Harald Fripertinger (2002):
    - “Enumeration of non-isomorphic canons”, *Tatra Mt. Math. Publ.*, 23, 47-57, 2001
- 
- R. Tijdeman : “Decomposition of the Integers as a direct sum of two subsets” (dans *Séminaire de théorie des nombres de Paris*, CUP, 1995)
  - J. Lagarias & Y. Wang : “Tiling the line with translates of one tile”, *Inv. Math.*, 124, pp.341-365, 1996
  - E. Coven & A. Meyerowitz : “Tiling the integers with translates of one finite set”, *J. Algebra*, 212, pp.161-174, 1999

# Canons de pavage et pôlynomes

$$A \oplus B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow A(x) = \sum_{k \in A} x^k$$

$$A(x) \times B(x) = (A \oplus B)(x) \equiv 1 + x + \dots + x^{n-1} \pmod{x^n - 1}$$

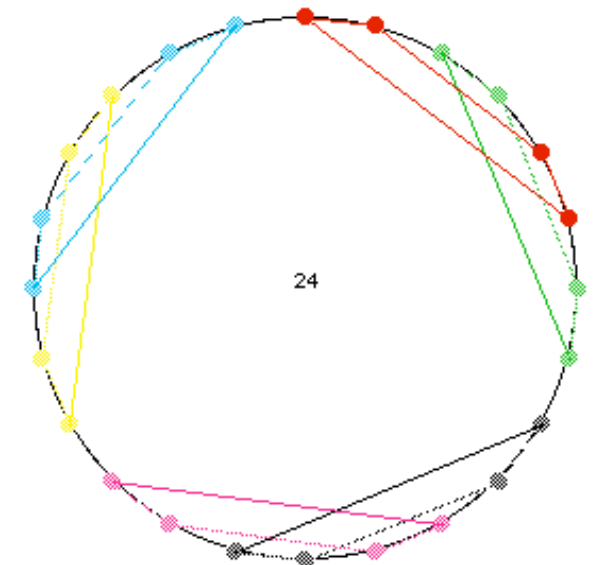
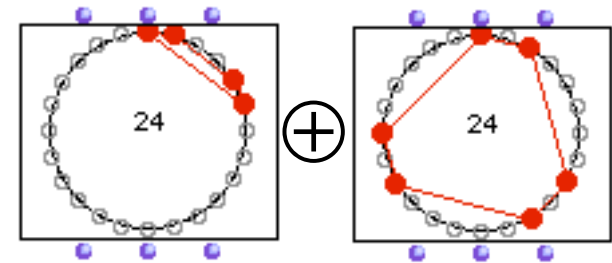
^Patch

$P(x) = 1 + x + x^4 + x^5$        $Q(x) = 1 + x^2 + x^8 + x^{10} + x^{16} + x^{18}$

{0 1 4 5}      {0 2 8 10 16 18}

$\mathbb{Z}_n$   
canons

$T(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{23}$



# Racines de l'unité et pôlynomes cyclotomiques

Racines  $n$ -ièmes de l'unité :  $z^n = 1$

$$n=3 \longrightarrow \left\{ 1, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right\}$$

$$n=4 \longrightarrow \{1, +i, -1, -i\}$$

Les racines  $n$ -ièmes de l'unité peuvent s'écrire sous la forme :

$$e^{\frac{2k\pi i}{n}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \quad (k, n \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq k < n)$$

Elles sont exactement les racines du pôlynome :  $P(X) = X^n - 1$

Les racines  $n$ -ièmes primitives de l'unité :  $e^{\frac{2ki\pi}{n}} \quad (n,k)=1$

Elles sont exactement les racines du pôlynome cyclotomique :

$$\Phi_n(X) = \prod_{k=1}^{\varphi(n)} (X - z_k) \longleftrightarrow X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X).$$

# Pavage de la ligne et pôlynomes cyclotomiques

$$\Phi_n(X) = \prod_{k=1}^{\varphi(n)} (X - z_k) \longleftrightarrow X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X).$$

$\Phi_1(X) = -1 + X$	$\longleftrightarrow$	$(-1, 1)$
$\Phi_2(X) = 1 + X$	$\longleftrightarrow$	$(1, 1)$
$\Phi_3(X) = 1 + X + X^2$	$\longleftrightarrow$	$(1, 1, 1)$
$\Phi_4(X) = 1 + X^2$	$\longleftrightarrow$	$(1, 0, 1)$
$\Phi_5(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4$	$\longleftrightarrow$	$(1, 1, 1, 1, 1)$
$\Phi_6(X) = 1 - X + X^2$	$\longleftrightarrow$	$(1, -1, 1)$

$$\Delta_n = 1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1} = \prod_{\substack{d|n \\ d \neq 1}} \Phi_d(X)$$

$$\Delta_4 = 1 + X + X^2 + X^3 = \Phi_2(X) \times \Phi_4(X)$$

$$A(x) \times B(x) = (A \oplus B)(x) \equiv 1 + x + \dots + x^{n-1} \pmod{X^n - 1}$$

# Bonnes et mauvaises factorisations

$$\Delta_n = 1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1} = \prod_{\substack{d|n \\ d \neq 1}} \Phi_d(X)$$

$\Phi_2(X) = 1 + X$	←-----→	(1, 1)
$\Phi_3(X) = 1 + X + X^2$	←-----→	(1, 1, 1)
$\Phi_4(X) = 1 + X^2$	←-----→	(1, 0, 1)
$\Phi_6(X) = 1 - X + X^2$	←-----→	(1, -1, 1)

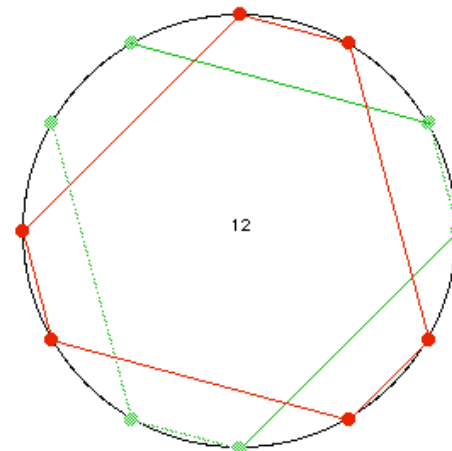
$$\Delta_{12} = 1 + X + \dots + X^{11} = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_4 \times \Phi_6 \times \Phi_{12}$$

$$A(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_6 \times \Phi_{12} = 1 + X + X^4 + X^5 + X^8 + X^9$$

$$B(X) = \Phi_4 = 1 + X^2$$

$$S = \{0, 2\}$$

$$R = \{0, 1, 4, 5, 8, 9\}$$



# Les conditions de Coven-Meyerowitz

- E. Coven & A. Meyerowitz : “Tiling the integers with translates of one finite set”, *J. Algebra*, 212, pp.161-174, 1999

There is no loss of generality in restricting attention to translates of a finite set  $A$  of *nonnegative* integers. Then  $A(x) = \sum_{a \in A} x^a$  is a polynomial such that  $\#A = A(1)$ . Let  $S_A$  be the set of prime powers  $s$  such that the  $s$ -th cyclotomic polynomial  $\Phi_s(x)$  divides  $A(x)$ . Consider the following conditions on  $A(x)$ .

(T1)  $A(1) = \prod_{s \in S_A} \Phi_s(1)$ .

(T2) If  $s_1, \dots, s_m \in S_A$  are powers of distinct primes, then  $\Phi_{s_1 \dots s_m}(x)$  divides  $A(x)$ .

**Theorem A.** *If  $A(x)$  satisfies (T1) and (T2), then  $A$  tiles the integers.*

**Theorem B1.** *If  $A$  tiles the integers, then  $A(x)$  satisfies (T1).*

**Theorem B2.** *If  $A$  tiles the integers and  $\#A$  has at most two prime factors, then  $A(x)$  satisfies (T2).*

**Corollary.** *If  $\#A$  has at most two prime factors, then  $A$  tiles the integers if and only if  $A(x)$  satisfies (T1) and (T2).*

# Les conditions de Coven-Meyerowitz

$$(T1) A(1) = \prod_{s \in S_A} \Phi_s(1).$$

(T2) If  $s_1, \dots, s_m \in S_A$  are powers of distinct primes, then  $\Phi_{s_1 \dots s_m}(x)$  divides  $A(x)$ .

**Theorem A.** *If  $A(x)$  satisfies (T1) and (T2), then  $A$  tiles the integers.*

$$A(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_6 \times \Phi_{12} = 1 + X + X^4 + X^5 + X^8 + X^9$$

$$\Phi_2(X) = 1 + X$$

$$\Phi_3(X) = 1 + X + X^2$$

$$(T1) A(1) = 6 = \Phi_2(1) \times \Phi_3(1) = 2 \times 3$$

$$(T2) \Phi_2 \mid A(X) \text{ et } \Phi_3 \mid A(X) \Rightarrow \Phi_{2 \times 3} \mid A(X)$$

**Theorem B1.** *If  $A$  tiles the integers, then  $A(x)$  satisfies (T1).*

$$A^*(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_{12} = 1 + 2X + 2X^2 - X^3 - X^4 + X^5 + 2X^6 + X^7$$

$$A^*(1) = 7 \neq \Phi_2(1) \times \Phi_3(1) = 6$$



# Canons rythmiques et conjectures mathématiques

---

- E. Coven & A. Meyerowitz : “Tiling the integers with translates of one finite set”, *J. Algebra*, 212, pp.161-174, 1999

« We solve it [the problem of tiling the integers with translates of one finite set] for sets of size having at most two prime factors. The conditions [T1 and T2] are always sufficient, but it is unknown whether they are necessary for all finite sets »

- Izabella Laba : “**Fuglede Conjecture** for a union of two intervals”, *Proc. AMS*, 2001

- S. Konyagin & Izabella Laba : “Spectra of certain types of polynomials and tiling of integers with translates of finite sets”, 2002

- Izabella Laba : “The **spectral set conjecture** and multiplicative properties of roots of polynomials”, *J. London Math. Soc.*, 2002

- J. C. Lagarias, S. Szabó: “Universal spectra and **Tijdeman’s conjecture** on factorization of cyclic groups”, *J. Fourier Analysis Appl.*, 7, 2001.

# Canons rythmiques et conjectures mathématiques

WOLFRAM RESEARCH

mathworld.wolfram.com

## Fuglede's Conjecture

CONTRIBUTE  
TO THIS ENTRY

Portions of this entry contributed by *Emmanuel Amiot*

Fuglede (1974) conjectured that a domain  $\Omega$  admits an [operator spectrum](#) iff it is possible to tile  $\mathbb{R}^d$  by a family of [translates](#) of  $\Omega$ . Fuglede proved the conjecture in the special case that the tiling set or the spectrum are lattice subsets of  $\mathbb{R}^d$  and Iosevich *et al.* (1999) proved that no smooth symmetric convex body  $\Omega$  with at least one point of nonvanishing [Gaussian curvature](#) can admit an orthogonal basis of exponentials.

Using complex [Hadamard matrices](#) of orders 6 and 12, Tao (2003) constructed counterexamples to the conjecture in some small Abelian groups, and lifted these to counterexamples in  $\mathbb{R}^5$  or  $\mathbb{R}^{11}$ .

However, the conjecture has been proved in a great number of special cases (e.g., all convex bodies) and remains an open problem in small dimensions. For example, it has been shown in dimension 1 that a nice algebraic characterization of finite sets tiling  $\mathbb{Z}$  indeed implies one side of Fuglede's conjecture (Coven-Meyerowitz 1998). Furthermore, it is sufficient to prove these conditions when the tiling gives a factorization of a non-Hajós cyclic group (Amiot).



Méthodes algébriques en Musique  
et Musicologie du XX<sup>e</sup> siècle :  
aspects  
théoriques, analytiques et  
compositionnels

[www.ircam.fr/equipes/repmus/moreno](http://www.ircam.fr/equipes/repmus/moreno)

[www.ircam.fr/equipes/repmus/mamux](http://www.ircam.fr/equipes/repmus/mamux)



## Horizons philosophique d'une démarche structurale en musique

*G.-G. Granger et la dualité de l'objectal et de l'opérateur*

---

- « Pygmalion. Réflexions sur la pensée formelle », 1947
- *Pour la connaissance philosophique*, 1988
- *Formes, opérations, objets*, 1994

« [C'est la notion de groupe qui] donne un sens précis à l'idée de structure d'un ensemble [et] permet de déterminer les éléments efficaces des transformations en réduisant en quelque sorte à son schéma opératoire le domaine envisagé. [...] L'objet véritable de la science est le **système des relations** et non pas les termes supposés qu'il relie. [...] Intégrer les résultats - symbolisés - d'une **expérience** nouvelle revient [...] à créer un canevas nouveau, un **groupe de transformations** plus complexe et plus compréhensif »

G.-G. Granger : « Pygmalion. Réflexions sur la pensée formelle », 1947



## Horizons philosophique d'une démarche structurale en musique

*J. Piaget: de la théorie des groupes à la théorie des catégories*

---

- *Le structuralisme*, 1968
- *Morphismes et Catégories. Comparer et transformer* (avec G. Henriques, E. Ascher 1990)

« ...**attitude relationnelle**, selon laquelle ce qui compte [sont] les relations entre les éléments, autrement dit les procédés ou processus de composition [...] La structure [de **groupe**] se referme sur elle-même, mais cette fermeture ne signifie en rien que la structure considérée ne peut pas entrer à titre de sous-structure dans une structure plus large »

« De même qu'en mathématique le structuralisme des Bourbaki est déjà doublé par un mouvement faisant appel à des **structures plus dynamiques** (les « catégories » [...]) de même toutes les formes actuelles du structuralisme [...] sont certainement grosses de développements multiples... »

# Retombées perceptives de l'approche algébrique

## *De la théorie des groupes à la théorie des catégories*

---

- E. Cassirer : « The concept of group and the theory of perception », 1944
- G. Balzano : « The group-theoretic description of 12-fold and microtonal pitch systems », 1980

La question de la **ressemblance perceptive** entre différentes transpositions d'un même profil mélodique est liée « à un problème beaucoup plus général, un problème qui concerne les mathématiques abstraites »

E. Cassirer : « The concept of group and the theory of perception », 1944

*« Le caractère singulier de l'expérience musicale est dû en partie aux structures particulières de **groupe** que la musique rend accessible à l'auditeur »*

G. Balzano : « The group-theoretic description of 12-fold and microtonal pitch systems », 1980