Outils mathématiques et informatiques pour la théorie, l'analyse et la composition assistées par ordinateur

Moreno Andreatta
Equipe Représentations Musicales
IRCAM/CNRS UMR 9912

Plan du cours - 3h (18 mars 2005)

Survol sur l'émergence des structures algébriques en musique et musicologie du XX^{e} siècle

- *Set Theory* « classique » (Allen Forte)
- *Set Theory* « transformationnelle » (David Lewin)
- Combinatoire modale (Babbitt, Vieru, Benjamin, Carter)
- Théorie des cribles (Xenakis)
- Analyse paradigmatique en *OpenMusic* (Boulez)

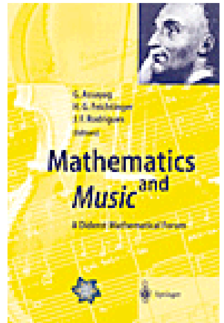
Canons rythmiques (Messiaen, …)

Suites périodiques et différences finies (Vieru, …)

Herma et *Nomos Alpha* de Xenakis : quelques aspects théoriques du processus compositionnel.

Mathématique/Musique…une histoire récente

• 1999 : 4e Forum Diderot (Paris, Vienne, Lisbonne), *Mathematics and Music* (Assayag et al., 2001)

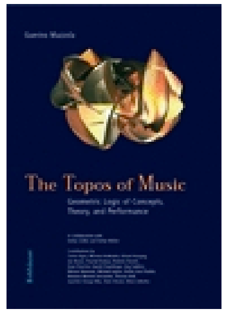


• 2000 - 2003 : MaMuTh Seminar (Mexique, Zürich, Berlin). *Perspectives in Mathematical and Computational Music Theory* (Mazzola, Noll, Luis-Puebla, epOs, 2004)
`http://www.epos.uos.de/music/`

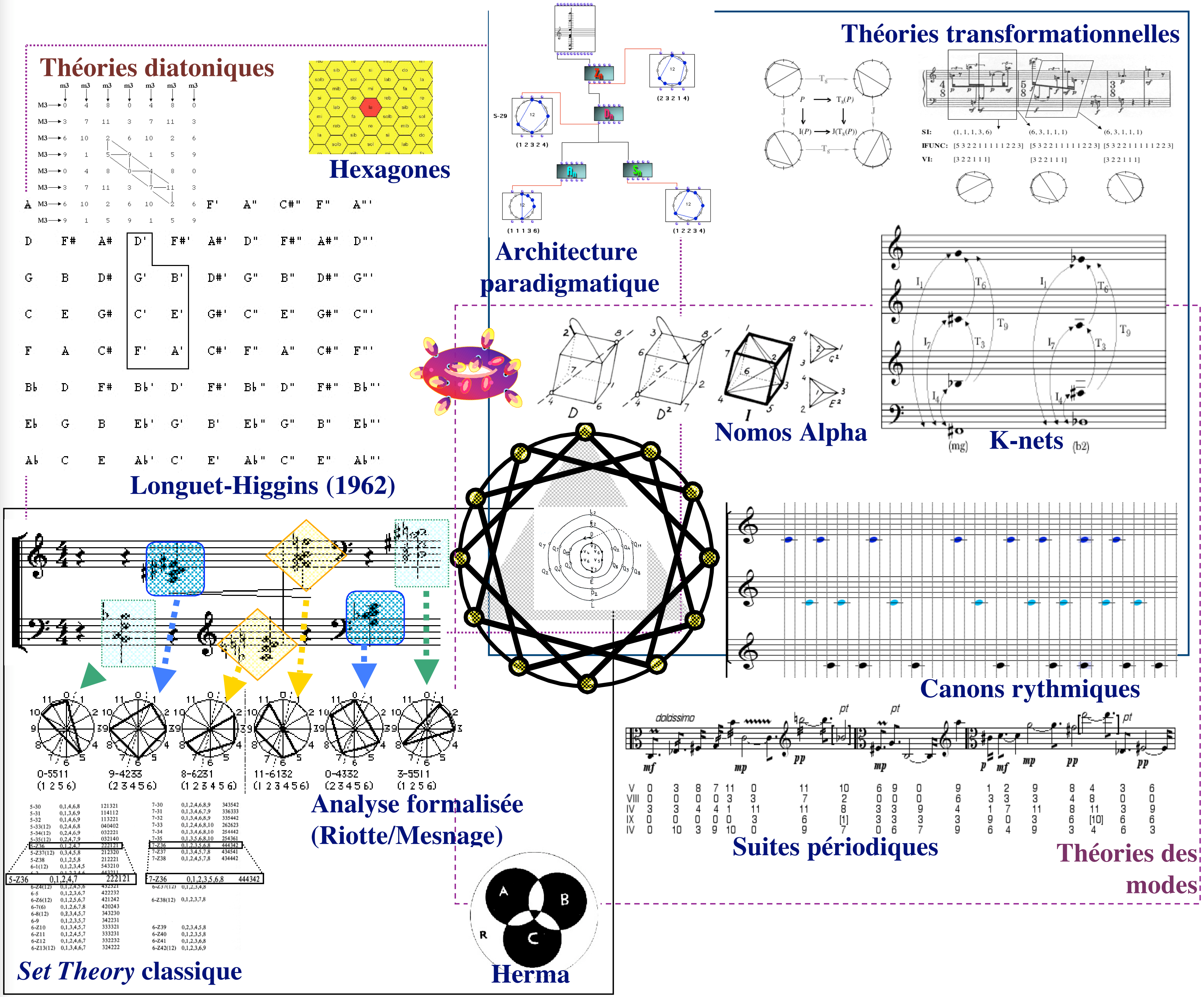
• 2000 - 2001 : Séminaire *MaMuPhi* (Ircam). *Penser la musique avec les mathématiques ?* (Assayag, Mazzola, Nicolas, Collection Musique-Science, 2005)
`http://www.entretemps.asso.fr/Seminaire/mamuphi.html`

• 2001 - 2005 : Séminaire *MaMuX* de l'IRCAM
`http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/`

• 2003 : *The Topos of Music* (G. Mazzola et al.), Birkhäuser.



• 2005 : Séminaire « *Musique et Mathématiques* », ENS-IRCAM-CNRS
`http://www.entretemps.asso.fr/maths/`


Théories diatoniques
Hexagones
Longuet-Higgins (1962)
Architecture paradigmatique
Théories transformationnelles
Nomos Alpha
K-nets
Canons rythmiques
Analyse formalisée (Riotte/Mesnage)
Set Theory classique
Herma
Suites périodiques
Théories des modes

Méthodes algébriques en Musique et Musicologie du XX^{e} siècle : aspects théoriques, analytiques et compositionnels

www.ircam.fr/equipes/repmus/moreno

www.ircam.fr/equipes/repmus/mamux

double perspective

Musique

Mathématiques modernes

XX^{e} siècle

Musicologie

Théorie

Analyse

Composition

tripartition

La place des mathématiques dans la musicologie systématique

Guido Adler : « Umfang, Methode und Ziel der Musikwissenschaft » (1885)

II. Systematisch.

Aufstellung der in den einzelnen Zweigen der Tonkunst zuhöchst stehenden Gesetze.

A. Erforschung und Begründung derselben in der			B. Aesthetik der Tonkunst.	C. Musikalische Pädagogik und Didaktik	D. Musikologie
1. *Harmonik* (tonal od. tonlich).	2. *Rhythmik* (temporär oder zeitlich).	3. *Melik* (Cohärenz von tonal und temporär).	1. Vergleichung und Werthschätzung der Gesetze und deren Relation mit den appercipirenden Subjecten behufs Feststellung der *Kriterien des musikalisch Schönen.* 2. Complex unmittelbar und mittelbar damit zusammenhängender Fragen.	(Zusammenstellung der Gesetze mit Rücksicht auf den Lehrzweck) 1. Tonlehre, 2. Harmonielehre, 3. Kontrapunkt, 4. Compositionslehre, 5. Instrumentationslehre, 6. Methoden des Unterrichtes im Gesang und Instrumentalspiel.	(Untersuchung und Vergleichung zu ethnographischen Zwecken).

Hilfswissenschaften: Akustik und Mathematik.
Physiologie (Tonempfindungen).
Psychologie (Tonvorstellungen, Tonurtheile und Tongefühle).
Logik (das musikalische Denken).
Grammatik, Metrik und Poetik.
Pädagogik
Ästhetik etc.

*« La deuxième grande partie de la musicologie est la partie systématique; cette partie se base sur la partie historique. (...) L'accent de l'observation réside dans **l'analogie de la méthode musicologique avec la méthode scientifique** ».*

Musique

Méthodes algébriques

Théorie

Composition

Théoriciens/Compositeurs

- Ernst Krenek
- Milton Babbitt
- Iannis Xenakis
- Anatol Vieru
- Pierre Barbaud
- Michel Philippot
- André Riotte
- ...

Vers l'émergence des structures algébriques en musique

Ernst Krenek et la méthode axiomatique

- *The Relativity of Scientific Systems*
- *The Significance of Axioms*
- *Axioms in music*
- *Musical Theory and Musical Practice*

Ernst Krenek : *Über Neue Musik*, 1937 (Engl. Transl. *Music here and now,* 1939).

«Physicists and mathematicians are far in advance of musicians in realizing that their respective sciences do not serve to establish a concept of the universe conforming to an objectively existent nature»

*«As the study of axioms eliminates the idea that axioms are something absolute, conceiving them instead as **free propositions of the human mind**, just so would this **musical theory** free us from the concept of major/minor tonality […] as an irrevocable law of nature».*

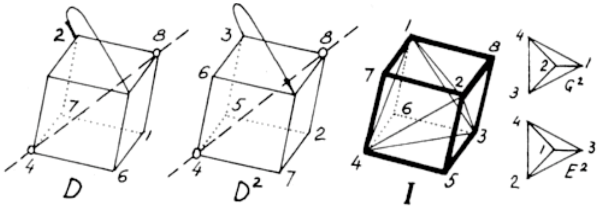
Babbitt : *The function of Set Structure in the Twelve-Tone System*, PhD 1946/1992

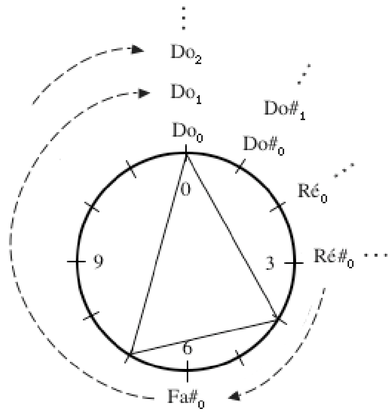
Xenakis : *Musiques formelles*, 1963

Vieru : *Eléments d'une théorie générale des modes*, 1967

La structure de groupe en musique

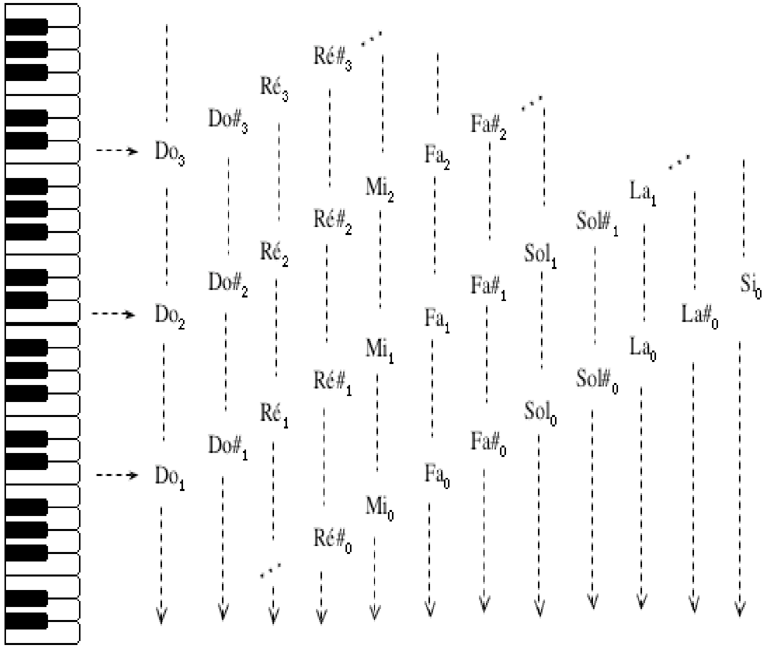
	S	I	R	RI
S	S	I	R	RI
I	I	S	RI	R
R	R	RI	S	I
RI	RI	R	I	S





(4,3,5)

Vers une approche algébrique en musique



Do	Do#	Ré	Ré#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si
⇓	⇓	⇓	⇓	⇓	⇓	⇓	⇓	⇓	⇓	⇓	⇓
[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]

La relation de congruence mod 12

Camille Durutte:

- *Technie, ou lois générales du système harmonique* (1855)
- *Résumé élémentaire de la Technie harmonique, et complément de cette Technie* (1876)

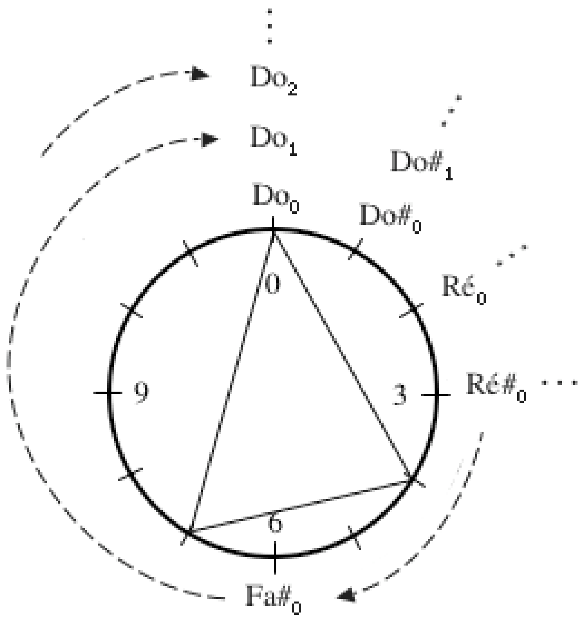
« Two elements are congruent modulo 12 if their difference is equal to a multiple of 12 »

(M. Babbitt: *The function of Set Structure in the Twelve-Tone System,* 1946)

Ex: $3 \equiv 15 \bmod 12$ car $15-3=1\times 12$

$3 \equiv 27 \bmod 12$ car $27-3=2\times 12$

Congruence mod 12 et structure de groupe



(4,3,5)

*La congruence modulo 12 est une relation d'***équivalence**

- Reflexivité: $a \equiv a$
- Symétrie: $a \equiv b \Leftrightarrow b \equiv a$
- Transitivité: $a \equiv b,\ b \equiv c \Rightarrow a \equiv c$

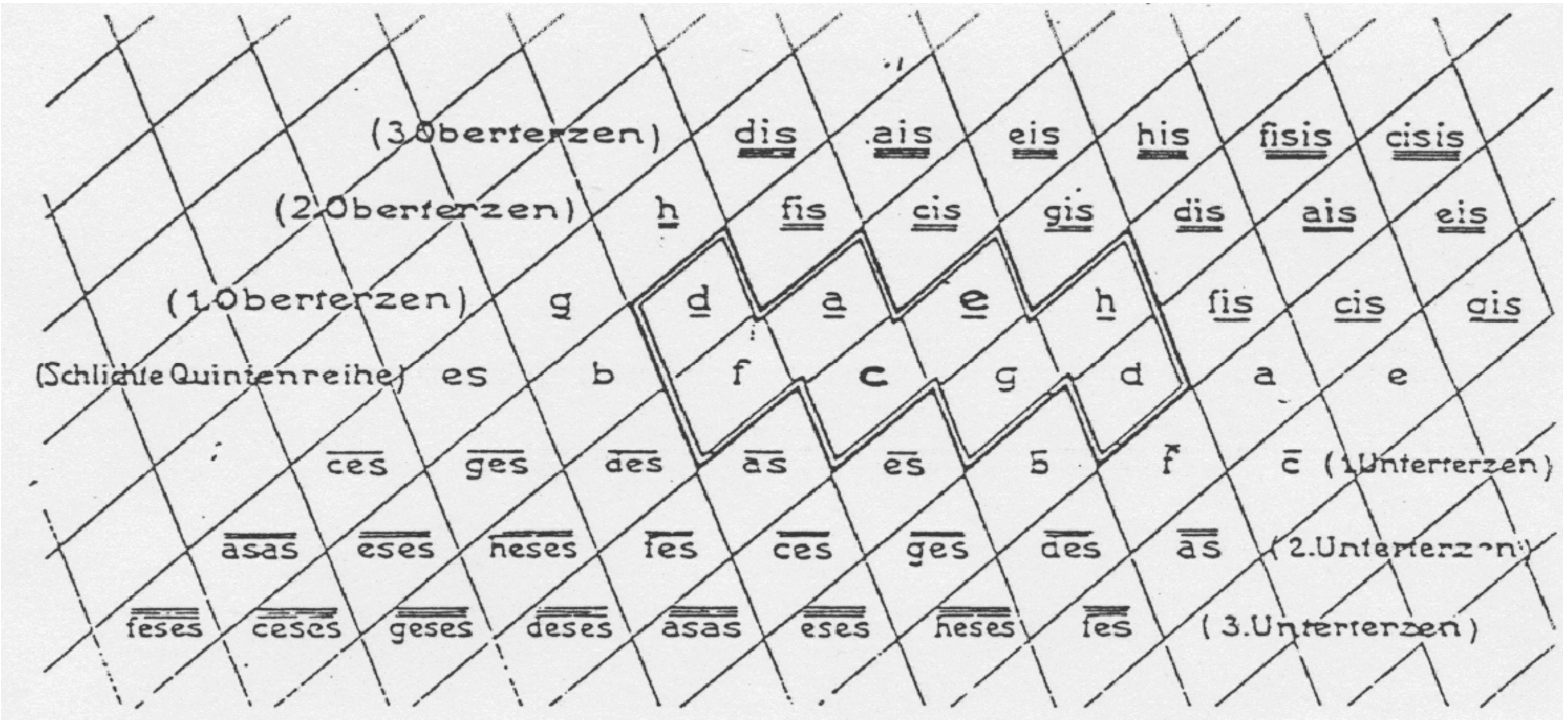
↓

Groupe cyclique ***Z/12Z***

Les classes d'équivalence mod 12 ont une structure de ***groupe*** *(avec l'addition modulo 12)*

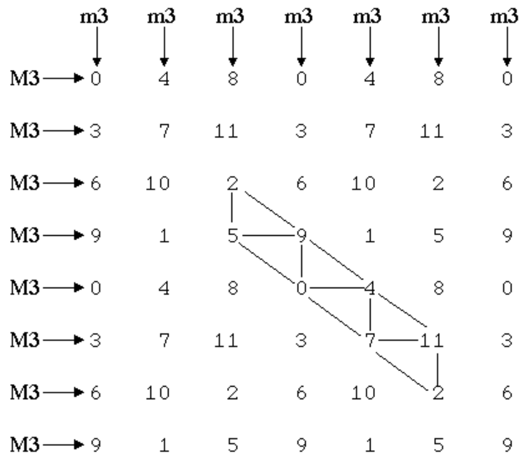
- L'opération est interne
- Existence de l'identité
- Existence de l'inverse
- Propriété associative

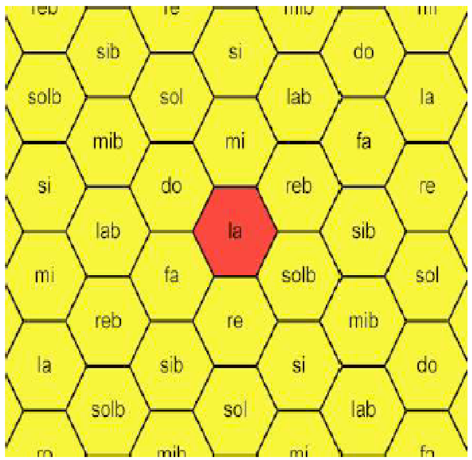
Approches néo-riemanniennes et théories diatoniques



Hugo Riemann : « Ideen zu einer Lehre von den Tonvorstellung », 1914

A	C#	F	A'	C#'	F'	A"	C#"	F"	A"'
D	F#	A#	D'	F#'	A#'	D"	F#"	A#"	D"'
G	B	D#	G'	B'	D#'	G"	B"	D#"	G"'
C	E	G#	C'	E'	G#'	C"	E"	G#"	C"'
F	A	C#	F'	A'	C#'	F"	A"	C#"	F"'
B♭	D	F#	B♭'	D'	F#'	B♭"	D"	F#"	B♭"'
E♭	G	B	E♭'	G'	B'	E♭"	G"	B"	E♭"'
A♭	C	E	A♭'	C'	E'	A♭"	C"	E"	A♭"'





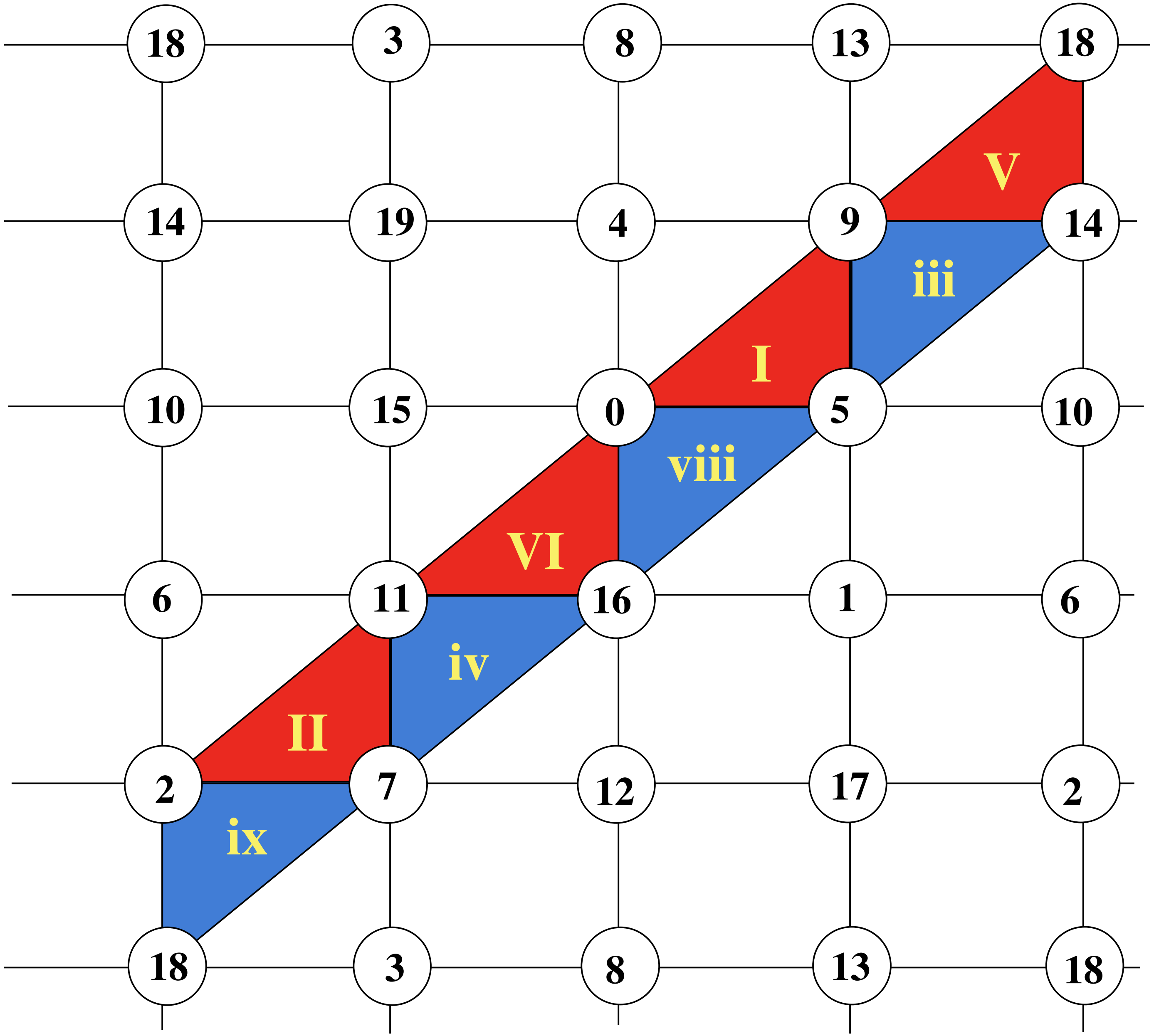
Longuet-Higgins (1962)

Balzano (1980)

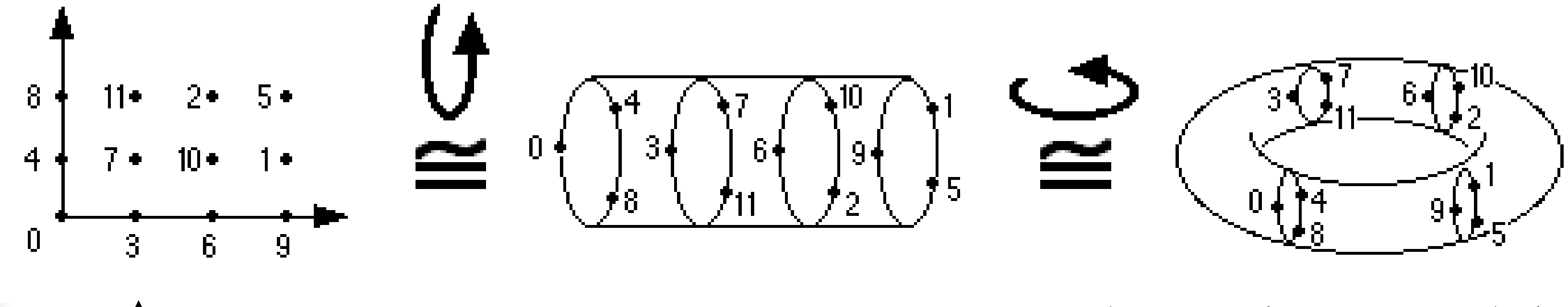
Chouvel (2002)

Généralisations pour $\mathbf{Z_n = Z_{k(k+1)}}$ (Balzano, 1980)

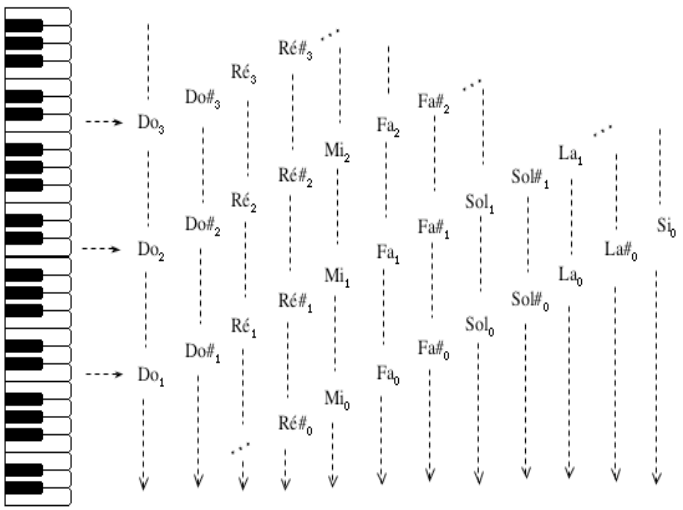
Noll, *MaMuX*, Déc. 2004



Formalisation vs représentation

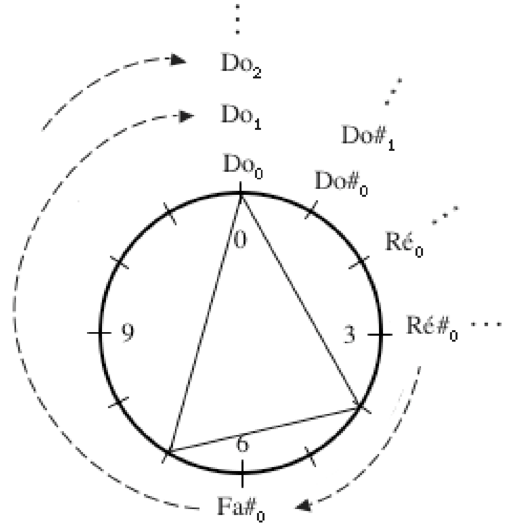


Représentation toroïdale



Do	Do#	Ré	Ré#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si
⇓	⇓	⇓	⇓	⇓	⇓	⇓	⇓	⇓	⇓	⇓	⇓
[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]

$$\boxed{Z_{12} = Z_3 \times Z_4}$$



(4,3,5)

Représentation circulaire

Une démarche algébrique pour le sérialisme intégral

« Une compréhension de la structuration dodécaphonique des composantes autres que les hauteurs ne peut que passer par une définition correcte et rigoureuse de la ***nature*** *du système et des* ***opérations*** *qui lui sont associées »*

M. Babbitt : « Some Aspects of Twelve-Tone Composition »,1955

« [Le système] peut être caractérisée complètement en explicitant les éléments, les ***relations*** *[…] entre ces éléments et les* ***opération****s sur les éléments ainsi reliés. […] Toute considération sur les opérations du système doit procéder de la conscience de leur nature permutationnelle »*

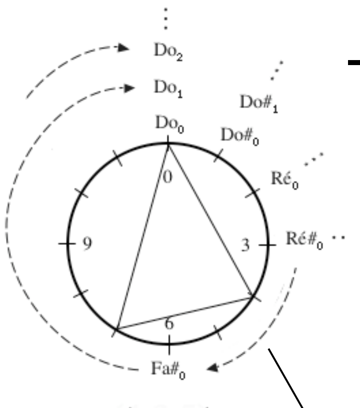
M. Babbitt : « Twelve-Tone Invariants as Compositional Determinants », 1960

« …un large nombre de conséquences compositionnelles sont dérivables directement de théorèmes de ***théorie des groupes finis*** *»*

M. Babbitt : « Set Structure as a Compositional Determinant », 1961

Le système dodécaphonique et la théorie des groupes

The Twelve-Tone System, is a «*set of elements, **relations** between elements and **operations** upon elements*» (Babbitt, 1946)



(4,3,5)

	S	I	R	RI
S	S	I	R	RI
I	I	S	RI	R
R	R	RI	S	I
RI	RI	R	I	S

S: $(a,b) \rightarrow (a,b)$

I: $(a,b) \rightarrow (a, \mathbf{12\text{-}b \bmod 12})$

R: $(a,b) \rightarrow (11\text{-}a,b)$.

RI: $(a,b) \rightarrow (a, 12\text{-}b \bmod 12)$

$\downarrow$

$(11\text{-}a, 12\text{-}b \bmod 12)$

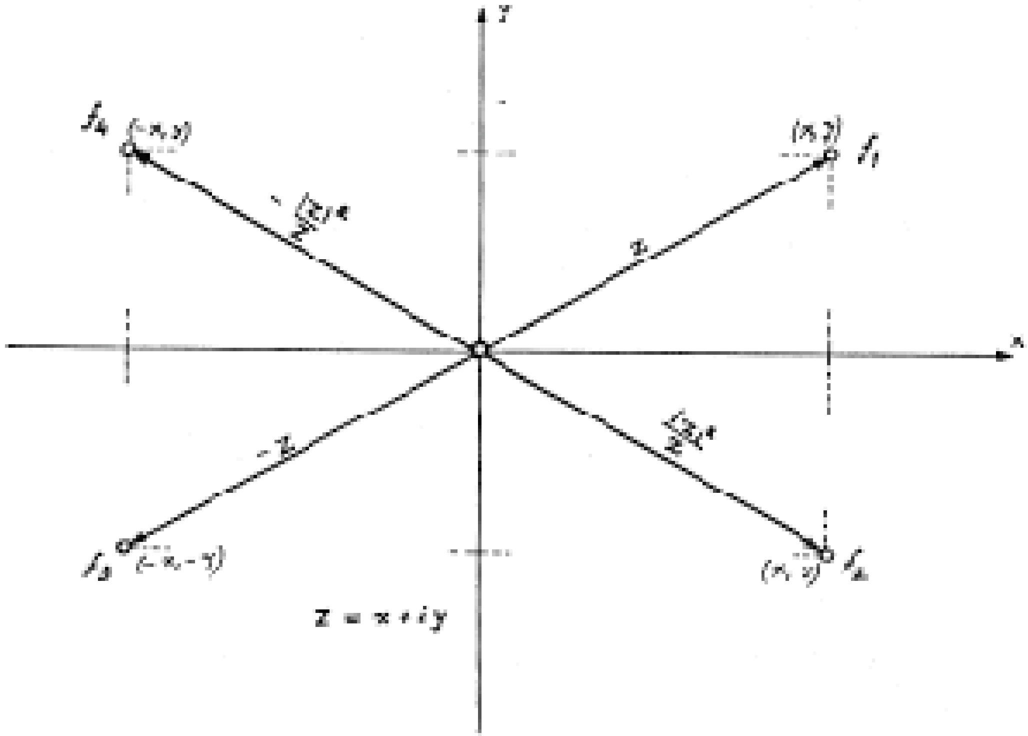
I: $x \rightarrow 12\text{-}x$

T_k: $x \rightarrow k+x$

$T_{11}I$: $x \rightarrow 11\text{-}x$

Algèbre/géométrie chez Xenakis : groupe de Klein

	S	I	R	R
S	S	I	R	R
I	I	S	RI	R
R	R	RI	S	I
RI	RI	R	I	S



$Z = x + yi$

S série de base → $f_1 = Z = x + yi = Z = f_1(Z)$ = original form

I inversion → $f_2 = x - yi = |Z|^2/Z = f_2(Z)$ = inversion

RI rétrog. inverse → $f_3 = -x - yi = -Z = f_3(Z)$ = inverted retrogradation

R rétrogradation → $f_4 = -x + yi = -(|Z|^2/Z) = f_4(Z)$ = retrogradation

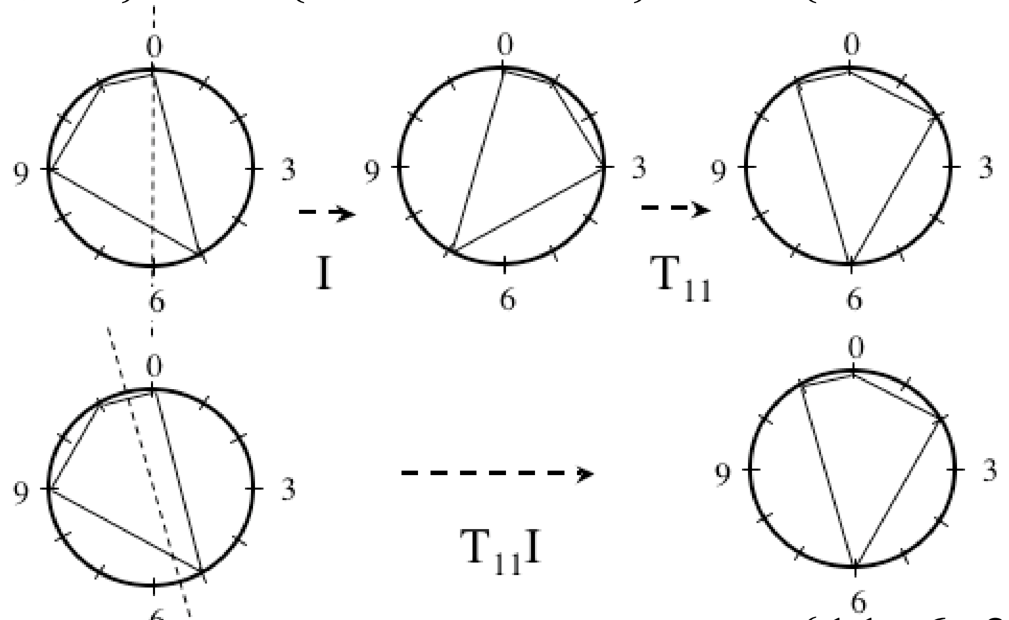
Transformations d'ensembles de classes de hauteurs

Inversions et transpositions

I: $x \rightarrow 12-x$

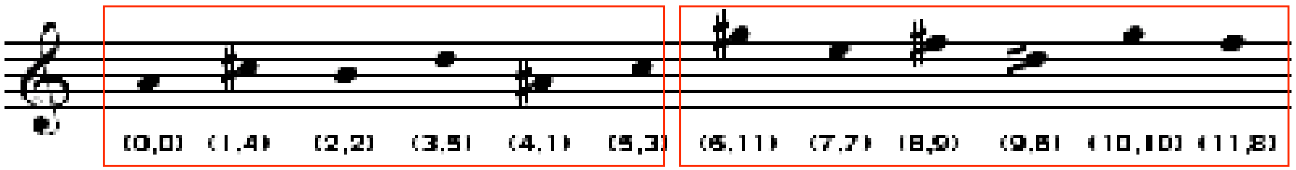
T_k: $x \rightarrow k+x$

$\{0, 5, 9, 11\} \longrightarrow \{0, -5, -9, -11\} \longrightarrow \{11-0, 11-5, 11-9, 11-11\}$



$\{0, 5, 9, 11\} \longrightarrow \{11, 6, 3, 0\}$

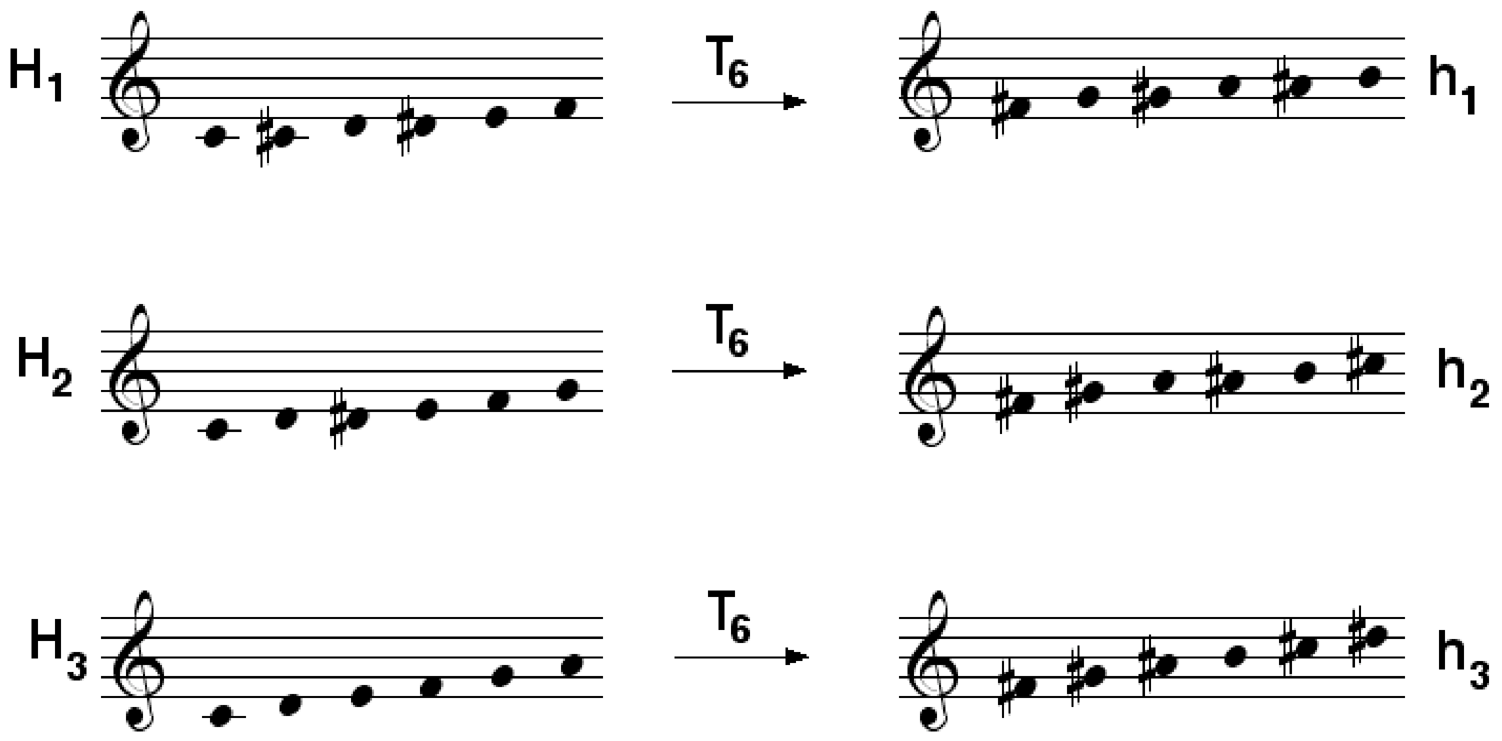
T_{11}I: $x \rightarrow 11-x$



T_{11}I: $\{0,4,2,5,1,3\} \rightarrow \{11,7,9,5,10,8\}$ *Combinatorialité inverse*

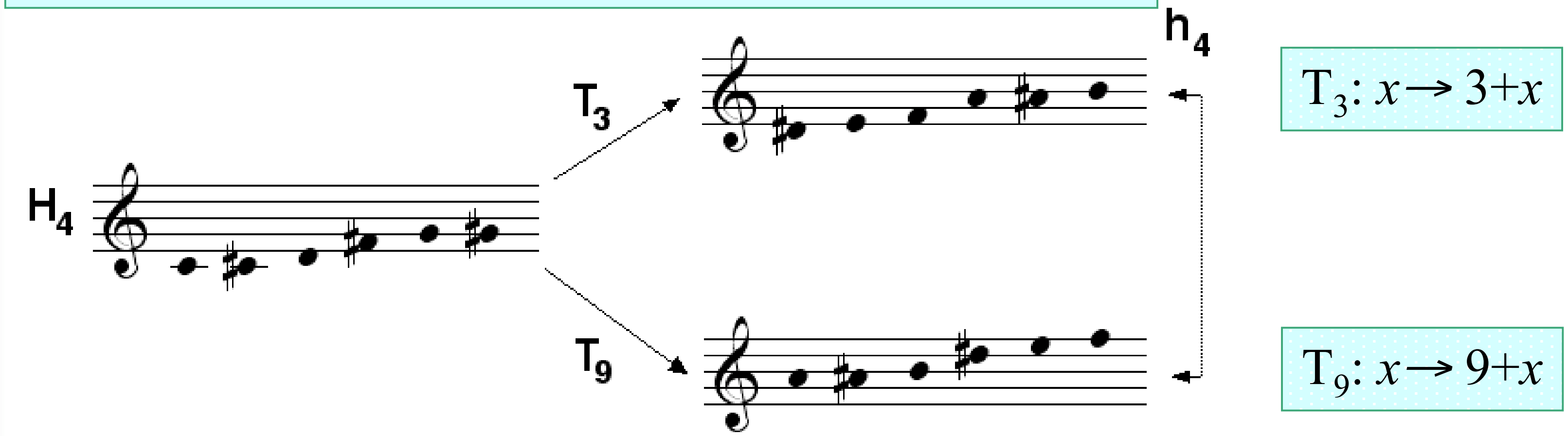
Combinatorialité hexacordale (Schoenberg, Hauer, Krenek,…)

- Omnicombinatorialité du premier ordre $T_6 : x \rightarrow 6+x$

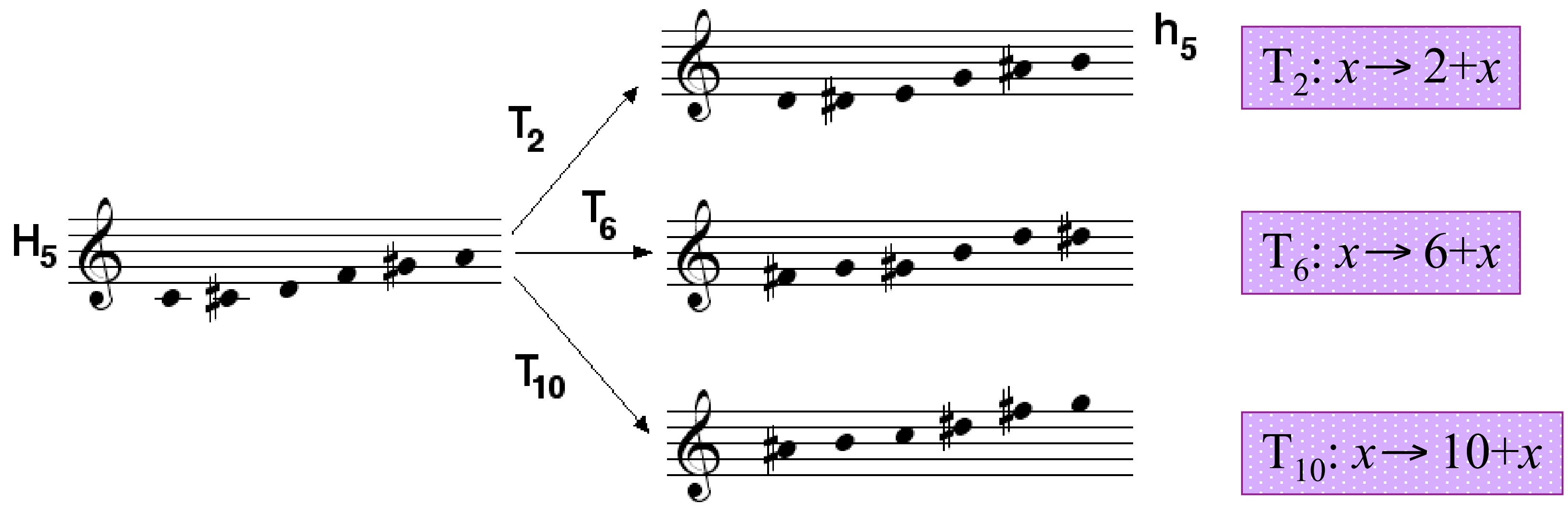


Combinatorialité hexacordale (Schoenberg, Hauer, Krenek,…)

- Omnicombinatorialité du deuxième ordre

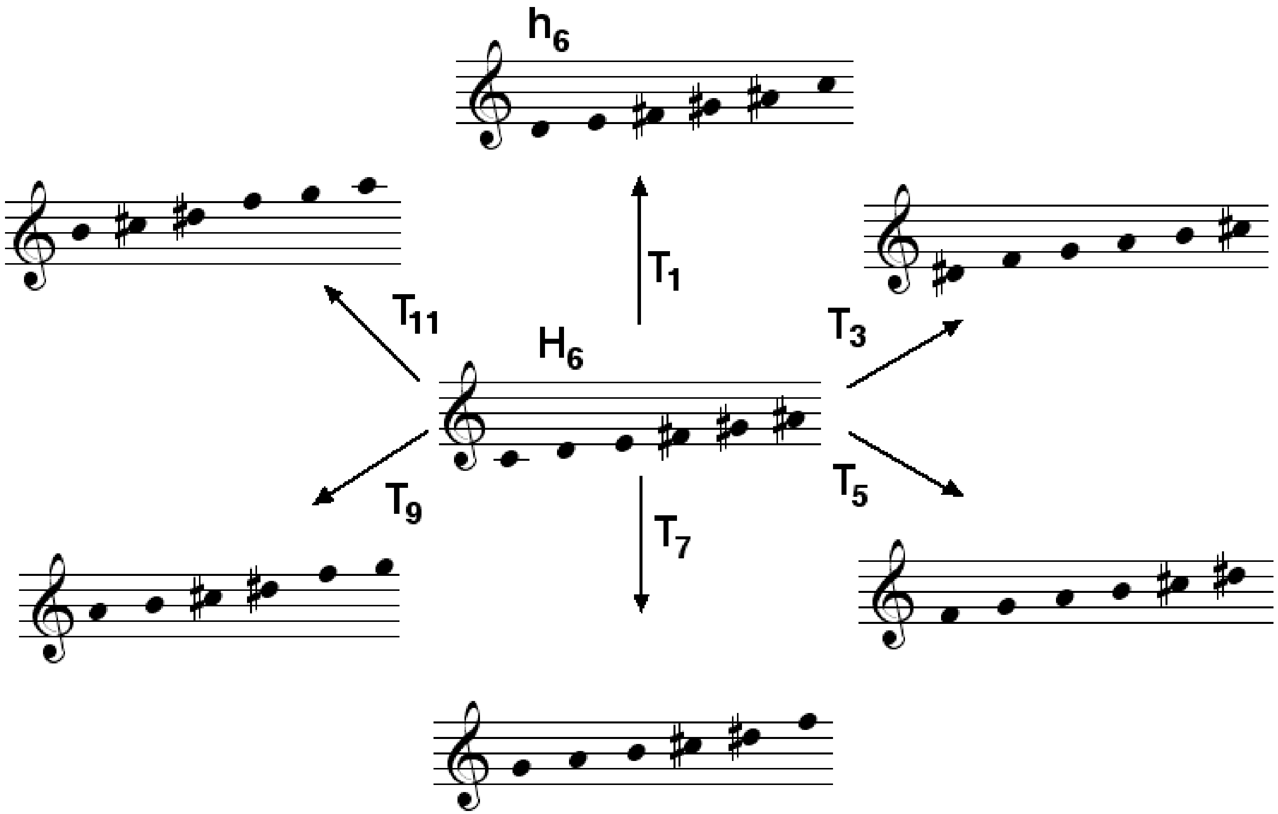


- Omnicombinatorialité du troisième ordre



Combinatorialité hexacordale (Schoenberg, Hauer, Krenek,…)

- Omnicombinatorialité du quatrième ordre



T_1: $x \rightarrow 1+x$

T_3: $x \rightarrow 3+x$

T_5: $x \rightarrow 5+x$

T_7: $x \rightarrow 7+x$

T_9: $x \rightarrow 9+x$

T_{11}: $x \rightarrow 11+x$

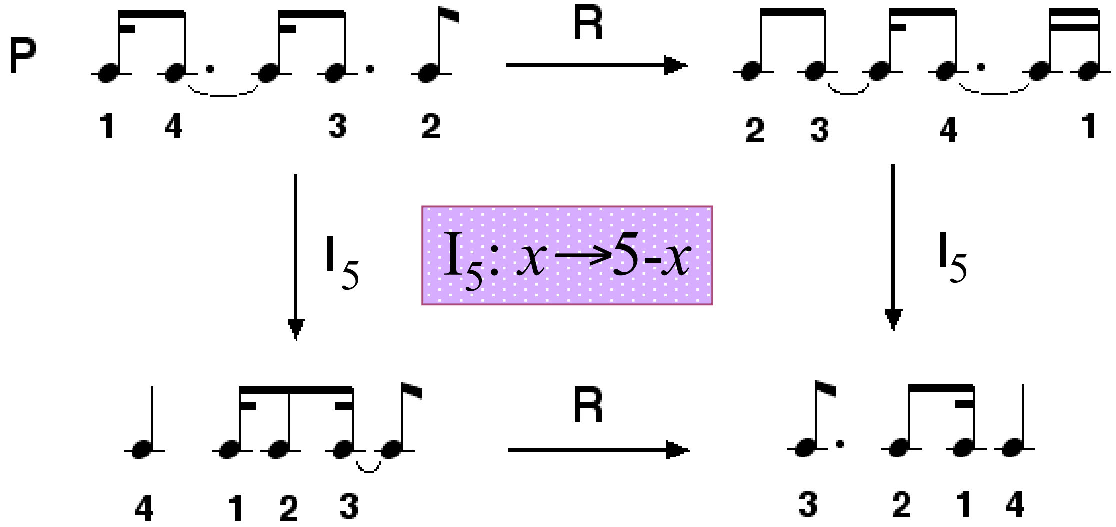
=> *OpenMusic*

Vers une formalisation algébrique du sérialisme intégrale

• La série des durées temporelles (*durational row*)

Composition for Four Instruments (1948)

I: $x \rightarrow 12-x$



• Le système des points d'attaque (*Time-Points System*)

I_{11}: $x \rightarrow 11-x$

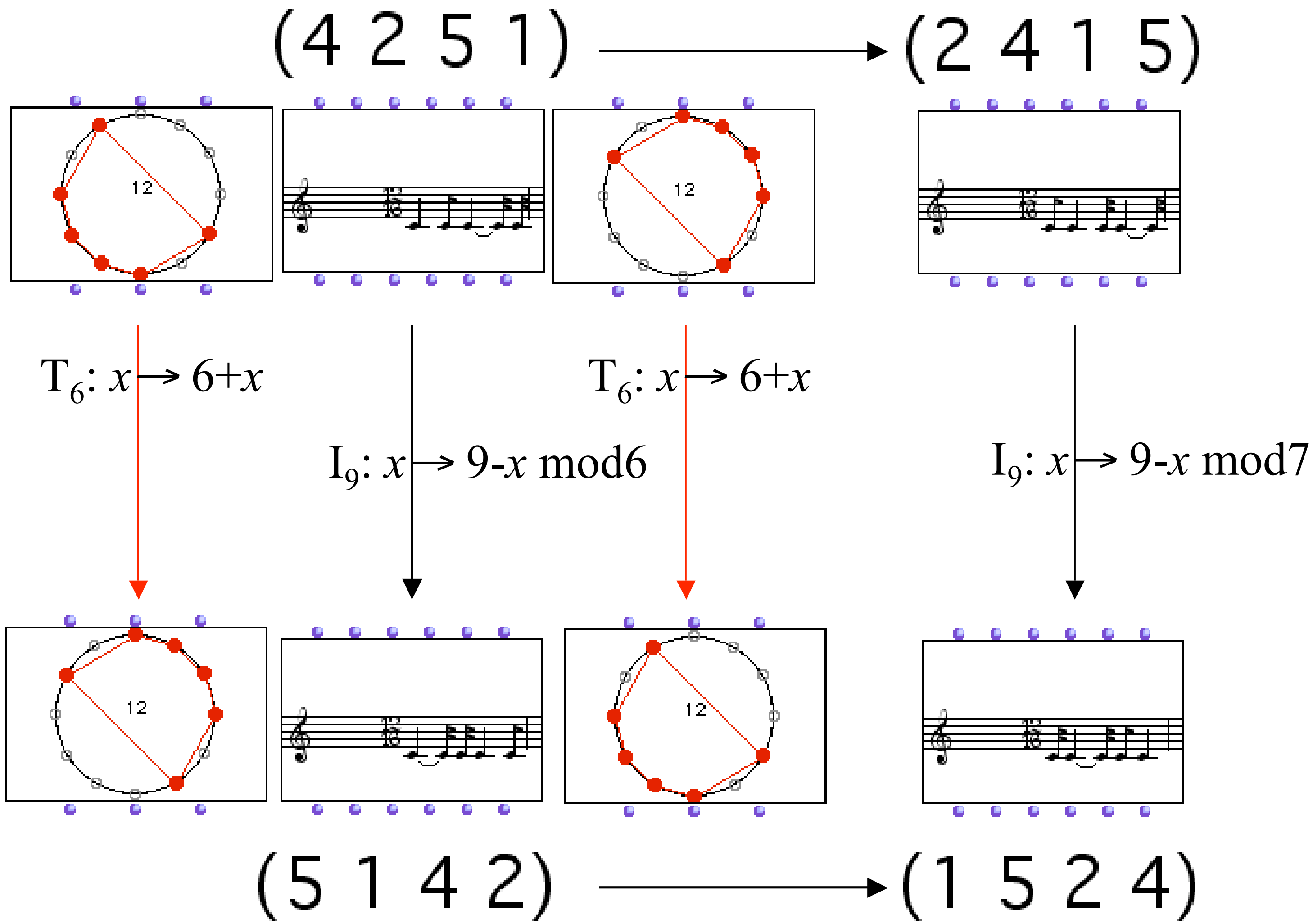
$T_{11}I$: $x \rightarrow 11+(12-x)$

Combinatorialité hexacordale et séries de durées

$T_6: x \rightarrow 6+x$

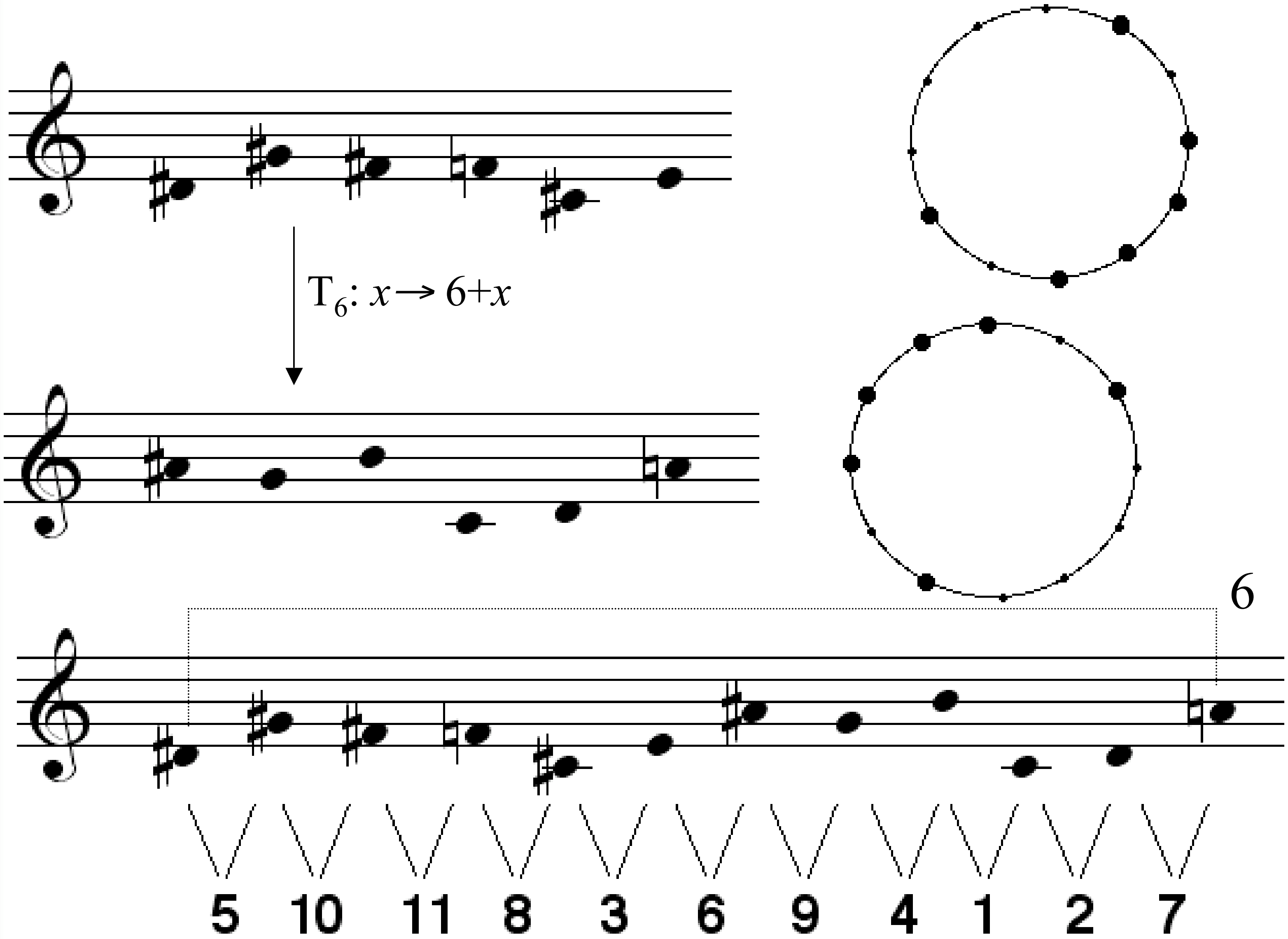
- *Three compositions for piano* (1948)

mm.14-16



Combinatorialité hexacordale et séries tous-intervalles

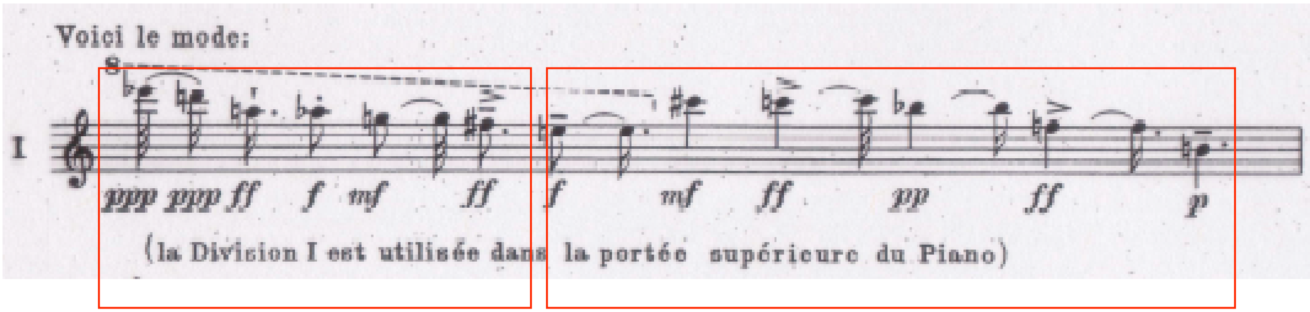
- *Partitions* (1957) → - *Post-Partitions* (1957)

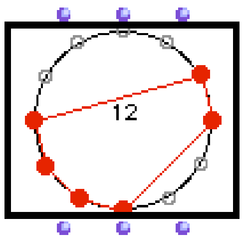


Combinatorialité hexacordale chez Messiaen

$T_7I : x \rightarrow 7\text{-}x$

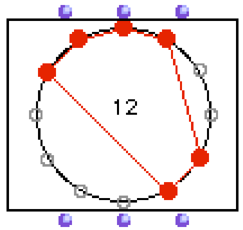
- Mode de valeurs et d'intensités (1950)





$$\{3,2,9,8,7,6\} \xrightarrow{} \{4,5,10,11,0,1\}$$

$T_7I : x \rightarrow 7\text{-}x$



D. Leong and E. McNutt: Virtuosity in Babbitt's *Lonely Flute*, MTO 11(1), March 05

Listeners to Milton Babbitt's music have criticized it for being excessively abstract or **perceptually random**. Performers of Babbitt's work have often expressed similar attitudes, feeling straight-jacketed by the score's specificity on the one hand, or glossing over detailed accuracy on the other. The complaints from both sides imply that the rigor of Babbitt's music precludes expressivity and freedom of interpretation. Our paper argues that Babbitt's music finds an **astonishing richness of expression within and because of its constraints**, and that performers can similarly find interpretive freedom within the confines of the notated score. Only by exploring this interpretive freedom can performers communicate the compositional freedom expressed in Babbitt's works. We construe these **tensions between rigor and freedom** as a particular type of virtuosity that lies at the heart of Babbitt's music

http://www.societymusictheory.org/mto

a. Pitch-class array

Register		①	②	③
C6–B6		72		231985
		6		6et0
C5-B5		e	057	
		834	2t9	
C4-B4		5t9	e34	47
		01	168	
Partition		$3^2\ 2^2\ 1^2$	3^4	6 4 2

b. Time-point array (T_6 of pitch-class array)

Dynamic	◇1	◇2
ff	18	
f	0	
mf	5	6e1
mp	29t	843
p	e43	59t
pp	67	702
Partition	$3^2\ 2^2\ 1^2$	3^4

Fonction et structure d’une théorie de la musique

« …rendre possible d’un côté l’étude de la ***structure*** *des systèmes musicaux […] et la formulation des contraintes de ces systèmes dans une perspective compositionnelle […] mais aussi, comme étape préalable, une terminologie adéquate […] pour rendre possible et établir un* ***modèle*** *qui autorise des énoncés bien déterminés et vérifiables sur les œuvres musicales »*

M. Babbitt : « The Structure and Function of Music Theory », 1965

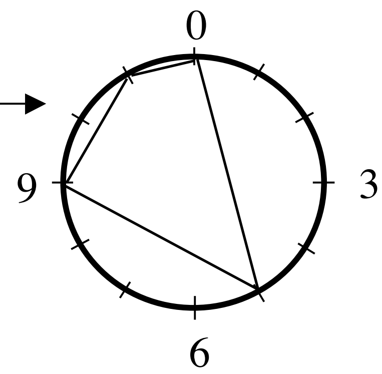
La *Set Theory*

- A. Forte : *The Structure of Atonal Music*, 1973.
- D. Lewin : *Generalized Musical Intervals and Transformation*, 1987

- E. Carter : *Harmony Book*, 2002 (sketches 1960)

- A. Vieru : *The Book of modes*, 1993 (orig. 1980)

- A. Riotte, M. Mesnage : l’analyse formalisée



{do, fa, si, la}

{0, 5, 9, 11}

[1, 1, 1, 1, 1, 1]

4-Z29

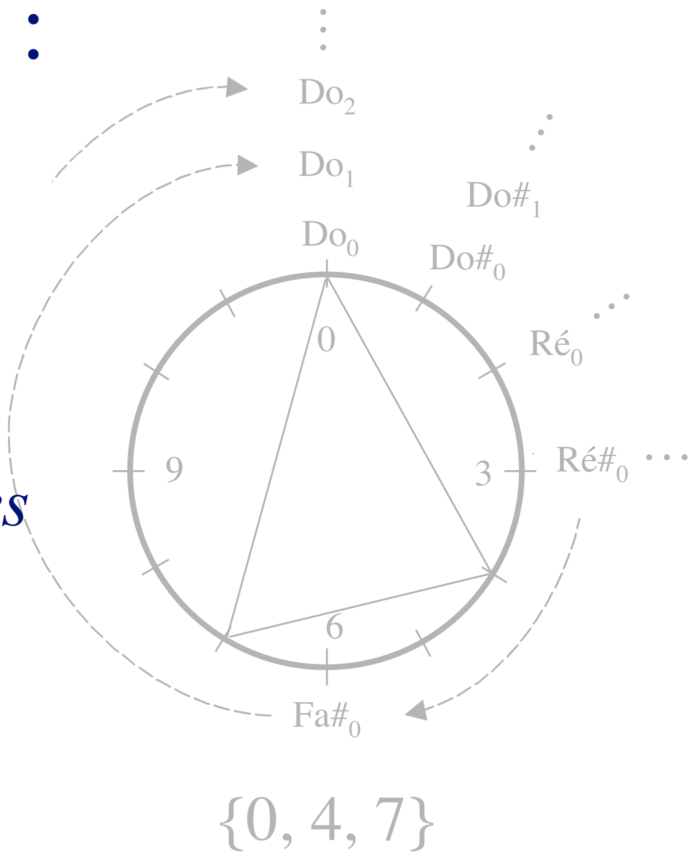
23

(5 4 2 1)

0-5421

Cf. *Musurgia*, Vol. X/1, 2003

Les principes de base de la *Set Theory* : une introduction



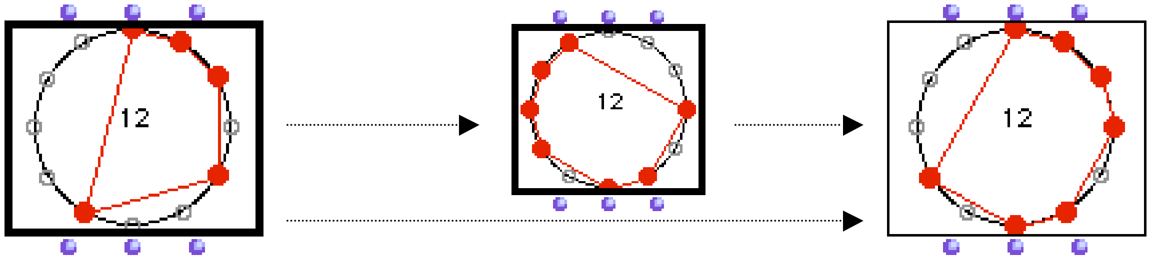
Set Theory « classique » et Approches Transformationnelles

Moreno Andreatta
Stéphan Schaub

Colloque international
Autour de la *Set Theory*

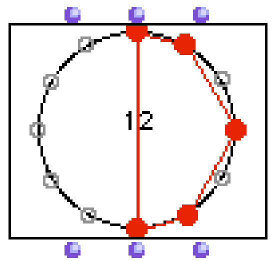
Résonances 2003

Le catalogue des *pcs* d’Allen Forte (1973)



5-Z36	0,1,2,4,7	222121

7-Z36	0,1,2,3,5,6,8	444342



5-Z12

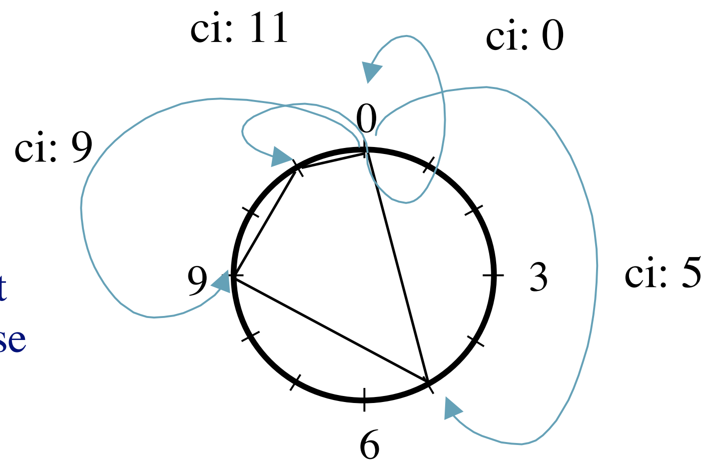
Classes d'Intervalles et Contenu Intervallique d'un ECH (2)

Interval Classes and Interval Content of a pcs

Le vecteur IFUNC (Lewin) répertorie la fréquence d'apparition des classes d'intervalles contenues dans un ECH.

IFUNC(A, A) = [4 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]

ci 0 ci 1 ci 2 … ci 11.



A = {0, 5, 9, 11}

Au sein de la théorie « classique », l'information est encore condensée, puisqu'un intervalle et son inverse sont considérés comme faisant partie de la même « classe ».

seconde mineure / septième majeure: 1,
seconde majeure / septième mineure: 2
… triton: 6.

Le vecteur intervallique (Forte) répertorie la fréquence d'apparition des classes d'intervalles contenues dans un ECH, selon la définition ci-dessus.

VI(A) = [1 1 1 1 1 1]

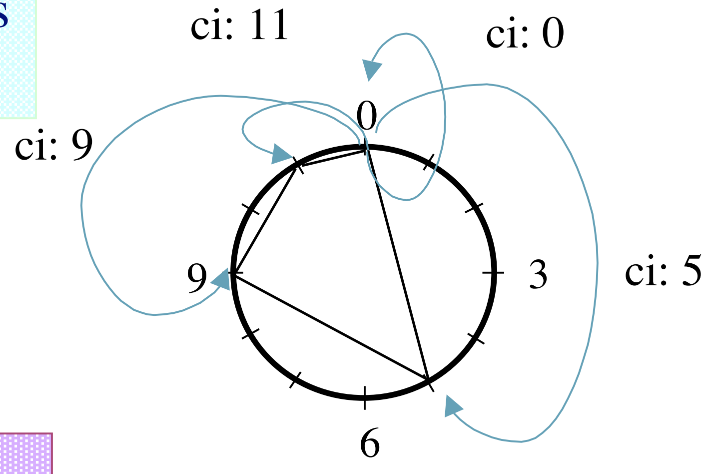
ci 1 ci 2 ci 3 … ci 6.

A la recherche des bons *invariants* pour un ECH

La fonction intervallique IFUNC (Lewin) répertorie la fréquence d'apparition des classes d'intervalles contenues dans un ECH.

IFUNC(A, A) = [4 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]

ci 0 ci 1 ci 2 … ci 11.

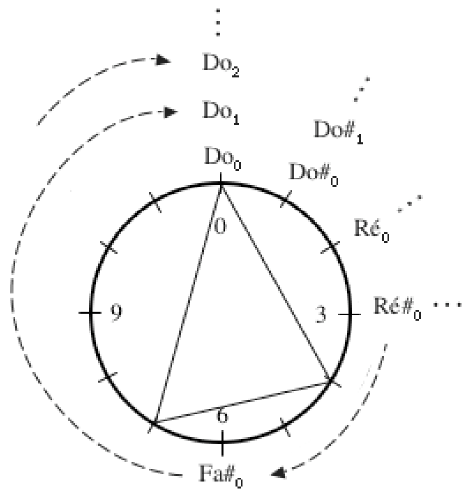


A = {0, 5, 9, 11}

Le vecteur intervallique (Forte) répertorie la fréquence d'apparition des classes d'intervalles modulo l'équivalence : ci*i* = ci(12-*i*)

VI(A) = [1 1 1 1 1 1]

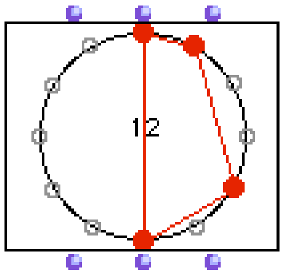
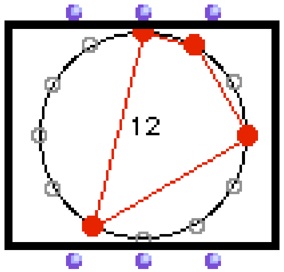
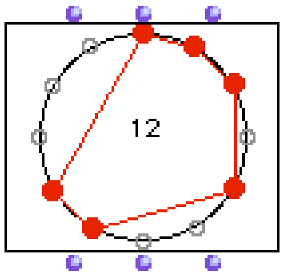
ci 1 ci 2 ci 3 … ci 6.



(4,3,5)

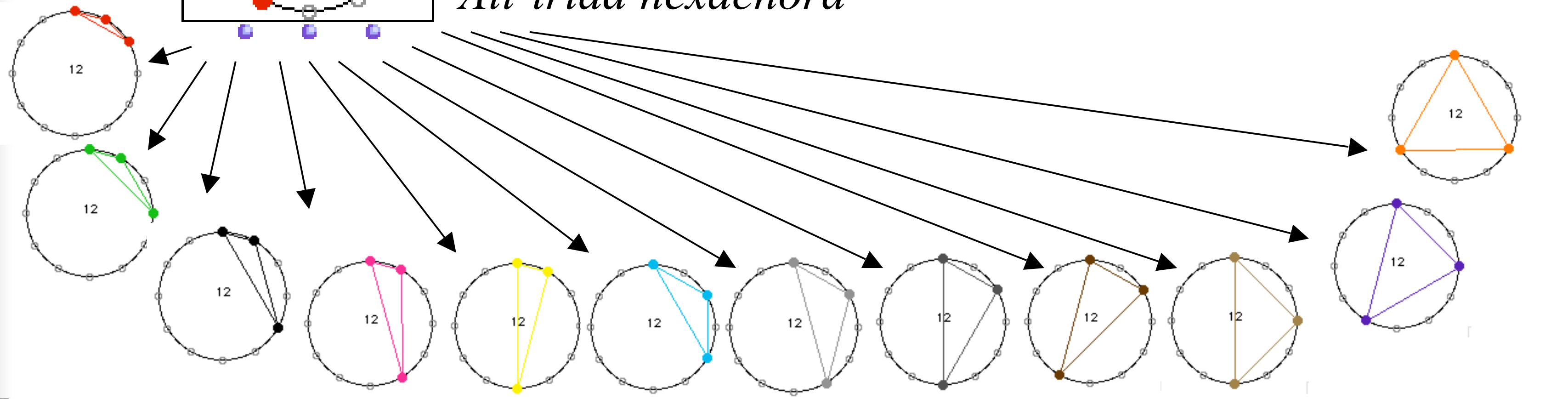
La structure intervallique (Vieru) répertorie les classes d'intervalles successives dans un ensemble des classes de hauteurs.

Elliott Carter's *Harmony Book* (2002)

		pcset	*vecteur*	*Forte*
18		(0 1 4 6)	[111111]	4-Z15
23		(0 1 3 7)	[111111]	4-Z29
35		(0 1 2 4 7 8)	[322332]	6-Z17

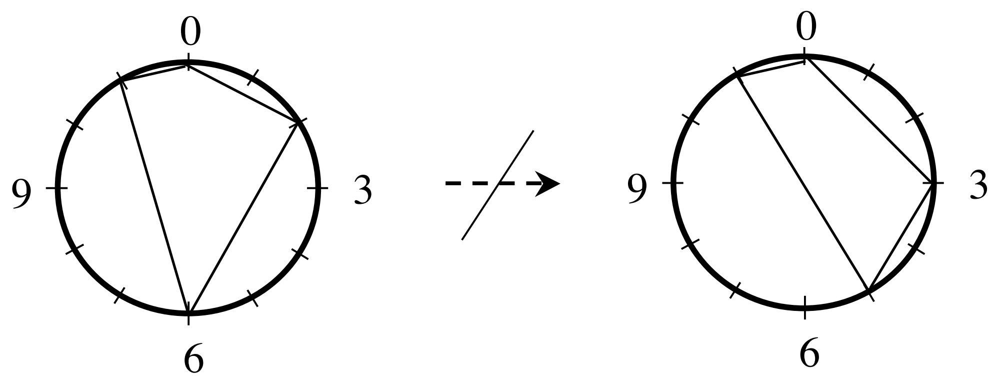
Cf. Night Fantasies (1980)

All-triad hexachord



La Relation z
Z-relation

La transposition autant que l’inversion laissent le contenu intervallique d’un ECH inchangé. En d’autres termes, si un ECH B est le transformé par inversion et / ou transposition d’un ECH A, alors A et B ont le même contenu intervallique.



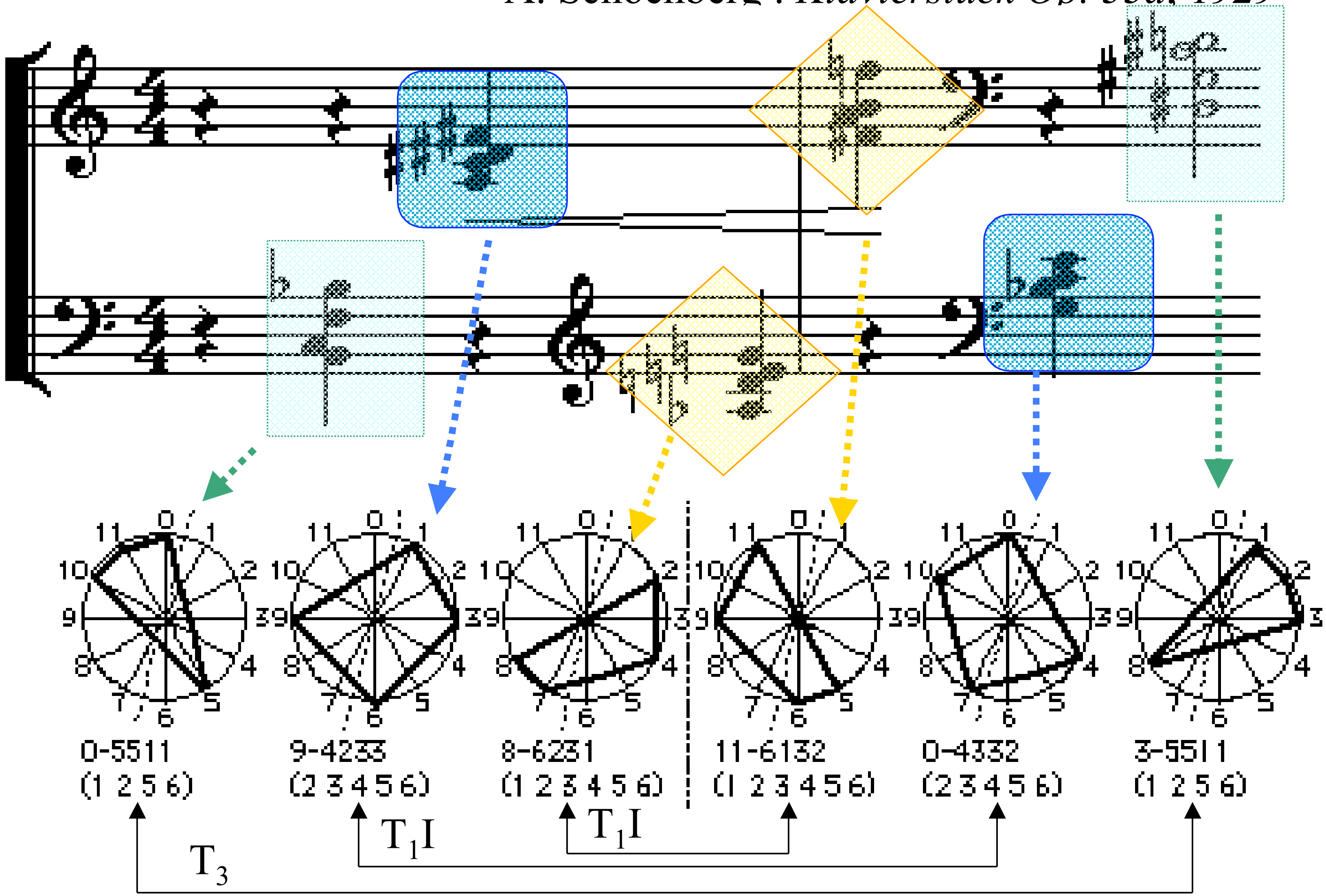
VI: [1 1 1 1 1 1] - - - → [1 1 1 1 1 1]

La proposition inverse n’est pas vraie.

L’analyse formalisée ou les « entités formelles » en musique

André Riotte et Marcel Mesnage

A. Schoenberg : *Klavierstück Op. 33a*, 1929



Analyse Set Theory « classique » (Forte)

Ensemble de classes de hauteurs, forme primaire, vecteur d'intervalles, label…

A. Schoenberg *Sechs kleine Klavierstücke* op. 19 no. 4, 1911 (Forte 2003)

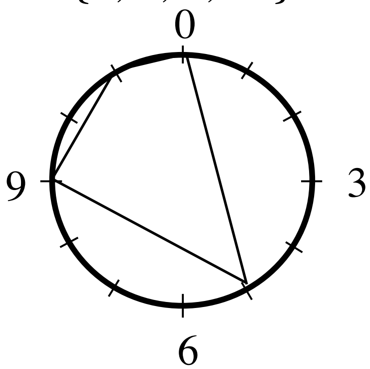
A

m. 2

{do, fa, si, la}

{0, 5, 11, 9}

{0, 5, 9, 11}



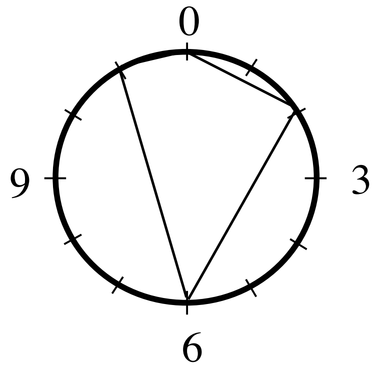
B

m. 5

{si, do, ré; fa$^{\#}$}

{11, 0, 2; 6}

{0, 2, 6, 11}



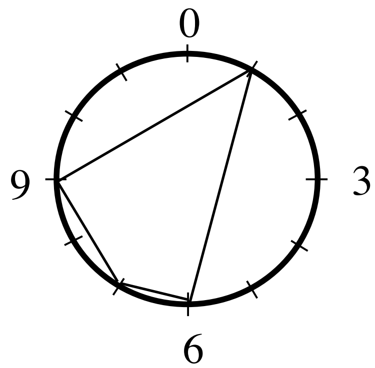
C

m. 8

{sol, la, fa$^{\#}$, do$^{\#}$}

{7, 9, 6, 1}

{1, 6, 7, 9}



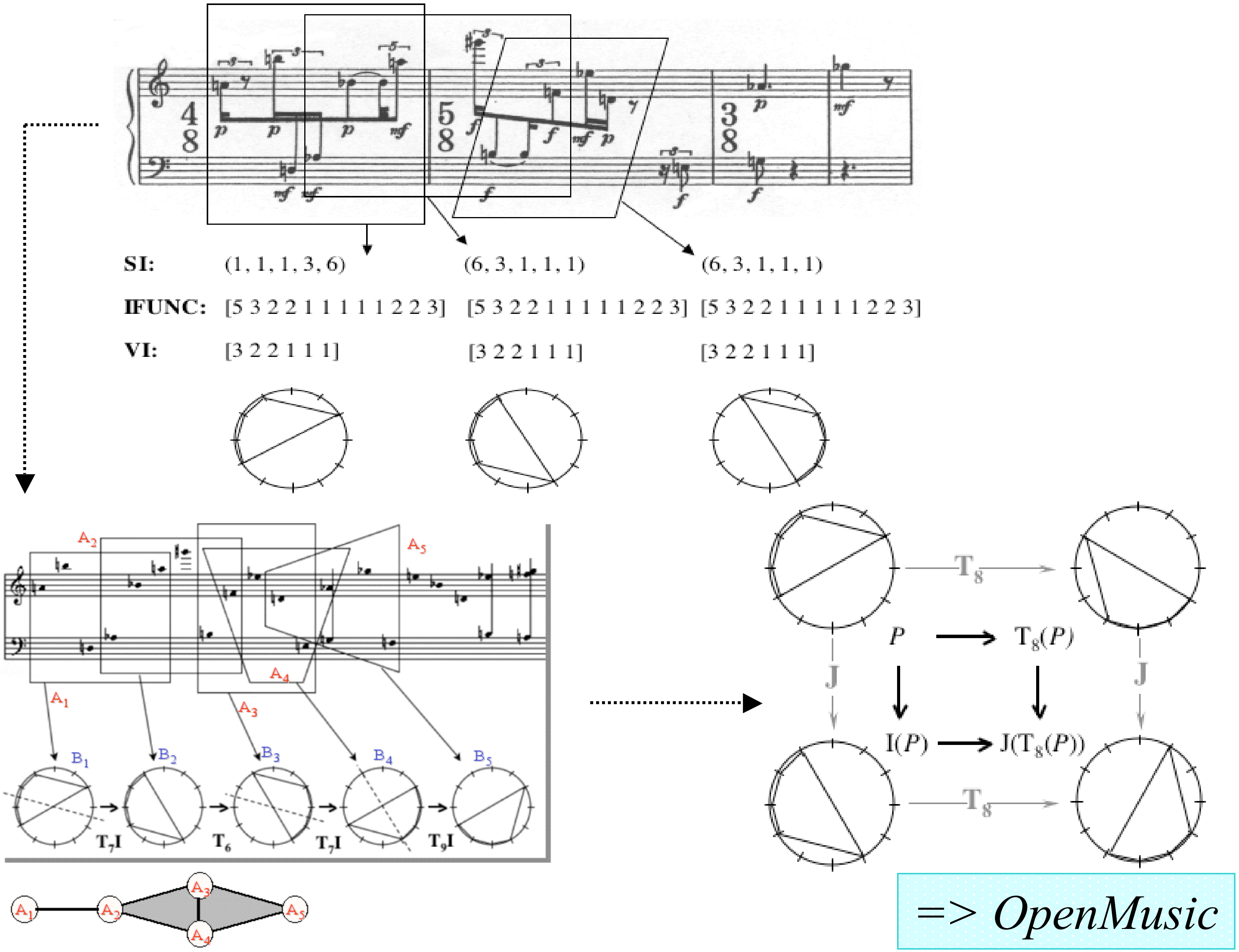
FP: (0 1 3 7)

VI: [1 1 1 1 1 1]

label: 4-Z29

Set Theory et analyse transformationnelle (David Lewin)

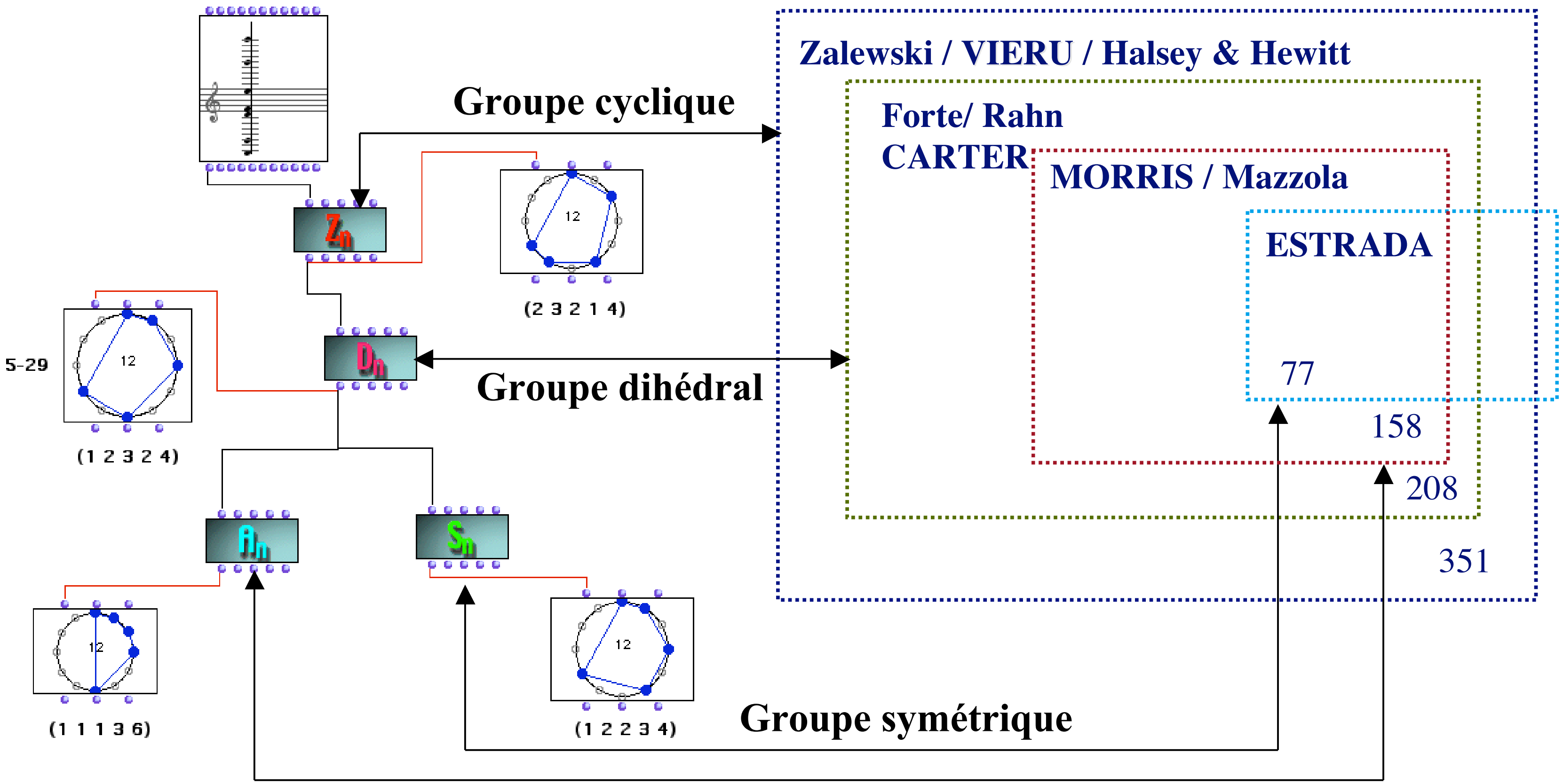
Stockhausen's *Klavierstück III* (Analyse de David Lewin, 1992)



=> *OpenMusic*

Classification ‘paradigmatique’ des structures musicales

$G \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C_{12}	1	6	19	43	66	80	66	43	19	6	1	1
D_{12}	1	6	12	29	38	50	38	29	12	6	1	1
$\mathrm{Aff}_1(Z_{12})$	1	5	9	21	25	34	25	21	9	5	1	1



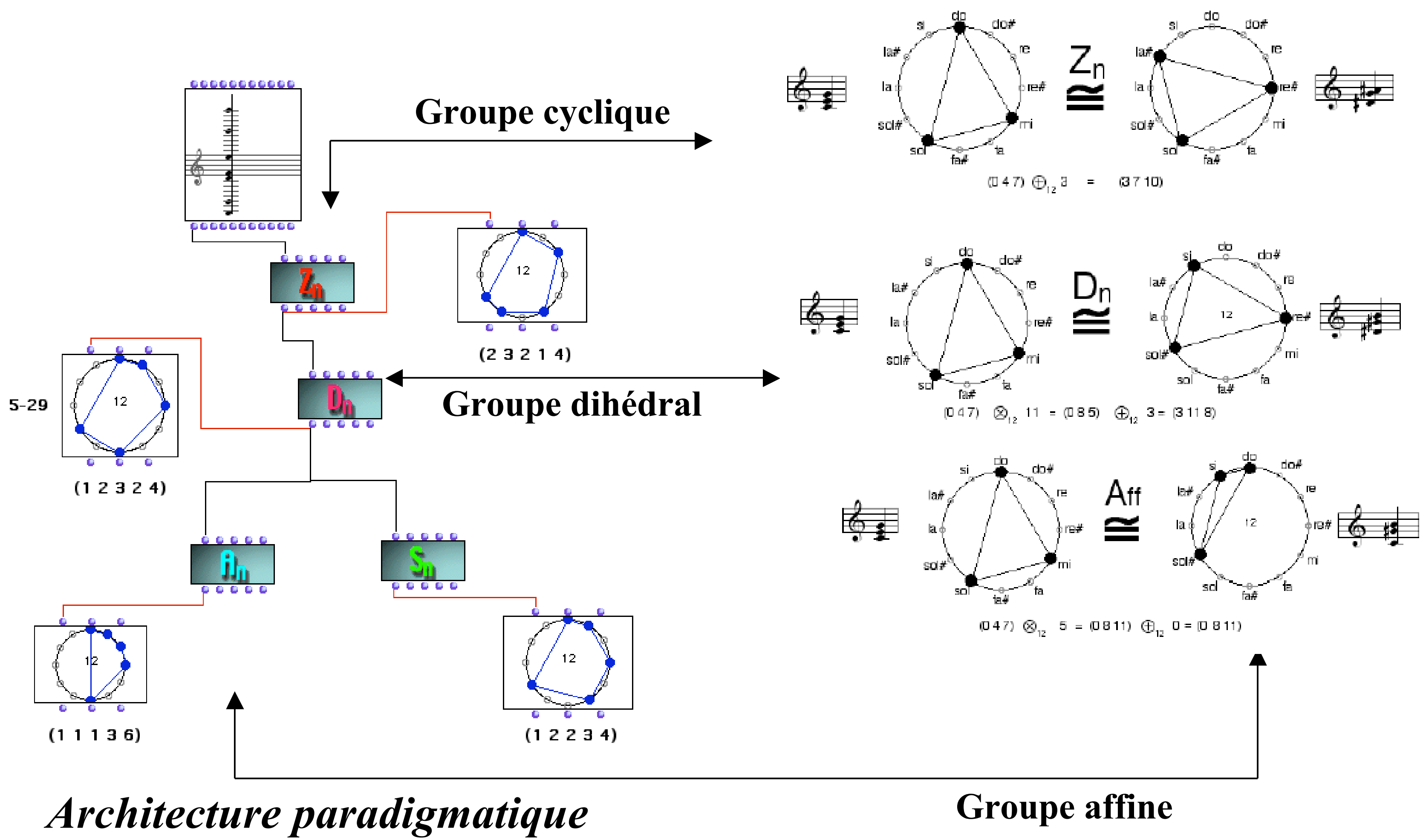
Architecture paradigmatique

Classes d'équivalence d'accords

Transpositions → $T_3\{0, 4, 7\} = 3+\{0, 4, 7\} = \{3, 7, 10\}$

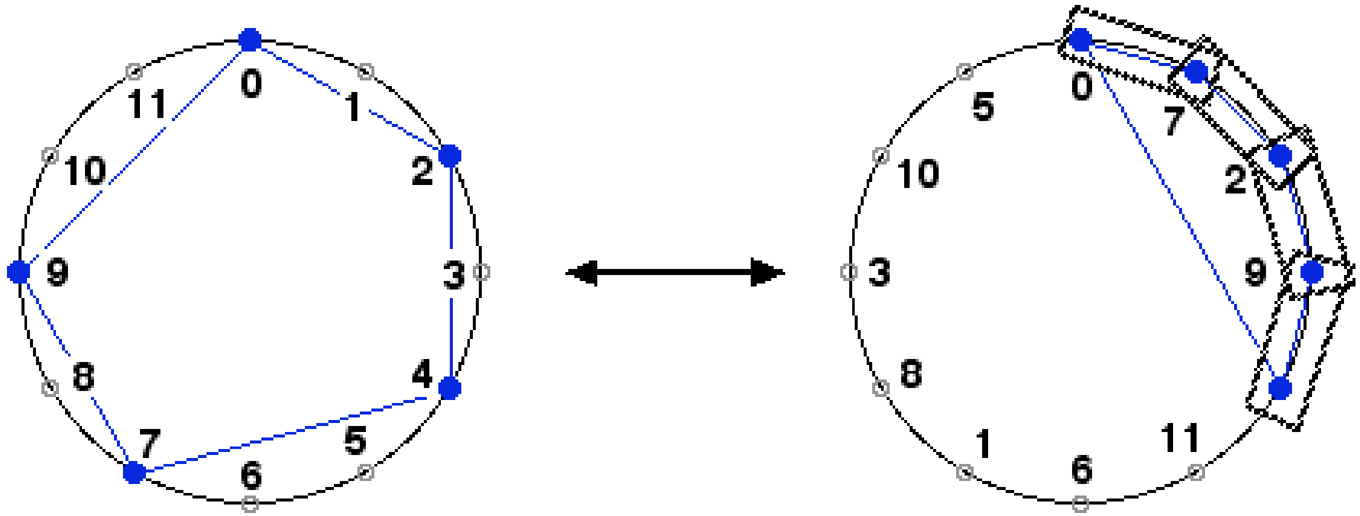
Transpositions et/ou inversions → $T_3I\{0, 4, 7\} = 3+\{0, -4, -7\} = \{3, 11, 8\}$

Multiplications → $M_5\{0, 4, 7\} = 5\times\{0, 4, 7\} = \{0, 8, 11\}$



Dégrée de 'diatonisme' et 'chromatisme'

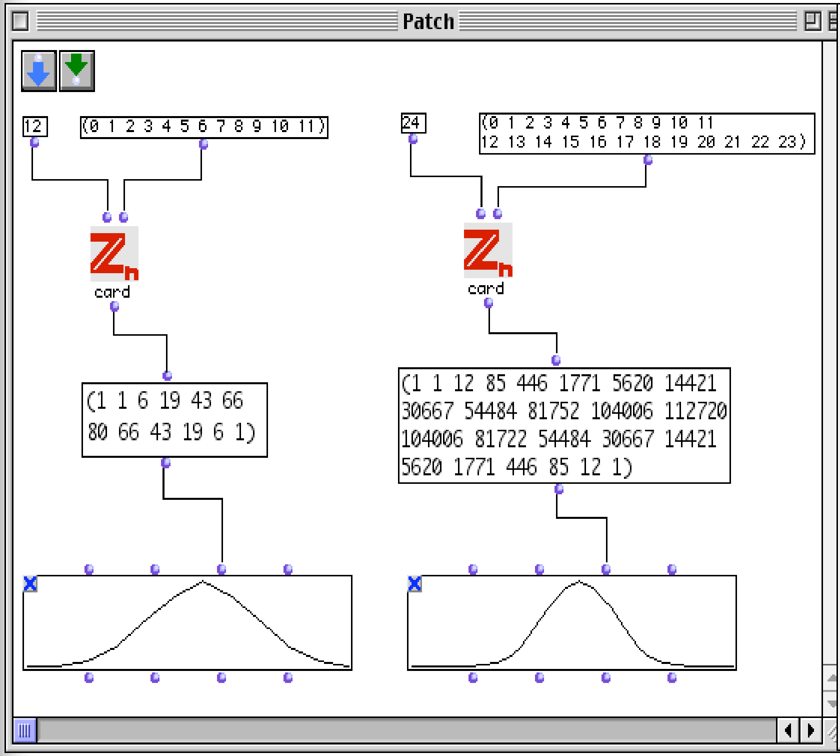
La mesure « DIA/CHRO » (A. Vieru)

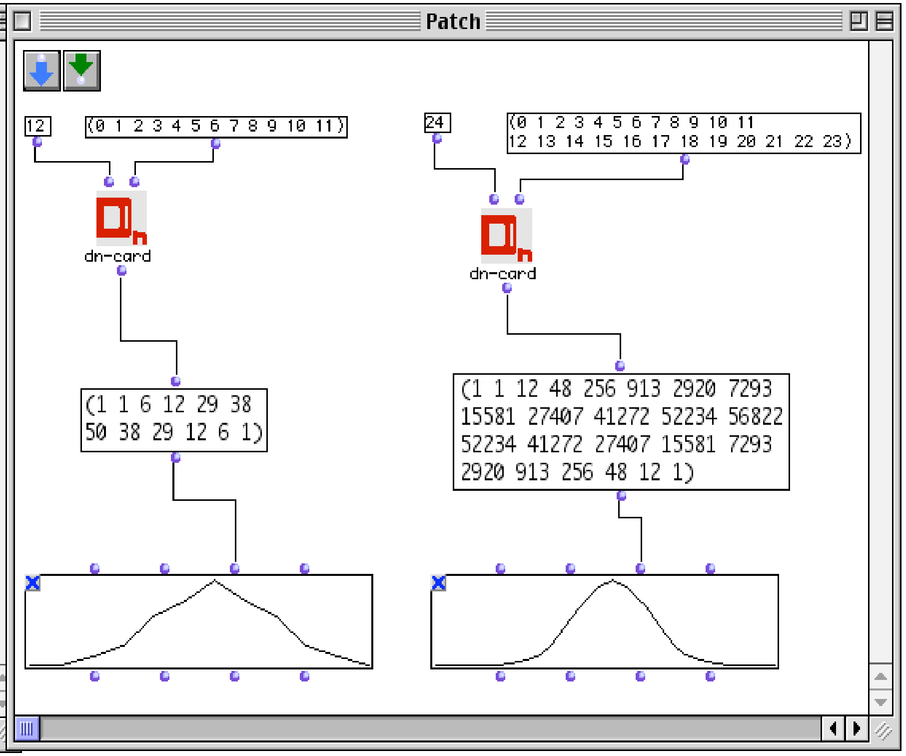


La multiplication M7 (resp. M5) transforme le cercle chromatique dans le cercle des quintes (resp. quartes)

Aspects computationnels

*Enumération d'orbites dans un espace tempéré **Z/nZ** et catalogues musicaux*



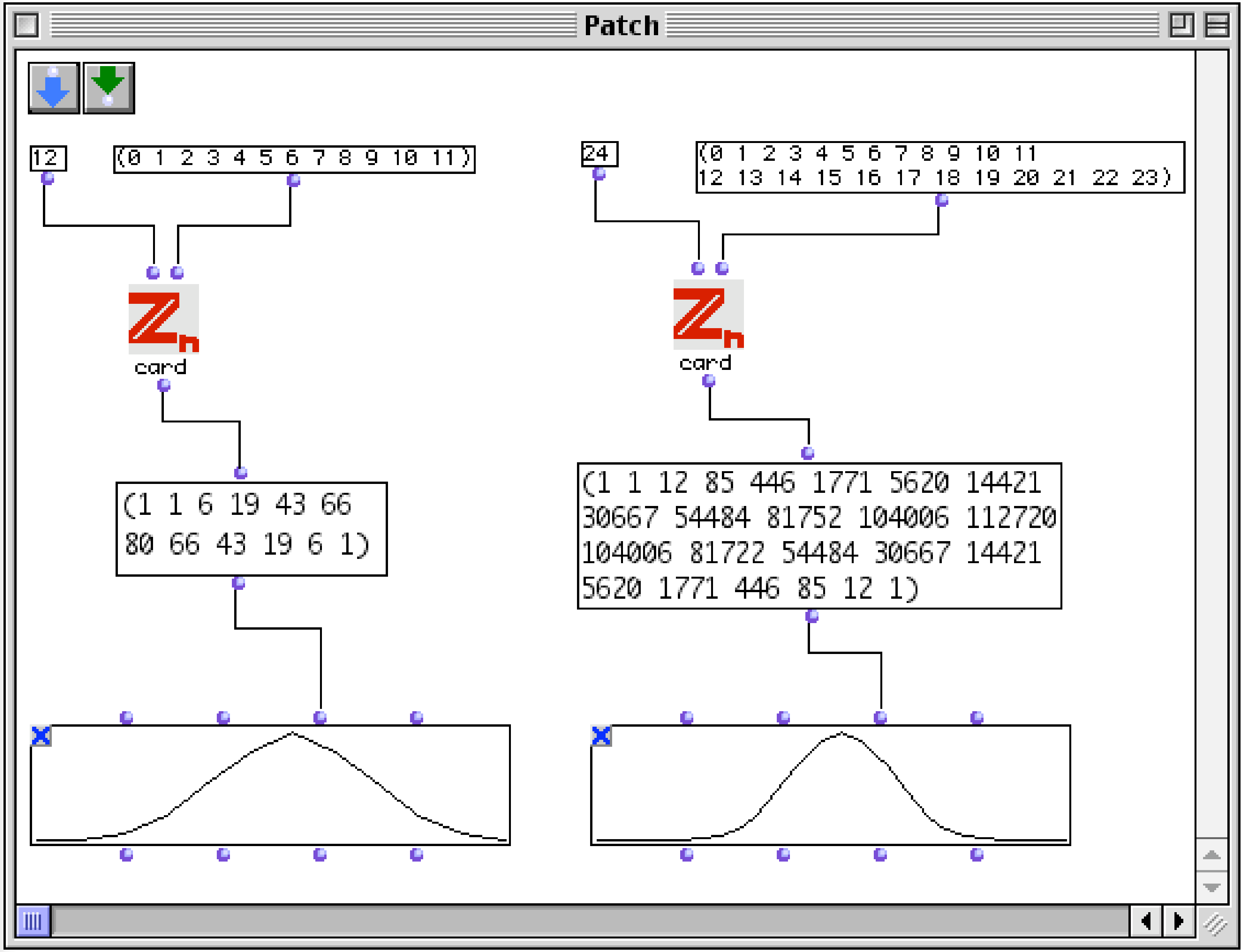


*Enumération des classes de transposition dans un espace tempéré **Z/nZ***

Enumération des 'Pitch-class sets' (Forte) *dans un espace tempéré **Z/nZ***

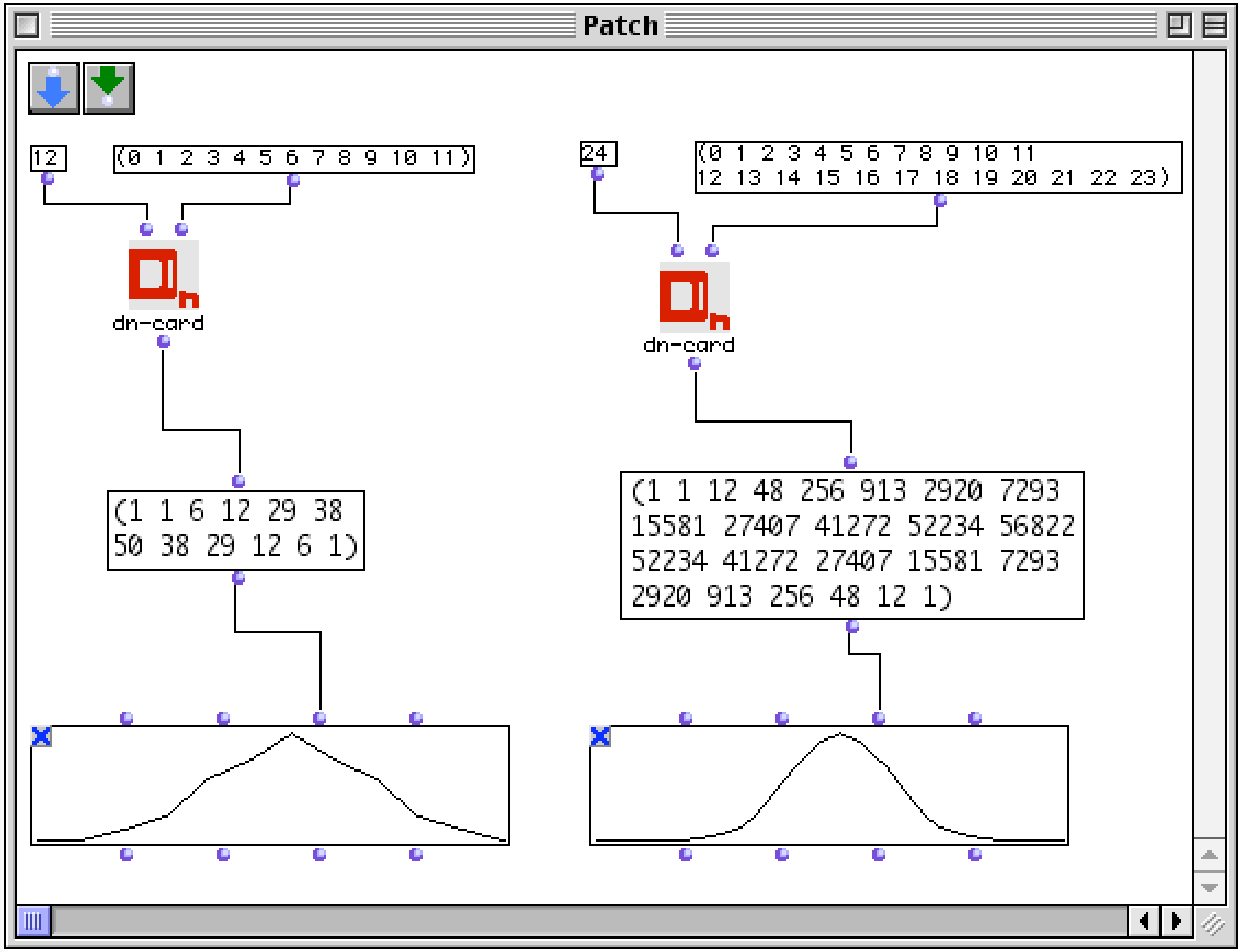
Aspects computationnels

Enumeration des classes de transposition d'accords



Aspects computationnels

Enumeration de classes de transposition et inversion d'accords (pcsets)

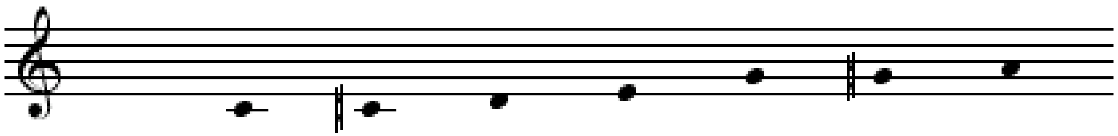


=> *OpenMusic*

Combinatoire et systématique modale

A propos d'une question posée par G. Benjamin

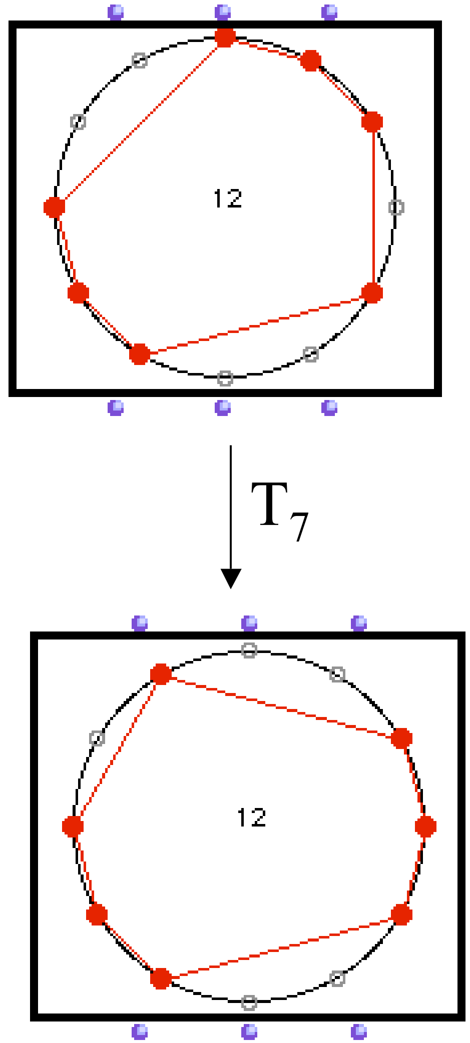
La gamme :



est-elle unique ?

Trouver les gammes heptatoniques qui conservent :

1) 4 notes une fois inversées
2) 5 notes une fois transposées d'une quinte
3) 5 notes une fois que leur inversion est transposée d'une quarte



=> OpenMusic

Babbitt : *The function of Set Structure in the Twelve-Tone System*, PhD 1946/1992

Xenakis : *Musiques formelles*, 1963

La structure de groupe en musique

Vieru : *Eléments d 'une théorie générale des modes*,1967 (*Livre des modes*, 1980)

Vers un modèle de la pensée intervallique chez A. Vieru

*« …The modes, no matter which they may be, start from a common background of the musical human hearing; **anywhere** and **any time**, our hearing on the basis of an inborn sensibility and logics […] performs in the field of musical scales certain modal operations. […] These intuitive or technical operations are of the nature called in mathematics the **theory of sets** ».*

A. Vieru: « Modes, elements of a general theory of modes », 1967

« Nous appelons mode tout ensemble de classes de résidus »

A. Vieru : *Le livre des* modes, 1980

« […] si les échelles ont vraiment un statut ensembliste, où sont les intervalles ? Quel est leur statut ? »

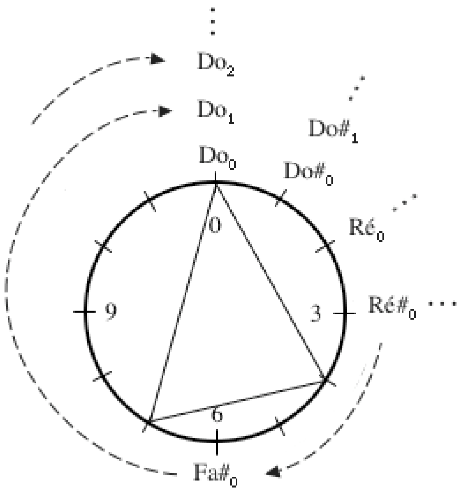
A. Vieru : « Nature et culture dans la perception musicale »,1998.

« …l'une des questions les plus spécifiques, délicates et mystérieuses de la musique : la dualité sons/intervalles »

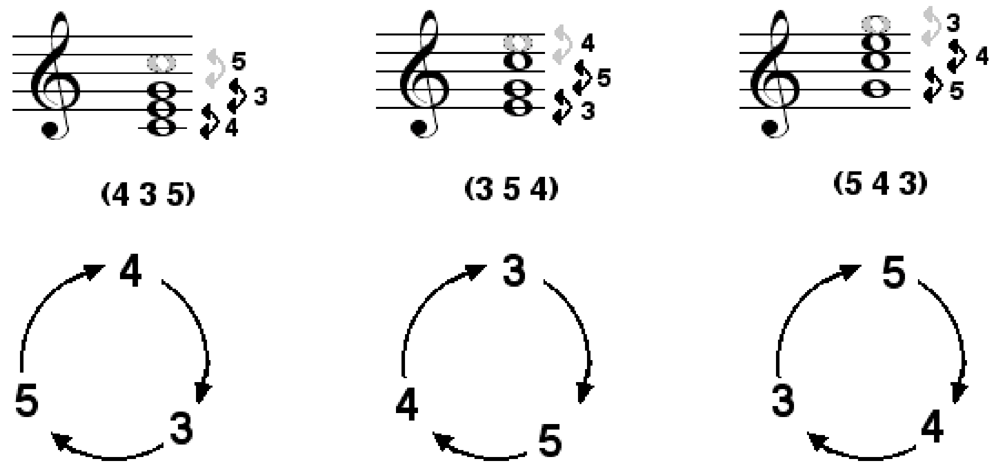
A. Vieru : « Une théorie musicale pour la période postmoderne », 1994.

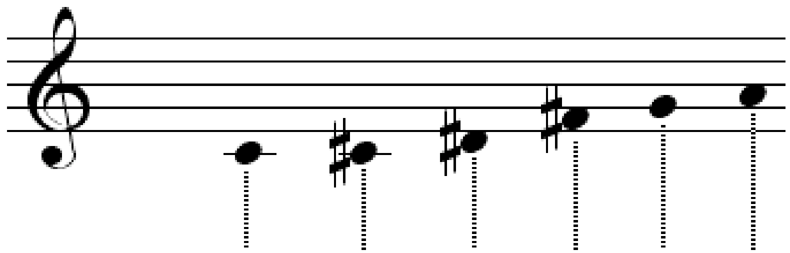
La dualité son/intervalles

La « structure intervallique » et l'opération de « composition »



(4,3,5)





(1 2 3 1 2 3)•{0} = {0, 1, 3, 6, 7, 9}

$(6\ 6)\bullet\{0, 1, 3\}=$

$=((6\ 6)\bullet\{0\})\cup((6\ 6)\bullet\{1\})\cup((6\ 6)\bullet\{3\})=$

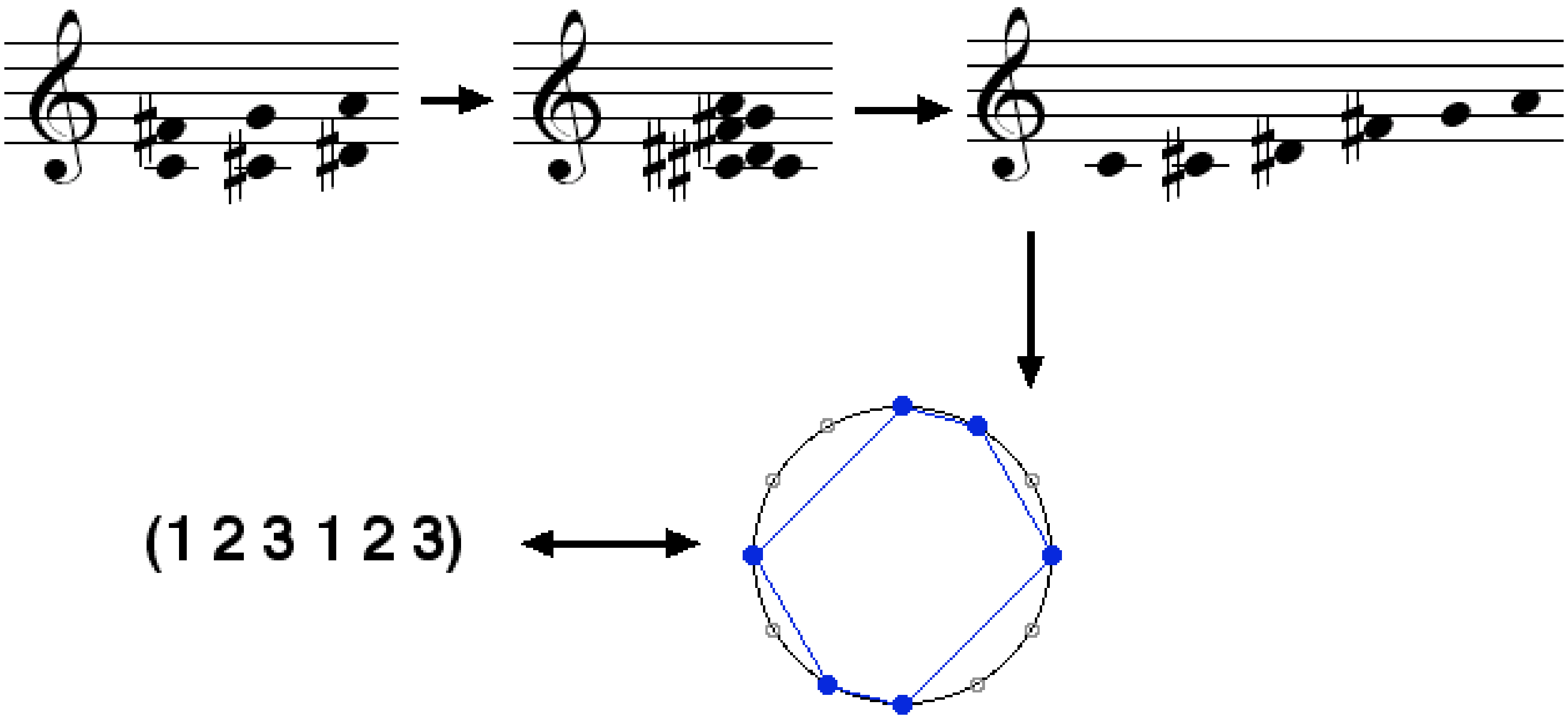
$=\{0,6\}\cup\{1,7\}\cup\{3,9\}=$

$=\{0,1,3,6,7,9\}.$

$\boxed{6_0 \cup 6_1 \cup 6_3}$

crible

« • » et la « multiplications d'accords » (Boulez) (ou *Transpositional Combination*, Richard Cohn)



Composition de deux structures intervalliques

(6 6) • (1 2 9) = ?

La composition de deux structure intervalliques

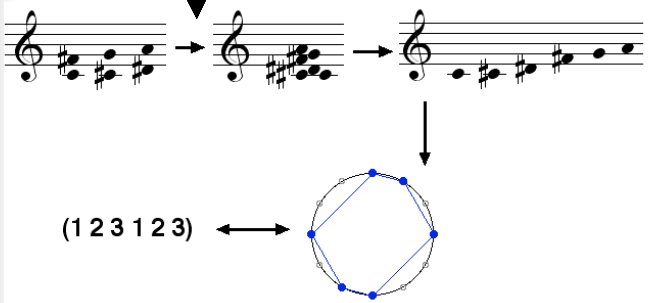
(6 6) • (1 2 9) = **?**

(6 6) • {0, 1, 3} =

…

= {0,1,3,6,7,9}

(1 2 3 1 2 3)

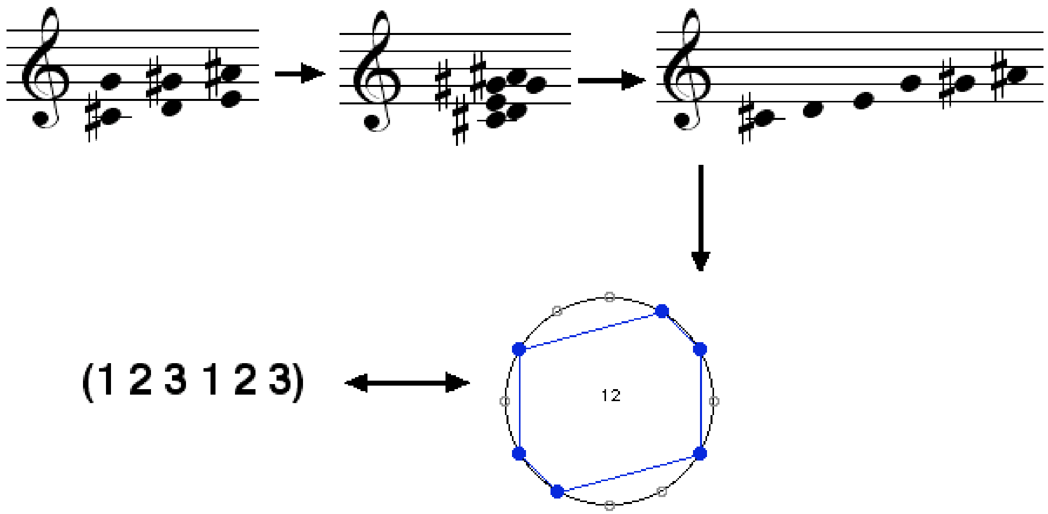


(6 6) • {1, 2, 4} =

={1,7}∪{2,8}∪{4,10}=

={1,2,4,7,8,10}

(1 2 3 1 2 3)



Elle est bien définie !

Quelques applications de l'opération « • »

- Construction des modes (généralisés) de Messiaen
- Construction des canons rythmiques

$(6\ 6) \bullet \{0, 1, 3\} = \ldots = \{0, 1, 3, 6, 7\ 9\}$ → $(1\ 2\ 3\ 1\ 2\ 3)$

$(6\ 6) \bullet \{0, 1\} = \ldots = \{0, 1, 6, 7\}$ → $(1\ 5\ 1\ 5)$

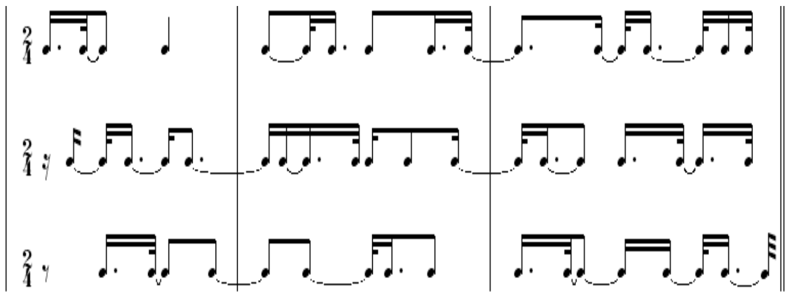
$(6\ 6) \bullet \{\ a, b, c, \ldots\}$ → Mode de Messiaen

$A_1=(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$	↔	*Totale chromatique*
$A_2=(2,2,2,2,2,2)$		*Gamme par tons*
$A_3=(3,3,3,3)$		*Accorde diminué*
$A_4=(4,4,4)$		*Accorde augmentée*
$A_6=(6, 6)$		*Triton*
$A_7=(0)$		*« Classe de hauteur »*

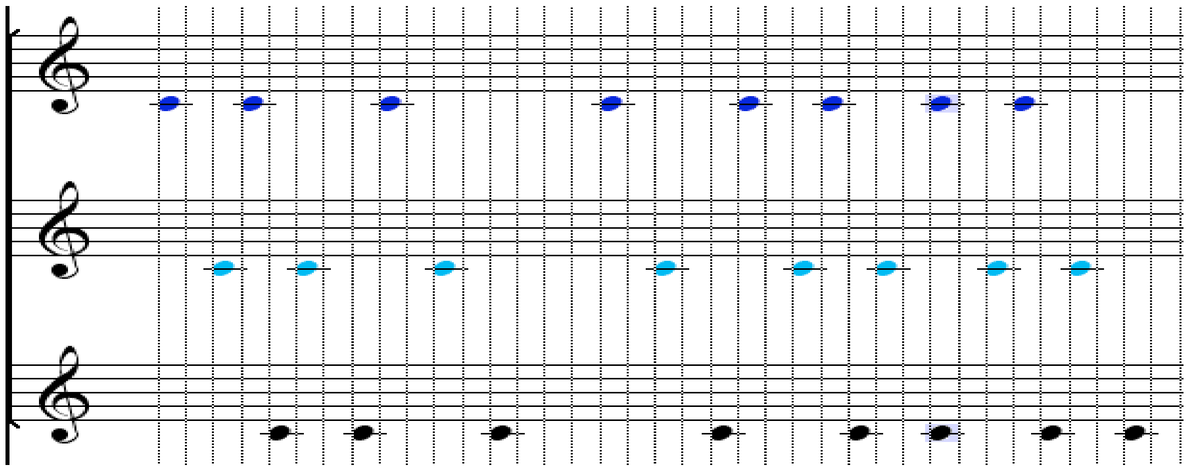
=> *OpenMusic*

The construction of rhythmic (tiling) canons

Harawi (1945)



Visions de l'Amen (1943)



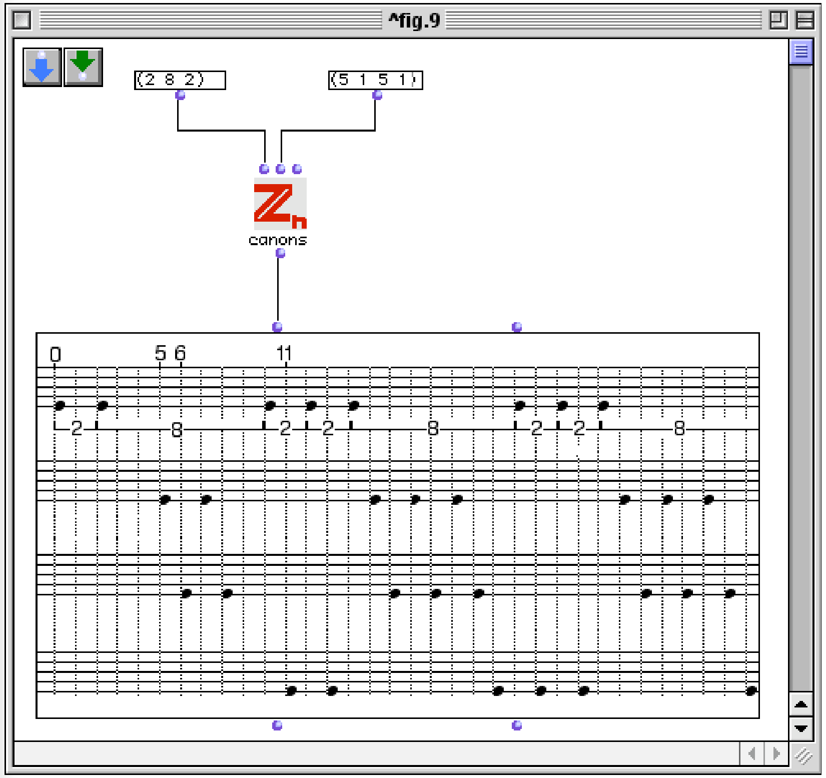
Rhythmic model

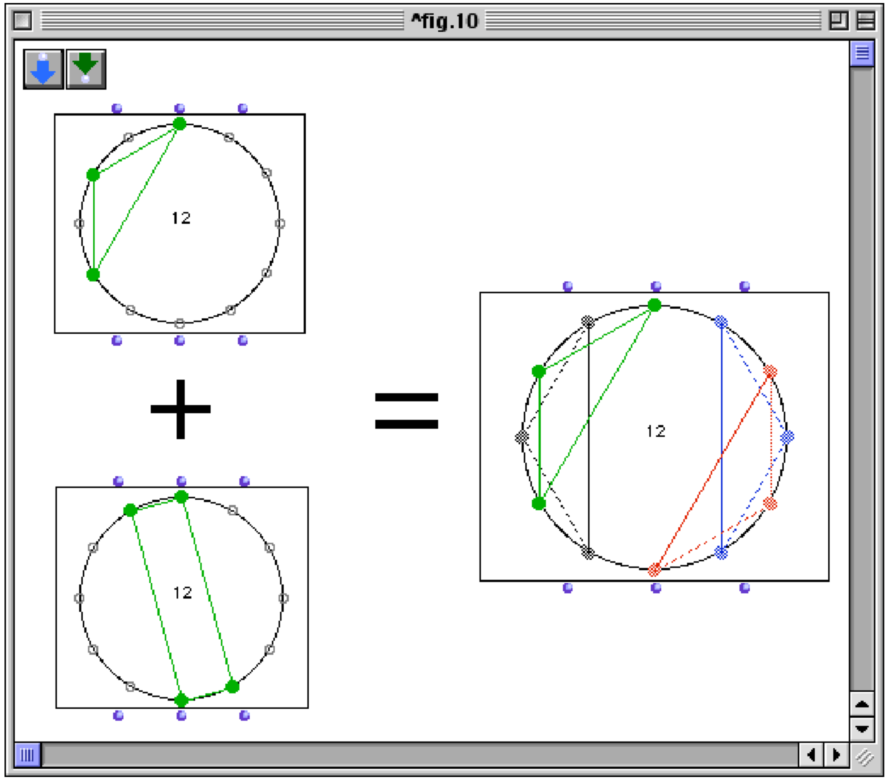
« …il résulte de tout cela que les différentes sonorités se mélangent ou s'opposent de manières très diverses, **jamais au même moment ni au même endroit […]. C'est du désordre organisé** »

O. Messiaen : *Traité de Rythme, de Couleur et d'Ornithologie,* tome 2, Alphonse Leduc, Editions Musicales, Paris, 1992.

=> *OpenMusic*

Canons as Composition between modal structures





$$(2\ 8\ 2)\bullet(5\ 1\ 5\ 1) = \mathbf{Z/12Z} = \{0,8,10\}+\{0,5,6,11\}$$

Transposition limited mode

Nombres remarquables en mathématiques

F. Le Lionnais, *Les nombres remarquables*, Hermann, 1983

Soit G un groupe cyclique et S, T deux sous-ensembles de G dont il est la somme directe […]. Une telle décomposition $G=S+T$ peut être faite si S est un sous-groupe de G (s'il en existe $\neq \{0\}$ et G) et si T contient un représentant de chaque classe de G/S. Mais il en existe d'autres telles que ni S ni T ne sont des sous-groupes. […] 72 est le plus petit nombre positif tel que le groupe cyclique correspondant se décompose sous la forme $S+T$ avec S et T non périodiques. On peut prendre

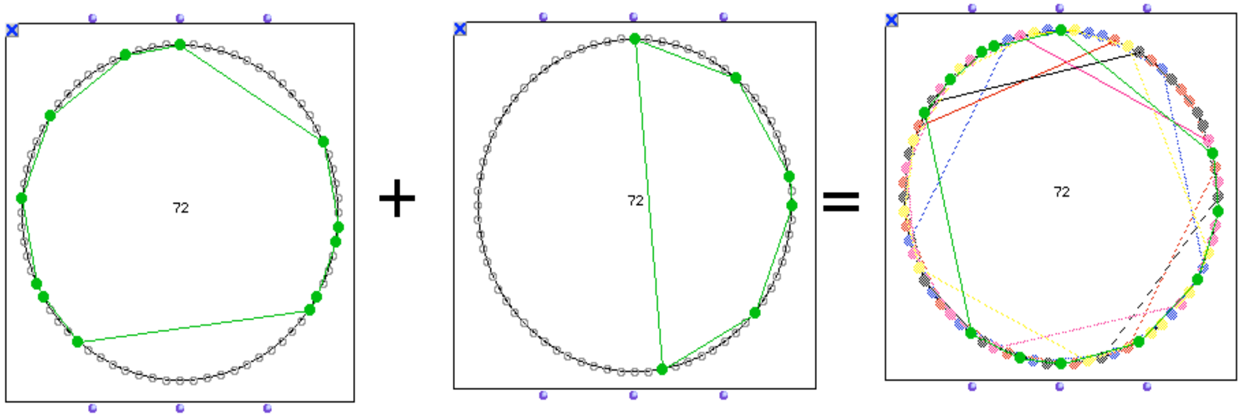
$S = (0, 8, 16, 18, 26, 34)$

$T = (0, 1, 5, 6, 12, 25, 29, 36, 42, 48, 49, 53)$

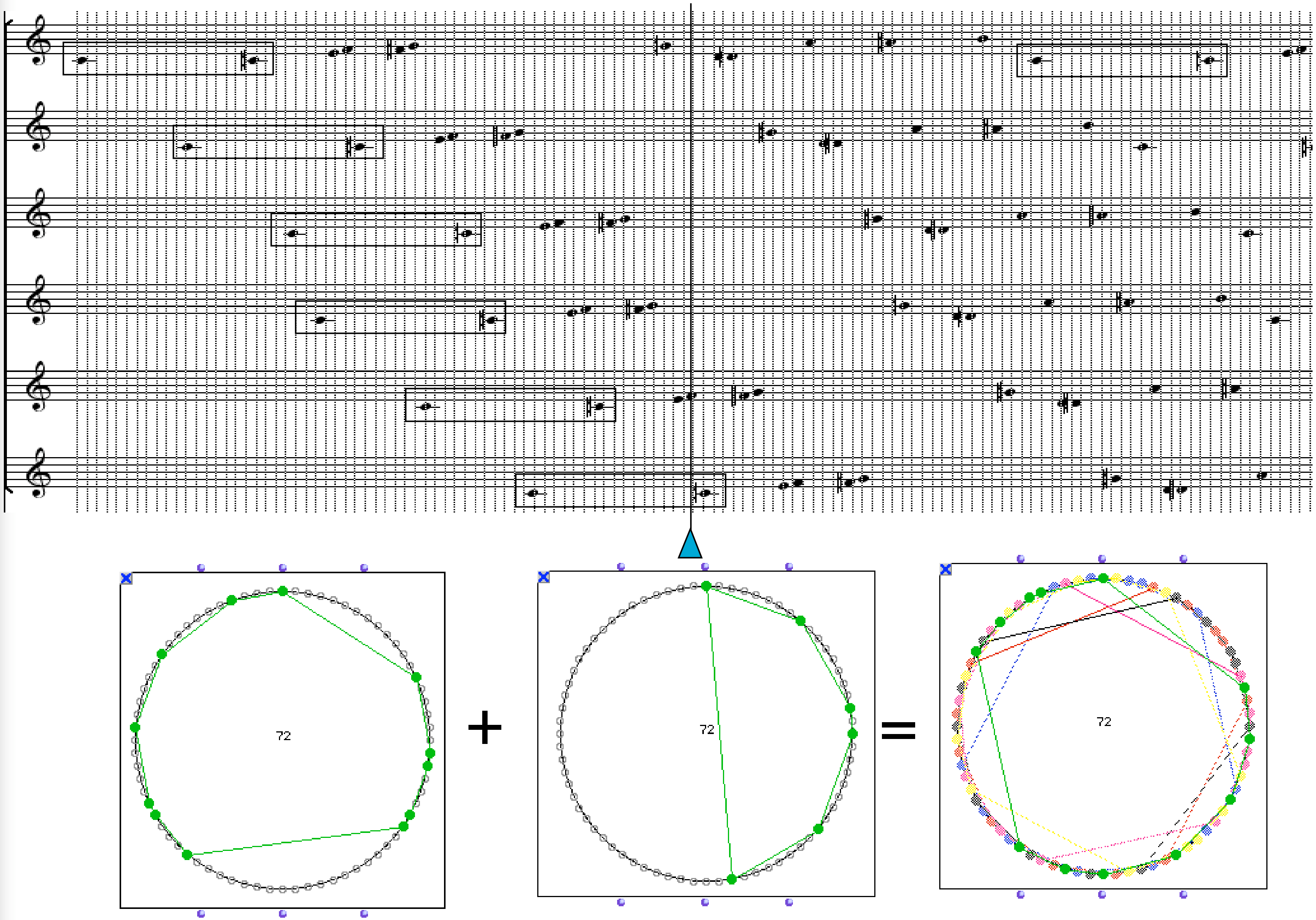
Groupes non-Hajos

72
108 120 144 168 180
200 216 240 252 264 270 280 288
300 312 324 336 360 378 392 396
400 408 432 440 450 456 468 480
500 504 520 528 540 552 560 576 588 594
600 612 616 624 648 672 675 680 684 696
700 702 720 728 744 750 756 760 784 792
800 810 816 828 864 880 882 888…

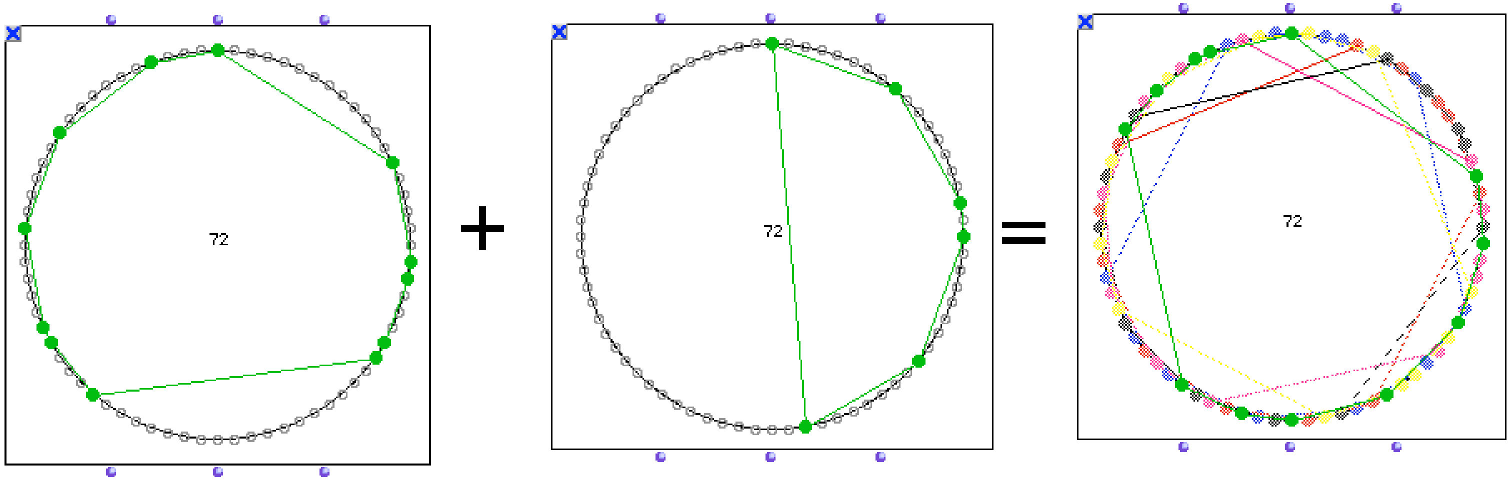
L. Fuchs, *Abelian Groups*, 1960



Hauteurs/Rythmes : les canons rythmiques de pavage



Vers une classification des canons RCCM

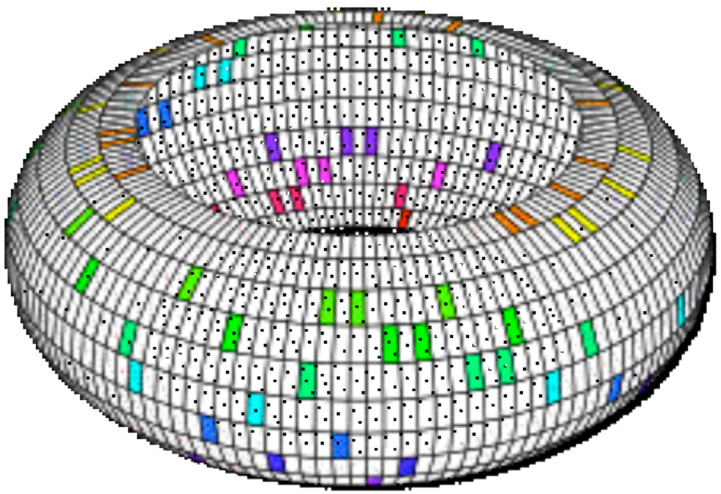


R

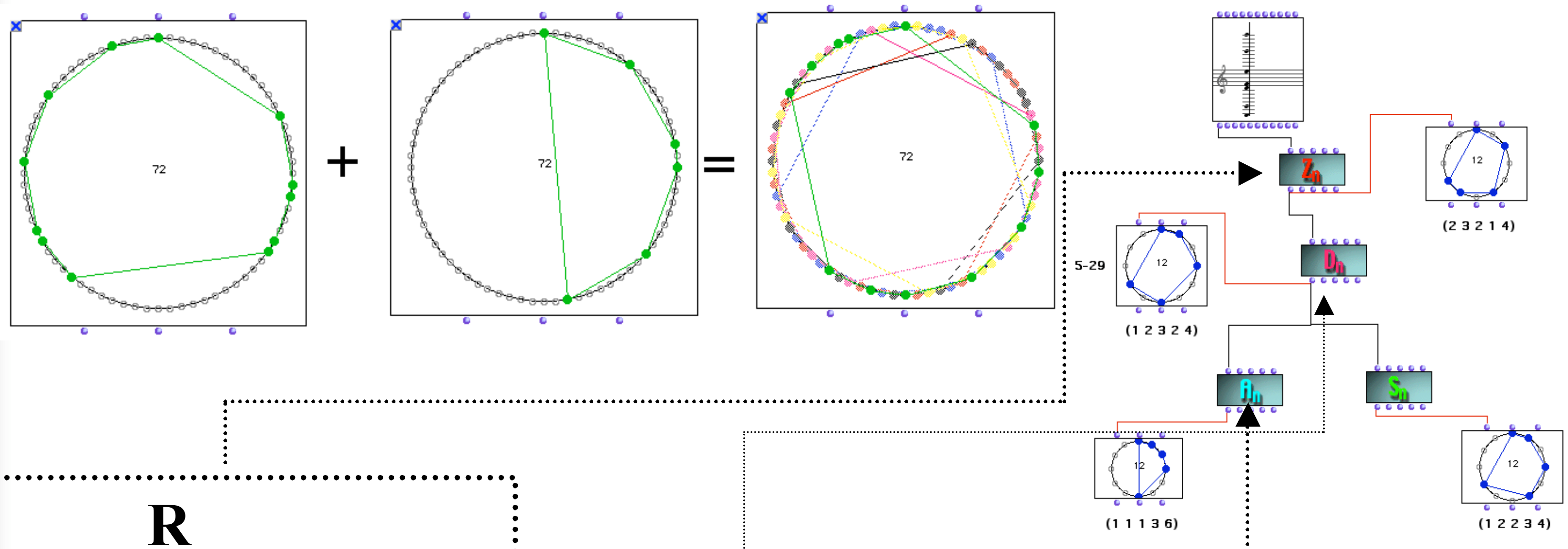
(1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)
(20 3 1 5 6 9 4 11 6 3 3 1)
(1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6)
(6 13 4 7 6 6 1 4 19 1 4 1)
(1 5 15 4 5 6 6 3 4 17 3 3)
(3 3 17 4 3 6 6 5 4 15 5 1)

S

(8 8 2 8 8 38)
(16 2 14 2 16 22)
(14 8 10 8 14 18)



Vers une classification (paradigmatique)des canons RCCM



R

(1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)
(20 3 1 5 6 9 4 11 6 3 3 1)
(1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6)
(6 13 4 7 6 6 1 4 19 1 4 1)
(1 5 15 4 5 6 6 3 4 17 3 3)
(3 3 17 4 3 6 6 5 4 15 5 1)

(8 8 2 8 8 38)
(16 2 14 2 16 22)
(14 8 10 8 14 18)

S

R

(1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)
(1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6)
(1 5 15 4 5 6 6 3 4 17 3 3)

(8 8 2 8 8 38)
(16 2 14 2 16 22)
(14 8 10 8 14 18)

S

=> *OpenMusic*

R

(1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)

(14 8 10 8 14 18)

S

Georges Bloch (2001-2004)

Stratégies compositionnelles nouvelles à partir du modèle formel

- Organisation métrique d’un canon de pavage
- Réduction d’un canon de pavage en canons auto-similaires
- Modulation métrique entre canons
- *Transformation* d’un canon rythmique en « texture »

- *Projet Beyeler* (2001)
- *Projet Hitchcock*
- *Visite des tours de la cathédrale de Reims*
- *Noël des Chasseurs*
- *Canons à marcher*
- *Canon à eau*
- *Harawun* (2004)

Harawun: L’entrée d’un canon RCCM modélisé sur *Harawi*

Georges Bloch (2001-2004)

Stratégies compositionnelles nouvelles à partir du modèle formel

Canon Final : transformation d'un canon rythmique en « texture »

La dualité son/intervalles

Séquences périodiques et différences finies

$Df(x)=f(x)-f(x-1).$

f = 7 11 10 11 7 2 7 11 10 11 7 2 7 11…

\ / \ /

Df = 4 11 1 8 7 5 4 11 1 8 7 5 4 11…

\ /

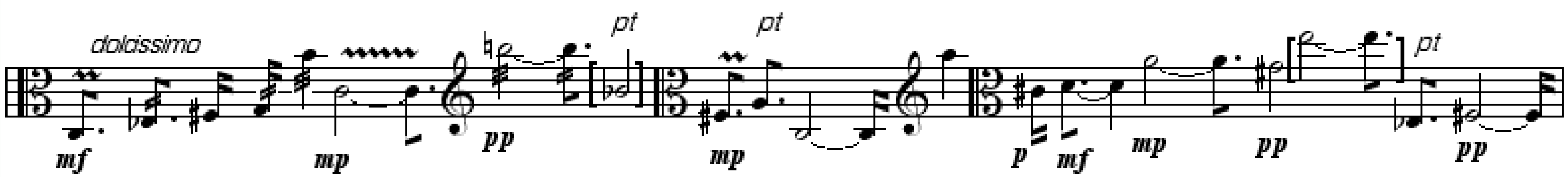
$D^2 f$ = 11 7 2 7 11 0 11 7 2 7 11 0…

\ /

$D^3 f$ = 1 8 7 5 4 11 1 8 7 5 4 11…

\ /

$D^k f$ = ……



V	0	3	8	7	11	0	11	10	6	9	0	9	1	2	9	8	4	3	6
VIII	0	0	0	0	3	3	7	2	0	0	0	6	3	3	3	4	8	0	0
IV	3	3	4	4	1	11	11	8	3	3	9	4	1	7	11	8	11	3	9
IX	0	0	0	0	0	3	6	[1]	3	3	3	3	9	0	3	6	[10]	6	6
IV	0	10	3	9	10	0	9	7	0	6	7	9	6	4	9	3	4	6	3

Zone d'oubli pour alto (1973)

Actualité de la démarche algébrique

Séquences périodiques et résultats 'structuraux'

f = 11 6 7 2 3 10 11 6 …

Df = 7 1 7 1 7 1 7 1…

$D^2 f$ = 6 6 6 6 6…

$D^3 f$ = 0 0 0…

$Df(x)=f(x)-f(x-1)$.

Séquences reductibles :
$\exists\ k\geq 1$ t.q. $D^k f = 0$

f = 7 11 10 11 7 2 7 11 …

Df = 4 11 1 8 7 5 4 11 …

$D^2 f$ = 11 7 2 7 11 0 11 7 …

$D^3 f$ = 1 8 7 5 4 11 1 8 …

$D^4 f$ = 7 11 10 11 7 2 7 11 …

Séquences reproductibles :
$\exists\ k\geq 1$ s.t. $D^k f = f$

Théorème de décomposition: Toute suite périodique à valeurs dans un groupe cyclique **Z/nZ** est décomposable (de façon unique) en une somme d'une suite réductible et d'une suite reproductible (Vuza/Andreatta, 2001)

Babbitt : *The function of Set Structure in the Twelve-Tone System*, PhD 1946/1992

La structure de groupe en musique

Vieru : *Eléments d 'une théorie générale des modes*,1967

Xenakis : *Musiques formelles*, 1963
(*Formalized Music*, 1971. Revised: 1992)

Axiomatique et théorie des groupes en musique

*« La musique peut […] être définie comme une organisation d'**opération**s et de **relation**s élémentaires entre des êtres ou entre des fonctions d'êtres sonores. Nous comprenons la place de choix qui revient à la **théorie des ensembles**, non seulement pour la **construction** d'œuvres nouvelles, mais aussi pour l'**analyse** et la meilleure compréhension des œuvres du passé. Ainsi, même une construction stochastique ou une investigation de l'histoire à l'aide de la stochastique ne peuvent être exploitées sans l'aide de la reine des sciences et même des arts, dirais-je, qu'est la logique ou sa forme mathématique l'**algèbre** »*

I. Xenakis : « La musique stochastique : éléments sur les procédés probabilistes de composition musicale » 1961.

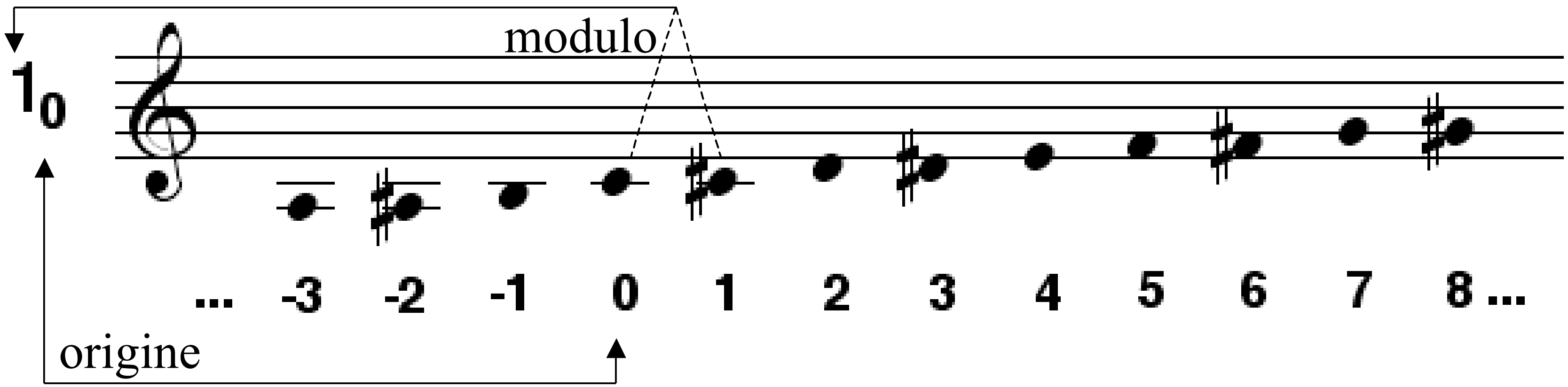
*« La **formalisation** et l'**axiomatisation** constituent en réalité un guide processionnel plus adapté à la pensée moderne en général. Elle permet de placer d'emblée sur un terrain plus **universel** l'art des sons… »*

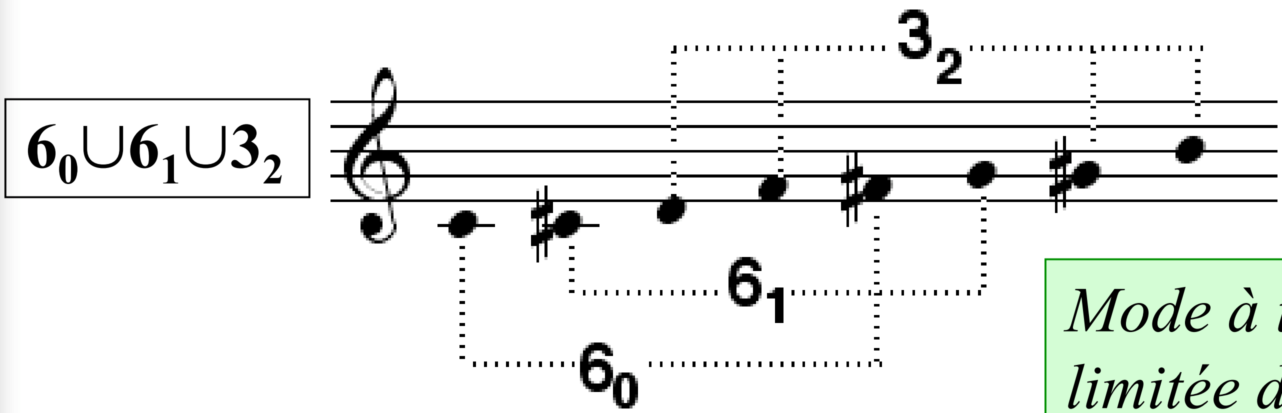
I. Xenakis : *Musiques formelles*, 1963

*« Aujourd'hui, on peut affirmer qu'avec les vingt-cinq siècles d'évolution musicale, on aboutit à une **formulation universelle** en ce qui concerne la **perception** des hauteurs, qui est la suivante: l'ensemble des intervalles mélodiques est muni d'une structure de **groupe** avec comme loi de composition l'addition »*

I. Xenakis : « La voie de la recherche et de la question », 1965

Théorie des cribles: algèbre et structures ordonnées





Mode à transposition limitée de Messiaen

- Gammes traditionnelles (diatoniques, Modes de Messiaen, …)
- Gammes micro-tonales et non octaviantes (*Nomos Alpha*, …)
- Cribles comme généralisation de rythmes (*Psappha*, …)
- Cribles comme outil de modélisation des partitions (Riotte&Mesnage)

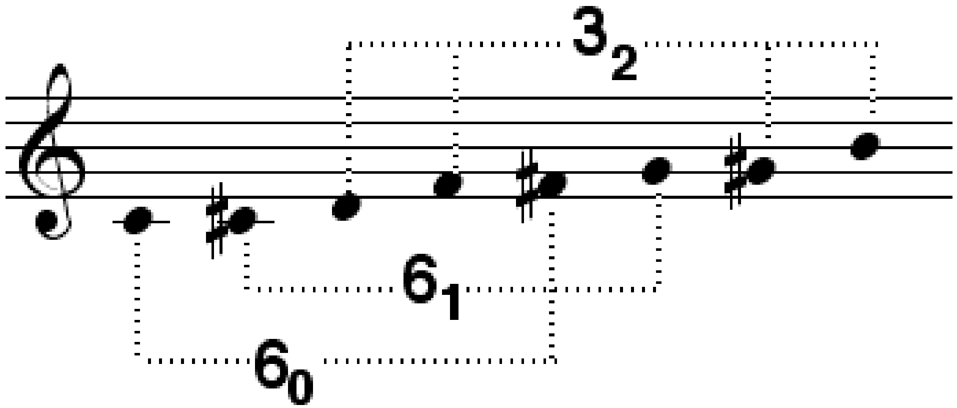
(6_0) (2_0) $6_0 \cup 6_1$ $6_0 \cup 6_1 \cup 6_5$ $4_0 \cup 4_2 \cup 4_3$ $3_0 \cup 3_1$

Cribles / Messiaen

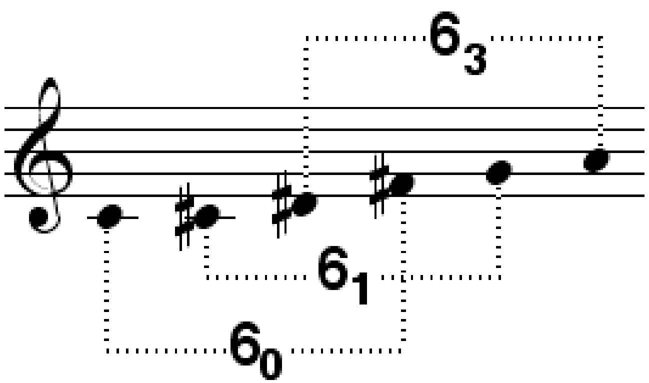
(1_0) (3_0) (4_0) $6_0 \cup 6_1 \cup 3_2$

$6_0 \cup 6_2$ $2_0 \cup 6_5$ $2_1 \cup 6_0 \cup 6_2$

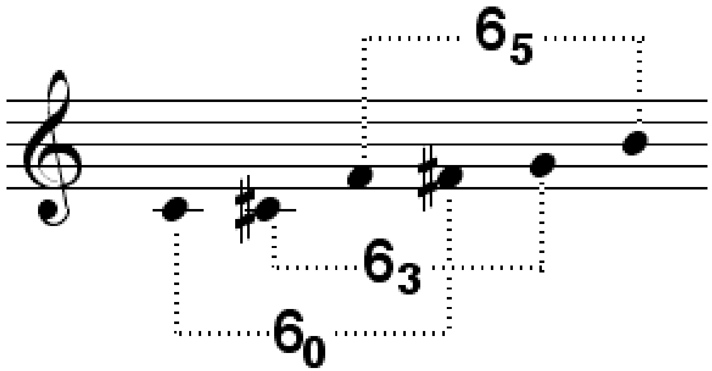
$4_0 \cup 4_1$



Trois modes ‘oubliés’



$6_0 \cup 6_1 \cup 6_3$



$6_0 \cup 6_3 \cup 6_5$

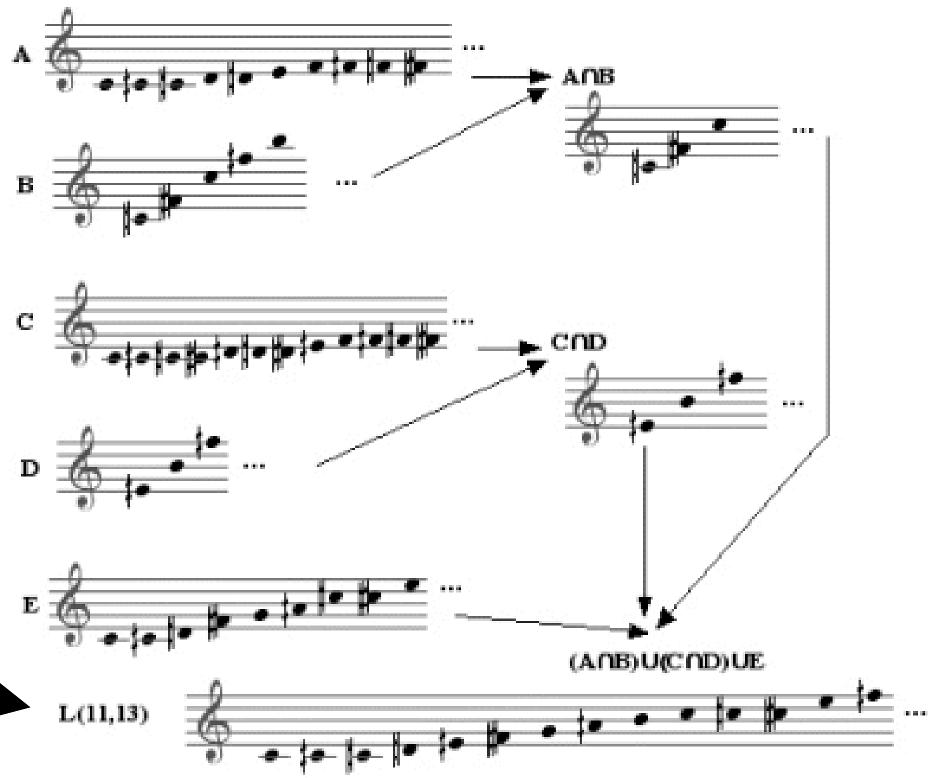
Pitch/Rhythm Isomorphism (Xenakis)

« [With the sieve theory] one can build very complex ***rhythmic architectures*** *which can simulate the stochastic distribution of points on a line if the period is big enough »*
(« Redécouvrir le temps », éditions de l'Université de Bruxelles, 1988)

$A = (\mathbf{13_3} \cup \mathbf{13_5} \cup \mathbf{13_7} \cup \mathbf{13_9})^c$
$B = \mathbf{11_2}$
$C = (\mathbf{11_4} \cup \mathbf{11_8})^c$
$D = \mathbf{13_9}$
$E = \mathbf{13_0} \cup \mathbf{13_1} \cup \mathbf{13_6}$

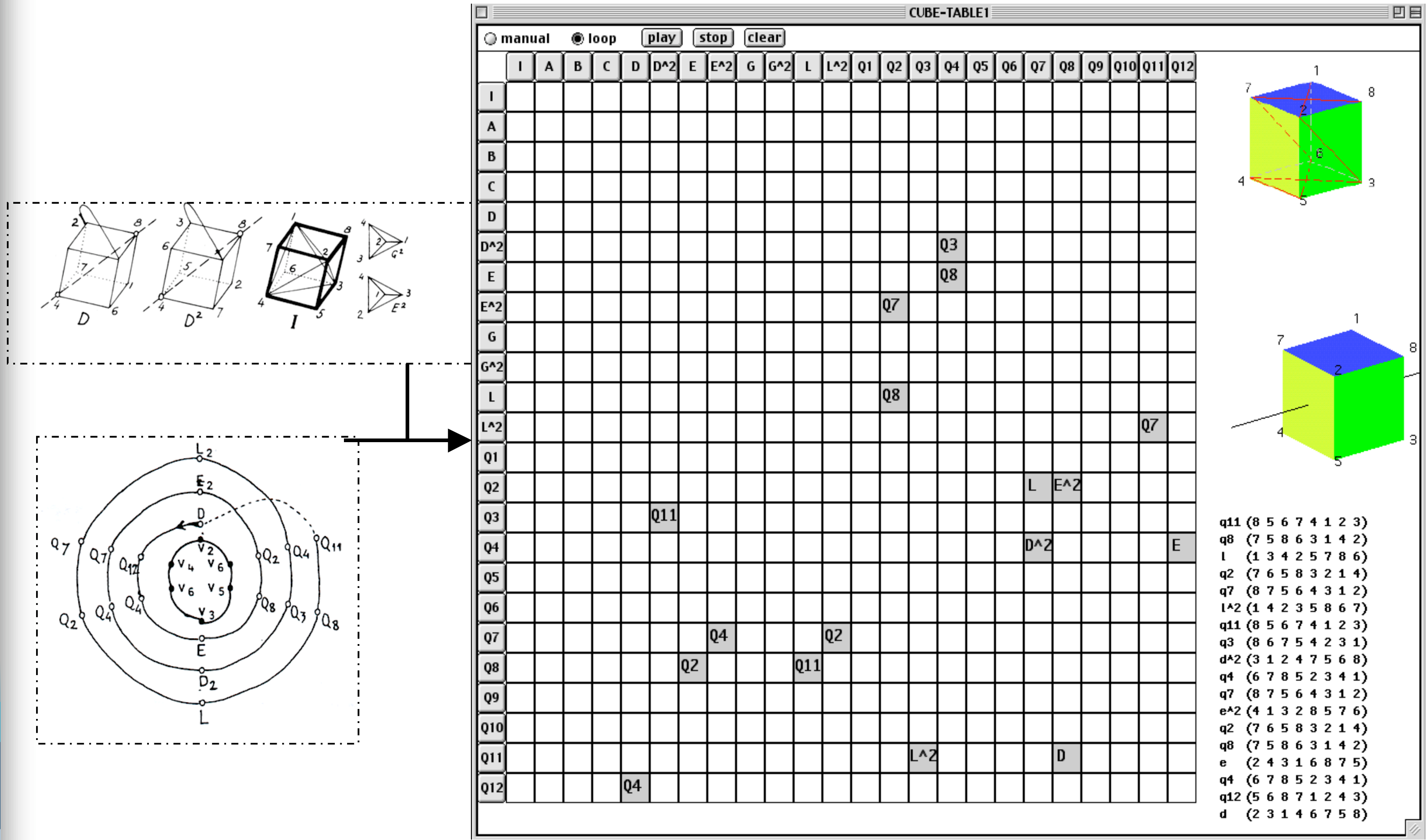
(*Nomos Alpha*, 1966)

(A∩B)∪(C∩D)∪E



1 1 4 3 4 1 5 3 2 2 1 5 3 4 1 5 7 1 5 3 4 1 5 7 1 5 3 3 1 1 5 3 1 3 1 5 2 1 4 1…

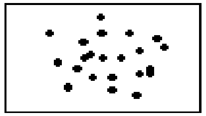
Nomos Alpha (1966)

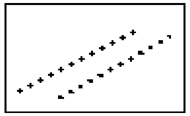


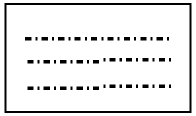
*« Musique **symbolique** pour violoncelle seul, possède une architecture « hors-temps » fondée sur la théorie des groupes de transformations. Il y fait usage de la théorie des cribles, théorie qui annexe les congruence modulo n et qui est issue d'une **axiomatique** de la structure **universelle** de la musique »*

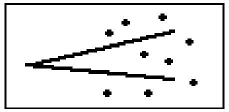
Nomos Alpha : implémentation en OM

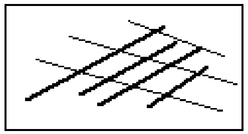
Complexes sonores

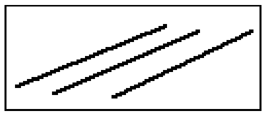
S1  Nuage ataxique de sons pontuels

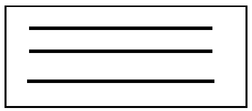
S2  Nuage relativement ordonné, ascendant ou descendant, de sons ponctuels

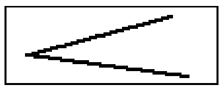
S3  Nuage relativement ordonné, ni ascendant ni descendant de sons ponctuels

S4  Atome ionisé, représenté au violoncelle par des interferences d'un quasi-unisson accompagnés de pizzicati

S5  Champ ataxique de sons glissés

S6  Champ relativement ordonné, ascendant ou descendant, de sons glissés

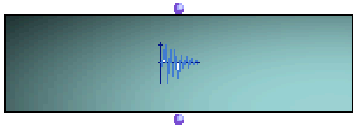
S7  Champ relativement ordonné, ni ascendant ni descendant, de sons glissés

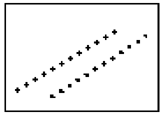
S8  Champ représenté au violoncelle par des interferences d'un quasi-unisson

Nomos Alpha : implémentation en OM

Complexe sonore n. 2
(section Beta)

D S2

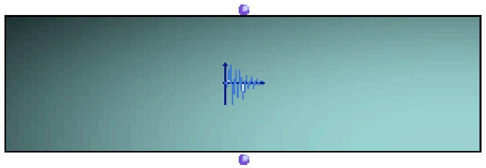




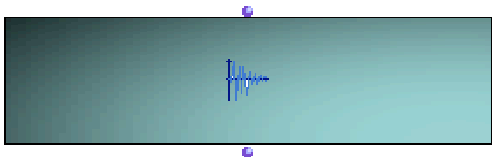
D S2

mes. 1

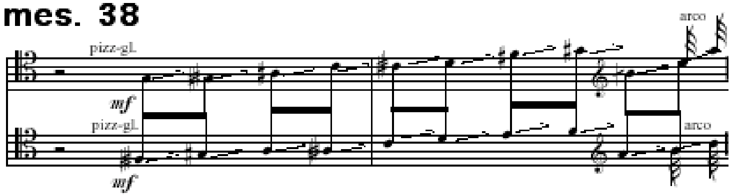
Q12 S2



Q4 S2



mes. 38



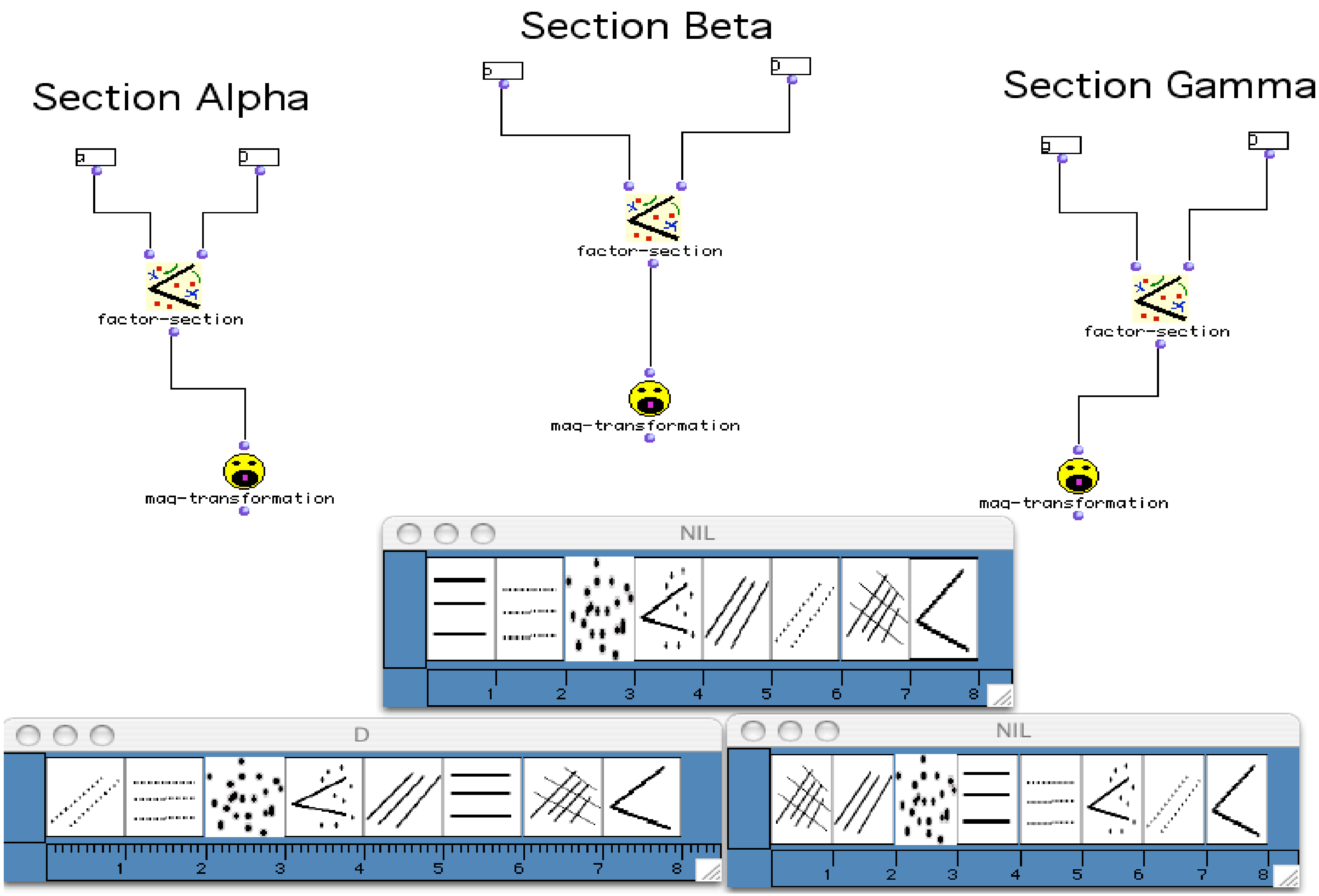
Nuage relativement ordonné, ascendant ou descentend, de sons ponctuels

(Cf. R. Peck: "Toward an interpretation of Nomos Alpha", PNM, 41(1), 106-157, 2003)

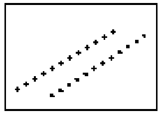
Nomos Alpha : implémentation en OM

Changement de section

(permutation des indices des complexes sonores)



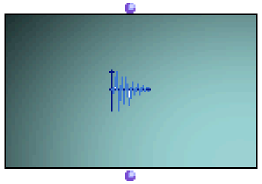
Nomos Alpha : implémentation en OM



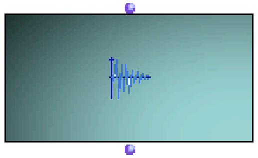
Complexe sonore n. 2

Nuage relativement ordonné, ascendant ou descentend, de sons ponctuels

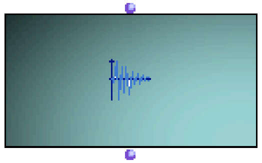
E S5



Q8 S5



Q2 S5



(section Gamma) ===>

$\kappa^{\alpha}_1 = 1 \,.\, \mathit{mf} \,.\, 2 = 2.\mathit{mf}$

$\kappa^{\alpha}_2 = 1 \,.\, \mathit{fff} \,.\, 4.5 = 4.5.\mathit{fff}$

$\kappa^{\alpha}_3 = 2.5 \,.\, \mathit{fff} \,.\, 4.5 = 11.25.\mathit{fff}$

$\kappa^{\alpha}_4 = 2.5 \,.\, \mathit{mf} \,.\, 2 = 5.\mathit{mf}$

$\kappa^{\alpha}_5 = 1.5 \,.\, \mathit{f} \,.\, 2.62 = 3.93.\mathit{f}$

$\kappa^{\alpha}_6 = 1.5 \,.\, \mathit{ff} \,.\, 3.44 = 5.15.\mathit{ff}$

$\kappa^{\alpha}_7 = 2.0 \,.\, \mathit{ff} \,.\, 3.44 = 6.88.\mathit{ff}$

$\kappa^{\alpha}_8 = 2.0 \,.\, \mathit{f} \,.\, 2.62 = 5.24.\mathit{f}$

<=== (section Alpha)

$\kappa^{\beta}_1 = 0.5 \,.\, \mathit{mf} \,.\, 2 = 1.\mathit{mf}$

$\kappa^{\beta}_2 = 0.5 \,.\, \mathit{fff} \,.\, 4.5 = 2.25.\mathit{fff}$

$\kappa^{\beta}_3 = 5 \,.\, \mathit{fff} \,.\, 4.5 = 22.5.\mathit{fff}$

$\kappa^{\beta}_4 = 5.0 \,.\, \mathit{mf} \,.\, 2 = 10.0.\mathit{mf}$

$\kappa^{\beta}_5 = 1.08 \,.\, \mathit{f} \,.\, 2.62 = 2.83.\mathit{f}$

$\kappa^{\beta}_6 = 1.08 \,.\, \mathit{ff} \,.\, 3.44 = 3.72.\mathit{ff}$

$\kappa^{\beta}_7 = 2.32 \,.\, \mathit{ff} \,.\, 3.44 = 7.98.\mathit{ff}$

$\kappa^{\beta}_8 = 2.32 \,.\, \mathit{f} \,.\, 2.62 = 6.08.\mathit{f}$

$\kappa^{\gamma}_1 = 1 \,.\, \mathit{mf} \,.\, 2 = 2.\mathit{mf}$

$\kappa^{\gamma}_2 = 1 \,.\, \mathit{fff} \,.\, 2 = 2.\mathit{fff}$

$\kappa^{\gamma}_3 = 4.0 \,.\, \mathit{fff} \,.\, 4.5 = 18.0.\mathit{fff}$

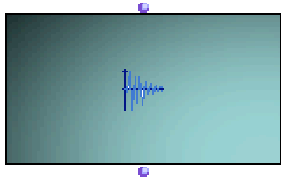
$\kappa^{\gamma}_4 = 4.0 \,.\, \mathit{mf} \,.\, 2.0 = 8.0.\mathit{mf}$

$\kappa^{\gamma}_5 = 2.0 \,.\, \mathit{f} \,.\, 2.62 = 5.24.\mathit{f}$

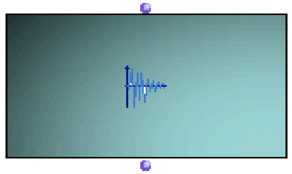
$\kappa^{\gamma}_6 = 2.0 \,.\, \mathit{ff} \,.\, 3.44 = 6.88.\mathit{ff}$

$\kappa^{\gamma}_7 = 3.0 \,.\, \mathit{ff} \,.\, 3.44 = 10.32.\mathit{ff}$

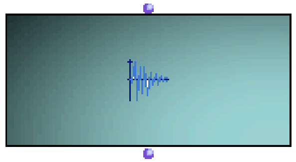
$\kappa^{\gamma}_8 = 3.0 \,.\, \mathit{f} \,.\, 2.62 = 7.86.\mathit{f}$



E^2 S7



Q7 S7



Q4 S7

Nomos Alpha : implémentation en OM

Label	Order of Vertices
I	12345678
A	21436587
B	34127856
C	43218765
D	23146758
D^2	31247568
E	24316875
E^2	41328576
G	32417685
G^2	42138657
L	13425786
L^2	14235867
Q_1	78653421
Q_2	76583214
Q_3	86754231
Q_4	67852341
Q_5	68572413
Q_6	65782134
Q_7	87564312
Q_8	75863142
Q_9	58761432
Q_{10}	57681324
Q_{11}	85674123
Q_{12}	56871243

Structure de la pièce

Beta X1 ---> X2 ---> X3 ---> Intermezzo 1

Gamma ---> X4 ---> X5 ---> X6 ---> Intermezzo 2

Alpha ---> X7 ---> X8 ---> X9 ---> Intermezzo 3

Beta ---> X10 ---> X11 ---> X12 ---> Intermezzo 4

Gamma ---> X13 ---> X14 ---> X15 ---> Intermezzo 5

Alpha ---> X16 ---> X17 ---> X18 ---> Intermezzo 6

(Théorie des cribles)

+

(Théorie des groupes)

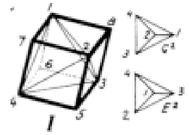
(Théorie des cribles)

Nomos Alpha : implémentation en OM

Label	Order of Vertices
I	12345678
A	21436587
B	34127856
C	43218765
D	23146758
D^2	31247568
E	24316875
E^2	41328576
G	32417685
G^2	42138657
L	13425786
L^2	14235867
Q_1	78653421
Q_2	76583214
Q_3	86754231
Q_4	67852341
Q_5	68572413
Q_6	65782134
Q_7	87564312
Q_8	75863142
Q_9	58761432
Q_{10}	57681324
Q_{11}	85674123
Q_{12}	56871243

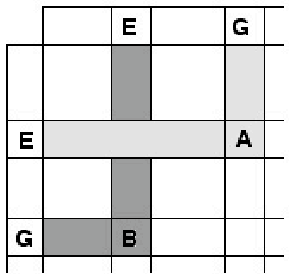
Groupe de rotations du cube dans l'espace

isomorphe au groupe des permutations de 4 éléments S4

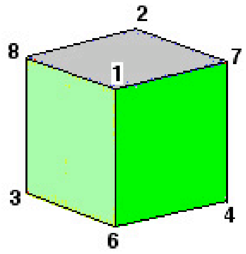
isomorphe au groupe des symétries du tétraèdre 

<===

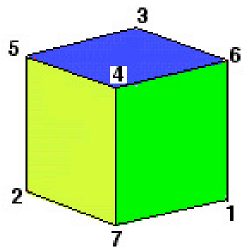
<===

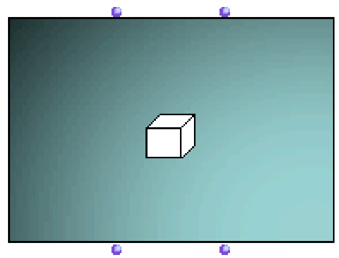


E (G) = A =



G(E) = B =





(24316875)°(32417685)=(21436587)

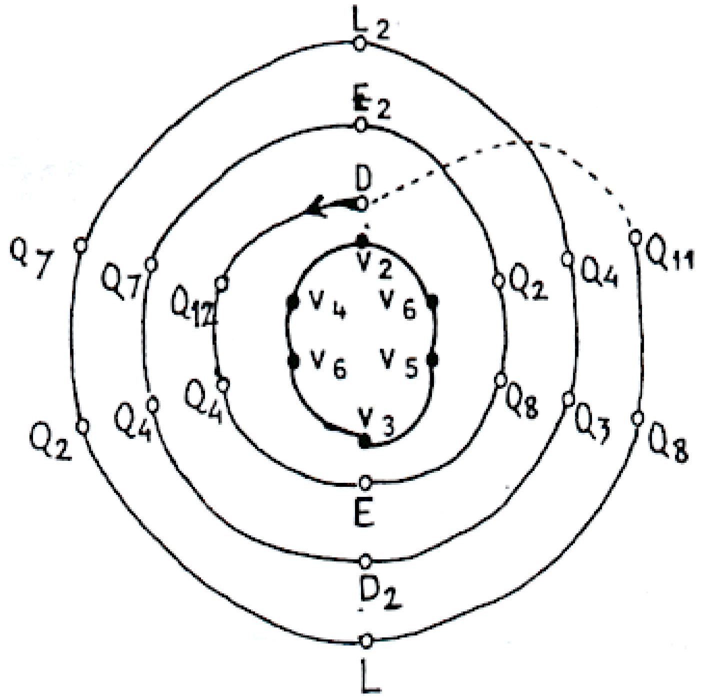
=(12)(34)(56)(78)

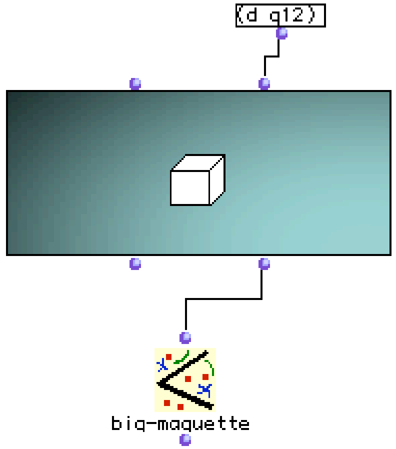
<===>

1-->2
2-->1
3-->4
4-->3
5-->6
6-->5
7-->8
8-->7

Nomos Alpha : implémentation en OM

Processus de Fibonacci généralisé

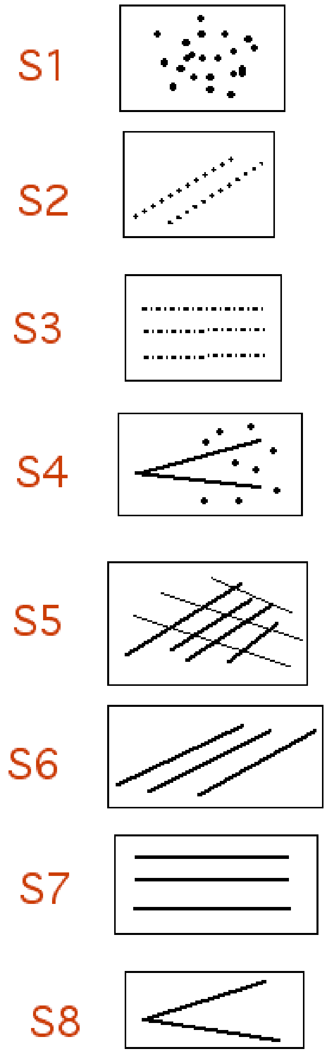


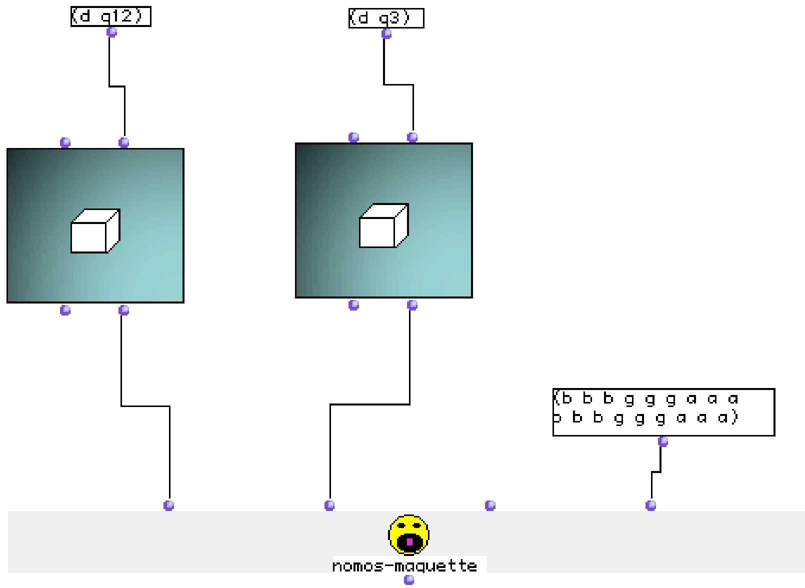


- Caractère cyclique
- Longueur maximale = 18
- Degré maximal = 13

Nomos Alpha : implémentation en OM

Deux processus de Fibonacci en parallèle





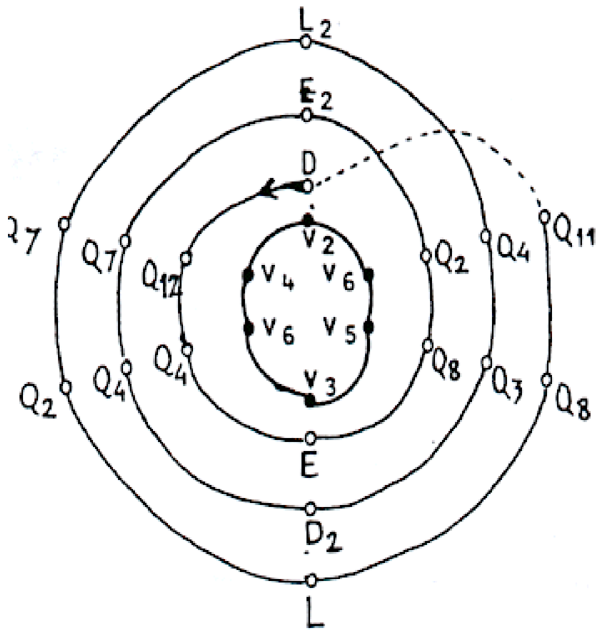
$\kappa^{\alpha}_{1} = 1 \,.\, \mathit{mf} \,.\, 2 = 2\,\mathit{mf}$
$\kappa^{\alpha}_{2} = 1 \,.\, \mathit{fff} \,.\, 4.5 = 4.5\,\mathit{fff}$
$\kappa^{\alpha}_{3} = 2.5 \,.\, \mathit{fff} \,.\, 4.5 = 11.25\,\mathit{fff}$
$\kappa^{\alpha}_{4} = 2.5 \,.\, \mathit{mf} \,.\, 2 = 5\,\mathit{mf}$
$\kappa^{\alpha}_{5} = 1.5 \,.\, f \,.\, 2.62 = 3.93\,f$
$\kappa^{\alpha}_{6} = 1.5 \,.\, \mathit{ff} \,.\, 3.44 = 5.15\,\mathit{ff}$
$\kappa^{\alpha}_{7} = 2.0 \,.\, \mathit{ff} \,.\, 3.44 = 6.88\,\mathit{ff}$
$\kappa^{\alpha}_{8} = 2.0 \,.\, f \,.\, 2.62 = 5.24\,f$

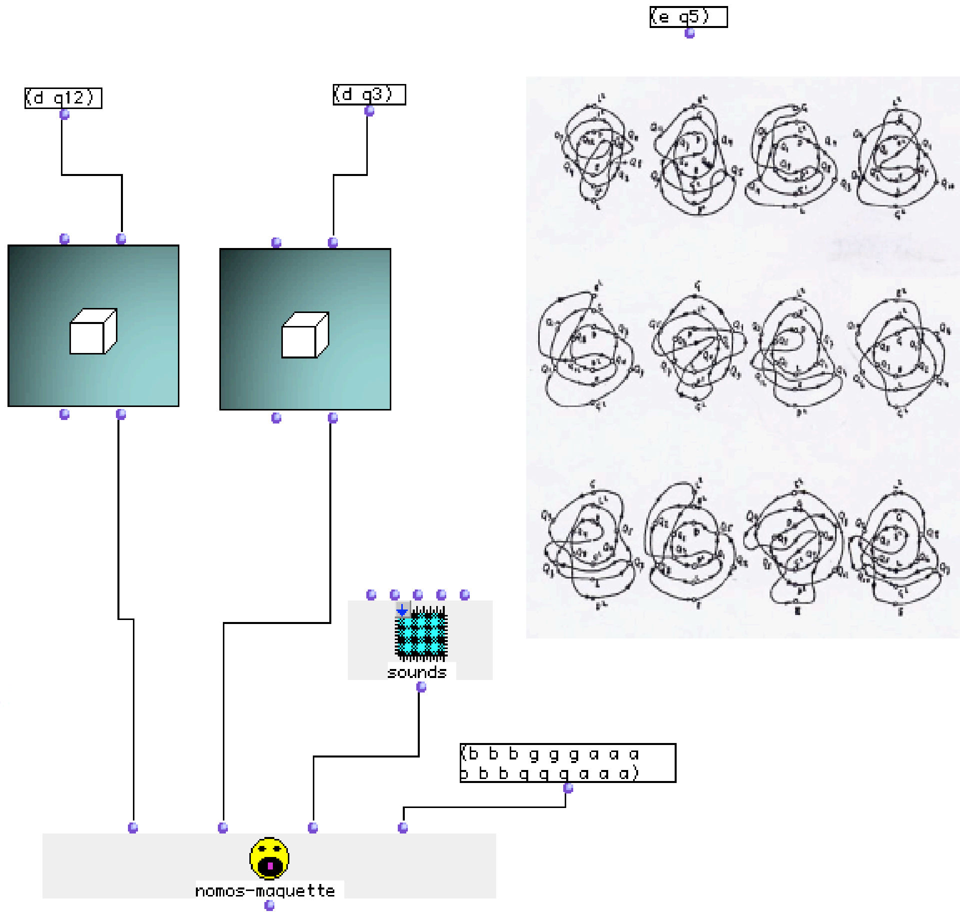
$\kappa^{\beta}_{1} = 0.5 \,.\, \mathit{mf} \,.\, 2 = 1\,\mathit{mf}$
$\kappa^{\beta}_{2} = 0.5 \,.\, \mathit{fff} \,.\, 4.5 = 2.25\,\mathit{fff}$
$\kappa^{\beta}_{3} = 5 \,.\, \mathit{fff} \,.\, 4.5 = 22.5\,\mathit{fff}$
$\kappa^{\beta}_{4} = 5.0 \,.\, \mathit{mf} \,.\, 2 = 10.0\,\mathit{mf}$
$\kappa^{\beta}_{5} = 1.08 \,.\, f \,.\, 2.62 = 2.83\,f$
$\kappa^{\beta}_{6} = 1.08 \,.\, \mathit{ff} \,.\, 3.44 = 3.72\,\mathit{ff}$
$\kappa^{\beta}_{7} = 2.32 \,.\, \mathit{ff} \,.\, 3.44 = 7.98\,\mathit{ff}$
$\kappa^{\beta}_{8} = 2.32 \,.\, f \,.\, 2.62 = 6.08\,f$

$\kappa^{\gamma}_{1} = 1 \,.\, \mathit{mf} \,.\, 2 = 2\,\mathit{mf}$
$\kappa^{\gamma}_{2} = 1 \,.\, \mathit{fff} \,.\, 2 = 2\,\mathit{fff}$
$\kappa^{\gamma}_{3} = 4.0 \,.\, \mathit{fff} \,.\, 4.5 = 18.0\,\mathit{fff}$
$\kappa^{\gamma}_{4} = 4.0 \,.\, \mathit{mf} \,.\, 2.0 = 8.0\,\mathit{mf}$
$\kappa^{\gamma}_{5} = 2.0 \,.\, f \,.\, 2.62 = 5.24\,f$
$\kappa^{\gamma}_{6} = 2.0 \,.\, \mathit{ff} \,.\, 3.44 = 6.88\,\mathit{ff}$
$\kappa^{\gamma}_{7} = 3.0 \,.\, \mathit{ff} \,.\, 3.44 = 10.32\,\mathit{ff}$
$\kappa^{\gamma}_{8} = 3.0 \,.\, f \,.\, 2.62 = 7.86\,f$

Nomos Alpha : implémentation en OM

- La pièce... ... et ses variantes





Horizons philosophique d 'une démarche structurale en musique

G.-G. Granger et la dualité de l'objectal et de l'opératoire

- « Pygmalion. Réflexions sur la pensée formelle », 1947
- *Pour la connaissance philosophique*, 1988
- *Formes, opérations, objets*, 1994

*« [C'est la notion de groupe qui] donne un sens précis à l'idée de structure d'un ensemble [et] permet de déterminer les éléments efficaces des transformations en réduisant en quelque sorte à son schéma opératoire le domaine envisagé. [...]L'objet véritable de la science est le **système des relations** et non pas les termes supposés qu'il relie. [...] Intégrer les résultats - symbolisés - d'une **expérience** nouvelle revient [...] à créer un canevas nouveau, un **groupe de transformations** plus complexe et plus compréhensif* »

G.-G. Granger : « Pygmalion. Réflexions sur la pensée formelle », 1947

Horizons philosophique d 'une démarche structurale en musique

J. Piaget: de la théorie des groupes à la théorie des catégories

• *Le structuralisme*, 1968
• *Morphismes et Catégories. Comparer et transformer* (avec G. Henriques, E. Ascher 1990

*« ...**attitude relationnelle**, selon laquelle ce qui compte [sont] les relations entre les éléments, autrement dit les procédés ou processus de composition [...] La structure [de **groupe**] se referme sur elle-même, mais cette fermeture ne signifie en rien que la structure considérée ne peut pas entrer à titre de sous-structure dans une structure plus large »*

*« De même qu'en mathématique le structuralisme des Bourbaki est déjà doublé par un mouvement faisant appel à des **structures plus dynamiques** (les « catégories » [...]) de même toutes les formes actuelles du structuralisme [...] sont certainement grosses de développements multiples... »*

J. Piaget: *Le structuralisme*

Retombées perceptives de l’approche algébrique

De la théorie des groupes à la théorie des catégories

- E. Cassirer : « The concept of group and the theory of perception », 1944
- G. Balzano : « The group-theoretic description of 12-fold and microtonal pitch systems », 1980

La question de la **ressemblance perceptive** entre différentes transpositions d’un même profil mélodique est liée *« à un problème beaucoup plus général, un problème qui concerne les mathématiques abstraites »*

E. Cassirer : « The concept of group and the theory of perception », 1944

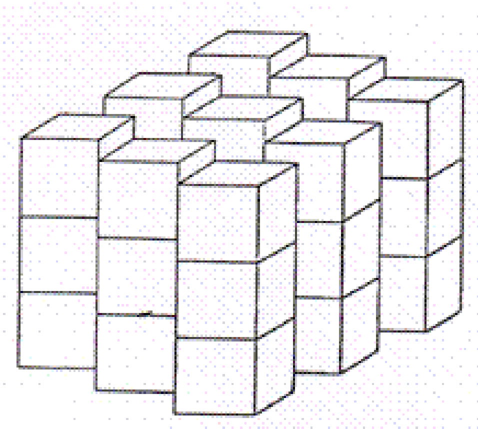
*« Le caractère singulier de l’expérience musicale est dû en partie aux structures particulières de **groupe** que la musique rend accessible à l’auditeur »*

G. Balzano : « The group-theoretic description of 12-fold and microtonal pitch systems », 1980

Canons rythmiques de pavage

théorie ⟷ composition

- La conjecture de Minkowski
- La solution algébrique de Hajos
- Les intuitions du « rythmicien » Messiaen
- Le modèle algébrique de Vieru/Vuza
- Le modèle informatique généralisé (en collaboration avec Carlos Agon et Thomas Noll)
- Applications compositionnelles (G. Bloch)
- L'énumération des solutions: un problème ouvert (Vuza, Andreatta, Fripertinger, Amiot, Noll, Tangian, Jedrzejewski…)

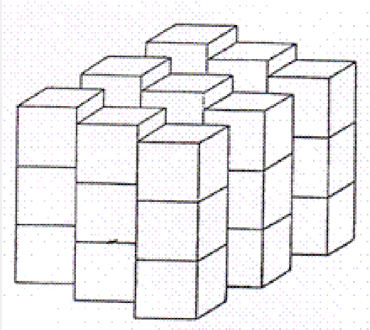


Minkowski Conjecture (1896/1907)

In a simple lattice tiling] of the n-dimensional space by unit cubes, there are at least two cubes which share an entire (n-1)-dimensional face.

(Cf. S. Stein, S. Szabó : *Algebra and Tiling*, 1994)

Conjecture de Minkowski et théorème de Hajos



Conjecture de Minkowski (1896/1907)

Dans un pavage simple [simple lattice tiling] d'un espace à n dimensions par des cubes unités, il y a au moins un couple de cubes qui ont en commun une face entière de dimension n-1.

Théorème de Hajós (1942)

Soit G un groupe abélien fini et soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n éléments de G.

Si l'on suppose que le groupe admet comme factorisation la somme directe des sous-ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ suivants :

$$A_1 = \{1, a_1, \ldots, a_1^{m_1-1}\}, A_2 = \{1, a_2, \ldots, a_2^{m_2-1}\}, \ldots, A_n = \{1, a_n, \ldots, a_n^{m_n-1}\}$$

avec $m_i > 0$ pour tout i=1, 2, …, n, alors un des facteurs A_i est un groupe

Théorème de Redei (1965)

Soit G un groupe abélien fini et soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n sous-ensembles de G, chacun contenant l'élément neutre du groupe et chacun ayant un nombre premier d'éléments et supposons que le groupe admette comme factorisation la somme directe des sous-ensembles A_i, i=1, …, n. Alors, un des sous-ensembles A_i est périodique

Groupes de Hajós et canons de pavage

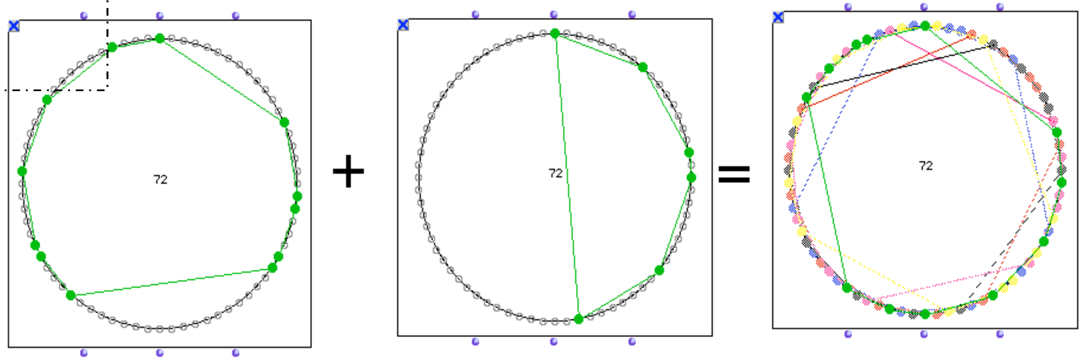
Un groupe G est " groupe de Hajós " si pour toute factorisation du groupe en somme directe de ses sous-ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_k$, au moins un des facteurs est périodique.

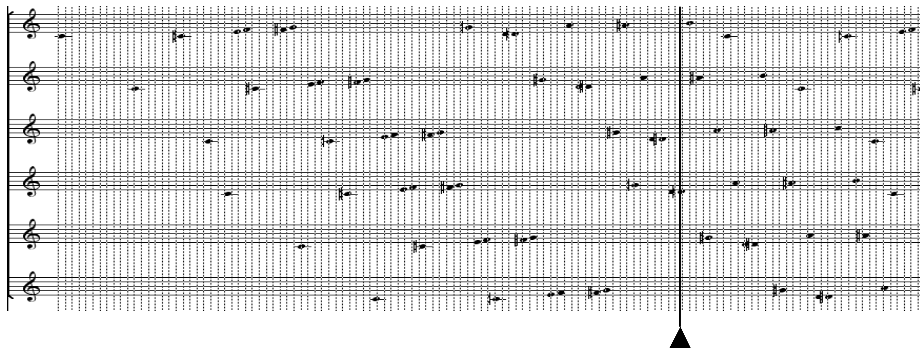
Rédei 1947	(p, p)
Hajós 1950	$\mathbf{Z}$
	$\mathbf{Z/nZ}$ avec $n = p^{\alpha}$
De Brujin 1953	(p^{α}, q)
	(p, q, r)
Sands 1957	(p^2, q^2)
	(p^2, q, r)
	(p, q, r, s)
Sands 1959	$(2^2, 2^2)$
	$(3^2, 3)$
	$(2^n, 2)$
Sands 1962	$(p, 3, 3)$
	$(p, 2^2, 2)$
	$(p, 2, 2, 2, 2)$
	$(p^2, 2, 2, 2)$
	$(p^3, 2, 2)$
	$(p, q, 2, 2)$
Sands 1964	$\mathbf{Q}$
	$\mathbf{Z+Z/pZ}$
	$\mathbf{Q+Z/pZ}$

$\longleftrightarrow$

$n \notin$

72
108 120 144 168 180
200 216 240 252 264 270 280 288
300 312 324 336 360 378 392 396
400 408 432 440 450 456 468 480
500 504 520 528 540 552 560 576 588 594
600 612 616 624 648 672 675 680 684 696
700 702 720 728 744 750 756 760 784 792
800 810 816 828 864 880 882 888
900 912 918 920 936 945 952 960 968 972 980 984
1000 ...





Canons rythmiques et conjectures mathématiques

• E. Coven & A. Meyerowitz : "Tiling the integers with translates of one finite set", *J. Algebra*, 212, pp.161-174, 1999

« We solve it [the problem of tiling the integers with translates of one finite set] for sets of size having at most two prime factors. The conditions [T1 and T2] are always sufficient, but is is unknown wheter they are necessary for all finite sets »

• Izabella Laba : "**Fuglede Conjecture** for a union of two intervals", *Proc. AMS*, 2001

• S. Konyagin & Izabella Laba : "Spectra of certain types of polynomials and tiling of integers with translates of finite sets", 2002

• Izabella Laba : "The **spectral set conjecture** and multiplicative properties of roots of polynomials", *J. London Math. Soc.*, 2002

• J. C. Lagarias, S. Szabó: "Universal spectra and **Tijdeman's conjecture** on factorization of cyclic groups", *J. Fourier Analysis Appl.*, 7, 2001.

Évolutions récentes: le pavage de la ligne

- Tom Johnson (2001): pavage de la ligne avec un pattern rythmique donné
  - ex. 11001
- Andranik Tangian (2001): Représentation polynomial
  - $J(X) = 1 + X + X^4$ (**JOHNSON's polynomial**).
- Emmanuel Amiot (2002): A solution to Johnson-Tangian conjecture
  - **Theorem:** *Any tiling of the line by the pattern 1 1 0 0 1 and its binary augmentations (eg 1 0 1 0 0 0 0 0 1, 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1...) has a length that is a multiple of 15.*
- Harald Fripertinger (2002):
  - "Enumeration of non-isomorphic canons", *Tatra Mt. Math. Publ.*, 23, 47-57, 2001

• R. Tijdeman : "Decomposition of the Integers as a direct sum of two subsets" (dans *Séminaire de théorie des nombres de Paris*, CUP, 1995)

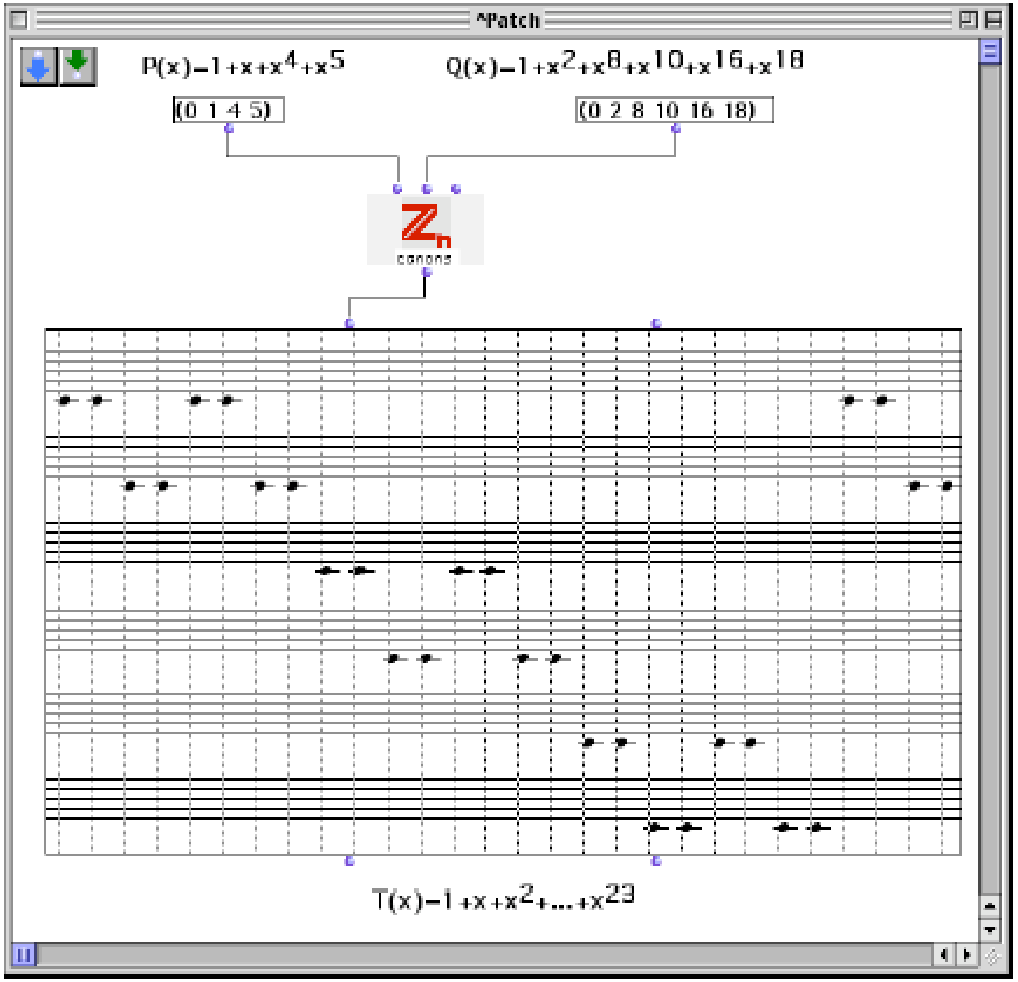
• J. Lagarias & Y. Wang : "Tiling the line with translates of one tile", *Inv. Math.*, 124, pp.341-365, 1996

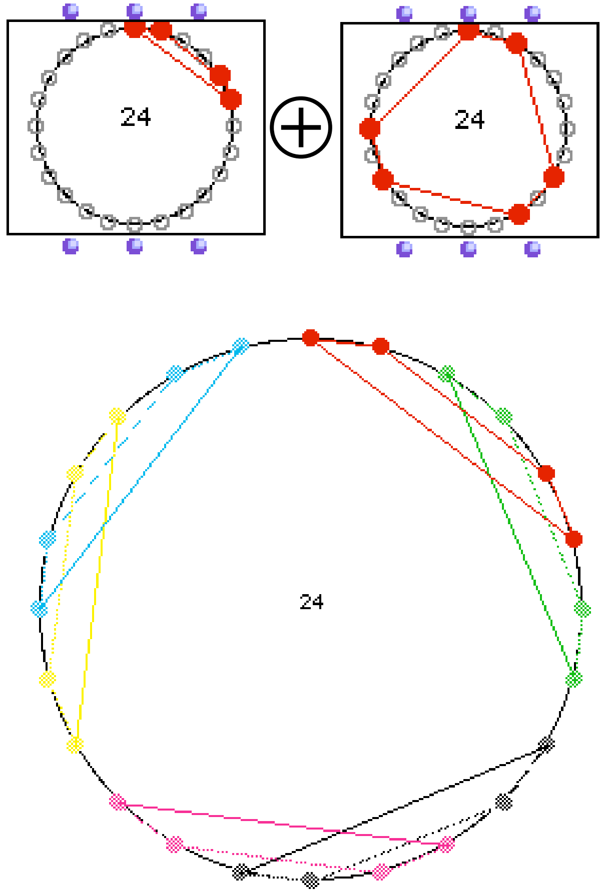
• E. Coven & A. Meyerowitz : "Tiling the integers with translates of one finite set", *J. Algebra*, 212, pp.161-174, 1999

Canons de pavage et pôlynomes

$$A \oplus B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow A(x) = \sum_{k \in A} x^k$$

$$A(x) \times B(x) = (A \oplus B)(x) \equiv 1 + x + \ldots x^{n-1} \pmod{X^n - 1}.$$





Canons de pavage et pôlynomes

$$A \oplus B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

Amiot 2001-2005

$$A(x) = \sum_{k \in A} x^k$$

$$A(x) \times B(x) = (A \oplus B)(x) \equiv 1 + x + \ldots x^{n-1} \pmod{X^n - 1}$$

$$\{0, 1, 3, 6\} \oplus \{0, 8, 12, 4\}$$

$$(X^6 + X^3 + X + 1)\,(X^{12} + X^8 + X^4 + 1)$$

$$X^{18} + X^{15} + X^{14} + X^{13} + X^{12} + X^{11} + X^{10} + X^9 + X^8 + X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X + 1$$

$$X^{15} + X^{14} + X^{13} + X^{12} + X^{11} + X^{10} + X^9 + X^8 + X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$$

Racines de l'unité et pôlynomes cyclotomiques

Racines *n*-ièmes de l'unité : $z^n = 1$

$n=3 \longrightarrow \left\{1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$

$n=4 \longrightarrow \{1, +i, -1, -i\}$

Le racines *n*-ièmes de l'unité peuvent s'écrire sous la forme :

$$e^{\frac{2k\pi i}{n}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \qquad (k, n \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq k < n)$$

Elles sont exactement les racines du pôlynome : $P(X) = X^n - 1$

Le racines *n*-ièmes primitives de l'unité : $e^{\frac{2ki\pi}{n}}$ $(n,k)=1$

Elles sont exactement les racines du pôlynome cyclotomique :

$$\Phi_n(X) = \prod_{k=1}^{\varphi(n)} (X - z_k) \longleftrightarrow X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X).$$

Pavage de la ligne et pôlynomes cyclotomiques

$$\Phi_n(X) = \prod_{k=1}^{\varphi(n)} (X - z_k) \longleftrightarrow X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X).$$

$$\Phi_1(X) = -1 + X \longleftrightarrow (-1, 1)$$

$$\Phi_2(X) = 1 + X \longleftrightarrow (1, 1)$$

$$\Phi_3(X) = 1 + X + X^2 \longleftrightarrow (1, 1, 1)$$

$$\Phi_4(X) = 1 + X^2 \longleftrightarrow (1, 0, 1)$$

$$\Phi_5(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 \longleftrightarrow (1, 1, 1, 1, 1)$$

$$\Phi_6(X) = 1 - X + X^2 \longleftrightarrow (1, -1, 1)$$

$$\Delta_n = 1 + X + X^2 + \ldots + X^{n-1} = \prod_{\substack{d \mid n \\ d \neq 1}} \Phi_d(X)$$

$$\Delta_4 = 1 + X + X^2 + X^3 + \ldots + X^7 = \Phi_2(X) \times \Phi_4(X)$$

$$A(x) \times B(x) = (A \oplus B)(x) \equiv 1 + x + \ldots x^{n-1} \pmod{X^n - 1}.$$

Bonnes et mauvaises factorisations

$$\Delta_n = 1 + X + X^2 + \ldots + X^{n-1} = \prod_{\substack{d \mid n \\ d \neq 1}} \Phi_d(X)$$

$\Phi_2(X) = 1 + X \longleftrightarrow (1, 1)$

$\Phi_3(X) = 1 + X + X^2 \longleftrightarrow (1, 1, 1)$

$\Phi_4(X) = 1 + X^2 \longleftrightarrow (1, 0, 1)$

$\Phi_6(X) = 1 - X + X^2 \longleftrightarrow (1, -1, 1)$

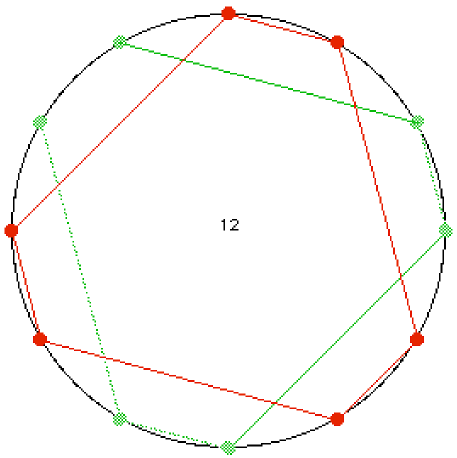
$$\Delta_{12} = 1 + X + \ldots + X^{11} = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_4 \times \Phi_6 \times \Phi_{12}$$

$A(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_6 \times \Phi_{12} = 1 + X + X^4 + X^5 + X^8 + X^9$

$B(X) = \Phi_4 = 1 + X^2$

$S = \{0, 2\}$

$R = \{0, 1, 4, 5, 8, 9\}$



$A^*(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_{12}$

$B^*(X) = \Phi_4 \times \Phi_6$

Cette décomposition ne marche pas

Les conditions de Coven-Meyerowitz

• E. Coven & A. Meyerowitz : "Tiling the integers with translates of one finite set", *J. Algebra*, 212, pp.161-174, 1999

There is no loss of generality in restricting attention to translates of a finite set A of *nonnegative* integers. Then $A(x) = \sum_{a \in A} x^a$ is a polynomial such that $\#A = A(1)$. Let S_A be the set of prime powers s such that the s-th cyclotomic polynomial $\Phi_s(x)$ divides $A(x)$. Consider the following conditions on $A(x)$.

(T1) $A(1) = \prod_{s \in S_A} \Phi_s(1)$.

(T2) If $s_1, \ldots, s_m \in S_A$ are powers of distinct primes, then $\Phi_{s_1 \cdots s_m}(x)$ divides $A(x)$.

$$A(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_6 \times \Phi_{12} = 1 + X + X^4 + X^5 + X^8 + X^9$$

$$\Phi_2(X) = 1 + X$$
$$\Phi_3(X) = 1 + X + X^2$$

$$A^*(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_{12}$$

(T1) $A(1) = 6 = \Phi_2(1) \times \Phi_3(1) = 2 \times 3$

(T2) $\Phi_2 \mid A(X)$ et $\Phi_3 \mid A(X) \Rightarrow \Phi_{2\times 3} \mid A(X)$

Les conditions de Coven-Meyerowitz

• E. Coven & A. Meyerowitz : “Tiling the integers with translates of one finite set”, *J. Algebra*, 212, pp.161-174, 1999

There is no loss of generality in restricting attention to translates of a finite set A of *nonnegative* integers. Then $A(x) = \sum_{a \in A} x^a$ is a polynomial such that $\#A = A(1)$. Let S_A be the set of prime powers s such that the s-th cyclotomic polynomial $\Phi_s(x)$ divides $A(x)$. Consider the following conditions on $A(x)$.

(T1) $A(1) = \prod_{s \in S_A} \Phi_s(1)$.

(T2) If $s_1, \ldots, s_m \in S_A$ are powers of distinct primes, then $\Phi_{s_1 \cdots s_m}(x)$ divides $A(x)$.

$$A(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_6 \times \Phi_{12} = 1 + X + X^4 + X^5 + X^8 + X^9$$

$$\Phi_2(X) = 1 + X$$
$$\Phi_3(X) = 1 + X + X^2$$

$$A^*(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_{12}$$

(T1) $A(1) = 6 = \Phi_2(1) \times \Phi_3(1) = 2 \times 3$

(T2) $\Phi_2 \mid A(X)$ et $\Phi_3 \mid A(X) \Rightarrow \Phi_{2\times 3} \mid A(X)$