Master ATIAM - Modèles mathématiques pour l'informatique musicale

Partie II (Moreno Andreatta)

(*27 février 2008*)

Cette partie sera notée sur la moitié de la note finale. Tous les documents sont autorisés. Durée complète de l'épreuve (comportant deux parties) : 2 heures.

Question 1 : Quelques propriétés de la structure intervallique

Rappelons que dans le cas de la division de l'octave en 12 parties égales, la structure intervallique d'un accord A est l'ensemble $SI(A) = (a_1, a_2, ..., a_k)$ représentant les intervalles successifs entre les notes de A (avec la propriété que $a_1 + a_2 + ... + a_k = 12$). Par exemple, la structure intervallique associée la gamme diatonique majeure A=$\{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}$ est $SI(A) = (2, 2, 1, 2, 2, 2, 1)$.

(i) Montrer que la structure intervallique est invariante par transposition, i.e. si $B = T_d(A)$ alors $SI(A) = SI(B)$ où $T_d(x) = d + x \pmod{12}$ est, comme d'habitude, l'opération de transposition [**1pt**].

(ii) Montrer que toute symétrie axiale I_n induit une rétrogradation de la structure intervallique d'un accord, i.e. si $B = I_n(A)$ et $SI(A) = (a_1, a_2, ..., a_k)$ alors $SI(B) = (a_k, a_{k-1}, ..., a_1)$ où $I_n(x) = T_nI = n - x \pmod{12}$ est, comme d'habitude, l'inversion généralisée [**1pt**].

Question 2 : Périodicité et factorisations

Considérons le pattern rythmique suivant R=$\{0, 1, 4, 5, 8, 9\}$ dans $\mathbb{Z}_{12}$

(i) Montrer que R est périodique modulo un sous-groupe, i.e. $\exists H$ sous-groupe de $\mathbb{Z}_{12}$ tel que $H+R = R$ [**1pt**].

(ii) Soit S le sous-ensemble de $\mathbb{Z}_{12}$ tel que $R \oplus S = \mathbb{Z}_{12}$. Utiliser R et S pour construire un sous-ensemble R^* de $\mathbb{Z}_{12}$ tel que $R^* \oplus H = \mathbb{Z}_{12}$, où H est un sous-groupe [**1pt**].

(iii) Soit $R(X)$ le polynôme à coefficients 0 et 1 associé à l'ensemble R. Montrer que R est divisible par un polynôme du type $1 + X^k + X^{2k} + ...$ [**2pts**].

(iv) Quelle est la relation entre l'entier k et la périodicité de R? [**1pt**]

Question 3 : Isographies fortes et isographies positives

Rappelons qu'à partir d'un K-net du type :

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\varphi} & y \\ {\scriptstyle\gamma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\delta} \\ w & \xrightarrow{\psi} & z \end{array} \tag{1}$$

où φ et ψ sont des opérations de transpositions et γ et δ sont des inversions généralisées, un isomorphisme de réseau est une opération F qui transforme le diagramme précédent dans le K-net suivant :

$$\begin{array}{ccc} F(x) & \xrightarrow{F\varphi F^{-1}} & F(y) \\ {\scriptstyle F\gamma F^{-1}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle F\delta F^{-1}} \\ F(w) & \xrightarrow{F\psi F^{-1}} & F(z) \end{array} \tag{2}$$

Considérons les deux réseaux associés à l'ensemble R=$\{0, 1, 4, 5, 8, 9\}$ de la question précédente.

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{T_4} & 4 \\ {\scriptstyle I_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle I_9} \\ 1 & \xrightarrow{T_4} & 5 \end{array} \tag{3}$$

$$\begin{array}{ccc} 4 & \xrightarrow{T_4} & 8 \\ {\scriptstyle I_9}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle I_5} \\ 5 & \xrightarrow{T_4} & 9 \end{array} \tag{4}$$

(i) Montrer que les deux diagrammes sont commutatifs et montrer que pour chaque diagramme il y a 12 réseaux en relation d'isographie forte (i.e. même configuration de flèches) [**1pt**].

(ii) Considérons les nouveaux diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} T_2(0) & \xrightarrow{T_k} & T_2(4) \\ {\scriptstyle I_m}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle I_n} \\ T_2(1) & \xrightarrow{T_h} & T_2(5) \end{array} \tag{5}$$

$$\begin{array}{ccc} T_2(4) & \xrightarrow{T_{k'}} & T_2(8) \\ {\scriptstyle I_{m'}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle I_{n'}} \\ T_2(5) & \xrightarrow{T_{h'}} & T_2(9) \end{array} \tag{6}$$

Trouver les bonnes valeurs de transposition et d'inversion et montrer que les nouveaus K-nets sont en relation d'isographie positive avec les diagrammes (3) et (4) [**2pts**].