Master ATIAM - Modèles mathématiques pour l'informatique musicale

Partie II (Moreno Andreatta)

(*25 février 2010*)

Cette partie sera notée sur la moitié de la note finale. Tous les documents sont autorisés. Durée complète de l'épreuve (comportant deux parties) : 2 heures.

Question 1 : quelques proprités du groupe neo-riemannien

Rappelons que le groupe neo-riemannien, que l'on notera ρ, est le groupe de 24 éléments engendré par les trois opérateurs P, R et L opérant sur l'ensemble des 24 triades majeures et mineures, tels que nous les avons définis dans le cours.

(i) Montrer que le groupe est engendré par deux seuls générateurs, i.e. que l'on peut exprimer l'un des trois opérateurs comme un produit des deux autres.

(ii) Soit $\mathbb{Z}_{12} = \{T_0, T_1, ..., T_{11}\}$ le groupe cyclique d'ordre 12 engendré par la transposition $T_7 : x \to x+7$ mod12. En s'appuyant sur l'un des résultats évoqués pendant le cours, montrer que ρ commute avec tous les éléments de $\mathbb{Z}_{12}$ i.e. $f \circ T_k = T_k \circ f$ $\forall f \in \rho$ et $\forall T_k \in \mathbb{Z}_{12}$.

Question 2 : lois de composition des isographies

Dans cette question nous considérons uniquement les K-nets associés à des accords $\{x_1, x_2, x_3\}$ de trois notes qui sont dans la forme suivante (où T_m est la transposition de m demi-tons et $I_s(x) = s - x$ mod12 est la symétrie axiale généralisée) :

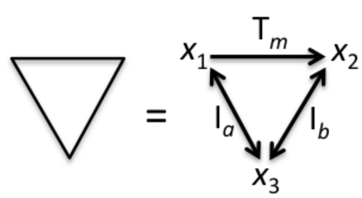

Figure 1.

Considérons le diagramme en Figure 2 dans lequel les points sont des K-nets du type précédent et les flèches sont des isographies positives ou négatives :

(i) Trouver les isographies manquantes rendant commutative chaque partie du diagramme (par exemple, trouver F_4 tel que $F_2 \circ F_1 = F_4$).

(ii) Montrer que les accords suivants $A_1 = \{do, mi, sol\} = \{0, 4, 7\}$, $A_2 = \{sol, si, re\} = \{7, 11, 2\}$, $A_3 = \{do, sol, sol\sharp\} = \{0, 7, 8\}$ et $A_4 = \{sol, si, mi\flat\} = \{7, 11, 3\}$ sont une possible solution du diagramme en Figure 2.

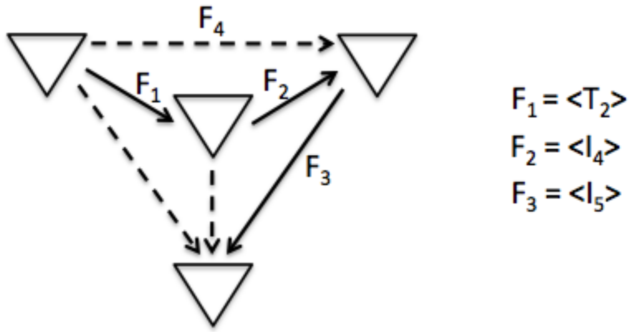

Figure 2.

Question 3 : Canons rythmiques mosaïques, rythmes k-asymétriques, relation Z et DFT

Rappelons qu'un sous-ensemble R de $\mathbb{Z}_{kh}$ est un rythme *k-asymétrique* si lorsqu'une attaque de R occupe la position x, toutes les autres positions y telles que $y \sim x \bmod h$ ne correspondent pas à des attaques du rythme R. Rappelons qu'étant donné un sous ensemble A d'un groupe cyclique $\mathbb{Z}_c$ d'ordre c, la Transformée de Fourier Discrète (DFT) de A est l'application $F_A(t) = \sum_{k \in A} e^{\frac{-2i\pi kt}{c}}$ définie en correspondence de tout élément t de $\mathbb{Z}_c$.

Un sous-ensemble A de $\mathbb{Z}_c$ pave si l'une de conditions équivalentes suivantes est vérifiée:

(a) Il existe $B \subset \mathbb{Z}_c$ tel que $A \bigoplus B = \mathbb{Z}_c$

(b) $1_A \star 1_B = 1$ où 1_S est la fonction caractéristique (ou indicatrice) de l'ensemble S et $\star$ indique le produit de convolution des deux fonctions

(c) $Z_A \cup Z_B = \{1, 2, ..., c-1\}$ et $\sharp A \times \sharp B = c$ où $Z_S = \{t \in \mathbb{Z}_c \; t.q. \; F_S(t) = 0\}$ est l'ensemble des zéros de la DFT de S

(d) $IC_A \star IC_B = c$ et $\sharp A \times \sharp B = c$, où $IC_A(k) = 1_A \star 1_{-A}(k)$ est le contenu (ou vecteur) intervallique de A.

Soient R_1={0, 1, 6, 10, 12, 13, 15, 19} et R_2= {0, 2, 5, 6, 11, 12, 15, 17} les deux sous-ensembles de $\mathbb{Z}_{24}$ en Figure 3.

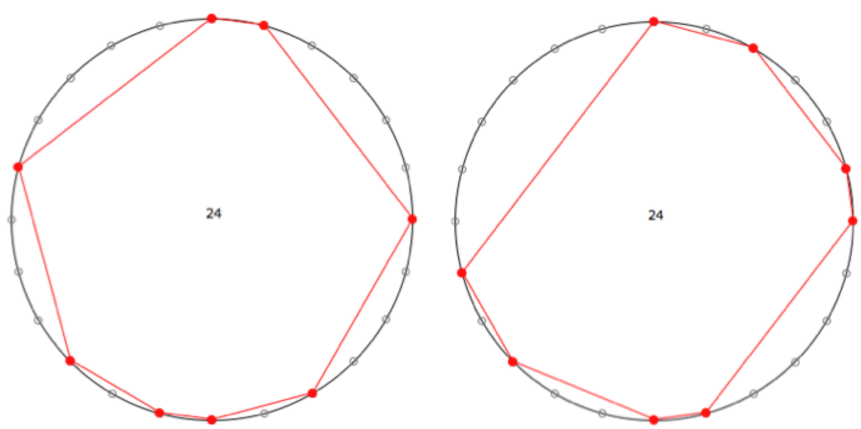

Figure 3.

(i) Montrer que R_1 et R_2 ne sont pas équivalents sous l'action du groupe cyclique $\mathbb{Z}_{24}$ d'ordre 24 ou du groupe didral $\mathbb{D}_{24}$.

(ii) Montrer que R_1 est un rythme 3-asymétrique (suggestion: montrer qu'il a été construit à partir d'une permutation de $\mathbb{Z}_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$).

(iii) En utilisant uniquement le fait que R_2 est en relation Z avec l'ensemble R_1, montrer que l'on peut déduire que $R_2 \bigoplus B = \mathbb{Z}_{24}$ où $B = \{0, 8, 16\}$