Master ATIAM
Modèles mathématiques pour l'informatique musicale

Partie II : formalisation algébrique
Moreno Andreatta

(*7 mars 2006*)

Cette partie sera notée sur la moitié de la note finale. Tous les documents sont autorisés. Durée complète de l'épreuve (comportant deux parties) : 2 heures.

Question 1 : Généralisation de l'imparité rythmique

Dans un article récent [1], Rachel W. Hall et P. Klingsberg ont généralisé la notion d'imparité rythmique étudié par Simha Arom et Marc Chemillier à travers le concept de k-asymétrie. Un rythme périodique R de période kh (c'est-à-dire un sous-ensemble R de $\mathbb{Z}_{kh}$) est *k-asymétrique* si la propriété suivante est satisfaite :

Si une attaque de R occupe la position x alors toutes les autres positions y telles que $y \sim x \bmod h$ ne correspondent pas à des attaques du rythme R.

Par exemple, le rythme R=$\{0, 1, 2, 7\}$ de période 12 et ayant 4 attaques est 3-asymétrique.

(i) Essayer d'établir le catalogue des 6 rythmes 3-asymétriques de période 12 ayant 4 attaques (par rapport à l'action du groupe cyclique) et montrer que le catalogue se réduit à 5 orbites (sous l'action du groupe dihédrale).

(ii) Soit $Ryth_r^{kh}$ la famille des rythmes k-asymétriques de période kh ayant r attaques. Une application du lemme de Burnside donne la formule d'énumération suivante :

$$\#\{Ryth_r^{kh}\} = \frac{1}{kh} \sum \phi(d) \binom{h/d}{r/d} k^{r/d} \tag{1}$$

où $\phi(d)$ est la l'indicatrice d'Euler d´signant le nombre d'entiers compris entre 1 et d, et premiers avec d (i.e. $\phi(d) = \#\{x \text{ tels que } 1 \leqslant x \leqslant d \text{ et } \mathrm{PGCD}(x, d) = 1\}$ et la somme est faite sur les valeurs d qui divisent $\mathrm{PGCD}(h, r)$ et qui sont premiers avec k. Par définition $\phi(1) = 1$.

Appliquer la formule précédente pour déterminer le nombre des rythmes 3-asymétriques de période 12 ayant 4 attaques et discuter le résultat obtenu par rapport à la question (i). Pourquoi les deux résultats ne coïncident pas ?

Question 2 : Canons rythmiques mosaïques

Considérons le pattern rythmique suivant R=$\{0, 2, 3, 5\}$ dans $\mathbb{Z}_{12}$

(i) Trouver le sous-ensemble S de $\mathbb{Z}_{12}$ tel que $\mathbb{Z}_{12} = R \oplus S$ et montrer que S est isomorphe à $\mathbb{Z}_3$. Quel est le lien entre la decomposition de $\mathbb{Z}_{12}$ en somme directe des deux sous-ensembles R et S et la théorie des rythmes 3-asymétriques ?

(ii) Soit $S(x)$ le polynôme à coefficients 0-1 associé au sous-ensemble S. En s'appuyant sur la liste suivante des polynômes cyclotomiques :

$\phi_2(x) = 1 + x$
$\phi_3(x) = 1 + x + x^2$
$\phi_4(x) = 1 + x^2$
$\phi_6(x) = 1 - x + x^2$
$\phi_{12}(x) = 1 - x^2 + x^4$
et en utilisant la propriété suivante :

$$1 + x + ... + x^{11} = \prod \phi_d(x) \tag{2}$$

avec $d|12$ et $d \neq 1$, exprimer R comme produit de polynômes cyclotomiques $\phi_d(x)$.

(iii) Peut-on exprimer $S(x)$ comme produit d'un polynôme cyclotomique parmi ceux de la liste précedente et d'un polynôme à coefficients 0-1 ?

Question 3 : Quelques K-reseaux "rythmiques"

Considérons le K-net associé au pattern rythmique R={0, 2, 3, 5} de la question précédente.

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, "T_1"] \arrow[d, "I_2"'] & 3 \arrow[d, "I_8"] \\ 0 \arrow[r, "T_5"] & 5 \end{tikzcd} \tag{3}$$

où $T_k(x) = k+x \pmod{12}$ et $I_a(x) = a-x \pmod{12}$ sont, comme d'habitude, les oprations de transposition et inversion (généralisée).

(i) Montrer que le diagramme est commutatif et donner quelques exemples de K-nets en relation d'isographie forte avec le diagramme précedent (i.e. même configuration de flêches).

(ii) Soit R'=$I_5(R)$. Considérons le nouveau diagramme :

$$\begin{tikzcd} I_5(2) \arrow[r, "T_k"] \arrow[d, "I_a"'] & I_5(3) \arrow[d, "I_b"] \\ I_5(0) \arrow[r, "T_h"] & I_5(5) \end{tikzcd} \tag{4}$$

Trouver les bonnes valeurs de transposition et d'inversion et montrer que le nouveau K-net est en relation d'isographie négative avec le diagramme (3).

(iii) En incluant les deux applications affines $M_5(x)$=$5x$ et $M_7(x)$=$7x$, le sous-ensemble R={0, 2, 3, 5} de $\mathbb{Z}_{12}$ peut être décrit à l'aide du K-net suivant :

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, "T_1M_7"] \arrow[d, "T_2M_5"'] & 3 \arrow[d, "T_2M_5"] \\ 0 \arrow[r, "T_5"] & 5 \end{tikzcd} \tag{5}$$

Démontrer qu'il n'y à que cinq autres K-nets en relation d'isographie forte avec le diagramme (5).

References

[1] Rachel W. Hall et P. Klingsberg, "Asymmetric Rhythms, Tiling Canons, and Burnside's Lemma", Bridges Proceedings, pp. 189-194, 2004. Winfield, Kansas, 2004.