Analyse et implémentation de certaines techniques compositionnelles chez Anatol Vieru.

Moreno Andreatta, Carlos Agon, Dan T. Vuza.

1. Introduction

Cet article développe certains aspects théoriques et informatiques d'un processus compositionnel basé sur l'engendrement de suites périodiques à travers le calcul de différences finies (sur des structures algébriques particulières). La méthode a été proposée par le compositeur roumain Anatol Vieru (1926-1998) qui en a discutés à plusieurs reprises l'intérêt à la fois théorique et musical. En effet, son ouvrage principal (Vieru, 1980) n'est pas seulement un des premiers catalogues où toutes les structures intervalliques du système tempéré **Z**/12**Z** trouvent une place (à la fois pour ses propriétés mathématiques et pour les caractéristiques musicales qui en découlent), mais c'est avant tout un essai de modélisation de la pensée musicale intervallique. À ce propos, un aspect fondamental de l'écoute musicale est le rapport entre sons et intervalles, une relation qui est bien explicitée par sa théorie des suites modales et sur laquelle le compositeur revient plusieurs fois dans ses écrits[1]. Dans cet article nous reprenons certaines propriétés majeures des suites modales qui ont été implémentées dans le logiciel de composition assistée par ordinateur *OpenMusic* (Assayag et al., 1999). L'implémentation permet une application de ces concepts aussi bien dans le domaine des hauteurs que dans celui des rythmes grâce à la souplesse de la notion de groupe cyclique **Z/nZ** d'ordre n. Nous rappelons que cette structure, dont l'intérêt musical avait été mis en évidence par plusieurs théoriciens depuis les années 60 (Babbitt, Xenakis, Barbaud…) permet d'établir un isomorphisme entre espace des hauteurs (plus exactement la famille des structures d'accords à une transposition près) et des rythmes (périodiques).[2] La définition formelle de suite modale est donnée dans la section 2. Deux propriétés des suites modales, la réductibilité et la reproductibilité, seront étudiées dans la section 3. Leur lien est établi par le théorème de décomposition décrit dans la section 4. La section 5 montre un exemple d'application du résultat précédent dans le cas d'un problème de prolifération de certaines valeurs d'une suite modale. Quelques problèmes ouverts seront mentionnés dans la section finale.

---

[1] Cf. Vieru (1992) et Vieru (1993; ch. 5 pp.113-134 ainsi que pp.247-270). Pour une étude exhaustive des aspects algébriques des suites modale voir Andreatta et Vuza (2001). Une discussion plus esthétique sur le problème de la construction des suites périodiques, par rapport à la pensée compositionnelle d'Anatol Vieru est contenue dans Cazaban et al.

[2] Voir Vuza (1985) et Andreatta et al. (1999) pour certains aspects théoriques et compositionnels liés à la définition d'un rythme périodique comme sous-ensemble localement fini du groupe additif **Q** des nombres rationnels.

2. Suites modales

Par définition une suite modale est une application f de l'ensemble des entiers **Z** dans un groupe G commutatif. Une suite modale S est périodique s'il existe un entier m tel que :

$$f(x) = f(x+m) \text{ pour toute } x \text{ dans } \mathbf{Z}.$$

Le plus petit m satisfaisant cette propriété est appelée la période de S. La suite suivante est une suite périodique avec k = 5 à valeurs dans le groupe cyclique **Z/9Z** :

`f = 0 3 2 8 6 0 3 2 8 6 0 …`

Dans ce texte une suite périodique sera notée soit comme une suite d'éléments suivie des points de suspension, soit comme une liste contenant tous les éléments à l'intérieur d'une période. Dans ce deuxième cas, l'exemple précédent sera noté par :

`f = (0 3 2 8 6)`

En général, toute série dodécaphonique est une suite modale de période 12 dans le groupe cyclique **Z/12Z**.

On commence par définir les deux opérateurs de base de toute suite périodique :

Definition 1. Opérateur de différence D.

Si $G^{\mathbf{Z}}$ est l'ensemble des suites à valeurs dans le groupe G, l'opérateur D est défini de $G^{\mathbf{Z}}$ à valeurs dans $G^{\mathbf{Z}}$ et tel que Df est la suite à valeurs dans G donnée par $(Df)(x)=f(x)-f(x-1)$.

Definition 2. Opérateur de translation T.

Si $G^{\mathbf{Z}}$ est l'ensemble des suites à valeurs dans le groupe G, l'opérateur T est défini de $G^{\mathbf{Z}}$ à valeurs dans $G^{\mathbf{Z}}$ et tel que Tf est la suite à valeurs dans G donnée par $(Tf)(x)= f(x+1)$. En termes d'opérateur T une suite est périodique s'il existe un entier m tel que $T^m (f) = f$.

Dans les exemples qui suivent, on se concentrera toujours sur le groupe cyclique **Z/nZ.** Cependant, la définition et les propriétés sont valables pour tout groupe commutatif (fini). Une proposition de généralisation des résultats à d'autres structures est contenue dans la partie finale de (Cazaban et al.).

3. Suites réductibles et suites reproductibles.

Une première caractérisation des suites modale est la *réductibilité*[3].

Une suite réductible est une suite modale telle qu'une réitération de l'opérateur D par un nombre k de fois appliquée à la même séquence la rend nulle. Autrement dit, il existe un entier $k \geq 1$ tel que $D^k f = 0$.

Exemple (Vieru, 1980 ; p. 116).

Prenons la suite suivante à valeurs dans **Z**/12**Z** et ayant une période de 6 éléments :

f	=	(11 6 7 2 3 10 11 6)
Df	=	(7 1)
$D^2 f$	=	(6)
$D^3 f$	=	(0)

[3] Vieru utilise le terme suite modale comme synonyme de toute suite réductible.

On remarque qu'on pourrait caractériser toute suite réductible par le fait d'être obtenue en partant d'un élément de base (dans ce cas le 6) par des additions successives (modulo 12), en spécifiant la valeur de départ de chaque niveau. On verra un exemple de cette technique 'duale' dans le cas de la pièce pour alto *Zone d'oubli* (1973) ainsi que dans une propriété remarquable de prolifération de certains valeurs d'une suite modale donnée.

Une autre famille importante de suites modales est représentée par les suites *reproductibles*[4], c'est-à-dire les suites vérifiant l'équation $D^k f = f$ pour un entier $k \geq 1$.

Exemple :

```
f      =     (11 10 11 7 2 7)
Df     =     (4 11 1 8 7 5)
D² f   =     (11 7 2 7 11 0)
D³ f   =     (1 8 7 5 4 11)
D⁴ f   =     (2 7 11 10 11 7)
```

qui est équivalent à une permutation circulaire de la suite du départ.

On peut maintenant se demander si une suite est réductible en essayant de dégager de critères de réductibilité (ou d'irréductibilité) sans effectuer tous les calculs de différences finies. Pour cela il faut d'abord rappeler un résultat fondamental de l'algèbre qui concerne la décomposition d'un groupe cyclique en *p*-groupes[5].

Il s'agit du théorème de décomposition de Sylow, qui établit un isomorphisme entre tout groupe cyclique Z/nZ et la somme directe de ses *p*-sous-groupes maximaux[6].

Voyons maintenant ce que cela signifie dans le cas du groupe cyclique **Z**/12**Z** et comment appliquer ces résultats pour établir des critères de réductibilité d'une suite modale.

Exemple :

La décomposition de 12 en facteurs premiers donne : $12 = 2^2\ 3$. **Z**/12**Z** est donc somme directe de H_1 et H_2 , les sous-groupes ayant respectivement 4 et 3 éléments. H_1 est le sous-groupe engendré par l'intervalle de tierce mineure et correspond aux éléments {0, 3, 6, 9} tandis que H_2 est le sous-groupe engendré par l'intervalle de tierce majeure et correspond aux éléments {0, 4, 8}. A l'aide d'un repère cartésien, on peut se rendre compte de la structure toroïdale[7] de Z/12Z et on peut facilement calculer les projections de **Z**/12**Z** sur les deux groupes (voir figure 1).

---

[4] Vieru parle à ce propos de suites irréductibles mais sans jamais les caractériser.

[5] Un groupe commutatif fini est appelé un *p*-groupe (*p* étant un nombre premier) si son cardinal (c'est-à-dire son nombre d'éléments) est une puissance de *p*.

[6] En général un groupe commutatif G est somme directe d'une famille de sous groupes $H_1, \ldots, H_n$ si tout élément de G se décompose (avec unicité de décomposition) dans la somme $x_1+\ldots+x_n$ où chaque élément x_i appartient à H_i .

[7] La théorie mathématique de la musique de Guerino Mazzola (Mazzola, 2002) utilise cette représentation (qui est appelée "Tore des tierces" pour mieux comprendre la notion de symétrie en musique. Signalons qu'une telle

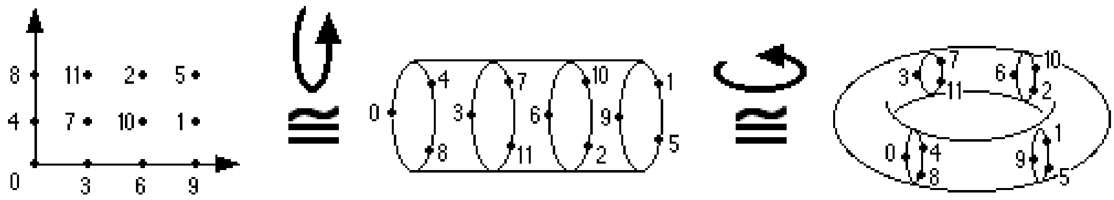


Figure 1

Si on indique avec *g* et *h* les projections sur les sous-groupes H_1 et H_2 respectivement, on a le tableau suivant :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
g	0	9	6	3	0	9	6	3	0	9	6	3
h	0	4	8	0	4	8	0	4	8	0	4	8

Figure 2

Ces applications seront maintenant utilisées pour établir des critères de réductibilité d'une suite de 72 éléments :

f= 0 0 1 5 2 6 7 7 8 0 9 1 2 2 3 7 4 8 9 9 10 2 11 3 4 4 5 9 6 10 11 11 0 4 1 5 6 6 7 11 8 0 1 1 2 6 3 7 8 8 9 1 10 2 3 3 4 8 5 9 10 10 11 3 0 4 5 5 6 10 7 11 0 0…

Il suffit de décomposer la suite à valeurs dans **Z**/12**Z** dans une partie à valeurs dans le groupe {0,3,6,9} isomorphe à **Z/4Z** et {0,4,8} isomorphe à **Z/3Z**. Les projections sont respectivement :

g = 0 0 4 8 8 0 4 4 8 0 0 4 8 8 0 4 4 8 …
h = 0 0 9 9 6 6 3 3 0 0 9 9 6 6 3 3 0 0 …

Le théorème qui permet de donner une caractérisation complète des suites réductibles est le suivant[8] :

Une suite f à valeurs dans un p-groupe **Z**/p^k **Z** *est réductible si et seulement si sa période est une puissance (éventuellement nulle) de p.*

En général, pour vérifier qu'une suite à valeurs dans **Z**/n**Z** est réductible il suffit de décomposer **Z**/n**Z** dans ses *p*-groupes maximaux, prendre les projections de la suite du départ

représentation est aussi centrale dans une de premières études sur les propriétés algébriques du système tempéré à n dégrées (Cf. Balzano, 1980).

[8] Pour la démonstration, qui est essentiellement un raisonnement par récurrence sur la puissance *k* du nombre premier *p*, on renvoie à Andreatta et Vuza (2001).

sur ces groupes et appliquer le critère précédent. Dans le cas de l'exemple précédent, les suites *g* et *h* sont respectivement 9-périodique et 8-périodique, ce qui permet d'affirmer que la suite est réductible.

Réciproquement, en connaissant les projections *g* et *h* on retrouve la suite *f* du départ à travers la formule :

$$f(x) = 4g(x) - 3h(x) \bmod 12$$

4. Théorème fondamental de décomposition.

Le résultat central de la théorie modale est un théorème de décomposition qui affirme la possibilité de décomposer (d'une façon unique) toute suite périodique à valeurs dans un groupe commutatif fini en une somme d'une suite réductible et d'une suite reproductible. L'algorithme de décomposition, qui a été implémenté dans le logiciel *OpenMusic*, permet d'aborder des propriétés de suites modales étudiées du point de vue théorique par Dan Tudor Vuza en suivant le processus de décomposition de la suite de départ dans tout ses étapes intermédiaires. Voilà un exemple d'une telle décomposition dans le cas d'une série dodécaphonique particulière.

Exemple 1 : décomposition d'une suite tout-intervalles.
Prenons la série tout-intervalles du premier mouvement (*Allegretto gioviale*) de la *Suite Lyrique* d'Alban Berg.

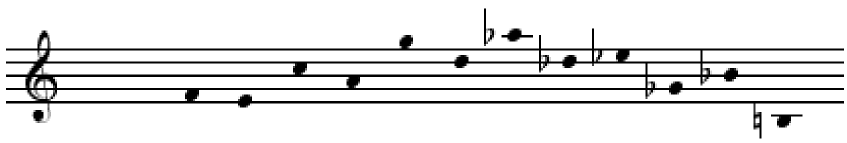


Figure 3

La série correspond à la suite suivant d'intervalles :

```
f = 11 8 9 10 7 6 5 2 3 4 1 …
```

Les composantes réductibles et reproductibles de la suite sont données par :

f_{red} = 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 …
f_{rep} = 5 2 3 4 1 0 11 8 9 10 7 …

Ainsi, chaque intervalle de la série du départ a été décomposé, d'une manière unique, en somme de deux intervalles. Pour représenter musicalement cette décomposition, on peut transformer la suite du départ dans une nouvelle suite en plaçant dans chaque intervalle une nouvelle note réalisant cette décomposition.

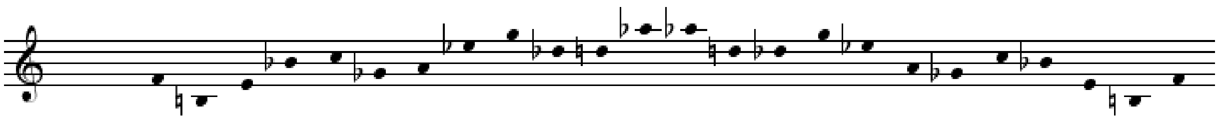


Figure 4

La suite des intervalles qui se situent à gauche des notes ajoutées est réductible tandis que la suite des intervalles à droite de celles-là est reproductible. À noter que la composante reproductible est elle aussi une suite tout-intervalles, un résultat qui ne découle pas directement de la théorie des suites modales. En outre, la reproductibilité est loin d'être triviale (elle s'obtient après 7503 réitérations du processus des différences finies!). Voyons maintenant comment ce résultat de décomposition peut-être appliqué pour expliquer certains propriétés "génétiques" des suites modales.

5. Propriété de prolifération de valeurs d'une suite modale.

Nous avons déjà mentionné une propriété de dualité de la technique des suites modales pour ce qui concerne l'opérateur différence. Voyons d'abord un exemple musical de la technique d'engendrement des suites modales par additions successives dans le cas de la pièce pour alto *Zone d'oubli*. Le système est dérivé d'une valeur de base (le 6, correspondent au triton) par additions successives (modulo 12). Le niveau I commence par 7, ce qui donne la suite 2-périodique (7 1 7 1…). Le niveau II commence par 10 et donne lieu, par le même principe, à une sequence 6-périodique et ainsi de suite, jusqu'au niveau X ayant période 864. Les trois premiers niveaux de la suite sont représentés dans la figure suivante :

```
II    10  5  6  1  2  9  10
I        7  1  7  1  7  1
O         6  6  6  6  6
```

Figure 5

A noter que chaque niveau peut être considéré, à priori, comme une suite des hauteurs ou d'intervalles, le calcul des différences finies (ou d'additions successives) étant exactement le procédé qui permet de passer d'un niveau à l'autre.
Dans le cas de la pièce *Zone d'oubli*, les niveaux sont attachés à des paramètres différents. En particulier, le niveau V correspond aux hauteurs représentées en termes de classes de résidus modulo 12 (do=0, …si=11). Les registres grave, médium et aigu sont déterminés par le niveau VIII, avec les valeurs correspondant aux ensembles {1, 5, 9}, {2, 3, 4} et {6, 7, 8} respectivement. Les durées sont données par le niveau IV (avec unité minimale la double croche. Le valeur 0 est attribué à une *acciaccatura*). Pour gérer les intensités, Vieru utilise le niveau IX, avec 0=*mf*, 3=*mp*, 6=*pp*, 9=*p*. Les éléments 7, 10, 1 et 4 correspondent à de restes.

En fin, les 4 modes de jeu employés dans la pièce sont attachés au niveau IV selon la correspondance : {0, 1}=*vibrato*, {3, 4}=*normal*, {6, 7}= *al ponticello* et {9, 10}=*tremolo.*

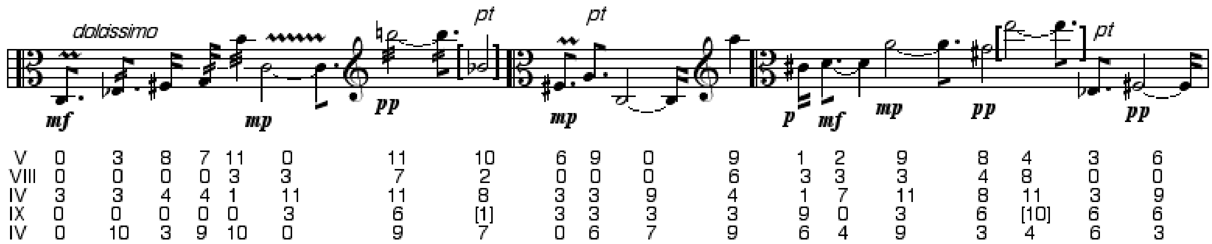


Figure 6

Dans le passage suivant, les même paramètres ont été attachés à d'autres niveaux. En particulier, les hauteurs correspondent maintenant à la suite 6-périodique du niveau II tandis que les deux registres (inférieur et supérieur) sont donnés par les valeurs respectivement impairs et pairs de la suite du niveau VI).

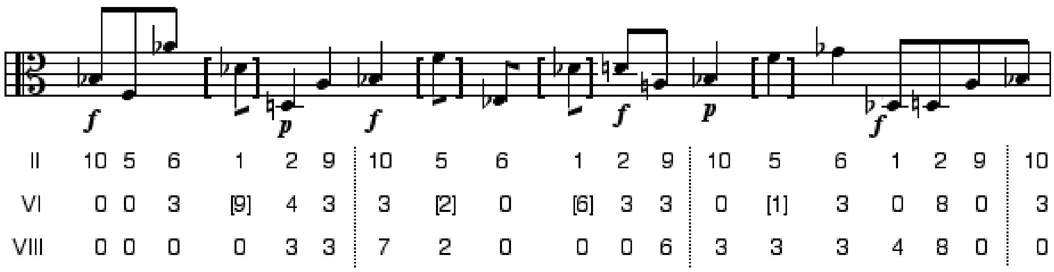


Figure 7

Parfois, le processus d'additions successives met en évidence de propriétés de croissance de certains valeurs particuliers. Vieru considère, par exemple, la suite correspondent au deuxième mode de Messiaen à transposition limitée comme niveau zéro pour engendrer d'autres suites par additions successives. Si on indique avec f = (2 1) la suite associée à la structure intérvallique du mode de Messiaen[9], on peut engendrer d'autres suites périodiques par additions successives à partir de certains valeurs, voir annexe A.
Les premiers deux niveaux sont obtenus en prenant comme points de départ respectivement les valeurs 11 et 2. Pour le troisième niveau, en prenant comme valeur initiale le 8 on obtient une suite modale 14-périodique. Les 8 niveaux successifs, qui commencent par des 8, ont une période égale à 32 et ainsi de suite, la particularité étant qu'il y a une prolifération remarquable de valeurs 8 et 4 dans tous les niveaux sauf celui qui précède le changement de la période. Voyons comment expliquer ce comportement à l'aide du théorème fondamental de décomposition. La suite (2 1) se décompose d'une façon unique dans une partie réductible f_{red}=(6,9) et une partie reproductible f_{rep}=(8 4). Or, f_{red}=(6 9) et f_{rep}=(8 4) sont deux suites à valeurs dans les sous-groupes isomorphes à **Z/4Z** et **Z/3Z** respectivement. On peut montrer (par récurrence) qu'une telle décomposition est caractéristique de toute suites f telles que

[9] La représentation compacte exprime le fait que le mode de Messiaen (aussi appelé mode octotonique) est obtenu par alternance de tons et demi-tons.

$D^k(f)$= (2 1) pour un certain entier k et que le premier élément des suites différences est un entier x tel que p(x)=8, où p est la projection dans le sous-groupe isomorphe à tout suite dérivée **Z/3Z**. Les éléments x ayant cette propriété sont 8 (=8+0), 11 (=8+3), 2 (=8+6) et 5 (=8+9). Dans le cas de Vieru, à partir d'un certain niveau toute suite dérivée commence par 8. Le comportement de prolifération des valeurs 8 et 4 reste valable si les suites dérivées commencent par un des entiers x précédents, voir annexe B.

6. Quelques remarques en guise de conclusion.

Nous avons donné quelques aperçus d'une technique compositionnelle basée sur l'engendrement des suites numérique à travers le calcul de différences finies. L'implémentation de cette méthode dans le logiciel de composition assistée par ordinateur *OpenMusic* permet de tester les résultats théoriques issus de la formalisation algébrique en donnant au même temps au compositeur la possibilité de s'arrêter à tous niveaux de la chaîne du calcul. Du point de vue théorique, le résultat de décomposition de toute suite périodique en partie réductible et partie reproductible offre une technique très puissante de génération et prolifération d'un matériau de base n'ayant pas, a priori, de régularités remarquables. Il s'agit de concepts qui dépassent le cadre strict de la théorie modale développée par Vieru et qui peuvent être appliqué dans différentes démarches compositionnelles.

7. References.

- Andreatta M., A. Agon et M. Chemillier : "*OpenMusic* et le problème de la construction de canons musicaux rythmiques". Actes des sixièmes Journées d’Informatique Musicale, CENT-CEMAMu, pp. 179-185, 1999.
- Andreatta, M. et D. T. Vuza : "On some properties of periodic sequences in Anatol Vieru's modal theory". Tatra Mt. Math. Publ. 23, pp. 1-15, 2001.
- Assayag G., C. Rueda, M. Laurson, A. Agon, O. Delerue : "Computer Assisted Composition at Ircam : PatchWork & OpenMusic". Computer Music Journal 23:3, 1999.
- Balzano, G. : "The group-theoretic description of 12-fold and microtonal pitch systems", *Computer Music Journal*, 4, pp.66-84, 1980.
- Cazaban C., M. Andreatta, C. Agon, D. T. Vuza : Anatol Vieru : formalisation algébrique et enjeux esthétiques, à paraître.
- Mazzola, G.: *The Topos of Music*, à paraître, Birkhäuser Verlag, Basel, 2000.
- Vieru, A. : *Cartea modurilor*, 1 (*Le livre des modes*, 1), Ed. muzicala, Bucarest, 1980 (Revised ed.: *The book of modes*, Editura Muzicala, Bucarest, 1993).
- Vieru, A. : Generating Modal Sequences (A remote approach to minimal music), *Perspectives of New Music*, 30(2), pp. 178-200, 1992.
- Vuza, D.T. : “Sur le rythme périodique”, *Revue Roumaine de Linguistique-Cahiers de linguistique Théorique et Appliquée* 23, n°1, pp.73-103, 1985.

Annexe A

Propriété de prolifération des valeurs 4 et 8 dans un processus d'additions successives.

0

2	1	2	1	2	1	2	1

1 25% des 8 et 4

11	1	2	4	5	7	8	10

2 50% des 8 et 4

2	1	2	4	8	1	8	4

3 25% des 8 et 4

8	10	11	1	5	1	2	10	2	4	5	7	11	7	8	4

4 37.5% des 8 et 4

8	4	2	1	2	7	8	10	8	10	2	7	2	1	8	4

5 50% des 8 et 4

8	4	8	10	11	1	8	4	2	10	8	10	5	7	8	4

6 50% des 8 et 4

8	4	8	4	2	1	2	10	2	4	2	10	8	1	8	4

7 25% des 8 et 4

8	4	8	4	8	10	11	1	11	1	5	7	5	1	2	10
2	10	2	10	2	4	5	7	5	7	11	1	11	7	8	4

8 37.5% des 8 et 4

8	4	8	4	8	4	2	1	2	1	2	7	2	7	8	10
8	10	8	10	8	10	2	7	2	7	2	1	2	1	8	4

9 50% des 8 et 4

8	4	8	4	8	4	8	10	11	1	2	4	11	1	8	4
2	10	8	4	2	10	8	10	5	7	2	4	5	7	8	4

10 68.75% des 8 et 4

8	4	8	4	8	4	8	4	2	1	2	4	8	7	8	4
8	10	8	4	8	10	8	4	2	7	2	4	8	1	8	4

11 56.25% des 8 et 4

8	4	8	4	8	4	8	4	8	10	11	1	5	1	8	4
8	4	2	10	2	10	8	4	8	10	5	7	11	7	8	4

12 68.75% des 8 et 4

8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	2	1	2	7	8	4
8	4	8	10	8	10	8	4	8	4	2	7	2	1	8	4

13 75% des 8 et 4

8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	10	11	1	8	4
8	4	8	4	2	10	8	4	8	4	8	10	5	7	8	4

14 50% des 8 et 4

8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	2	1	2	10
2	10	2	10	2	4	2	10	2	10	2	10	8	1	8	4

15 25% des 8 et 4

8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	10	11	1
11	1	11	1	11	1	5	7	5	7	5	7	5	1	2	10
2	10	2	10	2	10	2	10	2	10	2	10	2	4	5	7
5	7	5	7	5	7	11	1	11	1	11	1	11	7	8	4

16 37.5% des 8 et 4

8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	2	1
2	1	2	1	2	1	2	7	2	7	2	7	2	7	8	10
8	10	8	10	8	10	8	10	8	10	8	10	8	10	2	7
2	7	2	7	2	7	2	1	2	1	2	1	2	1	8	4

28   84.37% des 8 et 4

8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4
8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	2	1	2	7	8	4
8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	10	8	10	8	4
8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	2	7	2	1	8	4

29   87.5% des 8 et 4

8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4
8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	10	11	1	8	4
8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	2	10	8	4
8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	10	5	7	8	4

30   50.25% des 8 et 4

8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4
8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	2	1	2	10
2	10	2	10	2	10	2	10	2	10	2	10	2	4	2	10
2	10	2	10	2	10	2	10	2	10	2	10	8	1	8	4

31   25.0% des 8 et 4

8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4
8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	10	11	1
11	1	11	1	11	1	11	1	11	1	11	1	11	1	5	7
5	7	5	7	5	7	5	7	5	7	5	7	5	1	2	10
2	10	2	10	2	10	2	10	2	10	2	10	2	10	2	10
2	10	2	10	2	10	2	10	2	10	2	10	2	4	5	7
5	7	5	7	5	7	5	7	5	7	5	7	5	7	11	1
11	1	11	1	11	1	11	1	11	1	11	1	11	7	8	4

…

…

…

61 93.75% des 8 et 4

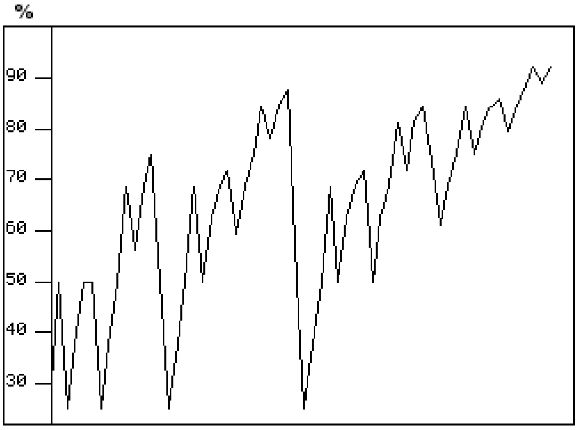
8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4
8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4
8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4
8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	10	11	1	8	4
8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4
8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	2	10	8	4
8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4
8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	10	5	7	8	4

62   50% des 8 et 4

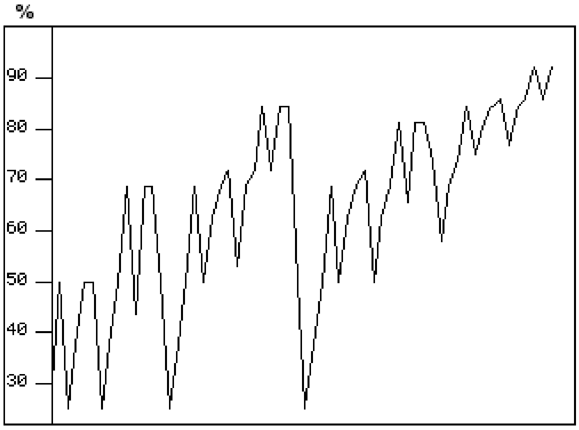
8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4
8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4
8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4
8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	2	1	2	10
2	10	2	10	2	10	2	10	2	10	2	10	2	10	2	10
2	10	2	10	2	10	2	10	2	10	2	10	2	4	2	10
2	10	2	10	2	10	2	10	2	10	2	10	2	10	2	10
2	10	2	10	2	10	2	10	2	10	2	10	8	1	8	4

Annexe B

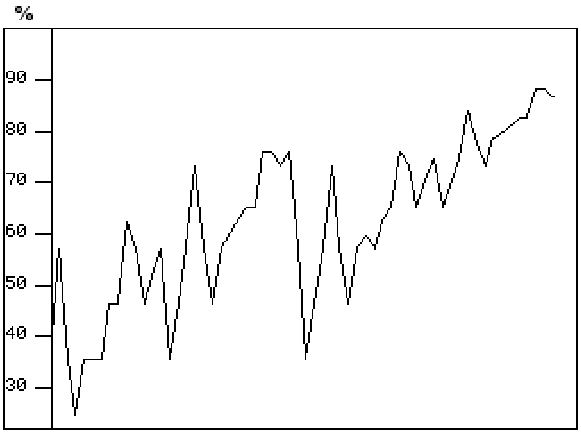
Prolifération des valeurs 4 et 8 selon différentes valeurs initiales.



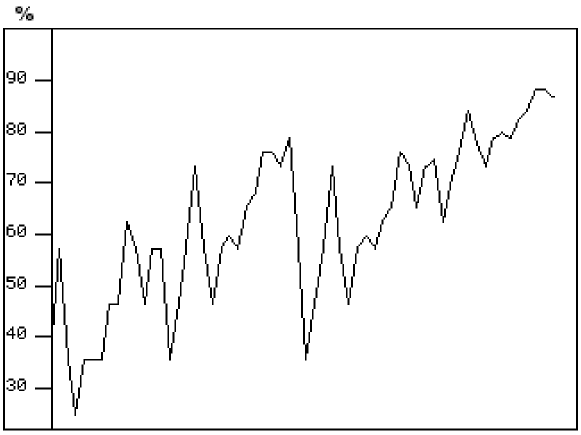
Valeur initiale = 8



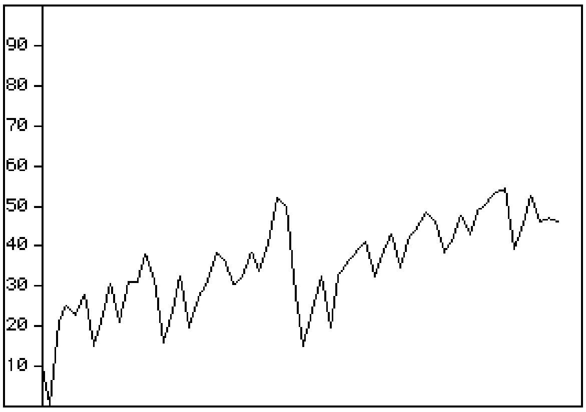
Valeur initiale = 2



Valeur initiale = 5



Valeur initiale = 11



Valeur initiale = 4

A noter que les valeurs 8, 2, 5 et 11 produisent un grand pourcentage de 4 et 8 (environ 90% après 60 itérations).

Pour 4, comme pour d’autres valeurs différentes des précédentes, la prolifération des 8 et 4 est moins importante.