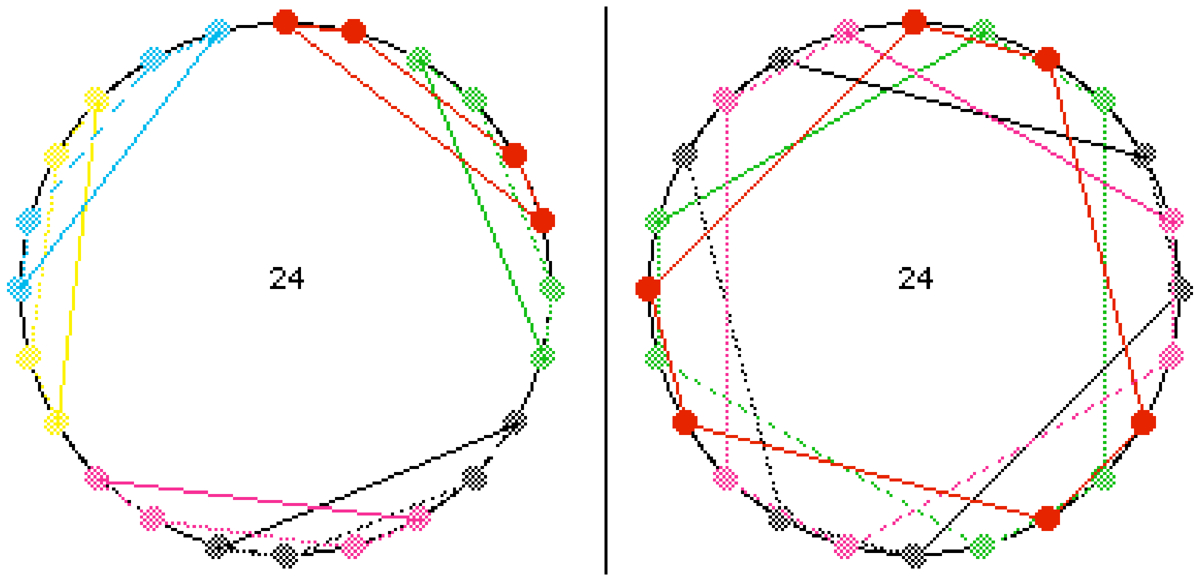
Master ATIAM – 21 février 2005

MMIM : Modèles mathématiques pour l'informatique musicale

Partie II : Méthodes algébriques

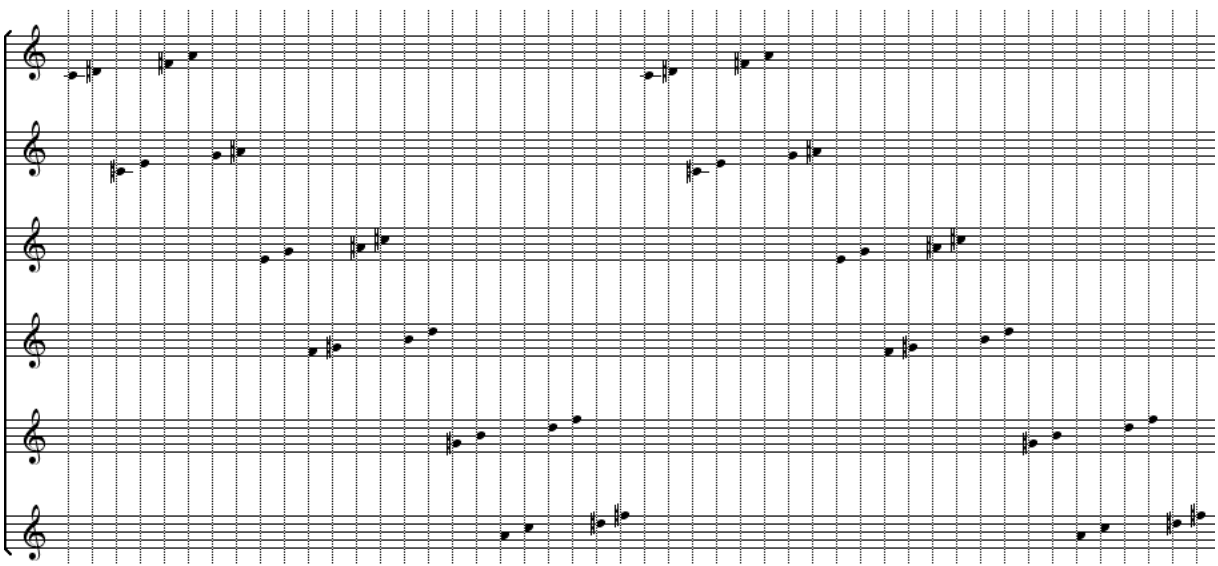
Moreno Andreatta

Cette partie sera également notée sur la moitié de la note finale. Tous les documents sont autorisés. Durée complète de l'épreuve (comportant deux parties) : 2 heures.
Cet examen a pour but d'étudier quelques propriétés de l'isomorphisme hauteurs/rythmes dans un espace tempéré par rapport à la construction des canons mélodico-rythmique ayant la propriété de pavage. Pour cela on s'appuiera sur les deux représentations circulaires suivantes :



Question 1

La grille mélodico-rythmique suivante représente un exemple de « canon de pavage »



1a- Donner une description du **canon rythmique** comme factorisation du groupe cyclique $\mathbf{Z}_{24}$ en somme directe de deux sous-ensembles A et B i.e. trouver $A,B \subset \mathbf{Z}_{24}$ tels que :

$$\mathbf{Z}_{24} = A \oplus B$$

(où A représente le pattern rythmique d'une voix du canon et B représente le pattern rythmique des entrées des voix du canon)

1b- Exprimer le **canon rythmique** comme produit direct de deux polynômes $A(x)$ et $B(x)$ à coefficients 0 et 1, i.e. trouver les polynômes $A(x)$ et $B(x)$ à coefficients 0 et 1 tels que :

$$1+x+x^2+\ldots+x^{23}= A(x)\otimes B(x)$$

1c- Vérifier que le polynôme $A(x)$ peut s'exprimer comme un produit de deux polynômes cyclotômiques parmi ceux de la liste suivante :

$\phi_2=1+x$
$\phi_3=1+x+x^2$
$\phi_4=1+x^2$
$\phi_6=1-x+x^2$
$\phi_8=1+x^4$
$\phi_{12}=1-x^2+x^4$
$\phi_{24}=1-x^4+x^8$

1d- Exprimer le **pattern mélodique** de la première voix du canon comme un sous-ensemble V_1 du groupe cyclique $\mathbf{Z}_{12}$ d'ordre 12 et en donner sa structure intervallique (Vieru) et une des possibles représentations via la théorie des cribles (Xenakis).

[Rappelons que, par exemple, la structure intervallique de la gamme diatonique

$D=\{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}$ est égale à (2 2 1 2 2 2 1)

et que, selon la théorie des cribles, 1_0 indique la gamme chromatique et que, par exemple :

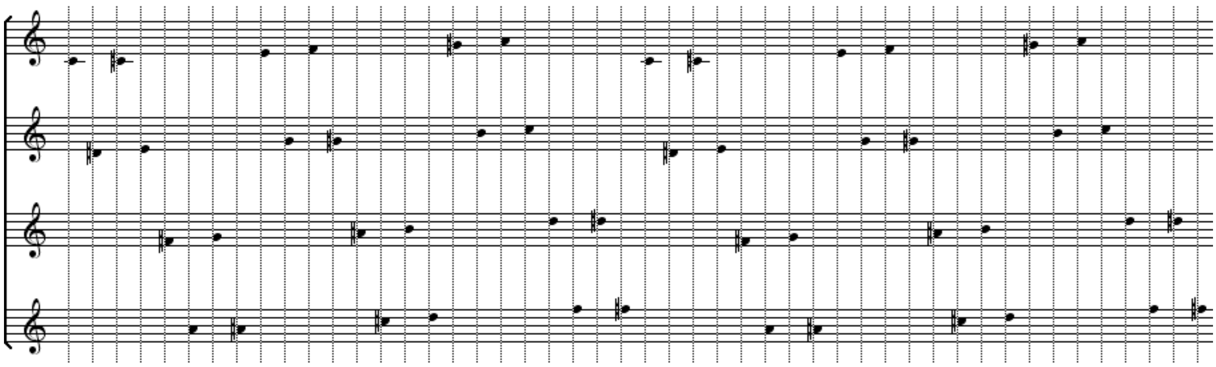
$1_0 = 2_0 \cup 2_1$]

1e- A l'aide de la structure intervallique, décrire quelques propriétés d'invariance de l'ensemble V_1 par rapport à l'opération de <u>transposition</u> (i.e. discuter son caractère de 'mode à transpositions limitées') et d'<u>inversion</u> et montrer que V_1 est un *sous-groupe* de $\mathbf{Z}_{12}$ (c'est-à-dire un sous-ensemble de $\mathbf{Z}_{12}$ qui est également un groupe par rapport à l'addition modulo 12).

1f- A l'aide de la théorie des cribles, expliciter le rapport de transposition entre la première voix du canon et les autres voix $V_2, V_3\ldots V_6$.

Question 2

La grille précédente a été transformée dans le « canon de pavage » suivant :



2a- Donner une description du canon rythmique comme factorisation du groupe cyclique $\mathbf{Z}_{24}$ en somme directe de deux sous-ensembles A' et B' et comme produit direct de deux polynômes A'(x) et B'(x) à coefficients 0 et 1 (où A' indique, comme toujours, le rythme de base du canon et B' donne les entrés des voix)

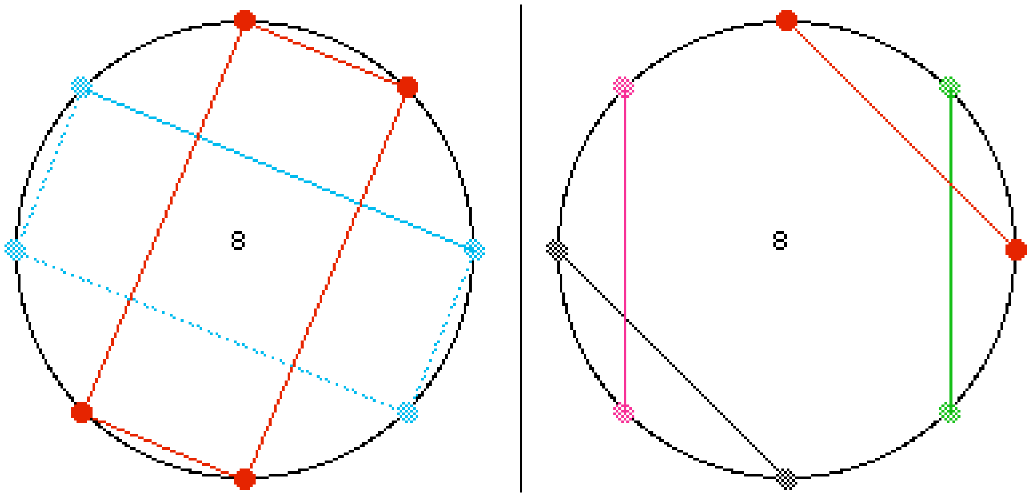
2b- Vérifier que le polynôme B'(x) peut s'exprimer comme un produit des polynômes cyclotomiques $\phi_2 = 1+x$ et $\phi_8 = 1+x^4$ mais que, malheureusement, A'(x) <u>n'est pas</u> le produit des polynômes cyclotomiques $\phi_3=1+x+x^2$, $\phi_4=1+x^2$, $\phi_6=1-x+x^2$, $\phi_{12}=1-x^2+x^4$ et $\phi_{24}=1-x^4+x^8$
(bien que $1+x+\ldots+x^{23}=\phi_2\phi_3\phi_4\phi_6\phi_8\phi_{12}\phi_{24}$)

2c- Exprimer le pattern mélodique de la première voix du nouveau canon comme un sous-ensemble W_1 du groupe cyclique $\mathbf{Z}_{12}$ d'ordre 12 et donner sa structure intervallique et une des possibles représentations via la théorie des cribles.

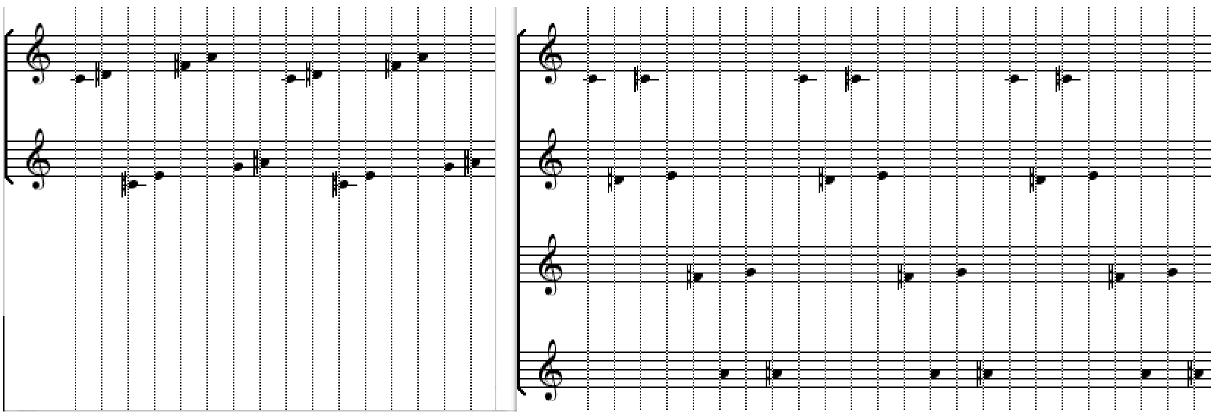
2d- Décrire quelques propriétés d'invariance de l'ensemble W_1 (par rapport à l'opération de transposition, d'inversion <u>et du passage au complémentaire</u>) en s'appuyant sur la structure intervallique et utiliser la théorie des cribles pour montrer que W_1 n'est pas un sous-groupe de $\mathbf{Z}_{12}$.

Question 3

Les deux représentations circulaires suivantes montrent la réduction modulo 8 des deux cercles initiaux :



Elles correspondent aux deux canons mélodico-rythmiques suivants :



3a – Exprimer les deux nouvelles factorisations du groupe cyclique d'ordre 8 en somme directe des deux sous ensembles A et B (figure à gauche) et A' et B' (figure à droite).

3b – Mettre en évidence, dans les deux factorisations, la propriété d'invariance par rapport à la transposition (i.e. modes à transpositions limitées de Messiaen) de l'un des facteurs et justifier la 'nécessité structurale' de cette propriété (par rapport au groupe cyclique $\mathbf{Z}_8$).

3c – Donner les polynômes A(x), B(x), A'(x), B'(x) à coefficients 0 et 1 correspondants aux deux factorisations précédentes et vérifier que :

$$1+x+x^2+\ldots+x^7 = A(x)\otimes B(x) = A'(x)\otimes B'(x)$$

3d – Vérifier que A(x), B(x), A'(x), B'(x) peuvent (cette fois !) s'exprimer comme produit des polynômes cyclotomiques ϕ_2, ϕ_4, ϕ_8.