Université Pierre-et-Marie-Curie (Paris 6)
Master ATIAM

Étude des ensembles homométriques et leur application en théorie mathématique de la musique et en composition assistée par ordinateur

Stage à l'IRCAM de mars à juin 2009
encadré par Moreno Andreatta et Carlos Agon

John Mandereau

Remerciements

Mes directeurs de stage Moreno Andreatta et Carlos Agon ont encadré mon stage à la fois en me laissant une grande liberté de travail et en me faisant très largement partager leur culture scientifique, ce qui m'a permis de commencer à goûter à la recherche avec beaucoup d'enthousiasme, tout en tirant des leçons de cette expérience.

Je remercie Sylvie Benoit de m'avoir accueilli dans son bureau, et Hugues Vinet, directeur scientifique de l'IRCAM, de m'avoir donné sa confiance pour réaliser ce stage.

Mon travail doit également beaucoup à Daniele Ghisi, étudiant au cursus 1 de composition à l'IRCAM en 2008-2009 et étudiant en mathématiques à l'université de Milan, qui a déjà travaillé sur le sujet de ce stage et qui m'a introduit le sujet avant le début du stage ; nous avons échangé nombre d'idées et quelques résultats, et nous envisageons de poursuivre ces échanges.

Enfin, je remercie Emmanuel Amiot et Mate Matolcsi pour leurs conseils mathématiques donnés au cours de et après une rencontre début mai 2009.

Mots-clés : intervalle, *Set theory*, système d'intervalles généralisé, structure intervallique, contenu intervallique, Z-relation, fonction de Patterson, homométrie, récupération de phase.

Table des matières

Notations

A^C	complémentaire de l'ensemble A dans un ensemble $E \supset A$
$\#(A)$	cardinal de l'ensemble A
$S(E)$	groupe des permutations d'un ensemble E
$\mathcal{P}(E)$	ensemble des parties d'un ensemble E
$H \leqslant G$	H est un sous-groupe de G
$Aut(G)$	groupe des automorphismes d'un groupe G
E/G	ensemble des orbites d'une action d'un groupe G sur un ensemble E
$\mathbb{Z}_n$	anneau des entiers modulo n, $n \in \mathbb{N}^*$
$[k]_n$ ou $[k]$	classe de l'entier relatif k modulo $n \in \mathbb{N}^*$
K	un des corps $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
$\mathbf{1}_A : \; E \to \{0,1\}$ $x \mapsto$ si $x \in A, 0$ sinon	fonction indicatrice (ou caractéristique) de la partie A de E
$\delta_g : \; G \to \{0,1\} \subset K$ $x \mapsto 1$ si $x = g, 0$ sinon	masse de Dirac associée à $g \in G$
$T_g : \; G \to G$ $x \mapsto x - g$	translation (transposition en musique) par g
T	T_1 dans le cas $G \leqslant \mathbb{R}$, $T_{[1]_n}$ dans le cas $G = \mathbb{Z}_n$
$\mathcal{T} := < \mathrm{T} >$	groupe des transpositions de G
$I : \; G \to G$ $x \mapsto -x$	inversion
$E^* : \; G \to K$ $x \mapsto \overline{E(-x)}$	inversion d'une fonction $E : G$
$\mathcal{D} := < \mathrm{T}, \mathrm{I} >$	groupe diédral généralisé de G

Introduction

Ce stage a pour l'objet une étude mathématique d'un problème de combinatoire en relation avec des notions et applications musicales. Les notions musicales en jeu sont l'intervalle entre deux points d'un ensemble qui représente un paramètre musical, comme la hauteur, l'instant d'attaque d'un événement musical, le timbre, la donnée conjointe de l'instant d'attaque et de la durée d'un événement musical — et la manipulation de parties de cet ensemble.

Le problème principal consiste à reconstruire les parties d'un système d'intervalles généralisé, à partir de la connaissance de certaines données sur les intervalles entre les points de cette partie.

Ce type de problème a fait l'objet de deux chemins de recherche indépendants, l'un stimulé par la cristallographie, l'autre en théorie mathématique de la musique. Ces deux chemins n'ont été reliés que récemment, en particulier dans [CH07].

Plan du mémoire

Le plan de ce mémoire permet de présenter progressivement les notions abordées et les outils mathématiques qui les accompagnent.

Le premier chapitre précise la modélisation mathématique de la notion d'intervalle, en introduisant les définitions et les notations des objets mathématiques qui seront utilisés dans le chapitre suivant. Le point de départ est la notion de système d'intervalle généralisé de Lewin, dont la lecture d'un point de vue mathématique invite à présenter des groupes ; mon apport dans ce chapitre consiste à expliciter la construction et l'emploi d'une mesure sur un système d'intervalle généralisé, et à comparer les notions d'intervalle et de distance.

Le second chapitre donne les définitions du contenu intervallique, notion de théorie mathématique de la musique, ainsi que ses propriétés élementaires, notamment le fameux théorème de l'hexacorde. Je n'apporte rien de nouveau dans ce chapitre à part le simple fait d'écrire dans le cas assez général d'un groupe abélien muni d'une mesure invariante par translation.

Le troisième chapitre est consacré au problème de récupération de la phase. Outre les aspects purement mathématiques, j'y présente des algorithmes d'énumération exhaustive et je construis un algorithme de reconstruction. La fin du chapitre résume les définitions et résultats sur les contenus multi-intervalliques.

Chapitre 1

Modélisation mathématique de paramètres et d'intervalles musicaux

Le sujet consiste à étudier des propriétés et fonctions sur les intervalles — terme musical que l'on peut traduire mathématiquement par distances ou différences partielles — d'objets mathématiques qui modélisent des paramètres musicaux.

Pour cela, il faut déterminer les espaces mathématiques qui représentent les paramètres musicaux, et clarifier la notion d'intervalle.

1.1 Les systèmes d'intervalles généralisés de Lewin

David Lewin définit dans [Lew87] sur une base mathématique la notion de *système d'intervalle généralisé* (s.i.g.) — GIS pour Generalized Interval System en anglais — dont je reprends la définition 2.3.1.

Définition 1.1 *Un système d'intervalle généralisé est un triplet* (S, G, int) *où* S *est un ensemble, appelé* espace *du s.i.g.,* G *un groupe appelé* groupe d'intervalles *du s.i.g., et* $\mathrm{int} : S \times S \to G$ *une application tels que*

(A) Pour tous r, s, t *dans* S*,* $\mathrm{int}(r,s)\mathrm{int}(s,t) = \mathrm{int}(r,t)$.

(B) Pour tous s *dans* S*,* i *dans* G*, il existe un unique* t *dans* S *tel que* $\mathrm{int}(s,t) = i$.

Le mathématicien Dan Tudor Vuza, dans sa lecture de l'ouvrage de Lewin [Vuz88], fait remarquer que les conditions (A) et (B) de cette définition sont équivalentes à la définition d'une action à droite simplement transitive du groupe G sur S, telle que pour tous s, t dans S $s\mathrm{int}(s,t) = t$. D. T. Vuza fait également l'analogie de cette définition avec celle d'espace affine, qui est exactement la même chose à ceci près que pour un espace affine G doit être un espace vectoriel, et que l'on note $\overrightarrow{st}$ au lieu de $\mathrm{int}(s,t)$ le vecteur qui va de s à t.

Dans tout s.i.g., l'espace S et le groupe d'intervalles G sont en bijection : pour tout s dans S fixé, l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{LABEL} \ \ S &\to G \\ t &\mapsto \mathrm{int}(s,t) \end{aligned}$$

est bijective, grâce à l'axiome (B). Le nom de l'application LABEL est dû à David Lewin, au début du chapitre 3 de [Lew87]. Il sera fait dans la suite deux usages de cette bijection.

Premièrement, elle permet de prendre pour S le groupe G lui-même, l'action définissant le s.i.g. étant l'action de G sur lui-même par translation à droite, ce qui équivaut encore à $\mathrm{int}(s,t) = s^{-1}t$: cela a pour inconvénient le risque de confusion entre les élements de l'espace du s.i.g. et les intervalles, mais on peut espérer l'éviter en nommant systématiquement les éléments de G comme des points — les éléments de l'espace — ou bien comme des intervalles ; de plus, chaque que je considérerai une partie de G, je sous-entendrai un ensemble de points de G sauf mention contraire.

Deuxièmement, une telle bijection permet de transporter une structure sur G autre que celle de groupe vers S, telle qu'une topologie ou une mesure : de plus, si cette structure est invariante par translation à droite, la structure obtenue sur S ne dépend pas du choix de s dans S définissant la bijection LABEL. Ce principe de transport de structure dans les systèmes d'intervalles généralisés a été soigneusement étudié par Oren Kolman dans [Kol04].

1.2 Un répertoire de groupes d'intervalles

Donnons à présent des exemples de s.i.g. à travers des groupes d'intervalles qui seront utilisés par la suite, à la fois selon une pertinence musicale, et selon l'intérêt de leur propriétés mathématiques. Vu les propriétés assez différentes des opérations de translation et d'inversion dans un groupe non commutatif, je me limiterai au cas des groupes commutatifs dans toute la suite de ce mémoire.

1.2.1 Des groupes finis aux groupes infinis discrets

Groupes finis

C'est Ernst Krenek qui le premier représenta les classes de hauteurs chromatiques dans un tempérament égal à intervalle d'octave près, autrement dit pour le musicien les 12 demi-tons de la gamme chromatique, sur un cercle, invitant naturellement à formaliser géométriquement et algébriquement les transformations musicales que sont les transpositions, inversions et opérations ensemblistes comme l'on fait par la suite Milton Babbitt. Par ailleurs, des théoriciens et des compositeurs ont généralisé la manipulation de classes de notes modulo un certain nombre $n \in \mathbb{N}^*$ de divisions de l'octave (ou de tout autre intervalle), c'est-à-dire ont manipulé des s.i.g. avec $\mathbb{Z}_n$ comme groupe d'intervalles.

Je limiterai la plus grande partie du chapitre 3 au cas des groupes finis cycliques, sans oublier qu'il existe bien d'autres groupes finis ; on distingue notamment les groupes abéliens (i.e. commutatifs) finis, qui sont des produits directs de groupes cycliques, et les groupes non abéliens.

Notations dans les groupes $\mathbb{Z}_n$

On note pour tout $n \geqslant 2$ $\mathbb{Z}_n$ l'anneau des entiers modulo n. Pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, on note $[k]_n$ la classe de k modulo n, et pour tout $x \in \mathbb{Z}_n$ on note $s(x)$ l'unique entier $j \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $[j]$.

Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on notera $[k]$ au lieu de $[k]_n$ et on notera les classes de constantes numériques 0, 1, 2, -1,...au lieu de $[0], [1], [2], [-1], \ldots$.

Bien qu'il n'existe pas de relation d'ordre compatible avec l'addition sur $\mathbb{Z}_n$, je vais avoir besoin de dire qu'un élément est « situé entre deux autres de tel côté », que la notion d'intervalle de $\mathbb{Z}_n$ va pouvoir exprimer.

Définition 1.2 *On appelle* ***intervalle de*** $\mathbb{Z}_n$ *toute partie A de $\mathbb{Z}_n$ de la forme $\{a, a+1, \ldots, a+k\}$, où $a \in A$ et $k \in \mathbb{Z}_n$.*

Si de plus $s(k) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, alors on dit que A est un ***intervalle-diamètre****.*

Pour être plus rigoureux, on peut définir les intervalles de $\mathbb{Z}_n$ récursivement, comme toutes les parties de $\mathbb{Z}_n$ de la forme $[\![a, b]\!]$, où

- $[\![a, a]\!] := \{a\}$,
- si $a \neq b$, $[\![a, b]\!] := [\![a, b-1]\!] \cup \{b\}$.

Les propriétés élémentaires qui suivent permettent de manipuler cette notion d'intervalle :

Proposition 1.3 *Soit $I = [\![i, j]\!]$ un intervalle de $\mathbb{Z}_n$.*

- *I est non vide et $\#(I) = 1 + s(j - i)$;*
- *si $i - 1 = j$, alors $I = \mathbb{Z}_n$ et par suite $I^C = \varnothing$;*
- *si $i - 1 \neq j$, alors $I^C = [\![j+1, i-1]\!]$.*

Preuve

- Le cardinal de I annoncé peut se calculer par récurrence grâce à la définition récursive d'un intervalle, ce qui prouve le premier point ;
- I est inclus dans $\mathbb{Z}_n$ qui est de cardinal fini n ; si de plus $i - 1 = j$, alors par la formule précédente I est aussi de cardinal n, ainsi $I = \mathbb{Z}_n$;
- si $i - 1 \neq j$, on peut montrer que $I^C = [\![j+1, i-1]\!]$ par récurrence sur $s(j - i)$.

□

Enfin, on emprunte la notation d'une somme sur un intervalle d'entiers pour l'utiliser dans le cas des intervalles de $\mathbb{Z}_n$:

Notation 1.4 *Soit G un groupe commutatif, noté additivement, soit $I = [\![i, j]\!]$ un intervalle de $\mathbb{Z}_n$, soit $(g_k)_{k\in I} \in G^I$. On note* $\sum_{k=i}^{j} g_k := \sum_{k\in I} g_k$.

Groupes infinis

David Lewin a généralisé la *Set Theory* grâce aux s.i.g., et il a notamment donné des exemples de s.i.g ayant un groupe d'intervalles infini, en particulier le groupe des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ et le groupe des nombres réels $\mathbb{R}$. En pratique, même si on travaille le plus souvent sur des parties finies de tels groupes infinis, il est nécessaire en théorie de garder une structure de groupe pour que le s.i.g. soit bien défini. Il peut être pourtant intéressant de travailler avec de tels groupes, lorsqu'on veut manipuler des accords (modélisés comme ensembles de hauteurs de note) en n'identifiant pas les notes qui ont pour intervalle un multiple d'un intervalle fixe (une octave assez souvent, mais pas nécessairement).

Même si on travaille avec des groupes d'intervalles infinis, on ne considère toujours que des parties finies de G, afin de pouvoir étudier des propriétés de ces ensembles qui s'expriment comme des cardinaux d'ensembles obtenus à partir d'unions, d'intersections et application de fonctions de G dans G : par exemple, il sera important de pouvoir distinguer dans le cas d'inclusion de deux parties de G $A \subset B$ le cas d'inclusion stricte et le cas d'égalité, à partir de la donnée des cardinaux de A et B, ce que l'on ne peut faire en général. Dans le cadre plus particulier du sujet de ce mémoire, on étudie la similarité de parties de G et de fonctions de G à valeurs numériques, et pour mesurer cette similarité correctement, on se limitera à des parties de mesure finie et à des fonctions à valeurs finies qui s'annulent partout sur G sauf sur une partie de mesure finie ; la section suivante précise ce que l'on entend par mesure et quelles mesures on peut definir et utiliser sur un certaine classe de groupes d'intervalles.

1.2.2 Des groupes discrets aux groupes localement compacts, et du cardinal à la mesure

On peut remarquer que les parties finies de G sont les parties compactes de G lorsqu'on le munit de la topologie discrète, ce qui justifie le titre de la partie précédente.

D. Lewin a proposé dans [Lew87] une généralisation en considérant le cardinal comme cas particulier d'une mesure ; la suite de ce chapitre et le suivant vont exploiter cette proposition. On peut se reporter à l'annexe A pour la définition et les propriétés élémentaires d'une mesure. Pour un exposé plus détaillé et complet, on peut se reporter au chapitre 2 de [Rud74].

On peut définir sur une classe assez générale de groupes une mesure.

Théorème 1.5 *Soit G un groupe topologique localement compact abélien. Il existe une mesure μ sur G invariante par translation sur la tribu des boréliens de G $B(G)$, i.e. pour tous $A \in B(G)$, $g \in G$, $\mu(A+g) = \mu(A)$. De plus, cette mesure est unique à une constante multiplicative près.*

Une preuve de cet important résultat se trouve dans [Sal04].

L'invariance par translation permet le transport de la mesure sur l'espace du s.i.g. S indépendamment du choix de $s \in S$ comme point de référence de la bijection LABEL.

On peut alors substituer à la manipulation de parties finies les parties mesurables de mesure finie (dont les parties compactes) d'un espace localement compact sont l'analogue des parties finies d'un groupe que l'on considère si on n'a pas mis sur G de mesure autre que la cardinal.

Remarquons également que dans tout groupe topologique, les translations sont des homéomorphismes, autrement dit la topologie est invariante par translation, donc le transport de la topologie vers l'espace du s.i.g. est sans difficulté.

Bien que cela demanderait une étude approfondie, je voudrais évoquer en quelques mots l'intérêt de considérer une topologie autre que discrète. La manipulation de formes (ensembles, fonctions) dans un domaine continu permet de manipuler la continuité et la discontinuité, comme cela est suggéré dans [Kol04] ; ou bien on peut adopter un modèle probabiliste, où « on ne sait pas exactement où se trouvent les points ». Le passage du continu au discret par discrétisation, ou le passage en sens inverse par interpolation, pourraient également être utilisés dans la manipulation formelle de paramètres musicaux.

1.2.3 Groupes munis d'une distance

Un certain nombre de groupes utilisés ont une distance naturelle, tels que $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ et le produit de ces groupes. Plusieurs distances peuvent définir une même topologie, mais pour relier la notion d'intervalle à des propriétés métriques, on a intérêt à considérer des distances invariantes par translation.

Définition 1.6 *Une distance d sur un groupe G est dite invariante par translation si pour tous g, h dans G on a $d(g,h) = d(g-h,e)$.*

Les distances naturelles sur $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, et toute distance définie par une norme $p \in [1,+\infty]$ sur le produit des ces groupes sont invariantes par translation. On peut également considérer une distance naturelle sur $\mathbb{Z}_n$:

Proposition 1.7 *L'application*

$$d: \begin{array}{c} \mathbb{Z}_n^2 \to \mathbb{N} \\ ([k]_n, [l]_n) \mapsto \min\{|l' - k'|, k' \in [k]_n, l' \in [l]_n\} \end{array}$$

définit une distance invariante par translation sur $\mathbb{Z}_n$.

On notera généralement d une distance invariante par translation sur un groupe G métrique localement compact — i.e. un groupe muni d'une distance qui est localement compact pour la topologie associée à cette distance.

Remarquons que la distance entre deux points de G est dans certains cas une donnée plus faible que celle de leur intervalle. En particulier, lorsque d est invariante par translation, pour tous x, y, x', z' dans G tels que $\mathrm{int}(x,y) = x^{-1}y = x'^{-1}y' = \mathrm{int}(x', y')$, on a $d(x,y) = d(e, -x+y) = d(e, -x'+y') = d(x', y')$, c'est-à-dire que la distance entre deux points ne dépend que de leur intervalle ; on peut alors définir pour tout intervalle $g \in G$ sa norme [1] $|g| = d(g,e)$, qui est la distance entre deux points quelconques de G ayant g pour intervalle. Des intervalles distincts peuvent avoir la même norme ; par exemple, dans $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}_n$ munis de leurs distances naturelles respectives, la distance perd le signe de l'intervalle : à une distance $a \in \mathbb{R}_+$ peuvent correspondre les intervalles réels ou entiers $a, -a$, et dans le cas de $\mathbb{Z}_n$, à une distance $a \in \mathbb{N}^*$ peuvent correspondre les intervalles $[a]_n, [-a]_n$. Dans des groupes métriques engendrés par plus d'un élément, cette perte d'information est encore plus grande : par exemple, dans $\mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne, tous les vecteurs de même norme forment un cercle. Dans tous ces cas, on voit que l'information supplémentaire que contient un intervalle par rapport à une distance représente un « angle » ; nous verrons dans le chapitre 2 que l'on a une différence d'information analogue entre une partie de mesure finie d'un groupe localement compact G — ou une fonction de G vers $\mathbb{R}$ bornée à support compact — et son contenu intervallique — respectivement sa fonction de Patterson.

On rappelle également le définition du diamètre d'une partie A de G, qui donne la borne supérieure de la norme des intervalles entre des points de A :

Définition 1.8 *Pour toute partie A de G, on définit le diamètre de A*

$$\mathrm{diam}(A) := \sup_{(s,t)\in A^2} d(s,t)$$

Dans le cas où A est compact, en particulier si A est fini, cette borne supérieure est atteinte : c'est la norme du plus grand intervalle entre deux points de A.

1. Il ne s'agit pas d'une norme dans un espace vectoriel, mais comme il est déjà employé en analyse dans des espaces vectoriels et en algèbre commutative avec des significations différentes, je me suis permis de l'emprunter par analogie avec la norme d'un vecteur entre deux points d'un espace affine.

Dans le cas $G = \mathbb{Z}_n$, il faut bien remarquer que toute valeur de la distance définie précédemment est bornée par $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, donc tout diamètre également ; en particulier, les intervalles de $\mathbb{Z}_n$ de longueur $k > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ont tous pour diamètre $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Cette notion de distance sera utilisée dans les sections 3.3.1 et 3.3.2.

1.3 Objets musicaux : parties de l'espace du paramètre musical, et fonctions sur cet espace comme généralisation

Une généralisation du concept d'ensemble est celui de *multi-set*, pour lequel l'appartenance d'un élément peut être non seulement vraie (zéro) ou fausse (un), mais aussi multiple (valeur entière). Encore plus généralement, on peut plonger l'ensemble des parties mesurables de mesure finie d'un groupe topologique locament compact abélien G (groupe d'intervalles et espace s'un s.i.g. à la fois) dans l'algèbre $\Sigma_c(G, K)$ des fonctions mesurables presque partout bornées à support compact, munie du produit de convolution, via l'injection qui à toute partie A de mesure finie de G associe sa fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$. L'image de cette injection est l'ensemble des fonctions mesurables à support compact qui valent presque partout 0 ou 1.

L'intérêt mathématique de considérer des fonctions qui ne sont pas à valeurs dans $\{0, 1\}$ mais dans K est de bénéficier de tous les outils associés au produit de convolution et la structure d'algèbre de $\Sigma_c(G, K)$.

Cela peut aussi avoir un intérêt musical, pour pouvoir paramétrer une donnée supplémentaire, par exemple la nuance, le nombre d'instruments jouant telle hauteur de note où à tel instant, ou une combinaison de ces paramètres en rapport avec l'intensité sonore ; par ailleurs, des fonctions à valeurs dans $[0, 1]$ et d'intégrale 1 peuvent représenter une probabilité.

Chapitre 2

Z-relation et homométrie

Dans tout ce chapitre, G désignera un groupe topologique localement compact abélien, noté additivement, μ la mesure de Haar invariante par translation sur G associée à sa topologie.

2.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 2.1 *Soit A une partie de G de mesure finie. Le* ***contenu intervallique*** *de A est la fonction*

$$\begin{aligned} \mathrm{iv}(A): \ & G \to \mathbb{N} \\ & g \mapsto \mu(A \cap g + A) \end{aligned}$$

Dans le cas où G est discret, on parle aussi de **vecteur intervallique**, *interval vector* en anglais.

Cette définition est la particularisation de la définition de la fonction intervallique de deux parties de G X et Y dans le cas où $X = Y$, que l'on peut trouver dans [For77] p. 13 ou [Lew87] p. 88. Musicalement parlant, le contenu intervallique compte le nombre d'occurences de chaque intervalle dans un ensemble.

David Lewin exprime dans [Lew59] le contenu intervallique comme un produit de convolution en utilisant la bijection entre les parties mesurables de G de mesure finie et les fonctions à support compact sur G à valeur dans $\{0,1\}$, à savoir $\mathrm{iv}(A) = \mathbf{1}_A * \mathbf{1}_{A^{-1}}$; ainsi on peut étendre cette définition à toute fonction à support compact sur G, comme cela se fait en cristallographie, en particulier dans l'introduction de [Ros84] :

Définition 2.2 *Pour toute fonction $E \in \Sigma_c(G,K)$, on définit la* ***fonction de Patterson*** *de E*

$$d_E^2 := E * E^* : x \mapsto \int E(y)\overline{E(y-x)}\, d\mu(y)$$

.

À partir de ces définitions, on peut s'intéresser aux parties de mesure finie de G qui ont le même contenu intervallique, ou aux fonctions sur G à support compact qui ont la même fonction de Patterson.

Définition 2.3 *Des parties de mesure finie de G $A_1, \ldots, A_s$ sont dites* en relation Z, *ou en* ***Z-relation****, si elles ont le même contenu intervallique.*

Définition 2.4 *Des fonctions mesurables à support compact de G vers K $E_1, \ldots, E_s$ sont dites* ***homométriques*** *si elles ont la même fonction de Patterson.*

Proposition 2.5 (Invariance par transposition, inversion et par isométrie) *Pour toute fonction $E \in \Sigma_c(G,K)$, pour tout $g \in G$, $d^2(T_g(E)) = d^2(E)$ et $d^2(I(E)) = d^2(E)$.*

Preuve
L'invariance par translation (ou plutôt transposition en musique) découle de l'invariance par translation de la mesure de Haar sur G : pour tout $x \in G$, $d^2(T_g(E))(x) = \int E(y-g)\overline{E(y-x-g)}\, d\mu(y) = \int E(z)\overline{E(z-x)}\, d\mu(z+g) = \int E(z)\overline{E(z-x)}\, d\mu(z)$, où l'on a fait dans la deuxième égalité le changement de variable $y = z + g$.

L'invariance par inversion découle de la commutativité du produit de convolution et du fait que l'inversion est une involution : $d^2(I(E)) = I(E) * I(I(E)) = I(E) * E = E * I(E) = d^2(E)$. □

Le lemme précédent dit que l'on peut obtenir des parties de mesure finie de G en Z-relation, et des fonctions homométriques, simplement par application de transpositions et d'inversions. Cependant, il existe également des couples de parties en Z-relation dont l'un n'est l'image de l'autre ni par transposition ni par inversion. L'exemple suivant en est le cas le plus simple dans les groupes cycliques $\mathbb{Z}_n$ — il n'y en a pas dans $\mathbb{Z}_n$ pour $n \leqslant 7$.

Exemple 2.6 *Dans $\mathbb{Z}_8$, $\{1,2,3,6\}$ et $\{0,1,3,4\}$ sont en Z-relation.*

Définition 2.7 *On dit que des fonctions $E_1, \ldots, E_s$ dans $\Sigma_c(G,K)$ sont non trivialement homométriques si elles sont homométriques et si aucune de ces distributions n'est l'image d'une des autres par une transposition ou inversion. On définit de même une famille de parties de mesure finie de G en Z-relation non triviale.*

Afin de donner une propriété de croissance de la fonction de Patterson, introduisons une relation d'ordre sur $\Sigma_c(G,\mathbb{R})$: on notera $E \leqslant F$ si pour tout x dans G $E(x) \leqslant F(x)$. Cette relation d'ordre est compatible avec l'inclusion comme relation d'ordre sur $\mathcal{A}$, c'est-à-dire que la bijection canonique de (A) vers $\Sigma_c(G,\{0,1\})$ est une application croissante.

Lemme 2.8 (Croissance de la fonction de Patterson) *Pour toutes fonctions E, F dans $\Sigma_c(G, \mathbb{R}_+)$, si $E \leqslant F$ alors $d^2(E) \leqslant d^2(F)$, i.e. $d^2 : \Sigma_c(G, \mathbb{R}_+) \mapsto \Sigma_c(G, \mathbb{R}_+)$ est une application croissante. En particulier, pour toutes parties de G de mesure finie A, B, si $A \subset B$ alors $\mathrm{iv}(A) \leqslant \mathrm{iv}(B)$.*

Preuve
Pour tous x, y dans G, on a $0 \leqslant E(y) \leqslant F(y)$ et $0 \leqslant E(y-x) \leqslant F(y-x)$, donc par produit $E(y)E(y-x) \leqslant F(y)F(y-x)$, d'où le résultat par positivité de l'intégrale par rapport à la mesure μ. □

Proposition 2.9 (Conservation de la périodicité) *Soit $E \in \Sigma_c(G)$. S'il existe $r \in G$ tel que $E = T_r(E)$, alors $d^2(E) = T_r(d^2(E))$.*

Réciproque partielle : si la seule partie mesurable de mesure nulle de G est l'ensemble vide, et si A est une partie de mesure finie de G telle que $\mathrm{iv}(A) = T_r(\mathrm{iv}(A))$ pour un r dans G, alors $A = A + r$.

Preuve
Le premier point de la proposition est évident d'après l'invariance par translation de μ.

La réciproque s'obtient en exprimant $\mu(A)$ suivant la partition $A = (A \cap (A+r)) \sqcup (A^C \cap (A+r))$. □

Des formes particulières de couples de parties de $\mathbb{Z}_n$ existant pour certains n sont données dans [AG00].

Les parties de $\mathbb{Z}_n$ de contenu intervallique constant (lorsqu'on omet la première composante) sont connues sous le nom de *Singer difference sets* : [LSS02] en donne des exemples ainsi que des résultats théoriques.

La proposition suivante, suggérée par Daniele Ghisi, fait le lien entre homométrie dans $\mathbb{Z}_n$ et dans $\mathbb{Z}$.

Proposition 2.10 *Soit A une partie de $\mathbb{Z}_n$ contenue dans un intervalle de $\mathbb{Z}_n$ de longueur $k < n/2$; notons $A = \{[a_i]_n\}_{i \in [\![0,k-1]\!]}$ avec $a_0 < a_1 < \ldots < a_{k-1}$, $A' = \{a_i\}_{i=0,k-1}$. Les parties de $\mathbb{Z}_n$ en Z-relation avec A sont les réductions modulo n des parties de $\mathbb{Z}$ en relation avec A'.*

Preuve
Il suffit d'identifier contenu intervallique dans $\mathbb{Z}$ et contenu intervallique dans $\mathbb{Z}_n$, en relevant $\mathbb{Z}_n$ par $[\![-\lfloor n/2 \rfloor, \lfloor n/2 \rfloor - 1]\!] \subset \mathbb{Z}$. □

2.2 Contenu intervallique et structure intervallique

Dans cette section, on va faire le lien entre contenu intervallique d'une partie de $\mathbb{Z}_n$ et sa structure intervallique.

2.2.1 Structure intervallique dans $\mathbb{Z}_n$

La structure intervallique est définie sous le terme *modal strcuture* par Anatol Vieru dans le chapitre 3 de [Vie93].

Définition 2.11 *Soit $A = (a_i)_{i\in\mathbb{Z}_k}$ avec $s(a_0) < \ldots < s(a_{[k-1]})$ une partie de $\mathbb{Z}_n$. On définit la structure intervallique de A par* $\mathrm{SI}(A) = (a_1 - a_0, \ldots, a_{[k-1]} - a_{[k-2]}, a_0 - a_{-1}) =$.

Les propriétés de la structure intervallique par rapport aux opérations d'inversion, de transposition, d'union et par rapport à la périodicité sont étudiées également dans [Vie93].

2.2.2 Contenu intervallique d'une structure intervallique

Considérons d'abord un exemple. Dans $\mathbb{Z}_{12}$, $A = \{0,1,3,7\}$ et $B = \{0,1,7,9\}$ sont en Z-relation, leur contenu intervallique est $(4,1,1,1,1,1,2,1,1,1,1,1)$. On a $\mathrm{SI}(A) = (1,2,4,5), \mathrm{SI}(B) = (1,6,2,3)$. $\mathrm{SI}(A)$ contient un 5 mais pas de 6, et vice-versa pour $\mathrm{SI}(B)$, donc cette Z-relation est non triviale. On remarque que la somme des 2^e et 3^e composantes de $\mathrm{SI}(A)$ vaut 6, qui est la 2^e composante de $\mathrm{SI}(B)$, tandis que la somme des 3^e et 4^e composantes de $\mathrm{SI}(B)$ vaut 5, qui est la 4^e composante de $\mathrm{SI}(A)$: ainsi, on voit que les structures intervalliques de A et B peuvent être obtenues l'une de l'autre par une composition de *fusions* — remplacements de composantes contigües par leur somme — et de *partitionnements* — remplacement d'une composante par une partition en des entiers. Ceci est une piste pour établir une formule qui exprime le contenu intervallique en fonction de la structure intervallique en termes de partitions d'entiers, que j'expose dans la suite.

Soit $A = (a_i)_{i\in\mathbb{Z}_k}$ avec $s(a_0) < \ldots < s(a_{[k-1]})$ une partie de $\mathbb{Z}_n$. On note $\mathrm{SI}(A) = (a_1 - a_0, \ldots, a_{[k-1]} - a_{[k-2]}, a_0 - a_{-1}) = (\delta_{[0]}, \delta_k)$. Après avoir défini ce qu'est une partition ordonnée d'un entier, on donne une expression du contenu intervallique en fonction de la structure intervallique.

Définition 2.12 *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle* ***partition ordonnée*** *de p (ici indexée sur un intervalle de $\mathbb{Z}_k$) toute famille $(q_i)_{i\in[\![j,j']\!]}$ telle que $[\![j,j']\!]$ soit un intervalle de $\mathbb{Z}_k$ et $\sum_{i=1}^{j} q_i = p$.*

Proposition 2.13 *Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, soit $\mathcal{I}_k(A) = \{(j,j') \in \mathbb{Z}_n^2, \sum_{i=j}^{j'} \delta_i = k\}$; on a $\mathrm{iv}(A)_k = \#(\mathcal{I}_k(A))$, c'est-à-dire, $\mathrm{iv}(A)_k$ est égal au nombre de partitions ordonnées de k avec des éléments de la structure intervallique de A.*

Preuve
L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_k(A) &\to A \cap T_k(A) \\ (j,j') &\mapsto a'_j = a_j + k \end{aligned}$$

est bien définie et est bijective, et le cardinal de l'ensemble d'arrivée est égal à $\mathrm{iv}(A)_k$. $\square$

On remarque ainsi que l'application qui à toute structure intervallique associe son contenu intervallique est bien définie, bien que plusieurs parties de $\mathbb{Z}_n$ puissent avoir la même structure intervallique, mais dans ce cas ces parties s'obtiennent toutes par des transpositions de l'une d'entre elles, et on a vu que le contenu intervallique est invariant par transposition.

2.3 Généralisation du théorème de l'hexacorde

Dans cette partie, on suppose G de mesure finie — ce qui est en particulier le cas si G est compact — pour ces quatre résultats, afin que le complémentaire de toute partie de mesure finie soit aussi de mesure finie.

Parmi les propriétés du contenu intervallique, de la fonction de Patterson, de la Z-relation et de la relation d'homométrie, qui sont des relations d'équivalence sur $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties mesurables de G et $\Sigma_c(G)$ respectivement, on peut retenir en particulier les propriétés liées au passage au complémentaire dans $\mathcal{A}$, application l'on peut grâce à la relation $\mathbf{1}_{A^C} = 1-\mathbf{1}_A$ pour tout $A \in \mathcal{A}$ prolonger à $\Sigma_c(G)$ par

$$\begin{aligned} \Sigma_c(G) &\to \Sigma_c(G) \\ E &\mapsto E^C := 1 - E \end{aligned}$$

Lemme 2.14 *Pour tout E dans $\Sigma_c(G)$, $d^2(E^C) = \mu(G) - 2\int E\, d\mu + d^2(E)$.*

Preuve
$d^2(E^C) = (1-E)*(I(1-E)) = (1-E)*(1-I(E)) = 1*1-2\int Ed\mu+E*I(E) = \mu(G) - 2\int Ed\mu + d^2(E)$. $\square$

L'expression de la fonction de Patterson du complémentaire d'une fonction intégrable ci-dessus donne immédiatement les résultats ci-dessous.

Proposition 2.15 *Si E et F dans $\Sigma_c(G)$ sont homométriques et si $\int E\, d\mu = \int F\, d\mu$, alors E et F sont homométriques si et seulement si E et F le sont.*

Théorème 2.16 (Théorème de l'hexacorde généralisé.) *Soit E une fonction mesurable sur G. E et E^C sont homométriques si et seulement si $\int Ed\mu = \mu(G)/2$.*

Ce théorème a déjà été exprimé dans le cas $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ muni de la topologie quotient de la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$ dans [BBGOT09] ; par rapport à cet article, la formulation proposée ici a l'avantage grâce à la théorie de l'intégration de Lebesgue de donner le théorème pour tout groupe abélien compact, et en particulier d'englober les cas continu et discret. Par exemple, ce théorème est valable sur tous les groupes abéliens finis, le cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, le tore $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$ et plus généralement le n-tore $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$.

On peut voir géométriquement le théorème de l'hexacorde comme une propriété d'invariance de la fonction de Patterson par symétrie par rapport à $\frac{1}{2}$ pour les fonctions d'intégrale $\mu(G)/2$.

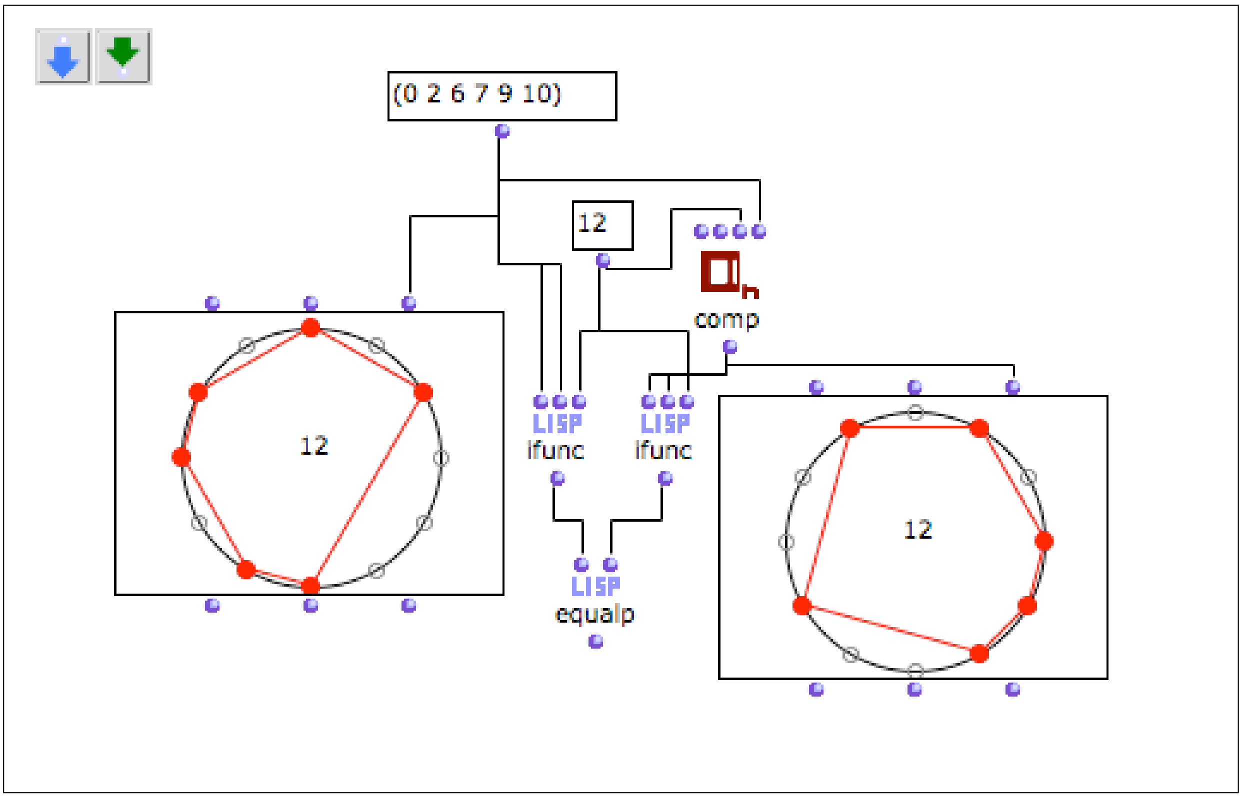

FIGURE 2.1 – Le théorème de l'hexacorde dans le cas $G = \mathbb{Z}_{12}$, illustré dans OpenMusic

Chapitre 3

Le problème de récupération de la phase

3.1 Position du problème

Dans le cas où on connaît assez bien le dual topologique de G pour définir une transformée de Fourier sur $\Sigma_C(G)$, on peut exprimer l'homométrie de façon différente, en appliquant la transformée de Fourier, et dans le cas où G est monogène — engendré par $x := \delta_1$ dans le cas $G = \mathbb{Z}$, par $x := \delta_{[1]_n}$ dans le cas $G = \mathbb{Z}_n$ — en écrivant une fonction $E \in \Sigma_C(G)$ et sa fonction de Patterson comme un polynôme en x et $x^{-1} = \bar{x}$ (inverse pour le produit de convolution), comme cela est présenté dans [Ros84] ou dans [LSS02].

Proposition 3.1 *Soient E, F dans $\Sigma_C(G)$. Il y a équivalence entre (i) et (ii), et dans le cas où G est monogène engendré par x entre (i) et (iii).*
(i) $E * E^* = F * F^*$, i.e. E, F sont homométriques ;
(ii) $|\widehat{E}(\omega)| = |\widehat{F}(\omega)| \quad \forall \omega \in \widehat{G}$;
(iii) $P_E(x)P_E(x^{-1})^* = P_F(x)P_F(x^{-1})^*$

Ceci justifie d'appeler *récupération de la phase* (*phase retrieval*) le problème consistant à déterminer toutes les fonctions de $\Sigma_C(G)$ connaissant $f \in \Sigma_C(G)$ leur fonction de Patterson, ou ce qui est équivalent le module de leur transformée de Fourier.

Nous allons voir ce problème dans différents cas. Dans toute la suite du chapitre, on se limitera à des groupes pour lesquels on peut définir la transformée de Fourier, notamment $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}_n$ et les produits de ces groupes.

3.2 Le cas $G = \mathbb{Z}$

Dans le cas $G = \mathbb{Z}$, ce problème est appelé problème de l'autoroute *(turnpike problem)* ; d'après [Ros84], on peut le résoudre par factorisation de la fonction de Patterson écrite sous forme polynômiale, ou on peut caractériser l'homométrie de deux distributions par l'existence d'un facteur commun pour le produit de convolution.

Un algorithme de reconstruction des parties de $\mathbb{Z}$ ayant un contenu intervallique donné est exposé dans [LSS02] et repris dans [Ghi06].

3.3 Le cas $G = \mathbb{Z}_n$

Dans le cas $G = \mathbb{Z}_n$, on parle de problème de la rocade *(beltway problem)*. Ce problème est plus difficile, car contrairement au problème de la barrière de péage, il n'existe pas de factorisation unique de la fonction de Patterson ; par contre, J. Rosenblatt donne dans [Ros84] une caractérisation de l'homométrie par les unités spectrales.

Définition 3.2 *Soit $U \in \mathbb{Q}[\mathbb{Z}_n]$. On dit que U est une unité spectrale si $U * U^* = \delta$, i.e. U est homométrique à δ.*

Proposition 3.3 *L'ensemble $\mathrm{US}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Z}_n)$ des unités spectrales de $\mathbb{Z}_n$ muni de la convolution est un groupe contenant les masses de Dirac.*

Théorème 3.4 *Deux distributions A, B sur $\mathbb{Z}_n$ sont homométriques si et seulement s'il existe une unité spectrale U telle que $B = U * A$.*

L'étude du groupe des unités spectrales de $\mathbb{Q}[\mathbb{Z}_n]$ a été approfondie très récemment par Emmanuel Amiot dans [Am09].

3.3.1 Quelques conditions nécessaires et conditions suffisantes sur la forme du contenu intervallique

Proposition 3.5 (Bornes des valeurs du contenu intervallique) *Soit A une partie de $\mathbb{Z}_n$. Pour tout k dans $\mathbb{Z}_n$, $\mathrm{iv}(A)_k \in [\![0, \#(A)]\!]$; de plus, si $\mathrm{iv}(A)_k = \#(A)$ avec $k \neq 0$, alors $A = T_k(A)$, i.e. A est à transposition limitée.*

En particulier, si A n'est pas à transposition limitée, alors pour tout k dans $\mathbb{Z}_n$
$\{0\}$, $\mathrm{iv}(A)_k < \#(A)$.

Pour les parties de $\mathbb{Z}_n$ de longueur strictement inférieur à $n/2$, on donne dans le prochain corollaire des bornes plus précises sur les valeurs du contenu intervallique, grâce à la caractérisation des intervalles de $\mathbb{Z}_n$ de longueur strictement inférieure à $n/2$ par leur contenu intervallique et à la croissance du contenu intervallique.

Proposition 3.6 *Soit A une partie de $\mathbb{Z}_n$ de cardinal $k \in [\![1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor]\!]$, alors A est un intervalle si et seulement si $\mathrm{iv}(A) = (k, k-1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0, 1, \ldots, k-1)$.*

Preuve
Si A est un intervalle, on écrit $A = \{a, a+1, \ldots, a+[k]-1\}$, et il est immédiat de vérifier que son contenu intervallique est bien celui annoncé.

Réciproquement, si $\mathrm{iv}(A) = (k, k-1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0, 1, \ldots, k-1)$, on peut montrer que A est un intervalle en le « remplissant à partir de ses extrémités » par une récurrence finie, c'est-à-dire en montrant par récurrence que pour tout $j \in [\![0, \lfloor k/2 \rfloor]\!]$ il existe $a \in \mathbb{Z}_n$ tel que $[\![a, a+j]\!] \cup [\![a+[k]-1-j, a+[k]-1]\!] \subset A$. □

Corollaire 3.7 *Soit A une partie de $\mathbb{Z}_n$. Pour tout $k \in [\![1, \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2]\!]$, A est incluse dans un intervalle de cardinal inférieur ou égal à k si et seulement si pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$ $\mathrm{iv}(A)_j \leqslant k+1-j$ et pour tout $j \in [\![k, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor]\!]$ $\mathrm{iv}(A)_j = 0$.*

3.3.2 Reconstruction directe à partir du contenu intervallique

Un algorithme direct de reconstruction des ensembles ayant un contenu intervallique, proposé dans le cas $G = \mathbb{R}$ dans [LSS02], ainsi que dans [Ghi06] dans le cas $G = \mathbb{Z}$, consiste à construire une pyramide dans laquelle on déduit une ligne à partir d'une autre par des relations entre coefficients proches afin d'aboutir aux différentes reconstructions possibles. Une piste pour réduire en pratique la complexité de cet algorithme pour la reconstruction de distributions à valeurs dans $\{0, 1\}$ est de trouver des conditions nécessaires sur la forme du contenu intervallique et sur la forme possible des ensembles pour certaines formes particulières de contenu intervallique.

Dans ce but, j'ai cherché plusieurs reformulations du contenu intervallique.

Expression du contenu intervallique avec des distances

Une première reformulation est inspirée de la lecture de [OTT08], dans laquelle est définie la notion de couple de points isospectraux d'une paire de parties de $\mathbb{Z}_n$ en Z-relation.

Définition 3.8 *Soient P, Q deux parties de $\mathbb{Z}_n$ en Z-relation, soit $p \in P$, soit $q \in Q$. On dit que p, q sont isospectraux si pour tout k dans $[\![0, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor]\!]$, $\#\{p' \in P, d(p, p') = k\} = \#\{q' \in Q, d(q, q') = k\}$.*

Cette définition mérite en fait une définition préalable, celle de contenu intervallique d'une partie de $\mathbb{Z}_n$ relatif à un de ses points [1], basée sur une distance sur $\mathbb{Z}_n$ invariante par translation, présentée à la section 1.2.3.

Dans la suite, on fixe A une partie de $\mathbb{Z}_n$.

1. Je préfère le terme *contenu intervallique relatif à un point* plutôt que *spectre*, qui pourrait prêter à confusion.

Définition 3.9 *Soit $a \in P$. Le contenu intervallique de A par rapport à a est la fonction*

$$\begin{aligned} \mathrm{CIR}_a(A) : \ \llbracket 0, \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor \rrbracket &\to \llbracket 0, 2 \rrbracket \\ k &\mapsto \#\{a' \in A, d(a,a') = k\} \end{aligned}$$

En lisant cette définition, rappelons-nous d'une remarque faite à la section 1.2.3 : pour tous a, a' dans $\mathbb{Z}_n$, pour tout k dans $\llbracket 0, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \rrbracket$, $d(a,a') = k$ si et seulement si $\mathrm{int}(a,a') = a' - a \in \{[k]_n, [-k]_n\}$; on en déduit que $\mathrm{iv}(A)_{[j]} + \mathrm{iv}(A)_{[n-j]} = \sum_{a \in A} \mathrm{CIR}_a(A)_k$. Or on a pour tout j dans $\mathbb{Z}_n$, $\mathrm{iv}(A)_j = \mathrm{iv}(A)_{-j}$, donc on peut donner une nouvelle formule du contenu intervallique, qui est fonction des contenus intervalliques relatifs :

Proposition 3.10 *Pour tout k dans $\rrbracket 0, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \llbracket$,*

$$\mathrm{iv}(A)_{[k]} = \mathrm{iv}(A)_{[-k]} = \frac{1}{2} \sum_{a \in A} \mathrm{CIR}(A)(p)(k)$$

; si n est pair, alors $\mathrm{iv}(A)_{[k]} = \sum_{a \in A} \mathrm{CIR}(A)(p)(k)$.

Le contenu intervallique relatif à un point donne des informations sur les distances et non sur les intervalles : lorsqu'on sait que du point P il y a exactement un point P situé à une distance k, on ne sait pas « de quel côté » (ou plutôt dans quel sens) il se trouve. Si ce fait n'empêche pas de formuler le contenu intervallique, la confusion d'un intervalle et de son opposé complique la formule en obligeant à distinguer le cas des diamètres lorsque n est pair ($k = n/2$) ; il me semble donc que cette expression du contenu intervallique risque de ne pas être d'une grande aide dans le problème de reconstruction.

Un algorithme de reconstruction de structure intervallique

L'expression du contenu intervallique en fonction de la structure intervallique m'a conduit à trouver un algorithme de reconstruction des structures intervalliques de $\mathbb{Z}_n$ ayant un contenu intervallique donné. En effet, si on partitionne récursivement une valeur de structure intervallique en deux nouvelles valeurs, en partant de la structure intervallique n, qui est la structure intervallique des singletons (ensembles à un élément) de $\mathbb{Z}_n$, on obtient des structures intervalliques de plus en plus longues, que l'on peut générer jusqu'à obtenir des structures du bon cardinal, qui est la valeur en 0 du prétendu contenu intervallique : en effet, la partition d'un des éléments d'une structure intervallique S va donner une structure intervallique S' strictement plus fine que S — plus précisément S' telle que les parties de $\mathbb{Z}_n$ ayant S' pour structure intervallique sont contenus dans un ensemble ayant S pour structure intervallique. Par conséquent, en réitérant le partionnement des structures générées, on obtient des structures intervalliques du bon cardinal, à savoir la valeur en 0 du contenu intervallique potentiel. Finalement, on donne pour résultat l'ensemble des structures intervalliques qui ont le contenu intervallique donné au départ.

Remarquons qu'on ne sait pas donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction de $\mathbb{Z}_n$ dans $\mathbb{N}$ soit le contenu intervallique d'une partie de $\mathbb{Z}_n$: même en considérant toutes les conditions nécessaires sur la forme d'un contenu intervallique, données à la section 3.3.1, qui permettent d'éviter de faire appel inutilement à l'algorithme de reconstruction de structure intervallique, il reste « beaucoup » de fonctions candidates au titre de contenu intervallique.

Ainsi, on va chercher à éliminer le plus tôt possible les structures intervalliques générées dont des partitions ne peuvent pas donner de structure intervallique convenable.

On fixe $C = (c_j)_{j=0,n-1} \in [\![0, n-1]\!]^{\mathbb{Z}_n}$, et on note $k = c_0$, qui est le cardinal de tout ensemble ayant C pour structure intervallique. Toute suite $(S_j)_{j=1,k}$ de structures intervalliques de premier terme (n) et construite par récurrence par partition d'une composante à chaque étape est croissante pour la relation de finesse ; de plus, l'application qui à toute structure intervallique d'une partie de $\mathbb{Z}_n$ associe son contenu intervallique est croissante, donc toute structure intervallique générée au cours de l'algorithme ne doit être conservée pour générer par partitionnement d'autres structures doit avoir un contenu intervallique inférieur au contenu intervallique des ensembles à reconstruire.

Une évaluation de la complexité en nombre d'opérations donne $O(n^n \ln(n))$, ce qui est du même ordre de grandeur que l'algorithme de [LSS02] ; ces auteurs confirment par ailleurs la difficulté ce problème en montrant qu'il est NP-complet.

Une implémentation de cet algorithme de reconstruction de structure intervallique, que j'ai effectuée dans le langage Lisp confirme le fait qu'il est peu utilisable en pratique, sauf pour des petites valeurs de n.

3.3.3 Énumération exhaustive de Z-relations

Vu le coût de cet algorithme lorsqu'on veut énumérer toutes les Z-relations non triviales possibles dans $\mathcal{P}(G)$ avec G fini, on peut préférer déterminer des représentants des orbites de $\mathcal{P}(G)$ sous l'action de $\mathcal{D}$ — car le contenu intervallique est invariant par translation et inversion — puis classer dans un hachage ces représentants en fonction de leur contenu intervallique, pour trouver les Z-relations non-triviales.

Nick Collins présente dans [Col04] un algorithme récursif de construction des orbites des parties de $\mathbb{Z}_n$ de cardinal k fixé sous l'action de $\mathcal{T}$ ou $\mathcal{D}$, en représentant les ensembles comme les vecteurs de bits donnant les valeurs de leur fonction indicatrice.

J'ai écrit et implémenté un algorithme qui effectue ; bien que l'implémentation que j'ai faite est bien plus rapide en pratique que celle que j'ai faite de l'algorithme de Collins (toutes deux en Lisp), je n'ai pas réussi à obtenir une complexité meilleure que $O(2^n)$.

3.3.4 Recherche d'une action de groupe

Un problème très intéressant mathématiquement est la recherche d'une action d'un groupe H sur $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_n)$ (sur $\mathbb{Q}[\mathbb{Z}_n]$) dont les orbites sont les classes d'équivalence de la Z-relation (respectivement la relation d'homométrie). Une telle action pourrait permettre, à condition d'être suffisamment pertinente et exploitable, de calculer via l'équation de Burnside-Frobenius le nombre de classes d'équivalence d'une de ces relations pour tout n ; on pourrait aussi proposer un test permettant de déterminer si une partie de $\mathbb{Z}_n$ (une distribution) a des homologues Z-reliés (respectivement homométriques) non triviaux, d'une manière plus directe qu'une reconstruction ou une énumération présentée.

La relation d'homométrie s'exprime facilement par une action de groupe, grâce au théorème 3.4 :

$$\begin{aligned} \mathrm{US}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Z}_n) \times \mathbb{Q}[\mathbb{Z}_n] &\to \mathbb{Q}[\mathbb{Z}_n] \\ (U, A) &\mapsto U * A \end{aligned}$$

Un préalable à l'étude de cette action de groupe est l'étude du groupe des unités spectrales lui-même, ce qui est l'objet du très récent travail dans [Am09].

La relation Z semble difficile à exprimer par une action de groupe. le groupe des unités spectrales ne peut convenir : en effet, la convolution de toute unité spectrale distincte d'une masse de Dirac avec une masse de Dirac donne une fonction en général à valeurs rationnelles, et au mieux une fonction à valeurs rationnelles, donc a fortiori ne conserve pas le cardinal.

Pour donner une idée de la difficulté du problème de trouver une telle action de groupe, j'ai trouvé un résultat négatif exprimant qu'on ne peut peut pas trouver une action d'un sous-groupe du groupe des permutations de $\mathbb{Z}_n$ pour $n = 8, 10$ et pour tout $n \geqslant 12$.

Théorème 3.11 *Pour $n = 8, 10$ et pour tout entier $n \geqslant 12$, pour tout sous-groupe H de $S(\mathbb{Z}_n)$, les orbites de l'action naturelle de H sur $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_n)$ ne sont pas les classes d'équivalence de la relation Z.*

Preuve
Soient A, B deux parties de $\mathbb{Z}_n$ en Z-relation. S'il existe un sous-groupe $H \leqslant S(\mathbb{Z}_n)$ dont les orbites de son action sur $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_n)$ sont les classes d'équivalence pour la Z-relation, alors A et B sont dans la même orbite pour cette action, donc il existe $\sigma \in H$ tel que $\sigma(A) = B$. σ doit vérifier pour toute partie C de $\mathbb{Z}_n$ $\mathrm{iv}(\sigma(C)) = \mathrm{iv}(C)$. Nous allons montrer que pour des parties A, B et C convenablement choisies, pour toute permutation $\sigma \in S(\mathbb{Z}_n)$ telle que

$\sigma(A) = B$, C et $\sigma(C)$ ont un contenu intervallique différent, ce qui prouvera qu'il n'existe pas de tel sous-groupe $H \leqslant S(\mathbb{Z}_n)$.

On suppose qu'il existe deux parties de $\mathbb{Z}_n$ A, B en Z-relation, telles que A contient un intervalle de $\mathbb{Z}_n$ de cardinal 3 ($[\![0,2]\!]$ quitte à transposer A) et B n'en contient pas. On prend $C = \{0,1,2\}$, intervalle de cardinal 3 inclus dans A. Pour toute permutation σ de $\mathbb{Z}_n$ telle que $\sigma(A) = B$, on a $\sigma(C) \subset B$ et $|\sigma(C)| = |C| = 3$; or aucune partie de B à trois éléments n'est un intervalle de $\mathbb{Z}_n$, donc il existe $j \in [\![3, [\lfloor \frac{n}{2} \rfloor]]\!]$ tel que $\text{iv}(C)_j = 0 < 1 <= \text{iv}(\sigma(C))_j$, donc C et $\sigma(C)$ n'ont pas le même contenu intervallique.

Il reste à montrer l'existence de parties A et B convenables pour toutes les valeurs de n annoncées.

Pour des valeurs de n assez grandes, on utilise la proposition 2.10 : les parties de $\mathbb{Z}$ $A = \{0,1,2,6,8,11\}$ et $B = \{0,1,6,7,9,11\}$ sont en Z-relation et sont de diamètre 11, donc pour tout $n \geqslant 23 > 2 \times 11$, les réductions modulo n de A et B sont en Z -relation, de plus elles satisfont aux conditions demandées.

Pour n pair avec $8 \leqslant n \leqslant 22$, on peut utiliser le théorème de l'hexacorde, en prenant $A = \{0,1,2\} \cup \{5\} \cup \{8,10,\dots,[n]-2\}$, $B = \{3,4\} \cup \{6,7\} \cup \{9,11,\dots,[n]-1\}$.

Enfin, pour n impair de 13 à 21, un couple de parties particulier convient dans chaque cas, que l'on peut trouver à partir d'un algorithme tel celui de crible partiel 3.3.3.

- $n = 13$, $A = \{0,1,2,6,9\}, B = \{0,1,5,6,8\}$;
- $n = 15$, $A = \{0,1,2,6,8,11\}, B = \{0,1,3,5,9,10\}$;
- $n = 19$, $A = \{0,1,2,4,7,12\}, B = \{0,2,3,7,8,10\}$;
- $n = 21$, $A = \{0,1,2,7,10,14\}, B = \{0,1,7,9,10,14\}$.

□

Les petites valeurs de n pour lesquelles le résultat précédent est faux sont celles pour lesquelles il n'existe pas de Z-relation non triviale entre parties de $\mathbb{Z}_n$, autrement dit l'égalité du contenu intervallique de deux parties de $\mathbb{Z}_n$ est équivalente à leur appartenance à la même orbite de $\mathbb{Z}_n$ sous l'action de $\mathcal{D}$.

3.4 Récupération de la phase étendue – vecteur multi-intervallique, k-deck et k-Deck

3.4.1 Brève présentation

En fixant un entier $k \in \mathbb{N}^*$ et un sous-groupe $H \leqslant Aut(G)$, par exemple $\mathcal{T}$ ou $\mathcal{D}$, on généralise le problème de récupération de la phase à la reconstruction d'une partie A de G étant donné son vecteur multi-intervallique, c'est-à-dire la fonction qui à tout $\mathcal{X} \in \mathcal{P}k(G)/H$ associe le nombre d'éléments de $\mathcal{X}$ inclus dans A. Une définition équivalente à celle-ci est donnée dans [Ghi06] dans le cas $G = \mathbb{Z}_n$.

Plus généralement, on définit comme dans [RS00] le k-deck d'une distribution $E = \sum_{g \in G} e_g \delta_g$,

$$d_E^k : \begin{array}{c} G^{k-1} \to K \\ (s_1, \ldots, s_{k-1}) \mapsto \sum_{g \in G} e_g e_{g+s_1} e_{g+s_2} \cdots e_{g+s_{k-1}} \end{array}$$

qui généralise le vecteur multi-intervallique dans le cas $H = \mathcal{T}$. On peut également définir le k-Deck de E $D_E^k := d_E^k + d_{E^*}^k$, qui généralise le vecteur multi-intervallique dans le cas $H = \mathcal{D}$.

De même que pour le vecteur intervallique et la fonction de Patterson définis à la section 2, on définit respectivement la Z^k-relation et l'homométrie à l'ordre k (ou k-homométrie) en comme égalité du k-deck, et la Z^k-Relation et la k-Homométrie comme égalité du K-Deck.

D'après [Jam07], la k-homométrie de deux distributions implique leur p-homométrie pour tout entier $1 \leqslant p \leqslant k$, et de même pour la k-Homométrie et les Z^k-relations, donc on peut définir l'indice de reconstruction de G à partir des k-decks (pour k) (respectivement à partir des vecteurs k-intervalliques) $r(G)$ (resp. $r_{\mathbb{N}}(G)$) comme le plus petit entier k tel que toute distribution (resp. partie finie) de G soit uniquement déterminée par son k-deck (resp. son vecteur k-intervallique). On définit de même les indices de recontruction $R(G), R_{\mathbb{N}}(G)$ à partir des k-Decks et vecteurs k-intervalliques pour $H = \mathcal{D}$ respectivement.

Les résultats de [RS99], repris dans la première partie de [JK03], montrent que $r(\mathbb{R})$ vaut 3.

Dans le cas cyclique $G = \mathbb{Z}_n$, les travaux de [GM95], [RS00], [Peb07], [JK03] et [Jam07] ont permis de presque complètement déterminer l'indice $r_{\mathbb{N}}(\mathbb{Z}_n)$; cependant on ne connaît pas encore d'expression générale de $R_{\mathbb{N}}(\mathbb{Z}_n)$ pour tout n.

3.4.2 Énumération et exemples

J'ai développé une implémentation Lisp de l'algorithme décrit dans la section 3.3.3, en l'augmentant du calcul des k-decks et k-Decks pour $k \in \{3, 4\}$, et je l'ai testée pour $n \in [\![4; 28]\!]$. Cette implémentation a notamment été utile pour donner des Z-relations permettant de montrer pour quelques valeurs impaires de n le théorème 3.11.

Pour illustrer cette implémentation, on lit de gauche à droite dans le tableau suivant ν_n le nombre d'orbites de l'action du groupe diédral $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_n)$, z_n le nombre de classes d'équivalence de la Z-relation, le nombre de classes pour la Z-relation pour de cardinal respectif 2, 3, 4, ...puis le nombre de paires de parties de $\mathbb{Z}_n$ en Z^3-Relation, et enfin le nombre de paires de parties de $\mathbb{Z}_n$ en Z^3-relation dans $\mathbb{Z}_n$.

n	ν_n	z_n	Z-relation	Z^3-Relation	Z^3-relation
4	6	6	0		
5	8	8	0		
6	13	13	0		
7	18	18	0		
8	30	29	**1**	0	0
9	46	46	0		
10	78	75	3	0	0
11	126	126	0		
12	224	201	23	0	0
13	380	374	6	0	0
14	687	615	72	0	0
15	1224	1144	80	0	0
16	2250	1876	337, 14, 3	0	0
17	4112	3928	184		
18	7685	6211	1164, 74, 54	**4**	0
19	14310	13662	648	0	0
20	27012	21541	4625, 79, 226, 0, 2	6	0
21	50964	46242	4384, 148, 14	2	0
22	96909	80144	14295, 625, 390, 0, 10	0	0
23	184410	176512	7722, 88	0	0
24	352698	264178	66734, 2180, 5228, 10, 212, 0, 87, 0, 0, 0, 3	68	**6**
25	675188	640258	32350, 1200, 60	0	0
26	1296858	1089814	182273, 3942, 5395, 0, 132, 0, 6	3	3
27	2493726	2317666	158810, 7122, 882, 0, 72	68	0
28	4806078	3969784	711508, 6969, 34232, 414, 544, 26, 429, 12, 24, 0, 18, 0, 2, 0, 3, 0, 0, 2	204, 1	6, 1

Pour donner une idée d'exploitation musicale de ces algorithmes, la figure 3.1 donne la représentation d'un couple de parties de $\mathbb{Z}_{18}$ en Z^3-relation — N. Collins avait trouvé un des deux autres tels couples dans [Col99] — comme séquences rythmiques périodiques ; l'intégration dans l'environnement `mathtools` d'OpenMusic des implémentations d'algorithmes d'énumération exhaustive et de reconstruction de structure intervallique est prévue prochainement.

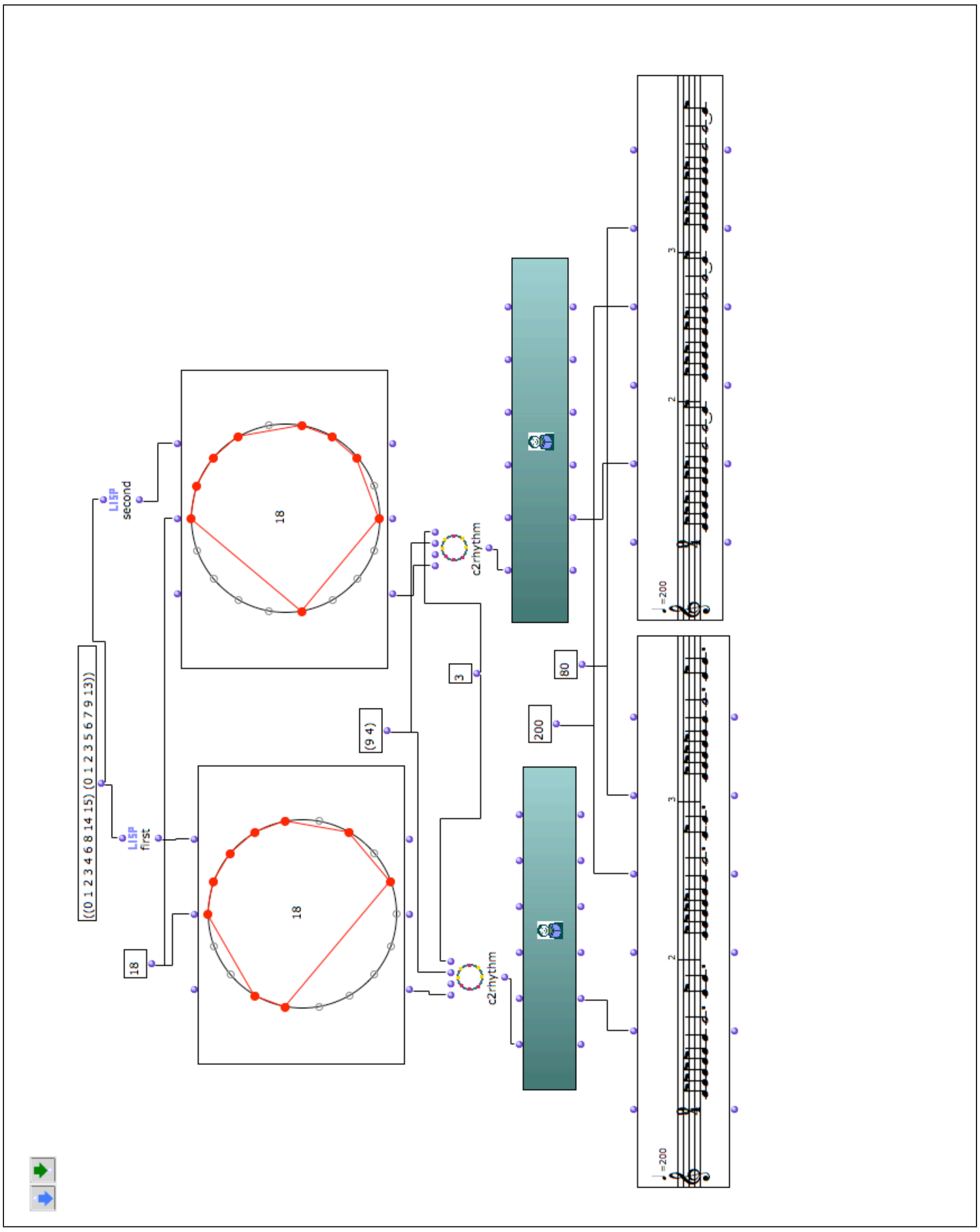

FIGURE 3.1 – Deux parties de $\mathbb{Z}_{18}$ en Z^3-Relation, utilisées comme séquences rythmiques périodiques dans OpenMusic

Conclusion

Travail réalisé

Dans le premier chapitre, j'ai présenté un cadre mathématique qui permet de manipuler des systèmes d'intervalles généralisés commutatifs en utilisant des mesures plus générales que le simple cardinal ; ce cadre a permis de définir et d'exprimer de façon concise les définitions et propriétés élémentaires, ainsi que le théorème de l'hexacorde.

Concernant le problème de récupération de la phase, j'ai montré l'impossibilité de construire une action de groupe décrivant la relation Z avec un groupe de permutations de $\mathbb{Z}_n$.

Enfin, j'ai conçu et implémenté un algorithme d'énumération exhaustive des Z^k-relations et Z^k-Relations sur $\mathbb{Z}_n$, et un algorithme de reconstruction des structures intervalliques ayant pour contenu intervallique une fonction donnée. Ces algorithmes, et surtout le second, ont un coût de calcul prohibitif, mais il n'est pas évident de réduire leur complexité.

Problèmes ouverts et perspectives

Concernant la modélisation mathématique d'objets musicaux dont on étudie les propriétés élémentaires, j'ai limité la définition du contenu intervallique aux groupes topologiques localement compacts abéliens. David Lewin ayant montré des exemples musicalement pertinents de systèmes d'intervalles généralisés (s.i.g.) dont le groupe est non commutatif, il serait intéressant d'étudier l'homométrie avec des groupes d'intervalles non commutatifs. L'homométrie dans le cas d'un produit de groupes quelconques n'a pas été encore étudiée, sauf dans le cas des produits de groupes cycliques, c'est-à-dire des groupes abéliens finis, et dans le cas des groupes $\mathbb{R}^d$ et $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d$.

Sur le plan purement mathématique, deux problèmes ouverts en récupération de la phase sont la description de la relation Z par une action de groupe pertinente, et la détermination de l'indice de reconstruction de $\mathbb{Z}_n$ modulo le groupe diédral pour tout n.

Enfin, l'intérêt musical de l'homométrie et des applications pourrait être étudié en s'appuyant notamment sur des travaux de perception et cognition musicales.

Annexe A

Complément : mesure sur une tribu

Soit X un ensemble.

Définition A.1 *On appelle **tribu** sur X toute partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(X)$ qui vérifie les trois conditions suivantes :*

- *(τ_1) $\varnothing \in \mathcal{A}$;*
- *(τ_2) stabilité par passage au complémentaire : pour tous A dans $\mathcal{A}$, $A^C \in \mathcal{A}$;*
- *(τ_3) stabilité par union dénombrable : pour toute famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$ $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.*

On déduit facilement de cette définition que toute tribu contient X et est stable par intersection dénombrable, et stable par intersection ou par réunion finies.

Deux exemples de tribus peuvent être donnés pour tout ensemble X : la plus petite tribu (pour la relation d'ordre sur $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ qu'est l'inclusion) sur X est $\{\varnothing, X\}$, et la plus grande tribu est l'ensemble des parties de X $\mathcal{P}(X)$.

Il est immédiat de voir que l'intersection de deux tribus $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ est encore une tribu, et plus généralement l'intersection d'une famille de tribus $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ est toujours une tribu, ce qui est utilisé pour la définition suivante.

Proposition-définition A.2 *Soit $\mathcal{Z}$ une partie de $\mathcal{P}(X)$. l'intersection de toutes les tribus qui contiennent $\mathcal{Z}$ est une tribu, et c'est la plus petite tribu sur X qui contient $\mathcal{Z}$. On l'appelle **tribu sur X engendrée par $\mathcal{Z}$**.*

Par exemple, pour tout partie A de X, la tribu sur X engendrée par A est $\{\varnothing, A, A^C, X\}$. Dans le cas où X est un espace topologique, les éléments de la tribu engendrée par l'ensemble des ouverts $\mathcal{O}$ de X sont appelés boréliens de X, et on note $B(X)$ cette tribu.

Passons maintenant à la définition et à des exemples de mesures.

Définition A.3 *On appelle* ***espace mesurable*** *tout couple* $(X, \mathcal{A})$ *tel que* X *soit un ensemble et* $\mathcal{A}$ *soit une tribu sur* X*. Les éléments de* $\mathcal{A}$ *sont appelées* ***parties mesurables*** *de* $(X, \mathcal{A})$*.*

Définition A.4 *Une* ***mesure*** *sur un espace mesurable* $(X, \mathcal{A})$ *est une application* $m : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ *telle que*

- *(M_1)* $m(\varnothing) = 0$ *;*
- *(M_2) (σ-additivité) pour toute famille dénombrable* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de parties mesurables deux à deux disjointes,* $m(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n)$*.*

On dit que $(X, \mathcal{A}, m)$ *est un* ***espace mesuré****.*

On dira de plus que m *est une* ***mesure finie*** *si* $m(X) < +\infty$*, et que* m *est une* ***probabilité*** *si* $m(X) = 1$*.*

Quel que soit l'ensemble X, le cardinal est une mesure sur $(X, \mathcal{P}(X))$.

Dans le cas où $X = \mathbb{R}^d$ (muni de sa topologie usuelle), il existe une unique mesure m définie sur $B(\mathbb{R}^d)$ telle que la mesure de tout pavé soit égale à son volume — son aire pour $d = 2$ et sa longueur pour $d = 1$ — i.e. pour tout $P = \prod_{k=1}^{d} [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}^d$ $m(P) = \prod_{k=1}^{d} (b_k - a_k)$: on l'appelle la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. On peut trouver une construction de la mesure de Lebesgue dans le chapitre 1 de [Rud74].

Bibliographie

[AG00] T.A. Althuis, F. Göbel, "Z-related pairs in microtonal systems", *Memorandum 1524, Department of Applied Mathematics, University of Twente*, 2000. 2.1

[Am09] E. Amiot, "On the group of spectral units with finite order", version de prépublication, 2009. 3.3, 3.3.4

[BBGOT09] B. Ballinger, N. Benbernou, F. Gomez, J. O'Rourke, Godfried Toussaint, "The Continuous Hexachordal Theorem", *Mathematics and Computation in Music, Yale, 2009 June 19-22*. 2.3

[CH07] C. Callender, R.W. Hall, "Homometric sets and Z-related chords", *Combinatorics, Probability & Computing 16(4)*, 2007. (document)

[Col99] N. Collins, "Uniqueness of Pitch Class Spaces, Minimal Bases and Z Partners", *Proceedings of the Diderot Forum on Mathematics and Music,*, Vienna, 1999. 3.4.2

[Col04] N. Collins, "An Algorithm for the Direct Generation of Set Class Representatives in Any Pitch Class Space", *Music Theory Online 10, No. 3*, 2004. 3.3.3

[For77] A. Forte, *The Structure of Atonal Music* Yale University Press, 1973, 1977. 2.1

[Ghi06] D. Ghisi, "Vettori intervallari : non degenerazione e Z-relation", *Bachelor's thesis*, Milano, 2006. 3.2, 3.3.2, 3.4.1

[GM95] F.A. Grünbaum, C.C. Moore, "The Use of Higher-Order Invariants in the Determination of Generalized Patterson Cyclotomic Sets", *Acta Cryst. A51*, 1995. 3.4.1

[JK03] Ph. Jaming, M. Kolountzakis, "Reconstruction of functions from their triple correlations", *New York J. Math., 9*, 2003. 3.4.1

[Jam07] Ph. Jaming, "The phase retrieval problem for cyclotomic crystals", *Topics on the Interfacebetween Harmonic Analysis and Number Theory*, T. Erdelyi, B. Saffari, G. Tenenbaum (Eds), prepublication, 2007. 3.4.1

[Kol04] "Transfer Principles for Generalized Interval Systems." *Perspectives of New Music* 42/1, p. 150-190. 1.1, 1.2.2

[LSS02] S. Lemke, S.S. Skiena, W. Smith, "Reconstructing Sets from Interpoint Distances", *DIMACS Technical Report 2002-37*, 2002. 2.1, 3.1, 3.2, 3.3.2, 3.3.2

[Lew59] D. Lewin, "Intervallic Relations Between Two Collections of Notes.", *Journal of Music Theory 3/2*, 1959. 2.1

[Lew87] D. Lewin, *Generalised Musical Intervals and Transformations* Yale University Press, 1987. 1.1, 1.1, 1.2.2, 2.1

[OTT08] J. O'Rourke, P. Taslakian, G. Toussaint, "A Pumping Lemma for Homometric Rhythms", *CCCG 2008, Montréal, Québec*, 2008. 3.3.2

[Peb07] L. Pebody, "Reconstructing Odd Necklaces", *Combinatorics, Probability & Computing 16(4)*, 2007. 3.4.1

[RS99] A.J. Radcliffe, A.D. Scott "Reconstructing subsets of reals", *Electronic J. Comb. 6*, 1999. 3.4.1

[RS00] A.J. Radcliffe, A.D. Scott "Reconstructing subsets of $\mathbb{Z}_n$", *J. Combin. Theory Ser. A 83*, 1998. 3.4.1

[Ros84] J. Rosenblatt, "Phase Retrieval", *Communications in Mathematical Physics 95, 317-343,* 1984 2.1, 3.1, 3.2, 3.3

[Rud74] W. Rudin, "Real and Complex Analysis", 2nd edition, McGraw-Hill, 1974. 1.2.2, A

[Sal04] S. Rubinstein–Salzedo, "On the Existence and Uniqueness of Invariant Measures on Locally Compact Groups", `http://www.artofproblemsolving.com/LaTeX/Examples/HaarMeasure.pdf` 2004. 1.2.2

[Vie93] A. Vieru, Chap. 3 "Modal Structures", *From Modes to a Model of Intervallic Musical Thought* in *The book of modes*, Editura Muzicala. 2.2.1, 2.2.1

[Vuz88] D. T. Vuza, "Some Mathematical Aspects of David Lewin's Book : Generalized Musical Intervals and Transformations", *Perspectives of New Music* Volume 26 No. 1, 1988. 1.1