Table des matières

Introduction	4
Brefhistorique	4
Mes différents champs de recherche	5
Produits de mes recherches	12
Canons rythmiques	12
Gammes et transformée de Fourier discrète	20
Mélodies Autosimilaires	28
Conclusion et perspectives	33
Liste de travaux	37

Introduction

Bref historique

Avant de présenter ma recherche, il importe de retracer le parcours intellectuel et personnel qui m'y a amené.

Le cursus traditionnel de mes études (ENS, agrégation) me prédisposait naturellement à des recherches en mathématiques «pures». Cependant mes incursions dans ces domaines (j'ai suivi un DEA sur les groupes et algèbres de Lie à l'université de Jussieu en 83) m'ont convaincu que je ne m'y épanouirais pas. En particulier, ma passion pour la musique¹, structurée par mon cursus au conservatoire de Nice, n'y trouvait pas sa place.

C'est en rencontrant André Riotte, compositeur, ingénieur et enseignant novateur à Paris VIII d'un module intitulé *Informatique et structures musicales*, que j'ai trouvé ma voie. La formalisation mathématique de structures musicales me permettait d'utiliser des outils et concepts à la fois puissants, élaborés et subtils, et de contrôler la validité de ces spéculations abstraites en les appliquant immédiatement à la réalité musicale. Ces structures, invoquées initialement pour des raisons mathématiques, s'incarnaient tout naturellement par des implémentations, ce qui explique l'importance quantitative de mes contributions au développement de logiciels d'assistance à la composition, comme *OpenMusic*, et le nombre de mes participations à des colloques plus informatiques que mathématiques, comme l'ICMC (1986, 2002, 2005, 2006, 2007) entre autres.

Pour citer des exemples plus concrets, mes tous premiers travaux, comme stagiaire à l'Ircam en 85, faisaient la part belle aux arborescences, qu'il s'agisse des hiérarchies tonales dans l'analyse Schenkérienne ou d'arbres d'opérateurs pour l'élaboration de cribles à la Xénakis. Il

¹ Notamment contemporaine — j'étais un fidèle des MANCA à Nice en leurs débuts, quand les spectateurs se comptaient par dizaines seulement.

est naturel que j'aie alors abordé ces problèmes sous l'angle de leur implémentation en Lisp, et, simultanément, du côté théorique par des chaînes de Markov.

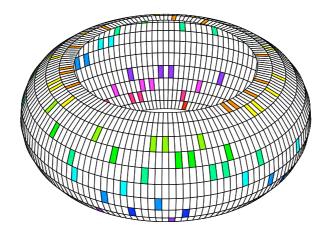
Nous étions relativement nombreux dans les années 80 à multiplier les imbrications majestueuses de parenthèses en Lisp. Elles ont d'ailleurs laissé leur trace dans des logiciels bien plus élaborés: les arborescences qu'elles modélisent ont naturellement perduré dans *Patchwork*, puis surtout dans *OpenMusic*, logiciels développés par Carlos Agon à l'IRCAM pour intégrer de façon modulaire et dans une interface graphique (GUI) les structures utiles aux compositeurs comme aux analystes. Il n'est donc pas étonnant que Lisp soit resté sous-jacent à ces environnements.² On voit là un aspect de l'importance d'une solide formalisation algébrique des concepts et outils de la théorie musicale.

Dans ce sens, une contribution décisive de Moreno Andreatta à *OpenMusic* fut d'y intègrer, via la *MathToolbox*, les structures algébriques avec lesquelles nous jouions dans les années 80: groupes cycliques et diédraux, opérations modulo n, algèbres de Boole avec tous les outils ensemblistes qui rendent accessible, voire triviale, la *Set Theory* américaine des émules d'Alan Forte. Il y a là des progrès matériels indubitables, mettant à disposition du plus grand nombre et de manière intuitive des outils que leur abstraction rendait trop abscons il y a deux décennies. Il est donc normal que de nouveaux objets théoriques aient fait leur apparition pour trouver place à leur tour dans ces environnements qui démocratisent leur utilisation. Comme on le verra dans certains de mes articles, notamment dans ceux que je présente en annexe de cette thèse, j'ai contribué à cette double évolution, tant par l'élaboration de nouveaux concepts ou modèles que par leur mise en œuvre sous forme d'implémentations dans différents environnements, ces deux vantaux étant organiquement indissociables.

Mes différents champs de recherche

² Il faut souligner les formalisations de Guérino Mazzola [ToM], développées parallèlement et indépendamment. Elles ont rebuté plus d'un lecteur par leur formidable abstraction, mais ont néanmoins l'avantage de se prêter de façon transparente à l'implémentation de leurs concepts (réalisée dans l'environnement Rubato): par exemple, l'acte Grothendieckien de remplacement d'un point par une flêche se traduit immédiatement en terme de variables et de pointeurs (ou plutôt de handles).

Comme la discipline de "Mathémusique" n'existait pas - et n'existe toujours pas dans le champ académique, même si les choses évoluent avec la création en 2007 à Berlin de la Society for Mathematics and Computation and Music et du Journal of Mathematics and Music, qui est son organe de publication - mes recherches ont été souvent solitaires. Cela se voit au nombre de mes travaux publiés sous ma seule signature. Néanmoins j'ai trouvé, notamment à l'Ircam et ce à diverses époques, non seulement de l'intérêt pour mes travaux, mais aussi des collaborations fructueuses, dans les équipes de recherches les plus orientées vers structures et théorisation.³ Cela est apparent dans les noms des co-auteurs de mes articles collectifs, dont la plupart ont été écrits pour l' International Computer Music Conference, à commencer par le tout premier en 1985. On discerne aisément la partie théorique de mes travaux, résultant en général en un article signé de moi seul, et la part appliquée, qui se traduit par des contributions à l'élaboration collectives de logiciels (ou au moins d'algorithmes) destinés à l'analyse ou à la composition musicale. Il faut dire que mes sujets de recherche se prêtent particulièrement bien à cette articulation entre théorie et pratique.



Les canons rythmiques

³ Le Projet 5 de la recherche musicale dans les années 1980, puis l'équipe "Représentations Musicales".

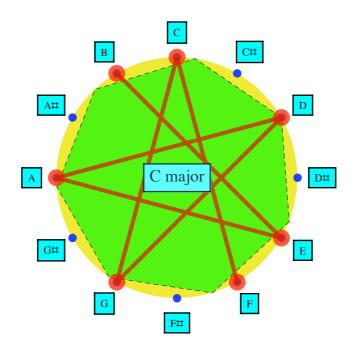
Un des axes principaux de mes travaux concerne les canons rythmiques. C'est l'enthousiasme communicatif de Moreno Andreatta, alors jeune étudiant, qui m'a conduit à m'intéresser à ce sujet foisonnant. Il avait remarqué que le problème musical étudié par D.T. Vuza4 était en fait celui de la conjecture de Hajós, née dans les années 40, et seulement complètement résolue bien plus tard par les efforts conjugués d'une génération de mathématiciens. Mais ce problème de combinatoire relève en fait aussi bien de la géométrie que de l'analyse harmonique, comme en fait foi la conjecture de Fuglede qui relie la propriété de pavage et une condition de spectre. Mon approche par ce chemin détourné m'a permis notamment de démontrer que la notion de canon de Vuza — musicalement pertinente, car il s'agit des canons tels qu'on les entend — permettait de faire progresser cette conjecture de mathématiques dites "pures": en particulier, la conjecture est vraie si et seulement si elle l'est pour ces canons de Vuza.

Ces derniers ne sont pas faciles à inventorier et constituent un matériau extrêmement rare. Compte tenu de mon résultat les liant à la conjecture de Fuglede, on peut considérer cela comme une bonne nouvelle, mais il reste difficile de les fabriquer de manière exhaustive. J'ai participé à une première étape de cette quête, contribuant avec Harald Fripertinger à l'établissement de leur liste exhaustive pour les périodes 72 et 108. C'est aussi par une synthèse de considérations théoriques, souvent formalisées à la suite d'idées issues de compositeurs et de ruses de programmation⁵, que j'ai pu contribuer à la seconde phase de la même quête: avec les mathématiciens Kolountzakis et Matolcsi, nous avons énuméré exhaustivement les canons de Vuza jusqu'à la période 144. Au passage, j'ai découvert avec étonnement des liens profonds - et inédits - entre des questions qui pouvaient sembler se réduire à l'implémentation d'une exploration combinatoire (problème de Johnson, canons de Vuza, canons modulo p), et l'abstruse théorie de Galois qui régit l'organisation des racines des polynômes dans divers corps, notamment finis. Il y a là un carrefour étonnant entre de multiples disciplines: mathématique sous diverses formes (combinatoire, algèbre commutative, analyse harmonique), informatique, et musique.

⁴ Vuza, D.T., Canons. Persp. of New Music, 1991-1992.

⁵ J'ai élaboré le *CanonCrawler*, une bibliothèque d'outils en Mathematica® qui m'ont été indispensables aussi bien du point de vue pratique que théorique.

C'est en présentant ces travaux lors de colloques en Europe, puis en Amérique du Nord, que j'ai été amené à m'intéresser à de nouvelles problématiques, comme la théorie des gammes musicales.



Les gammes.

C'est à l'initiative du musicologue américain David Clampitt, rencontré à une séance du séminaire MaMuX à l'Ircam, que j'ai été invité à parler de mes travaux devant les membres de la Society for Music Theory lors d'une convention de l'American Mathematical Society à Evanston, près de Chicago. C'est aussi grâce à lui que j'ai découvert le foisonnement de recherches sur les gammes (plus exactement sur les 'pc-sets') de la nouvelle école américaine, à la suite de célèbres pionniers comme les regrettés David Lewin ou John Clough.

Ce sujet de recherche restera pour moi indissociablement lié aux acteurs américains de la théorie musicale: Richard Cohn s'est joint à David Clampitt (lui-même acteur de premier plan dans le renouveau de la théorie des gammes) pour m'impliquer dans les travaux de cette nouvelle école de chercheurs américains, dont la jeune génération — Cliff Callender, Dmitri Tymoczko ou Ian Quinn notamment — a justement démontré son génie en présentant les "orbifolds" comme modèles continus des accords, lors des John Clough Memorial Days à Chicago

 $^{^6}$ Orbivariétés en français, ici des quotients d'espaces vectoriels par des groupes finis traditionnels en théorie musicale, comme T/I ou $S_{\rm n}.$

University en juillet 2005. Mon intérêt pour les gammes est d'ailleurs issu de la thèse de Quinn, qui, pour la première, fois explicitait les coefficients de Fourier d'une gamme à des fins de comparaison et de classification. Par ailleurs, classer les gammes (ou plus précisément les pcsets, sous-ensembles du total chromatique) par la valeur absolue de leurs coefficients de Fourier équivaut à considérer comme équivalents deux pc-sets ayant même contenu intervallique. Cette taxonomie est bien connue des cristallographes; cependant, ce n'est que récemment que les musiciens en ont pris conscience; elle s'avère plus fine et plus subtile que la classification traditionnelle sous l'action du groupe diédral T/I.

Bien entendu, ces coefficients de Fourier interviennent aussi dans les questions de pavages (canons rythmiques) que j'avais déjà étudiées: ce sont les valeurs des polynômes caractéristiques des motifs, prises aux racines n. jèrmes de l'unité. J'ai commencé par généraliser les résultats de Ian Quinn, étudiant tous les cas de maximalité des coefficients de Fourier d'un sous-ensemble d'un groupe cyclique. Ensuite, mon expérience des pavages m'a permis de revisiter la plupart des questions traditionnelles sur les gammes (fonction intervallique, homométrie, générateurs...) et d'en explorer de toutes nouvelles (comparaison de tempéraments), avec notamment la surprenante confirmation, via un très simple algorithme de comparaison de coefficients de Fourier, de l'hypothèse du musicologue Bradley Lehman sur le tempérament qu'aurait utilisé J. S. Bach. Cela s'est fait par hasard, en étendant ces transformées de Fourier discrètes à des parties finies du cercle continu S[‡]. J'ai eu l'idée de les appliquer dans le cadre de différents tempéraments musicaux. Mais ce domaine est riche de bien d'autres potentialités inexplorées, et de connexions prometteuses, dans la mesure où, par exemple, cette notion de transformée de Fourier d'une partie finie ordonnée d'un cercle permet de généraliser à de telles parties la notion de "Maximal Evenness".

Par ailleurs, cette généralisation à cheval entre discret et continu, appliquée au domaine des rythmes périodiques, nous a amenés à un nouveau paradigme de pensée, où les paramètres

⁷ L'idée de cette généralisation revient à Thomas Noll, peu après que nous soyons revenus de Chicago.

⁸ Notons qu'on peut calculer ces coefficients de Fourier pour des parties de la plupart des orbifolds susmentionnés, car leur valeur absolue passe au quotient par les groupes traditionnellement utilisés.

sur lesquels joue le musicien sont non pas les notes mais les coefficients de Fourier, ce qui permet de modifier globalement et de façon cohérente le «groove» par un seul paramètre par exemple [Oracles].9

Je reviendrai ultérieurement sur cette taxonomie des différents profils de transformée de Fourier de motifs, qui devra nous permettre enfin de tendre un pont vers les sciences cognitives, via les protocoles expérimentaux que nous sommes en train de mettre au point à l'Ircam pour mettre en évidence que l'esprit humain est capable de discerner certaines caractéristiques de ces profils: leur platitude, ou au contraire leur "saillance", laquelle caractérise des *patterns* aussi célèbres que la gamme diatonique ou le rythme traditionnel du tango.



Les mélodies autosimilaires.

Je terminerai ce panorama de mes recherches par un dernier domaine peu ou pas exploré¹⁰, qui illustre parfaitement combien mes travaux se trouvent toujours au confluent des trois mêmes forces, musique, structures algébriques discrètes, et algorithmique.

Le concept même de mélodie autosimilaire est dû à Tom Johnson, compositeur américain vivant à Paris. L'acception mathématique du terme « autosimilaire » est plus restrictive que celle qu'utilise T. Johnson: pour être conforme à la notion d'autosimilarité des objets fractals, on dira qu'une mélodie est autosimilaire de rapport k si, en prenant seulement une note tous les k temps, on entend la mélodie initiale (jouée k fois plus lentement). Enfin leur étude est aus-

⁹ Une implémentation convaincante de ce concept de «Fourier DJ» a été présentée par Thomas Noll au dernier colloque de la SMCM en juin 2009.

¹⁰ Je n'ai trouvé sur ce sujet qu'une page de David Feldman, dans sa recension de *SelfSimilar Melodies* de Tom Johnson. Il y réfute brillament une conjecture de ce dernier concernant la conjonction de symétries par rétrogradation et inversion des mélodies autosimilaires.

si bien abstraite (arithmétique, algèbre commutative) que pratique (énumération exhaustive de catalogues de solutions, dénombrements, module dans *OpenMusic* permettant entre autres choses la construction de mélodies autosimilaires ayant un groupe de symétries affines données), et même philosophique (car ce sont des «objets universels», i.e. limites les plus générales d'itérations affines).

Il s'avère que cette notion fort peu connue est profondément ancrée dans la culture musicale, fût-ce inconsciemment (on trouve des mélodies autosimilaires chez D. Scarlatti, Mozart, dans la cinquième symphonie de Beethoven, mais aussi dans *In the Mood* de Glen Miller). Or mes calculs établissant qu'une mélodie donnée a une probabilité infinitésimale d'être autosimilaire, montrent que l'existence de mélodies autosimilaires, même rares, dans l'œuvre d'un compositeur, ne peut être interprétée comme un hasard.

Ces trois domaines de recherche sont présentés plus en détail dans le développement qui suit, à travers cinq articles qui ont été sélectionnés comme représentatifs de mon travail. On retrouvera, dans leur apparente diversité, la profonde unité des concepts qui les sous-tendent.

Produits de mes recherches

Dans les pages qui suivent, j'ai pour objectif de présenter et détailler le contenu des cinq articles sélectionnés pour figurer dans le dossier des travaux, tout en les replaçant dans le double contexte de mes recherches personnelles et du champ de la recherche en général. En effet mes travaux individuels sont souvent liés à des réalisations collectives. En témoignent les divers articles co-écrits avec d'autres chercheurs, et qui figurent dans la bibliographie. Les cinq articles retenus comme représentatifs de ma production sont:

- * « À propos des canons rythmiques », Gazette des Mathématiciens, 106 (2005).
- ◆ « David Lewin and Maximally Even Sets », Journal of Mathematics and Music (2007) vol. 3.
- ◆ « Autosimilar Melodies », 7MM (2008) vol. 3.
- « Discrete Fourier Transform and Bach's Good Temperament »,
 Music Theory Online (2009) 15, 2.
- *« New Perspectives on rhythmic canons and the Spectral Conjecture », JMM (2009).

Ils touchent aux trois domaines d'étude définis dans l'introduction: canons rythmiques, gammes musicales, et mélodies autosimilaires.

Canons rythmiques

Le dossier joint comporte parmi de mes nombreux articles consacrés aux canons rythmiques. Ce sont

- « À propos des canons rythmiques », Gazette des Mathématiciens, 106 (2005), et
- « New Perspectives on rhythmic canons and the Spectral Conjecture », *JMM* (2009). Dans la suite, ces articles seront référencés par [GdM] et [AmiotJMM].

Le premier article représente une synthèse de mes premières années de recherche sur les canons, comprenant notamment le résultat séminal qui a permis de limiter l'étude des conjectures sur les pavages de la ligne aux canons de Vuza.

La formalisation musicale d'un canon rythmique, c'est à dire d'un pavage parfait périodique par un unique motif A répété à différents intervalles de temps, se ramène à l'équation suivante:

$$A \oplus B = \mathbb{Z}/n \mathbb{Z}$$
.

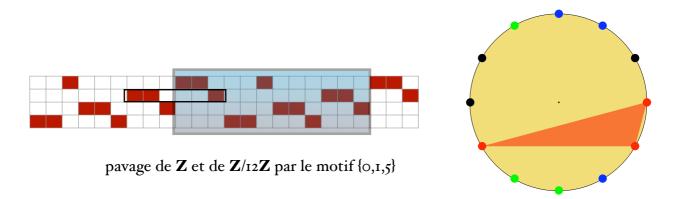
(A est le motif, B représente les différents départs de ce motif) qui équivaut à l' équation

$$A(X) \times B(X) = I + X + X^{2} + ... X^{n-1} \text{ modulo } X^{n} - I$$
 (1)

où A(X), **polynôme caractéristique** de la partie A, est la somme des X^k quand k décrit l'ensemble A. Le problème de la recherche de tous les canons rythmiques (de période n. donnée) se traduit donc par une question de factorisation¹¹ du polynôme $I + X + X^2 + ... X^{n-1}$, étant entendu qu'on cherche deux facteurs dont les coefficients soient des o ou des I exclusivement (appelés **polynômes o-1** dans [GdM]) et dont le produit est calculé modulo X^n -1, ce qui signifie que tout monôme X^k où k > n. est remplacé (itérativement) par $X^{k \cdot n}$, ce que j'ai implémenté naturellement par pattern-matching. Je mentionne ce détail apparemment secondaire parce qu'il est significatif de la prégnance des idées musicales à tous les stades de ces recherches: en effet, cette **règle** de programmation a une signification **perceptive** forte, à savoir que le k^{kme} temps du canon sera occupé par une note qui peut fort bien appartenir à une copie du motif qui aura commencé plus de n notes avant. Nous verrons d'autres exemples de l'utilité d'une culture musicale pour des questions qui relèvent apparemment exclusivement des mathématiques les plus abstraites.

^{II} La difficulté vient, bien évidemment, de ce que l'anneau *quotient.* $\mathbf{Z}[X]/(X^{n-1})$ n'est pas factoriel: les factorisations n'y sont pas uniques , et en particulier il y en a d'autres que celles que l'on trouve dans les polynômes habituels. J'ai exploré une autre piste (cf. [GdM]), cherchant des factorisations modulo p premier de l'équation (1). À ma grande surprise, il se trouve que tout motif pave (pour un période suffisamment grande), au sens où tout polynôme o-1 A(x) dans $\mathbf{F}_p[X]$ admet un complément B(x), lui aussi o-1, tel que (1) soit vérifiée - modulo p.

¹² L' auditeur perçoit des pavages de la **ligne** temporelle et non pas du **cercle**, structure quotient. Mais mathématiquement les deux notions sont identiques, tout pavage de la ligne par translations d'un motif étant périodique.



$$A(X) = \Phi_2 \Phi_4 \Phi_{12} = (I + X)(I + X^2)(I - X^2 + X^4) = I + X + X^6 + X^7$$

est un polynôme 0-1, correspondant à la partie $A = \{0,1,6,7\}$ qui pave (i.e. constitue un canon rythmique) avec par exemple $B = \{0, 2, 4\}$ i.e. $B(X) = I + X^2 + X^4$.

Le problème de cette démarche est que fabriquer un polynôme o-1 A(X), fût-il produit de polynômes cyclotomiques, ne garantit pas l'existence d'un complément B(X): ainsi pour

A =
$$\{0,1,2,4,5,6\}$$
, i.e. A(X) = $(1 + X^4)(1 + X + X^2) = \Phi_8 \Phi_3$

il n'existe pas de pavage de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ - ni d'ailleurs d'aucun $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ - dont le motif soit A. Ceci résulte des conditions qui se trouvent dans l'article séminal [CM], et qui sont les premières conditions générales jamais obtenues pour que l'équation (1) soit vérifiée. Ces conditions, (T_1) et (T_2) , portent précisément sur les indices des facteurs cyclotomiques du polynôme caractéris-

¹³ Mais ce canon n'est jamais un canon de Vuza: l'algorithme utilisé, qui est emprunté à Coven et Meyerowitz, donne toujours un complément B périodique.

tique A(X): si on note R_A l'ensemble des indices d des Φ_d qui divisent A(X), et S_A le sous-ensemble des éléments de R_A qui sont puissance d'un nombre premier, alors ces conditions s'énoncent ainsi (A désigne une partie de \mathbf{Z} et A(X) est son polynôme caractéristique):

- \bullet (T₁): la valeur A(1) est le produit des pour chaque p^k dans S_A.
- \bullet (T₂): pour chaque p^k , q^l ... dans S_A, on a $p^k \times q^l \times ...$ qui appartient à R_A.

En 1998, Coven et Meyerowitz ont prouvé¹⁴ que

- ♦ Si A pave, alors (T₁) est vérifiée.
- ightharpoonup Si (T_1) et (T_2) sont vérifiées, alors A pave.
- ♦ Si A pave \mathbb{Z}/n . \mathbb{Z} où n. a au plus deux facteurs premiers, alors (T_2) est vérifiée aussi.

On ignore encore si cette dernière propriété est vraie pour tout n. J'ai prouvé dans [AmiotJMM] que tous les canons de Vuza de période 120 vérifient (T2), ce qui implique que cette propriété est vraie pour une infinité d'autres canons. En effet, ainsi que je l'avais démontré précédemment¹⁵,

Tout canon rythmique peut se décomposer récursivement en canons plus courts jusqu'à tomber sur un canon de Vuza;

et en conséquence16, la condition (T2) étant conservée durant ces tribulations,

La conjecture « pave \Rightarrow (T_2) » est vraie pour tout canon si et seulement si elle est vraie pour tous les canons de Vuza.

Il est important, à mon avis, de souligner que cette démarche est avant tout d'origine musicale: en effet, la décomposition susmentionnée, baptisée « déconcaténation » dans [Amioto5], est une évidence auditive: si le canon $A \oplus B = \mathbb{Z}/n$. \mathbb{Z} n'est pas de Vuza, c'est que soit le motif A, soit son complément B, sont des répétitions de motifs plus simples. The Dans le premier cas on entendra un sous-motif de A répété un certain nombre de fois, dans le second on entendra tout

¹⁴ Leur article sera dorénavant cité comme [CM].

¹⁵ « Rhythmic canons and Galois Theory », actes du Colloquium on Mathematical Music Theory, H. Fripertinger & L. Reich Eds, Grazer Math. Bericht Nr 347 (2005). Cité comme [Amioto5].

¹⁶ Les calculs polynomiaux sont un peu longs, mais restent élémentaires, cf. [Amioto5].

¹⁷ Par exemple, le motif {0,1,6,7,12,13}, qui pave avec période 18, est une répétition du motif {0,1} qui pave avec la période 6.

simplement un canon plus court (même motif, répété moins de fois). C'est d'ailleurs la considération de toutes ces transformations de canons en d'autres canons, initiée par divers compositeurs contemporains, qui a mené à la découverte de canons de Vuza... inconnus de Vuza luimême, en ce qu'ils n'étaient pas engendrés par l'algorithme qu'il a donné comme preuve de l'existence de ses canons.¹⁸

Dans [Amioto5] j'ai donné une extension de ce résultat à une conjecture plus générale (énoncée en 1974 pour les espaces vectoriels de dimension finie): la conjecture de Fuglede, ou conjecture spectrale, ici en dimension 1. Il est intéressant de noter qu'entre temps, cette conjecture a été infirmée en dimension supérieure ou égale à trois (dans les deux sens), le premier contre-exemple étant dû à Terence Tao, lequel a depuis été récompensé de la profonde originalité de ses travaux par la médaille Fields.

Une partie A de **Z/nZ** de cardinal k est dite spectrale si il existe un "spectre"

$$\Lambda = \{ \lambda_0 \dots \lambda_{k-1} \} \subset [0,1]$$

tel que tous les $exp(2i \pi (\lambda_i - \lambda_j))$ (pour $i \neq j$) annulent son polynôme caractéristique A(X).

La conjecture de Fuglede est: « pave ⇔ spectral »; elle est vraie pour tout canon

si et seulement si elle est vérifiée pour tous les canons de Vuza.

Edouard Gilbert [Gil] a parachevé la démonstration de ce théorème, que j'avais énoncé sans prendre la peine d'en donner la preuve dans [GdM]. Il est notable que

$$(T_1) + (T_2) \Rightarrow \text{spectral},$$

ce qui a été démontré par Izabella Łaba¹⁹, peu après qu'elle ait lu l'article de Coven et Meyerowitz.

¹⁸ Ainsi qu'il est mentionné dans [Amioto5, p. 13], *toutes* les opérations musicales sur les canons préservent (T₁) et (T₂). Edouard Gilbert a étendu cette invariance à la propriété spectrale dans son mémoire de mastère [Gil]. Dans la présente synthèse, seules sont mentionnées la concaténation et la déconcaténation des canons, mais d'autres opérations comme le bégaiement (ou multiplexage) ont été abordées indépendamment, par exemple par Kolountzakis et Matolcsi étudiant la conjecture forte de Tijdeman dans « Tiles with no Spectra ». Enfin soulignons que l'algorithme de Vuza n'est pas le plus prolifique: une comparaison des différents algorithmes a été réalisée dans la *Tesi di laurea* de Giulia ^{Fidanza}.

¹⁹ Laba, I., « The spectral set conjecture and multiplicative properties of roots of polynomials », J. London Math. Soc. 65, pp. 661–671 (2002).

Les canons de Vuza, objets musicaux par excellence, sont ainsi devenus incontournables pour la résolution de conjectures fondamentales de mathématiques pures. Le second article présenté en annexe répond à une question pointue et ésotérique: il s'agit de déterminer tous les canons de Vuza de période n.=120, complétant ainsi la recherche présentée par Kolountzakis et Matolcsi²o dans le même numéro du Journal for Mathematics and Music par la classification exhaustive de ces canons pour les périodes inférieures à 168, et ce pour mieux étudier certaines des conjectures évoquées ci-dessus. Ce numéro spécial du Journal for Mathematics and Music de 2009 consacré aux canons rythmiques fait la part belle à la conjecture de Fuglede: c'est le sujet du troisième article (de Franck Jedrzejewski), elle est citée dans [KM], et démontrée au passage pour n.=120 par [AmiotJMM]²¹¹. Notons que cela prouve aussi la conjecture de Fuglede²² pour tout canon de période 240 (par exemple) qui n'est pas un canon de Vuza: en effet, il se décompose alors en canons plus petits²³, qui vérifient donc nécessairement la conjecture spectrale puisqu'elle est vraie pour n.≤120.

La démarche, commune à ces deux derniers articles (avec *n*₌₁₄₄ dans [KM]) a été proposée par Maté Matolcsi. Elle consiste à classifier les canons de Vuza par leurs ensembles S_A, en utilisant l'algorithme suivant:

- ◆ Choisir un S_A qui permette d'espérer un canon de Vuza (des conditions sur R_A permettent de repèrer la périodicité de A, voire celle de son complément éventuel B, cf. [KM]).
- ◆ Fabriquer par l'algorithme de Coven et Meyerowitz un B qui complète **tous les A** possibles ayant cet ensemble S_A.
- ◆ Rechercher tous les compléments de ce complément, i.e. tous les motifs A tels que (1) soit vérifiée.
- ◆ Trier par les valeurs de l'ensemble R_A incidemment, ceci permet de nouveau d'éliminer des canons non Vuza.

²⁰ Dorénavant citée comme [KM].

²¹ Les résultats de Coven-Meyerowitz et Laba suffisaient à établir pour *n*∠=144 que « pave ⇒ spectral ».

²² Au moins dans le sens « pave ⇒ spectral ».

²³ Des canons dont la période divise strictement 240, donc est au plus égale à 120.

◆ Sélectionner les solutions non périodiques, s'il y en a.

Cet algorithme nous a permis (avec quelques ruses de programmation pour les cas les plus coriaces) de produire la classification suivante des canons de Vuza de période 72, 108, 120 ou 144, les deux premières périodes ayant déjà été exhaustivement détaillées par Harald Fripertinger [Frip]:

n	$\mathbf{R}_{\mathbf{A}}$	R_B	nombre de ≠A	nombre de ≠B
72	{2, 8, 9, 18, 72}	{3, 4, 6, 12, 24, 36}	6	3
108	{3, 4, 12, 27, 108}	{2, 6, 9, 18, 36, 54}	252	3
120	{2, 3, 6, 8, 15, 24, 30, 120}	{4, 5, 10, 12, 20, 40, 60}	20	16
120	{2, 5, 8, 10, 15, 30, 40, 120	{3, 4, 6, 12, 20, 24, 60}	18	8
144	{2,8,9,16,18,24,72,144} or {2,8,9,16,18,72,144}	{3,4,6,12,24,36,48}	36	6
144	{2, 4, 9, 16, 18, 36, 144} or {2, 4, 6, 9, 16, 18, 36, 144} or {2, 4, 9, 12, 16, 18, 36, 144}	{3,6,8,12,24,36,72}	8640	3
144	{3, 4, 6, 8, 12, 24, 48, 72} or {3, 4, 6, 8, 12, 24, 36, 48, 72}	{2,9,16,18,144} or {2,9,16,18,36,144}	156 +6	48 +12
144	{2, 3, 6, 8, 12, 24, 48, 72} or {2, 3, 6, 8, 12, 18, 24, 48, 72}	{4, 9, 16, 18, 36, 144}	324	6

Il n'y avait pas là de canons inédits pour n=120 (ceux qui ne provenaient pas de l'algorithme de Vuza avaient été façonnés empiriquement à partir de canons de période 72), mais l'algorithme utilisé a permis de l'établir avec certitude; en revanche de nouveaux canons ont été trouvés pour n=144, montrant au passage (dans l'avant-dernier cas) qu'on pouvait avoir plusieurs ensembles R_A en face de plusieurs ensembles R_B distincts (même si S_A et S_B ne peuvent changer, d'après [CM]).

Par ailleurs, j'ai utilisé depuis et utilise encore une version rapide de ce "ping-pong" entre voix de canons pour tester des canons de plus grande taille et voir s'ils vérifiaient la condition (T₂), en utilisant la programmation linéaire pour chercher un complément de B (renonçant à les chercher tous, ce qui est trop coûteux en temps de calcul). L' idée m'en est venue en travaillant sur des problèmes de décomposition linéaires de gammes, exactes ou approchées, avec Bill

Sethares [AS]. Le problème n'avait rien à voir *a priori* avec les pavages, mais la programmation linéaire fournissait une méthode rapide (et quasi infaillible) pour obtenir **un** complément B d'un motif A qui pave.²⁴ En itérant l'algorithme, on trouve un complément A' de B, puis un complément B' de A', etc... jusqu'à retomber sur un motif (ou complément) déjà exprimé. Les ensembles S_A et S_B restent invariants tout au long de la procédure. Cette exploration avait pour but de trouver des canons de Vuza qui ne vérifiassent pas la condition (T₂), et peut-être pas la condition spectrale non plus; mais elle a failli à fournir un tel contre-exemple pour toutes les périodes allant jusqu'à *n*=1200.²⁵

En effet, la procédure décrit dans le numéro spécial de $\it JMM$ admet deux points faibles: le calcul de **tous** les compléments prend du temps, même après diverses optimisations apportées par Matolcsi, qui sont particulièrement pertinentes pour des canons "irréguliers" comme ceux de Vuza; et aussi le calcul de l'ensemble R_A . Pour réduire le temps de calcul de cette dernière tâche, j'ai suivi une suggestion de Matolcsi et calculé des valeurs particulières du polynôme A(X) aux points $X = e^{2i k \pi/n}$. En effet, ces valeurs ne sont autres que la transformée de Fourier (discrète) de l'ensemble A, qui permet de déceler notamment ses périodicités internes. On a notamment

- m est élément de R_A (pour $m \mid n$) si et seulement si $A(e^{2i\pi/mL}) = 0$, i.e. si le $n/mL^{\hat{e}me}$ coefficient de Fourier est nul.
- A est périodique (de période < n bien sûr) si et seulement si il existe un élément p^m de S_A maximal (i.e. $n=p^m$ q, où q est premier avec p) dont tous les multiples sont dans R_A , i.e. qui vérifie que si p^m $k \mid n$ alors k est dans R_A .

²⁴ Qui plus est, l'algorithme du simplexe étant fortement asymétrique, il tend à donner des solutions non périodiques, c'est à dire qu'on trouve des canons de Vuza quand il y en a pour les couples S_A et S_B considérés.

²⁵ Ceci ne constitue pas une preuve de ce qu'il n'y ait pas de tels contre-exemples avec de "petites" périodes, mais le laisse conjecturer, dans la mesure où les listes de canons de Vuza ainsi formées ont des cardinaux similaires à ce que l'on trouve dans les cas où le catalogue exhaustif est connu. Il est probable que de tels contre-exemples n'existent que pour d'assez grandes périodes, mais il serait dommage de se priver d'explorer les périodes qui nous sont d'ores et déjà accessibles.

Cette dernière propriété a été utilisée pour les algorithmes cataloguant les canons de Vuza, pour exclure certains ensembles R_A. Je reviendrai sur l'intérêt de cette transformée de Fourier pour l'étude de parties discrètes d'un groupe cyclique, voire du cercle continu, car elle est mon outil privilégié pour aborder la question des gammes musicales.

Finalement, la question éminemment pratique, pour ne pas dire rustique, de dresser des catalogues de canons de Vuza à l'usage des compositeurs, a permis de faire substantiellement avancer des problèmes ouverts de mathématiques dites pures. Il aurait été impossible de progresser du point de vue algorithmique sans l'utilisation d'outils algébriques puissants, comme les polynômes cyclotomiques et la théorie de Galois. On verra qu'il en est de même dans les deux autres domaines que j'ai étudiés, à commencer par les transformées de Fourier discrètes des gammes musicales.

Gammes et transformée de Fourier discrète

Une partie A d'un ensemble E peut être décrite parfaitement par sa fonction caractéristique X A qui vaut I si x∈A et o sinon. Un prolongement possible consiste à autoriser des valeurs entre o et I, comme en logique floue, ce qui revient à considérer des probabilités. Une idée plus exotique est de calculer la transformée de Fourier de cette fonction. Comme la transformée de Fourier est un isomorphisme, il n'y pas de perte d'information. Qui plus est, la fonction originelle, c'est à dire la partie A, est facile à retrouver par la formule de transformation de Fourier inverse (théorème de Plancherel). Dans le cas de parties du groupe cyclique **Z/cZ** qui modélise la gamme chromatique, il s'agit d'une transformée de Fourier discrète, ou DFT:

$$\mathcal{F}_A: t \mapsto \sum_{k \in A} e^{-2i\pi kt/c}$$

Le premier qui ait utilisé cette DFT à des fins d'étude structurelle en théorie de la musique est sans aucun doute David Lewin, dans son tout premier ainsi que dans son dernier article. Mais dans le premier cas il n'y fait qu'une allusion *in fine*, s'excusant de la difficulté de notions comme l'algèbre des caractères pour les lecteurs du *Journal of Music Theory* (en 1959...). Néan-

moins, toute son analyse des rapports intervalliques entre deux parties de **Z/n.Z** (qu'on n'appelait pas encore des *pitch-class sets* ou *pc-sets*) repose sur les relations entre leurs transformées de Fourier. En effet, si pour deux parties A, B de **Z/n.Z** on définit la fonction d'intervalles par

IFunc(A, B)(t) = nombre d'intervalles de taille t entre une note de A et une note de B,

il s'avère que cette fonction est le produit de convolution des fonctions caractéristiques de -A et de B:

$$1_{-A} \star 1_B : t \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}_c} 1_{-A}(k) 1_B(t-k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_c} 1_A(k) 1_B(t+k) = IFunc(A, B)(t)$$

Or la DFT du produit de convolution est le produit ordinaire des DFT:

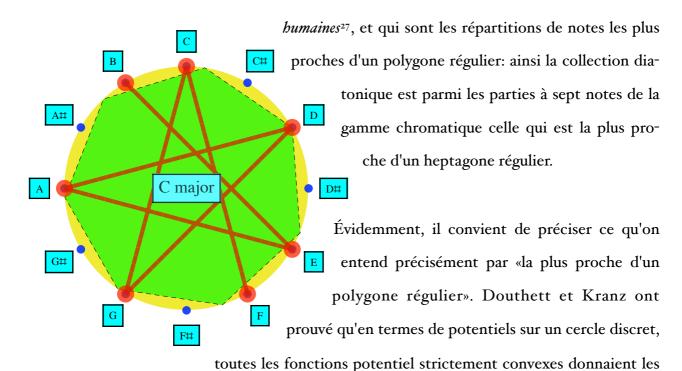
$$\mathcal{F}(IFunc(A,B)) = \mathcal{F}(1_{-A}) \times \mathcal{F}(1_B)$$

Cela signifie qu'il est possible de récupérer B, connaissant A et IFunc(A, B) - sauf quand la DFT de A a la mauvaise grâce de s'annuler, ce qui arrive dans le cas des «special cases» énumérés par Lewin (comme la gamme par tons, ou la gamme mélodique mineure ascendante (o 2 3 5 7 9 11)).

DFT et "Maximally Even Sets"

Le cas particulier B=A a été revisité de manière magistrale par Ian Quinn dans sa thèse²⁶, avec la volonté de reconnaître via ces propriétés de coefficients de Fourier les parties les plus «prototypales», i.e. celles qui jouent le rôle de phares dans le paysage des accords. La découverte la plus remarquable de Quinn est que ces phares ou prototypes consacrés par la critique traditionnelle sont caractérisés par la valeur maximale de l'un de leurs coefficients de Fourier. Il est temps de dire que les prototypes en question sont les Maximally Even Sets ou ME Sets, que je traduis par «gammes bien réparties» dans mon article pour la *Revue de mathématiques et sciences*

²⁶ Quinn, I., « A unified theory of chord quality in equal temperaments », PhD dissertation, Univ. of Rochester (2005).



mêmes ME Sets.²⁸ Quinn a mis en évidence dans sa thèse une autre manière d'apprécier la

«bonne répartition»:

Le pc-set A à d éléments est « bien réparti » si et seulement si la valeur $|F_A(d)|$ (amplitude du d^{eme} coefficient de Fourier) est maximale par rapport à tous les autres pc-sets à d éléments.

Mon article du *Journal of Mathematics and Music* joint dans le dossier annexe²⁹ démontre rigoureusement et généralise cette découverte de Quinn. Il m'a paru en effet nécessaire de prouver précisément³⁰ le fondement géométrique de cette propriété, qui est un lemme trigonométrique (appelé « Huddling Lemma » dans [MESets]), notamment pour le cas délicat des multiensembles qui apparaissent dans le cas des ME Sets dégénérés (comme la gamme octatonique).

²⁷ Amiot, E., « Gammes Bien Réparties », Revue de Mathématiques et Sciences Humaines, 178 (juillet 2007).

²⁸ Douthett, J. et Krantz, R. « Energy extremes and spin configurations for the one-dimensional antiferromagnetic Ising model with arbitrary-range interaction », *Journal of Mathematical Physics* 37 (1996).

²⁹ « David Lewin and Maximally Even Sets », *Journal of Mathematics and Music* (2007) vol. 3. Ci-après cité comme [MESets].

³⁰ Les évidences sont bien souvent trompeuses. J'ai récemment élucidé le nombre de générateurs possibles d'une gamme monogène (comme la gamme majeure ou la gamme pentatonique, engendrées par des quintes), qui porte bien mal son nom puisque (contrairement aux parties monogènes, alias séquences arithmétiques, dans **R** par exemple) ce nombre peut être arbitrairement grand — mais n'est jamais égal à 14 par exemple, cf. mon article « On the number of generators of a musical scale ».

Au passage, j'ai démontré une conjecture de Quinn concernant certains ME sets particuliers (ceux de type III dans sa nomenclature - cela ne figure pas dans l'article du JMM, mais dans celui de la RMSH); j'ai également complètement décrit tous les cas de maximalité de tous les coefficients de Fourier des pc-sets, et retrouvé de manière fort plaisante le théorème de l'hexacorde de Babbit (avec ses généralisations diverses, y compris à tout groupe abélien compact).³¹ Ce dernier point mérite d'être approfondi ici, du fait de l'argument utilisé: quand on prend B=A dans les équations ci-dessus, on obtient d'une part le contenu intervallique de A, IC(A) en lieu et place de IFunc(A, B) (c'est l'histogramme des intervalles présents entre les notes de A, ou, comme l'exprime joliment Lewin dans un de ses derniers articles, la probabilité que tel intervalle soit ouï si l'on joue des notes de A au hasard), et, d'autre part, sa DFT donne le module au carré (i.e. l'amplitude) de la DFT de A:

$$\mathcal{F}(IC_A) = |F_A|^2$$

Ceci permet très facilement de comparer les vecteurs d'intervalle de A et de son complémentaire, ce qui est précisément l'énoncé du théorème de l'hexacorde. Plus généralement, on voit sur cette dernière formule que la connaissance de l'**amplitude** de la DFT équivaut très exactement à la connaissance de IC(A), i.e. du **contenu intervallique** de A.

Or l'étude des vecteurs d'intervalle, dans les années 60, a mis en lumière le fait troublant que certains pc-sets ont même distribution intervallique sans être pour autant isométriques (il est en revanche évident que transposer, ou inverser, un pc-set A ne change pas IC_A). Ces exceptions, rares, ont été baptisées Z-relation par Alan Forte. La formule secrète utilisée par Lewin rend donc compte très simplement de cette relation, qui exprime l'égalité des longueurs des coefficients de Fourier.

Ce n'est que récemment qu'on s'est aperçu que cette notion était bien connue depuis la fin des années 40 par les cristallographes, qui l'avaient nommée *homométrie*. ³² Le problème de trouver des figures homométriques dans un groupe cyclique est encore le sujet d'actives recher-

³¹ Ce point a été publié indépendamment dans la revue de vulgarisation mathématique *Quadrature*.

³² En effet, l'observation de la figure de diffraction donnée par un solide éclairé par des rayons X est essentiellement équivalente à l'amplitude de sa transformée de Fourier. Les solides homométriques mais non congruents sont donc des obstacles à une reconnaissance taxonomique via l'observation par ces techniques.

ches, dans le cœur desquelles ces questions de ME sets m'ont subitement impliqué. Une de mes dernières contributions dans cette direction, toute récente, est nettement plus technique que la démonstration élégante du théorème de l'hexacorde susmentionnée; elle porte sur certaines des *unités spectrales*, objets mystérieux qui permettent de générer des orbites d'objets homométriques - lesquels malheureusement sont généralement ne sont pas de vrais ensembles mais des multi-ensembles.³³ J'ai trouvé un théorème pointu, qui énumère les unités spectrales rationnelles d'ordre fini, en travaillant avec Bill Sethares sur une autre présentation des relations entre pc-sets.³⁴ Notre projet était de décrire des relations de combinaisons linéaires entre gammes (ou accords, plus exactement). Par exemple

Do mineur = Do majeur - Fa majeur + Mib majeur.

Pour ce faire nous avons introduit un formalisme matriciel, qui n'est autre qu'une représentation (au sens vulgaire comme au sens de la théorie des représentations de groupes) des fonctions caractéristiques de pc-sets dans l'algèbre des matrices circulantes. Il se trouve que ces matrices sont simultanément diagonalisables, et que leurs valeurs propres ne sont autres que les coefficients de Fourier! Nous avons donc retrouvé les «special cases» de Lewin, qui correspondent à celles parmi ces matrices qui ont un déterminant nul, et pu caractériser certains pc-sets à distribution intervallique « plate »³⁵ par un déterminant maximal, entre autres applications. Dans ce contexte comme avec la transformée de Fourier discrète, il s'agissait de remplacer les relations musicales (intervalliques), peu commodes à exprimer mathématiquement comme par exemple le produit de convolution de fonctions caractéristiques, par des objets moins immédiats (DFT, matrices), mais ayant l'avantage d'être munis d'une loi de composition interne plus praticable, comme le produit ordinaire ou le produit matriciel. Techniquement, on passe d'un contexte à un autre par des isomorphismes d'algèbres complexes. Le fluide qui permet une navigation sans heurts entre tous ces continents est la transformée de Fourier.

^{33 «} On the Group of Rational Spectral Units with Finite Order », preprint.

³⁴ « An Algebra for periodic rhythms and scales ». À paraître chez Springer.

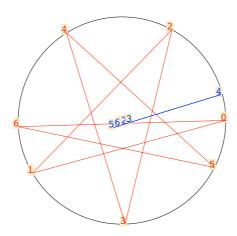
³⁵ Leur inventeur Jon Wild les a nommés FLID pour « Flat Interval Distribution ».

DFT vs JSB³⁶ Une application de la transformée de Fourier discrète à l'archéologie des tempéraments musicaux

Publié dans Music Theory Online en juin 2009, cet article donne une application étroite, mais assez spectaculaire, de l'extension de l'analyse de Fourier discrète aux tempéraments, c'est à dire à des parties finies du cercle continu S¹, lequel modélise les hauteurs modulo l'octave. Cette extension m'a été suggérée par Thomas Noll après que nous ayons discuté de la thèse de Quinn à Chicago en 2005, ce qui lui a donné l'idée d'étudier certaines gammes (les gammes engendrées par un intervalle) comme des suites géométriques dans le groupe S¹, de la forme

$$u_k = u_o \times \xi^k$$

et de considérer les DFT des applications $k \rightarrow u_k$ définies d'un groupe cyclique $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans le corps des nombres complexes. Une élégante propriété établie par Noll est que, dans le cas d'une telle gamme monogène, les coefficients de Fourier sont tous alignés en tant que nombres complexes dans le plan d'Argan-Cauchy, comme on le voit sur la figure suivante.³⁷



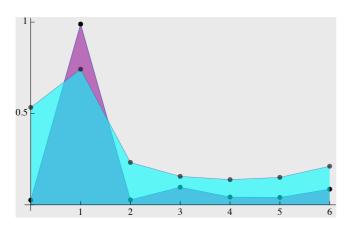
J'ai plus généralement considéré une partie finie, fixée de S¹ (on peut considérer de manière typique douzes notes obtenues par itération de la quinte pythagoricienne à partir d'une

³⁶ Publié dans Music Theory Online, 2, 2009.

³⁷ J'ai bien entendu étudié la réciproque, qui se trouve être largement fausse: il existe des familles de gammes à plusieurs degrés de liberté dont les coefficients de Fourier sont alignés sans être pour autant monogènes.

fondamentale) qu'on peut voir comme une gamme chromatique non nécessairement tempérée, et les gammes majeures, définies classiquement comme les séquences de notes indexées par (0,2,4,5,7,9,11) ou tout translaté modulo 12 de cet ensemble d'indices, dans la gamme chromatique ambiante.

Une variante du résultat de Quinn dans ce contexte élargi, mais de démonstration tout à fait similaire, donne que parmi toutes les gammes à 7 notes, ce sont les gammes majeures qui



ont la plus grande valeur de leur **premier** coefficient de Fourier - ce sont les plus proches d'une progression géométrique parfaite, i.e. d'un heptagone régulier (cf. figure cijointe, avec la gamme majeure et une gamme à 7 notes quelconque). Ce résultat est en fait parfaitement pur si la gamme chromatique

ambiante est également tempérée (i.e. tous les intervalles entre deux notes consécutives sont égaux), et il reste vrai pour des tempéraments raisonnables (proches du tempérament égal), par continuité de la transformée de Fourier. Il s'agit donc d'un résultat dont le domaine de validité est **musical**, et non pas mathématique: il n'a pas de sens pour un contexte chromatique arbitraire, mais il est parfaitement vrai pour tous les tempéraments³⁸ qui ont été utilisés effectivement par des musiciens.

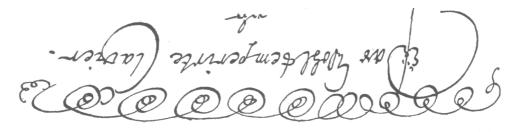
En préparant un exposé pour l'atelier Klang und Ton. à l'institut Helmholtz de Berlin en mai 2007 (à l'instigation de T. Noll), j'ai donc eu la curiosité de calculer les valeurs de ces coefficients de Fourier des 12 gammes majeures dans différents tempéraments classiques, constatant avec amusement que certains tempéraments permettaient d'obtenir une valeur plus grande (pour certaines gammes majeures) que le tempérament égal. Puis j'ai été frappé par l'éventail

³⁸ À douze notes; j'ai exclu de cette discussion des objets étranges comme le tempérament à 31 notes de Nicola Vicentino. Cependant, comme ce tempérament est quasiment égal, les résultats trouvés dans le contexte des douze notes pourraient s'y étendre *mutatis mutandis*.

des valeurs obtenues. Cet éventail est certes réduit³⁹, mais sa largeur varie considérablement en fonction du tempérament considéré. Par exemple,

- pour le tempérament égal toutes les gammes ont un coefficient de Fourier identique;
- pour le tempérament pythagoricien, engendré par onze quintes justes, le coefficient varie entre 0.9856 et 0.9927.

Pour rendre compte de cette disparité de qualité entre les diverses gammes majeures, j'ai créé un indicateur simple: l'inverse de l'écart maximum entre les coefficients de Fourier des douze gammes majeures. J'ai testé entre autres le tempérament proposé par Bradley Lehman comme celui qu'utilisait J.S. Bach, à partir d'une interprétation audacieuse (et contestée !) des volutes qui ornent la première page de l'édition originale du *Wohltemperierte Klavier* publié en 1722:40



Lehman y lit l'indication (de gauche à droite sur la figure) d'accorder cinq quintes diminuées de deux douzièmes de comma, puis trois quintes justes, puis trois diminuées d'un douzième de comma. J'ai alors constaté avec surprise que l'écart entre les coefficients de Fourier, calculé pour ce tempérament, était plus petit que celui que l'on obtient pour tous ses concurrents.

Bien sûr, des tempéraments plus récents (postérieurs à la publication du Wohltemperierte Klavier) donnent un écart encore plus réduit; en particulier le tempérament égal qui prédomine de nos jours donne un écart nul. C'est néanmoins un indicateur significatif, dans la mesure où Bach recherchait explicitement un tempérament qui permît de faire sonner «bien» (c'est un

³⁹ Typiquement, les coefficients de Fourier des gammes majeures varient entre 0.975 et 0.995, le maximum théorique étant de 1 pour une gamme qui réaliserait un heptagone régulier parfait.

⁴⁰ C'est Lehman qui renverse le dessin. Ce point est discuté dans mon article, où il est expliqué pourquoi la DFT ne donne pas de préférence entre un tempérament et son renversement.

sens des sens possibles du mot *wohl*) toutes les gammes majeures. J'étais particulièrement heureux de trouver une retombée aussi concrète à des recherches à ce point abstraites.

Mélodies Autosimilaires

Certains mathématiciens du groupe Bourbaki, peut-être extrémistes, sont allés jusqu'à prétendre que la géométrie classique n'avait plus lieu d'être depuis qu'on avait découvert qu'elle ne faisait que traduire l'action de certains groupes algébriques (groupes affine, orthogonal, projectif, conforme...), et n'était plus qu'un codicille à l'algèbre linéaire. Cependant la considération de figures, fussent-elles les choix partiaux de représentants d'orbites de ces groupes, peut toujours amener des idées nouvelles, que l'on ne saurait découvrir aux altitudes éthérées de l'algèbre pure. Ainsi mon étude des mélodies autosimilaires⁴¹ pourrait être vue comme un codicille sur l'action du groupe affine modulo n. Néanmoins, son origine musicale, et l'angle original qui en résulte, ont amené une quantité notable de résultats nouveaux et non triviaux, comme les Thms. 2.8 ou 6.1. On y voit, encore mieux à l'œuvre que dans mes autres domaines de recherche, l'interaction dialectique fructueuse entre algébrisation et implémentation.

Pour ne prendre qu'un exemple de la complémentarité des processus, le Thm. 6.1 énonce que toute mélodie périodique devient autosimilaire après un certain nombre d'itérations de "l'extraction de la kème note". Or, sans la formalisation en termes d'action d'applications affines sur **Z**/n.**Z**, l'itération à l'infini d'une telle application n'était guère concevable; mais d'autre part, sans expérimentation informatique, je n'aurais sans doute jamais découvert que cette itération convergeait - et il m'a fallu mettre en jeu des résultats assez profonds d'algèbre commutative pour prouver que cette convergence avait toujours lieu.

Dans le point de vue Bourbakiste évoqué plus haut, le groupe affine sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est représenté fidèlement par un simple sous-groupe des matrices $GL(2, n\mathbb{Z})$. Mais pour le musicien, ces

⁴¹ Autosimilar Melodies, 7MM, vol. 3 (2008), abrégé en [autoSimJMM].

⁴² Précisément il s'agit du Lemme de Fitting. Pour être parfaitement honnête, il arrive que l'attracteur autosimilaire final soit trivial, i.e. consiste en une mélodie faite d'une seule note répétée.

transformations sont fascinantes - au point qu'on peut s'interroger sur le peu de résultats les concernant - car elles préservent, selon le contexte, nombre de notions capitales: le contenu intervallique (à permutation près), les parties tous-intervalles, les modes à transpositions limitées⁴³, les pavages, divers types de séries dodécaphoniques comme les séries tous-intervalles, etc... Pour ces raisons, je considère ces travaux comme ma contribution la plus importante et la plus originale à la recherche mathématico-musicale.

Les mélodies autosimilaires sont des mélodies périodiques (qu'on imagine infiniment longues) jouissant de la propriété suivante: si on a convenu d'une unité de temps telle que toutes les notes se produisent à des abscisses entières, alors en extrayant une note tous les *a* temps on obtient une copie conforme (jouée *a* fois plus lentement) de la mélodie originale. Comme on le voit ci-dessous, la cellule célèbrissime qui fonde le premier mouvement de la 5ème symphonie de Beethoven se retrouve quand on ne joue qu'une note sur trois - et donc *a fortiori* quand on joue une note sur neuf, etc.



Une mélodie périodique est modélisée par une suite d'évènements musicaux⁴⁴, i.e. une suite M_k où k décrit un groupe cyclique $\mathbf{Z}/n_k\mathbf{Z}$. Dans l'acception originelle, la mélodie est autosimilaire de rapport a si

pour tout
$$k \in \mathbb{Z}/n \mathbb{Z}$$
, $M_k = M_{ak \pmod{n}}$

⁴³ Moreno Andreatta m'a signalé ce résultat élégant.

⁴⁴ ... qui peuvent être *absence* d'évènement, c'est à dire silence ou prolongation d'une note. Tom Johnson insiste d'ailleurs pour appeler les silences "rests", de manière plus positive, et s'en sert fréquemment dans ses compositions autosimilaires.

Tom Johnson⁴⁵ a rapidement réalisé que cette définition manquait de généralité, qu'il pouvait exister des décalages (a k + b) au lieu de (a k), ou encore plusieurs rapports distincts pour une mélodie; en outre, il a constaté que

Si a et a' sont deux rapports d'autosimilarité d'une mélodie M de période n alors a×a' (mod n) est aussi un rapport d'autosimilarité de M.

ce qui exprimait en fait que l'ensemble des transformations affines, sur les indices temporels des évènements de la mélodie qui la laissent invariante, forment un groupe. D'où ma définition plus générale:

M est autosimilaire de groupe $G \subset A_n$ (groupe affine modulo n) si pour tout élément g de G on a pour tout $k \in \mathbb{Z}/n \mathbb{Z}$, $M_k = M_{g(k)}$.

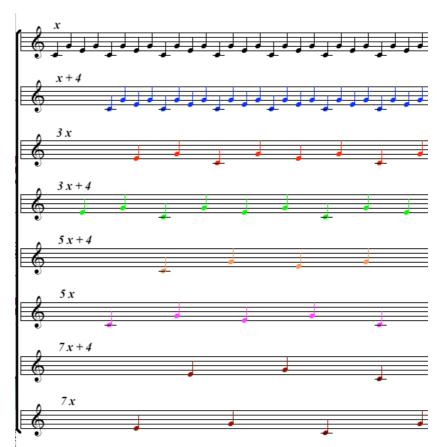
Ainsi la fameuse basse d'Alberti 46 , si populaire au XVIIIe siècle, possède un groupe de 8 symétries, les $x \rightarrow (2k+1)x + 4$ ou $x \rightarrow (2k+1)x$.

⁴⁵ On trouvera dans [AutosimJMM] deux extraits de partitions de Johnson entièrement construites sur des mélodies autosimilaires.

 $^{^{46}}$ Si on la considère comme une mélodie périodique de 8 notes; on peut donc considérer la basse d'Alberti comme très symétrique puisque son groupe est d'indice 4 seulement dans le groupe affine complet A_8 qui contient 32 éléments.

L'étude d'une propriété de certaines mélodies isolées est donc ramenée à celle de l'action

de sous-groupes du groupe affine modulo n. sur les indices
temporels des évènements de
cette mélodie. Cette démarche
n'est pas neuve en soi (cf. par
exemple la classification des
pc-sets par Forte, qui est de fait
une nomenclature des orbites
de l'action du groupe T/I sur
l'ensemble \mathbb{Z}/n . \mathbb{Z}); et si elle est
devenue classique dans nombre
de domaines scientifiques⁴⁷,
c'est qu'elle permet une taxonomie pertinente qui réduit

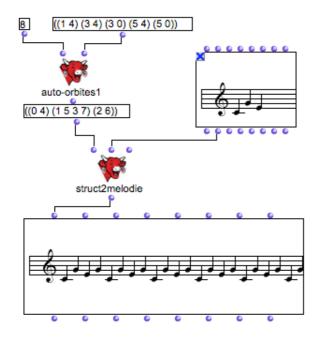


une combinatoire considérable (toutes les mélodies de période n.) à un petit nombre de classes, tout en conservant le sens musical à l'intérieur d'une même classe: toutes les mélodies qui y appartiennent vont être invariantes par les mêmes augmentations/extractions. Bien entendu, la faculté de reconnaître le sous-groupe des symétries affines d'une mélodie (autosimilaire) donnée est ausi fondamentale théoriquement que pratiquement, et elle a été dûment implémentée dans *OpenMusic*.48

Une fois obtenue la description algébrique complète (cf. [autosimJMM] qui se veut exhaustif sur la question), il devenait possible de renverser la perspective et de *créer* une mélodie auto-

⁴⁷ On peut dater son origine au fameux *Programme d'Erlangen*. de Felix Klein: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*., 1872.

⁴⁸ L' algorithme choisi cherche le coefficient de corrélation entre la mélodie originale et les mélodies extraites à divers rapports, en les considérant comme des *circlists*, cf. [autosimJMM] 5.1.



similaire jouissant de symétries données. Le "patch" que j'ai développé avec Carlos Agon pour *OpenMusic*⁴⁹ permet de donner en entrée une ou plusieurs "symétries affines", c'est à dire diverses manières d'extraire des notes de la mélodie, ainsi qu'une séquence de notes (suffisamment longue), et d'en déduire une mélodie qui soit autosimilaire modulo toutes ces symétries. Par exemple, en prenant les trois notes do, sol, mi, et en imposant les applications affines

 $x \rightarrow x + 4, x \rightarrow 3x, x \rightarrow 3x + 4, x \rightarrow 5x + 4, x \rightarrow 5x$ modulo 8, on retrouve la basse d'Alberti. 50

Tout ce travail sur les structures algébriques permet ainsi d'atteindre l'expression la plus parfaite de la créativité du compositeur, qui peut jouer sur tous les paramètres qui restent libres après qu'il ait fixé les symétries qu'il désirait. Un utilisateur de ce programme suffisamment versé en mathématiques pourra prévoir exactement le nombre d'occurrences des différentes notes, ou le nombre maximal de notes différentes, la possibilité ou non que la mélodie soit palindromique, ou faire en sorte que la mélodie s'exprime comme un pavage par augmentations: toutes ces questions, et d'autres, sont élucidées dans [autosimJMM]; mais en pratique, même sans aucune connaissance mathématique, en expérimentant avec les paramètres du patch développé sous *OpenMusic* on arrive rapidement aux mêmes résultats.

⁴⁹ cf. Agon, C., Amiot, E., Andreatta, M., « Autosimilar melodies and their implementation in OpenMusic », Proceedings SMC 07, Lefkada, Grèce (2007).

⁵⁰ Il est suffisant de donner quelques symétries, qui engendreront tout un sous-groupe qu'il n'est pas nécessaire d'expliciter, non plus que son nombre d'éléments — l'algorithme calcule tout pour l'utilisateur, en appliquant toutes les symétries données jusqu'à ce que rien de nouveau ne puisse être engendré: Se vogliamo che tutto rimanga come è, bisogna che tutto cambie. (G.T. di Lampedusa, Il Gattopardo).

Conclusion et perspectives

L'élaboration de cette synthèse de recherches initiées il y a 25 ans m'a permis de comprendre pourquoi, et en quoi, l'informatique a toujours joué un rôle central dans tous mes travaux. Mes deux pôles d'intérêt ont toujours été musique et mathématiques (non triviales), et, refusant toute séparation schizophrénique entre elles, je me suis bien naturellement placé au carrefour de l'informatique. Celle-ci touche en effet à la première, notamment par la validation des théories élaborées via des implémentations concrètes (et bien sûr, plus traditionnellement par tout l'aspect expérimental, analyse de données ou formulation de conjectures), et aux dernières via l'organisation rigoureuse des données, qui fait de l'écriture d'un programme le reflet fidèle (pour ne pas dire platonicien) des structures algébriques qu'en retour il aura parfois suggérées.

Il est fréquent de considérer les mathématiques comme prestataires d'outils et de concepts pour d'autres sciences; bien sûr il en est ainsi, dans ma démarche comme dans d'autres: les structures de groupe, d'anneau, d'algèbre, la transformée de Fourier et autres morphismes montrent leur considérable efficacité. Cependant, comme parfois avec la physique, il arrive que le champ d'étude lui-même suscite des retombées mathématiques, que l'on aurait pu attendre bien plus longtemps si la perspective musicale n'avait amené des questions bien différentes.

En premier lieu bien sûr, je puis citer mes résultats sur les pavages de **Z** par translation. La notion de canon de Vuza est «évidente» pour un musicien, et la réduction récursive à un canon de Vuza est cela même que l'on perçoit d'un canon musical (on n'entend jamais que des canons de Vuza...). Et cette réduction apporte des lumières nouvelles sur certaines des plus fascinantes des conjectures (mathématiques) sur les pavages.

Un signe clair de l'injuste manque de notoriété des canons de Vuza est que les cardinaux des «mauvais groupes» (ceux qui ne sont pas de Hajós: 72, 108, 120, 144...) ne figuraient pas dans l'encyclopédie des suites d'entiers en ligne de Sloane. Cette omission a été réparée depuis; j'y ai

fait rajouter en plus une suite originale, celle des entiers n. tels que -1 soit une puissance⁵¹ modulo n. Ces entiers sont liés aux propriétés palindromiques⁵² de certaines mélodies autosimilaires.

D'autres propriétés intéressantes, et à ma connaissance inédites, ont surgi de l'étude de ces mélodies: ordre maximal d'une application affine, définition des mélodies autosimilaires commme limites asymptotiques d'extraction de toute mélodie périodique. D'autres propriétés déjà connues par ailleurs, mais obscures, ont pris un sens nouveau avec l'orientation que leur ont donné mes recherches, comme par exemple le lemme ésotérique qui assure que tout polynôme à coefficients modulo p, n'ayant pas o comme racine, divise un X^{n-1} pour n assez grand, lemme qui m'a permis, lorsque je l'ai retrouvée, de prouver que tout motif fini «pave modulo p».

Enfin, pour conclure provisoirement cette liste (qui, je l'espère, continuera de s'enrichir), seul un musicien pouvait s'interroger sur le nombre d'intervalles générateurs d'une gamme, même s'il a fallu des compétences de mathématicien pour établir ce nombre ne peut jamais être 14 53; c'est en étudiant les diverses opérations musicales sur les gammes (transpositions, inversions) et les rapports algébriques entre elles que j'ai été amené à classer toutes les *spectral units* rationnelles d'ordre fini, qui sont (entre autres représentations) des matrices de passage entre gammes homométriques. Ceci m'a fait découvrir le fait beaucoup plus simple que la différence entre deux nombres inversibles modulo n. décrit le sous-groupe d'indice 2 de $\mathbf{Z}/n \cdot \mathbf{Z}$.54

L'approche musicienne est pour moi une source d'émerveillement continuel, car elle ne cesse d'engendrer des découvertes nouvelles, dûes à ses angles de pensée originaux. Cependant, et ce n'est pas une opposition mais une consolidation dialectique, il en va aussi de l'unité profonde de nature entre l'esprit d'un musicien et celui d'un mathématicien — si l'on en croit un vieux poncif pythagoricien, cette unité va tellement de soi qu'elle n'a nul besoin d'être prouvée.

⁵¹ Les premières valeurs sont 5, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 33...

⁵² Mon intérêt pour les palindromes est largement né de la passion que leur voue Moreno Andreatta, qui avait remarqué que nombre de canons de Vuza exhibent une certaine "palindromicité", quand ce n'est pas une palindromicité certaine.

⁵³ Puisque j'ai prouvé que ce nombre est toujours de la forme $\Phi(n)$ où Φ est la fonction d'Euler.

⁵⁴ Et le groupe tout entier quand n est impair.

Jusqu'il y a peu, cela se fondait sur l'abondance du nombre dans la musique (mètre, hauteurs, combinatoire), abondance qui n'a rien de remarquable ni de spécifique à la musique! Pour citer le mot célèbre de Leibniz,

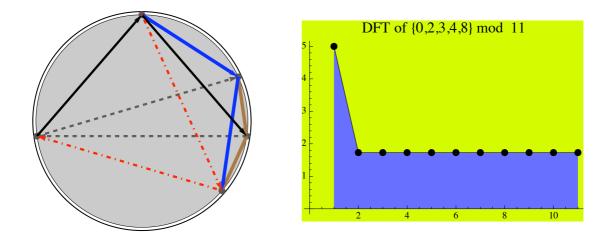
La musique est un exercice d'arithmétique secrète, et celui qui s'y livre, ignore qu'il manie des nombres.

Si le secret perdure sans doute, il est clair dorénavant, et particulièrement je l'espère pour mes lecteurs, que cette harmonie dépasse de loin la notion de nombre, embrassant tout particulièrement les structures algébriques qui modélisent au plus près les concepts du musicien, concepts simples de son point de vue (autosimilarité, contenu intervallique, etc...) mais qui nécessitent des outils relativement complexes pour leur formalisation. Comme le dit fort justement Guérino Mazzola,

On ne peut prétendre que Bach, Haydn, Mozart ou Beethoven - pour ne nommer que quelques uns des plus grands compositeurs, sont des génies exceptionnels qui ont élaboré des chefs-d'œuvres éternels, sans se donner, pour essayer de comprendre leurs créations uniques, des outils appropriés, c'est à dire suffisamment puissants et profonds.55

L' ordinateur apporte un interfaçage bienvenu entre l'aridité de l'algèbre et l'immédiateté de la perception musicale, et il est naturel que mes recherches se soient si souvent traduites en implémentations (comme d'ailleurs nombre de celles de Mazzola). Cependant il est une autre piste pour confirmer ce renouveau du poncif (la musique comme algèbre secrète ?), qui est celle de l'expérimentation en sciences cognitives.

⁵⁵ ToM, p. vii. (ma traduction).



Avec Isabelle Viaud-Delmon, Carlos Agon et Moreno Andreatta, nous avons lancé un projet à l'IRCAM pour mesurer la perception par des cobayes du caractère uniforme, ou pas, des coefficients de Fourier d'un rythme. Ce projet vise à établir si l'on discerne le caractère saillant (comme pour les ME sets) ou au contraire plat (cf. l'illustration de FLID ci-dessus, avec une platitude maximale des coefficients de Fourier) de structures discrètes périodiques. Si ce projet - et ceux qui lui succèderont - s'avère concluant, on aura, enfin, établi un pont vers les sciences cognitives, car on touchera peut-être à l'essentiel: évaluer quels concepts mathématiques opèrent effectivement dans l'esprit humain lors de la perception de structures musicales. Un joli dessin de quelques rythmes en OM serait bien là...

⁵⁶ Ici la transformée de Fourier discrète.

Liste de travaux

ARTICLES FIGURANT DANS LE DOSSIER DES TRAVAUX

- → Amiot E., « À propos des canons rythmiques », Gazette des Mathématiciens, 106 (2005). Consultable en ligne.
- ◆ Amiot E.,« David Lewin and Maximally Even Sets », Journal of Mathematics and Music (2007) vol. 3.
- ♦ Amiot E.,« Autosimilar Melodies », *Journal of Mathematics and Music* (2008) vol. 3.
- ♦ Amiot E., « Discrete Fourier Transform and Bach's Good Temperament », Music Theory Online (2009) 15, 2.
- → Amiot E.,« New Perspectives on rhythmic canons and the Spectral Conjecture », Journal of Mathematics and Music (2009) special issue on rhythmic canons, C. Agon et M. Andreatta dir..

AUTRES ARTICLES PUBLIÉS DANS DES REVUES avec comité de lecture

- ♦ Amiot E., « Pour en finir avec le Désir », Revue Analyse Musicale, 22 (1991).
- → Amiot E.,« Mathématiques et analyse musicale: une fécondation réciproque », R.A.M., 28 (1992).
- ♦ Amiot E.,« La série dodécaphonique et ses symétries », *Quadrature*, 19 (1994).
- → Amiot E.,« Chopin, virtuose de la théorie des groupes ?» *Quadrature*, 24 (2000).
- → Amiot E.,« Une preuve élégante du théorème de l'hexacorde de Babbitt », Quadrature, 28 (2006).
- → Amiot E.,« Gammes Bien Réparties », Revue de Mathématiques et Sciences Humaines, 178 (2007).

ACTES DE COLLOQUES avec comité de lecture

- ◆ Riotte, A., Amiot, E., Assayag, G., Malherbe, C., « Duration Structure Generation and Recognition in Musical Writing », Proceedings, ICMC (International Computer Music Conference), la Haye (1986).
- ◆ Agon, C., Amiot, E., Andreatta, M., « Tiling problems in music composition: Theory and Implementation », Voices of Nature Proceedings, ICMC, Göteborg (2002).
- ◆ Amiot, E., « Rhythmic canons and Galois Theory », *Actes du Colloquium on Mathematical Music Theory*, H. Fripertinger & L. Reich Eds, Grazer Math. Bericht Nr 347 (2005).
- ◆ [AAACyclo] Agon, C., Amiot, E., Andreatta, M., « Tiling the (musical) line with polynomials: Some theoretical and implementational aspects », *Acts of ICMC 2005*, Barcelona (2005).
- ◆ Agon, C., Amiot, E., Andreatta, M., Noll, T., « Towards Pedagogability of Mathematical Music Theory: Algebraic Models and Tiling Problems in Computer-Aided Composition », *Bridges Conferences*, *Proceedings*, London (2006).
- ◆ Agon, C., Amiot, E., Andreatta, M., Noll, T., « Oracles for Computer-Aided. Improvisation », ICMC, New Orleans (2006).
- ◆ Agon, C., Amiot, E., Andreatta, M., « Autosimilar melodies and their implementation in OpenMusic », Proceedings SMC 07, Lefkada, Grèce (2007).

→ Amiot, E., « Eine kleine Fourier Nachtmusik », Actes du colloque de la Society for Mathematics and Computation in Music, Berlin (2007), Springer (à paraître).

◆ [AS] Amiot, E., Sethares, W., « An Algebra for periodic rhythms and scales », *Actes du Helmholtz Workshop* "*Klang und Ton*", Berlin (2007), Springer (à paraître).

OUVRAGE COLLECTIF

◆ « Why rhythmic canons are interesting », <u>Perspectives in Mathematical and Computational Music Theory</u>, Mazzola, Noll, Lluis Puebla Ed, Epos, 190-209, Univ. Onasbrück (2004).

CONFÉRENCES

- ◆ Un bon nombre de ces conférences ou communications ont été données dans le cadre du <u>séminaire MaMuX</u> à l'IRCAM, Paris.
- ♦ « Why rhythmic canons are interesting », colloque MaMuTh de Zürich (octobre 2002).
- ♦ « Outils pour les canons rythmiques », MaMuX (janvier 2003).
- ♦ « Sur des canons de Vuza que son algorithme ne permet pas d'obtenir », MaMuX (janvier 2004).
- * « Rhythmic canons and Galois Theory », conférence au colloque MaMuTh de Graz (mai 2004).
- ♦ « Les Canons rythmiques », conférence de vulgarisation, Perpignan (octobre 2004).
- « Rhythmic Canons, Galois Theory, Spectral Conjecture », American Mathematical Society's Fall Session, Evanston, IL, USA (octobre 2004).
- ◆ « Canons rythmiques pour les musiciens », « canons rythmiques pour les mathématiciens », MaMuX (juin 2005).
- ◆ « Canons that worked » à McMaster University, et « Mathematical Properties of Rhythmic Canons », St Catherine University, Ontario, Canada (juillet 2005).
- ◆ « Sur les canons rythmiques », à l'invitation du Club Maths de l'université Pierre et Marie Curie, Paris VI (octobre 2006).
- ♦ « Why Fourier ? », journées à la mémoire de John Clough à l'Université de Chicago, IL, USA (7-10 juillet 2005).
- * « Gammes et transformée de Fourier Discrète », MaMuX (mai 2006).
- → « Mélodies Autosimilaires » (avec Tom Johnson), Colloque Mélodie de la Société Française d'Analyse Musicale, IRCAM (oct. 2006).
- ♦ « L'action du groupe affine modulo *n* et les mélodies autosimilaires », Séminaire MaMuX (oct. 2006).
- « Scales and Fourier in the non tempered universe », Helmholtz Workshop "Klang und Ton", Berlin (mai 2007).
- ♦ « Eine kleine Fourier Nachtmusik », colloque de la SMCM, Berlin (mai 2007).
- ♦ « DFT vs JSB: about some fine tuning », MaMuX, Paris (mai 2008).
- ♦ « Canone ritmici: come, quanto ? », université de Pise (octobre 2008).

« Fourier, Music, Mathematics and the Brain », colloque de la Society for Music Theory, Nashville (novembre 2008).

- ◆ « La trasformata di Fourier discreta & applicazione musicale », cours de Mastère à l'université de Pise (janvier 2009).
- « Aspects cognitifs de la DFT dans la perception de structures musicales », MaMuX (avril 2009).
- ◆ « Promenades musicales dans Z/12 Z »: une concerférence de vulgarisation sur certaines structures algébriques discrètes en musique; donnée à Perpignan, Toulouse, et Leucate. Une partie du concert (La cage aux chiffres d'André Riotte) est disponible en ligne.

AUTRES RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ♦ Riotte, A., « Formalisation de structures musicales », cours Paris VIII (1978-1990).
- ◆ Amiot, E., « On the Group of Rational Spectral Units with Finite Order », http://arxiv.org/abs/0907.0857.
- Amiot, E., « About the Number of Generators of a Musical Scale », http://arxiv.org/abs/0909.0039.
- ◆ [Andreatta] Andreatta, M., <u>Méthodes algébriques en musique et musicologie du XXe siècle : aspects théoriques</u>, <u>analytiques et compositionnels</u>, *thèse*, École des hautes études en sciences sociales / Ircam, Paris (2003).
- ◆ Douthett, J. et Krantz, R. « Energy extremes and spin configurations for the one-dimensional antiferromagnetic Ising model with arbitrary-range interaction », *Journal of Mathematical Physics* 37, pp. 3334-3353 (1996).
- ★ Kolountzakis, M., et Matolcsi, M. « Algorithms for Translational Tiling », special issue on rhythmic canons, C. Agon et M. Andreatta dir, *JMM* (2009).
- ♦ Kolountzakis, M., Matolcsi, M., « Tiles with no spectra », Forum Math., to appear.
- ◆ Łaba, I., « The spectral set conjecture and multiplicative properties of roots of polynomials », J. London Math. Soc. 65, pp. 661–671 (2002).
- ◆ Fripertinger, H., « Tiling problems in music theory », Perspectives of Mathematical and Computational Music Theory, (G. Mazzola, E. Puebla et T. Noll eds.) EpOs, Universität Osnabrück, 153-168 (2004).
- → Gilbert, E., « Canons mosaïques, polynômes cyclotomiques, rythmes k-asymétriques », mémoire ATIAM, M. Andreatta dir. (2007).
- → Fidanza, G., « <u>Canoni ritmici a mosaico</u> », tesi di laurea, Università degli Studi di Pisa, Facoltà di SSMMFFNN, Corso di laurea in Matematica (2008).
- ◆ Actes du colloque sur la Set Theory, Ed. Delatour France / IRCAM Centre Pompidou, Paris (2008).
- ◆ Coven, A., Meyerowitz, E., « Tiling the integers with translates of one finite set », *J. Algebra* 212, pp 161--174 (1999).
- Quinn, I., « A unified theory of chord quality in equal temperaments », PhD dissertation, Univ. of Rochester (2005).
- ◆ Vuza, D.T.,« Supplementary Sets and Regular Complementary Unending Canons », en quatre articles : Canons. Persp. of New Music, nos 29(2) pp.22-49; 30(1), pp. 184-207; 30(2), pp. 102-125; 31(1), pp. 270-305 (1991-1992).