

MÉTHODES ALGÈBRIQUES EN MUSIQUE ET
MUSICOLOGIE DU XX^e SIÈCLE :
ASPECTS THÉORIQUES, ANALYTIQUES ET
COMPOSITIONNELS

Moreno ANDREATTA

RÉSUMÉ

de la thèse soutenue le
12 décembre 2003 avec la mention
très honorable et les félicitations du jury à l'unanimité

Jury de thèse

Alain POIRIER (CNSMDP) :	directeur de thèse
Guerino MAZZOLA (Université de Zürich) :	rapporteur
John RAHN (Université de Washington) :	rapporteur
Gérard ASSAYAG (IRCAM) :	examineur
Marc CHEMILLIER (Université de Caen) :	examineur
Jean PETITOT (EHESS) :	examineur

Note préliminaire sur le contexte du travail de thèse

La thèse représente le prolongement et, pour certains aspects, l'aboutissement d'un travail de recherche que je mène depuis plusieurs années autour du rapport entre mathématiques et musique. Ce domaine a été d'abord l'objet d'une 'Tesi di Laurea' en mathématiques [ANDREATTA 1996], travail dans lequel j'ai commencé à étudier le problème de la formalisation algébrique de la structure musicale des canons rythmiques en m'appuyant sur le modèle proposé par le mathématicien Dan T. Vuza [VUZA 1991] à partir de certaines idées théoriques du compositeur roumain Anatol Vieru [VIERU 1980]. J'ai ainsi mis en évidence pour la première fois l'origine lointaine de ce problème mathématique qui remonte à une conjecture géométrique d'Hermann Minkowski [MINKOWSKI 1896, 1907] résolue avec les outils de l'algèbre par le mathématicien hongrois G. Hajós [HAJÓS 1942] mais dont certaines généralisations gardent toujours un intérêt certain pour les mathématiciens [AMIOT 2004].

J'ai ensuite poursuivi l'étude de ce modèle en essayant de l'intégrer à une approche plus générale sur la musique, comme celle proposée par le théoricien et mathématicien suisse Guerino Mazzola à partir des années 1980 [MAZZOLA 1984]. Cette approche est décrite en détail dans un récent ouvrage auquel j'ai participé avec une contribution sur les méthodes algébriques en musique [MAZZOLA 2003]. La théorie mathématique de la musique de Mazzola a été l'objet d'un mémoire de D.E.A. [ANDREATTA 1999] dans lequel j'ai également commencé à traiter le problème de l'implémentation des théories algébriques dans un environnement d'aide à l'analyse et à la composition assistée par ordinateur. Cet axe de recherche a été développé en collaboration étroite avec l'Equipe Représentations Musicales de l'IRCAM, mon laboratoire d'accueil à partir de 1999 et pendant toute la durée de la thèse. Nous avons ainsi accompagné la recherche théorique avec un travail d'implémentation d'outils algébriques en *OpenMusic*, un langage de programmation visuelle développé par l'Equipe Représentations Musicales [AGON 1998].

Dans le même temps, l'étude détaillée de la théorie mathématique de la musique de Mazzola a permis d'attirer l'attention du public francophone sur une approche qui restait assez méconnue et difficilement accessible sans une solide formation mathématique. C'est ainsi que nous avons pu envisager une collaboration entre le groupe de recherche dirigé par Mazzola (Université de Zürich, T-U Berlin) et l'IRCAM, collaboration qui a été la base de la création de deux Séminaires d'études à l'IRCAM : d'abord le Séminaire *MaMuPhi* (Mathématique/Musique et Philosophie), sous la direction de Gérard Assayag, François Nicolas et Guerino Mazzola et ensuite le Séminaire *MaMuX* (Mathématiques/Musique et relations avec d'autres disciplines), que j'ai conçu et que je coordonne depuis novembre 2001. Ces Séminaires d'études, ainsi que d'autres manifestations que j'ai co-organisées (comme le récent Colloque International « Autour de la *Set Theory* » dans le cadre des rencontres Résonances 2003), ont été fondamentaux dans la bonne réussite du travail de thèse.

1. Résumé la thèse

La thèse contient deux aspects étroitement liés. Premièrement, il s'agit d'une étude historique, qui vise à retracer l'émergence du concept de structure algébrique en musique et musicologie du XX^e siècle. De ce point de vue, le travail a été salué par le jury comme la première monographie dédiée à l'approche algébrique en musique et musicologie dans ses aspects à la fois théoriques, analytiques et compositionnels. En effet, bien que d'autres études aient pris en considération les méthodes algébriques dans la recherche musicale (à partir de [CHEMILLIER 1990] jusqu'à [MAZZOLA 2003]), il n'y avait pas d'ouvrage qui abordait une discussion à la fois historique et technique sur la place des structures algébriques en

musique, avec une articulation permanente entre les aspects théoriques, analytiques et compositionnels (et dans une perspective visant à intégrer aussi bien les propositions théoriques en Europe et en Europe de l'Est que d'autres traditions, comme celle de la musicologie américaine).

Deuxièmement, la thèse contient les résultats de mes recherches sur quelques problèmes théoriques en musique susceptibles d'intéresser aussi bien les musicologues et les compositeurs que les mathématiciens et les informaticiens. À la différence de l'approche traditionnelle dans l'étude des rapports entre mathématiques et musique, consistant à discuter l'*application* d'outils mathématiques au domaine musical, nous avons choisi de partir des problèmes posés par la musique afin d'essayer de mettre en évidence la place singulière des méthodes algébriques dans la musicologie du XX^e siècle.

L'utilisation des méthodes algébriques en musique met en œuvre trois aspects qui sont souvent étroitement liés : aspects théoriques, analytiques et compositionnels. Dans notre travail, nous avons proposé de les séparer afin de mettre en évidence leurs propres modes de fonctionnement, à la fois musical et musicologique. Mais nous avons également insisté à plusieurs reprises sur le caractère très limitatif d'une telle catégorisation qui prétendrait définir les champs possibles d'application de toute méthode algébrique à la musique ou à la musicologie. Il est bien connu qu'au XX^e siècle, théorie musicale, analyse et composition sont des disciplines qui s'influencent mutuellement. Toute tentative de séparer ces trois domaines se heurte à des difficultés qui sont particulièrement frappantes dans le cas de l'approche algébrique.

Une analyse historique de l'émergence de l'approche algébrique en musique met en évidence la place centrale occupée par certains compositeurs/théoriciens qui n'ont pas hésité à proposer des applications analytiques de leurs démarches théoriques et compositionnelles. Notre étude se concentre, en particulier, sur trois compositeurs/théoriciens qui sont emblématiques de la place de la réflexion théorique sur la musique, non seulement dans ses ramifications analytiques et compositionnelles, mais aussi dans son caractère éminemment algébrique. Milton Babbitt aux Etats-Unis, Iannis Xenakis en Europe et Anatol Vieru en Europe de l'Est représentent une « trinité » de compositeurs/théoriciens, l'algèbre étant l'élément unificateur de leur pensée théorique, analytique et compositionnelle. Tous les trois sont arrivés, presque au même moment et d'une façon indépendante, à la découverte du caractère algébrique du tempérament égal. Plus précisément, ils ont mis en évidence la notion mathématique de *groupe* en tant que concept unificateur de leur pensée théorique.

Ces trois démarches théoriques ont par contre eu des influences différentes dans l'analyse musicale. Aux Etats-Unis, les idées de Milton Babbitt sont à la base de la *Set Theory*, une discipline analytique dont certains développements récents, notamment autour de la théorie transformationnelle de David Lewin, ont poussé la formalisation algébrique très loin des idées originaires. Dans le cas d'Anatol Vieru, les ressemblances avec la *Set Theory* ont été mises en évidence par le compositeur lui-même qui a donné une analyse très lucide de l'importance d'une démarche algébrique en théorie et analyse musicale. À la différence des deux compositeurs précédents, une application analytique des théories algébriques proposées par Iannis Xenakis, à partir de la *théorie des cribles*, change radicalement la notion d'analyse

musicale en ouvrant le champ à ce qu'on appelle désormais l'analyse musicale assistée par ordinateur (AAO). L'informatique musicale et l'analyse musicale assistée par ordinateur ont représenté un axe transversal dans ce travail de thèse sur les méthodes algébriques en musique. L'implémentation de nombreux outils théoriques d'aide à l'analyse musicale dans un langage de programmation visuelle tel qu'*OpenMusic*¹ ouvre le problème de la calculabilité d'une théorie musicale et transforme, progressivement, la nature même de la discipline musicologique. Un des enjeux de ce travail de thèse a été de discuter les fondements d'une nouvelle approche en musicologie qui ajoute l'élément computationnel au caractère « systématique » de la discipline, telle qu'elle s'est constituée vers la fin du XIX^e siècle. Nous avons ainsi essayé de définir quelques éléments majeurs de ce qu'on appelle désormais la *musicologie computationnelle* à partir des propositions théoriques concernant l'approche algébrique en musique.

Les méthodes algébriques s'adaptent très bien à cette démarche computationnelle et permettent en même temps de résoudre, d'une façon très élégante, certains problèmes classiques concernant l'énumération et la classification des structures musicales. Bien que certaines techniques puissent se généraliser à d'autres paramètres que les hauteurs ou les rythmes, la démarche algébrique en musique reste ancrée dans la notion traditionnelle d'intervalle. De ce point de vue, notre travail a une portée limitée car il se concentre sur les propriétés d'organisation des hauteurs dans un espace tempéré dont on essaie de fournir une interprétation possible de certains énoncés dans le domaine rythmique. Cela correspond aussi à une préoccupation majeure des trois compositeurs/théoriciens qui ont tous proposé des lectures algébriques différentes de la relation existant entre l'espace des hauteurs et l'espace des rythmes.

Toutes ces approches reposent sur des cadres conceptuels relativement élémentaires d'un point de vue mathématique car la structure algébrique sous-jacente est fondamentalement une structure de *groupe*. Cependant, des méthodes algébriques plus récentes, et en particulier les méthodes développées par le mathématicien et théoricien suisse Guerino Mazzola à partir de la théorie mathématique des catégories [MacLANE 1997], offrent à la musicologie computationnelle un énorme pouvoir d'abstraction et de formalisation. Nous avons montré dans la thèse comment la généralisation de la *Set Theory* américaine par David Lewin et le modèle théorique proposé par Guerino Mazzola se rejoignent en postulant la primauté de la notion de « transformation » sur celle d'« objet musical ». Ce changement de perspective, qui est implicite dans toute démarche algébrique, est riche de conséquences philosophiques, car il ouvre une question fondamentale sur le rapport entre objets mathématiques et structures musicales.

¹ Ce langage de programmation, développé par l'Equipe Représentations Musicales de l'Ircam [ASSAYAG et al. 1999], était initialement conçu pour la composition assistée par ordinateur mais il est de plus en plus employé comme outil analytique, comme nous aurons l'occasion de le montrer en présentant l'environnement algébrique d'aide à l'analyse musicale que nous avons conçu dans le cadre de la thèse.

1.1 Structure de la thèse

La thèse est divisée en trois parties. Chaque partie développe un des trois aspects majeurs des méthodes algébriques en musique et musicologie du XX^e siècle (aspects théoriques, analytiques et compositionnels) tout en essayant de discuter leur articulation permanente. En conclusion de chaque partie, une section appelée *Interludium* permet de rentrer un peu plus en détail sur certains aspects mathématiques et informatiques de la relation entre mathématiques et musique.

1.1.1 Première partie

La première partie, intitulée « Aspects théoriques : Formalisation et représentation des structures musicales », est consacrée à certains *aspects théoriques* des méthodes algébriques en musique et musicologie. À partir des propositions théoriques de Milton Babbitt, Iannis Xenakis et Anatol Vieru, nous avons choisi de placer le problème de la formalisation et représentation des structures musicales à l'intérieur d'une discussion sur la musicologie systématique afin de mieux montrer la double portée musicale et musicologique de la démarche algébrique. En effet, l'étude des aspects théoriques des méthodes algébriques en musique et musicologie soulève une double question. Tout d'abord, d'un point de vue musicologique, une telle réflexion demande une enquête autour de la nature systématique de la discipline. Nous sommes donc remontés aux sources d'une telle démarche en musicologie telle qu'elle s'est précisée tout d'abord en Europe [ADLER 1885] et par la suite aux Etats-Unis [SEEGER 1977]. Deuxièmement, nous avons discuté l'articulation entre musicologie et réflexion théorique sur la musique, en particulier autour de la naissance, aux Etats-Unis, du concept de théorie de la musique au sens moderne (*music theory*).

Cette réflexion s'avère nécessaire pour comprendre la portée musicologique du problème de la formalisation algébrique des structures musicales et de leurs représentations. Les deux figures suivantes montrent deux exemples de représentation algébrique du système tempéré traditionnel : la représentation circulaire et la représentation toroïdale. Les deux représentations sont équivalentes d'un point de vue mathématique (Théorème de Sylow) mais elles n'ont pas été intégrées au même titre dans les propositions théoriques développées au cours du XX^e siècle. Dans le cas de la représentation circulaire, l'hypothèse sous-jacente est celle qui permet de formaliser tout accord musical (dans une division de l'octave musicale en un nombre n de parties égales) comme un sous-ensemble d'un groupe cyclique d'ordre n . Tout accord de m notes (distinctes, modulo l'octave) peut donc se représenter d'un point de vue géométrique comme un m -polygone inscrit dans un cercle et on peut lui associer de façon unique une suite de nombres entiers qui comptent les intervalles successifs dans l'accord (structure intervallique). Une telle structure intervallique est un *invariant* qui permet d'identifier de façon unique un accord et ses transpositions (musicales), celles-ci étant des rotations du polygone inscrit dans le cercle d'un multiple de $2\pi/n$ (où n est l'ordre du groupe cyclique). La figure suivante (figure 1) montre la représentation circulaire et la structure intervallique de l'accord de *do majeur*.

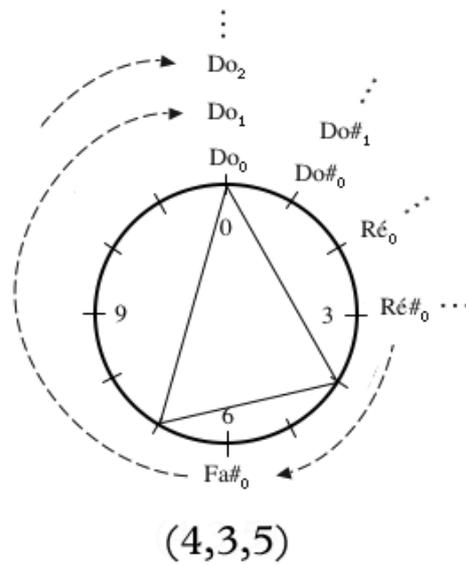


Figure 1 : Représentation circulaire et structure intervallique

Une représentation géométrique alternative de l'espace tempéré à douze degrés est donnée par le tore, une structure qui utilise, comme nous l'avons mentionné, un théorème de décomposition du groupe cyclique $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ dans le produit du groupe $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ d'ordre 3 et du groupe $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ ayant quatre éléments. La construction de la représentation toroïdale du tempérament est décrite dans la figure suivante :

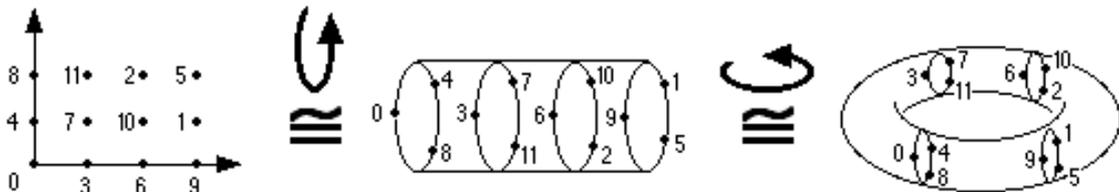


Figure 2 : Représentation toroïdale de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$

La thèse montre également comment ce deuxième type de représentations peut s'inscrire dans un contexte théorique plus large issu de la théorie mathématique des catégories, une approche qui a surtout été développée par Guerino Mazzola et auquel nous avons déjà consacré un travail d'analyse dans le cadre du mémoire de DEA [ANDREATTA 1999]. La discussion sur l'articulation entre la notion de formalisation et celle de représentation, que nous avons abordée dans la partie conclusive du premier chapitre de la thèse, met en évidence une singularité de la démarche algébrique par rapport à d'autres approches formalisées en théorie musicale. Traditionnellement, la représentation précède la formalisation, au sens qu'on formalise ce qu'on sait déjà représenter. Dans le cas de la démarche algébrique, la représentation circulaire aussi bien que la représentation toroïdale sont plutôt les résultats d'une formalisation qui montre la possibilité d'associer de façon

naturelle à toute division bien tempérée de l'octave une structure algébrique de groupe cyclique à laquelle on peut appliquer des théorèmes d'algèbre qui permettront d'aboutir à d'autres types de représentations (comme, par exemple, la représentation toroïdale).

Une enquête parallèle autour de certaines étapes de la pensée algébrique en mathématiques s'avère donc nécessaire pour bien articuler la réflexion sur le rapport entre formalisation et représentation. Au même temps elle permet de mieux comprendre la place des trois compositeurs/théoriciens étudiés, par rapport au problème de l'émergence de l'idée de structure algébrique en musique. En effet, l'histoire des mathématiques montre que, presque à la même époque que la réflexion de Guido Adler sur le caractère systématique de la recherche musicologique, les mathématiciens ouvraient une réflexion qui dépassera largement le cadre de leur propre discipline. Notre regard rétrospectif sur les étapes de la pensée algébrique en mathématiques a mis en évidence certains éléments qui ont représenté, historiquement, le point de départ d'une réflexion théorique sur les fondements algébriques de la musique, une réflexion que l'on a articulée autour de la formalisation et des représentations des structures musicales. Pour cela, nous avons d'abord analysé l'évolution du concept de structure algébrique à partir du Programme d'Erlangen de Felix Klein (1872) jusqu'aux développements les plus récents sur la théorie mathématique des catégories, en passant par l'axiomatique hilbertienne et l'expérience Bourbakiste, deux moments de la pensée mathématique contemporaine qui ont influencé de façon décisive la naissance et l'évolution de la théorie de la musique au sens moderne. Nos recherches ont permis également de mettre en évidence la nature algébrique de certaines orientations formelles en analyse musicale, en particulier en ce qui concerne la *Set Theory* américaine (en tant que discipline musicologique issue des idées des théoriciens tels que Milton Babbitt, Allen Forte et David Lewin). Cette approche, encore méconnue en France, a été analysée en détail dans la deuxième partie de la thèse.

Dans l'*Interludium* qui conclut la première partie, nous sommes rentrés dans l'un des problèmes musicaux qui a le plus fasciné à la fois théoriciens de la musique, compositeurs et mathématiciens : celui de la classification des séries dodécaphoniques tous-intervalles. Ces séries ont la propriété remarquable de contenir tous les intervalles entre les notes successives (sauf l'intervalle 0 qui n'est pas autorisé car une série dodécaphonique n'admet pas de répétition de notes). Généralement, on considère l'ouvrage *Grundlagen der musikalischen Reihentechnik* d'Herbert Eimert [EIMERT 1964] comme la première étude systématique des propriétés des séries dodécaphoniques tous-intervalles, car il contient le catalogue complet des 1928 séries ayant cette propriété remarquable.

Cependant, au-delà de l'exhaustivité, la démarche d'Eimert ne semble pas donner une indication précise sur la stratégie employée dans l'établissement d'un tel catalogue. Les recherches menées presque à la même époque par André Riotte en France puis par Robert Morris et Daniel Starr aux Etats-Unis ont permis de mieux comprendre le caractère algébrique sous-jacent à un tel problème théorique, tout en gardant l'aspect « computationnel » de la démarche telle que Eimert l'avait envisagée. Cependant, contrairement à ce qu'on pense habituellement, le problème d'établir des séries tous-intervalles n'est pas lié à l'origine à la technique dodécaphonique. Le traité de modulation du compositeur danois Thorvald

Otterström [OTTERSTRÖM 1935] offre en effet un catalogue exhaustif des séries tous-intervalles établies à partir de considérations sur la nature combinatoire du système tempéré, mais sans aucune référence à la technique sérielle. L'analyse des stratégies théoriques développées dans cet ouvrage nous a permis d'offrir un bon exemple de formalisation algébrique d'un problème musical qui a émergé de considérations différentes de celles qui s'imposeront par la suite dans la recherche musicale.

1.1.2 Deuxième partie

La deuxième partie de la thèse, intitulée « Aspects analytiques : la place des méthodes algébriques dans l'analyse musicale au XX^e siècle », est consacrée aux *aspects analytiques* des méthodes algébriques en musicologie, dans ses articulations avec les aspects théoriques décrits dans la première partie. Afin de mieux comprendre la place des méthodes algébriques en analyse musicale, nous avons essayé de définir une typologie minimale des approches analytiques formalisées au XX^e siècle. Cette typologie, qui ne prétend pas à l'exhaustivité, identifie quatre catégories de la pensée analytique ayant donné une place centrale à la notion de formalisation des structures musicales : approches informationnelles, sémiotiques, génératives et algébriques. Au-delà du caractère limitatif d'une telle typologie, qui ne prétend pas recenser toutes les approches formelles en analyse musicale, cela présente néanmoins l'avantage de dégager certaines catégories majeures de la pensée analytique au XX^e siècle et d'offrir quelques éléments pour comprendre la *singularité* d'une démarche analytique de type algébrique. À l'intérieur de l'approche algébrique en analyse musicale, deux théories ont acquis une place considérable dans la réflexion analytique contemporaine : la *Set Theory* et l'analyse transformationnelle.

Nous avons approfondi tout d'abord l'étude de la *Set Theory* d'Allen Forte [FORTE 1973], une théorie musicologique qui a subi des développements considérables dans les dernières années tout en laissant apparemment la France en dehors de cet intéressant débat. À la différence des présentations traditionnelles de la *Set Theory*, comme celle d'Allen Forte, la théorie des ensembles de classes de hauteurs se prête très bien à être intégrée dans une approche algébrique qui utilise pleinement les potentialités de la représentation circulaire du tempérament égal. Cette démarche nous a permis d'introduire également les concepts de base de l'analyse transformationnelle, telle que David Lewin l'a conçue à partir notamment d'une « algébrisation » des outils de base de la *Set Theory*. Nous avons étudié en détail ce processus qui a conduit à la définition d'une nouvelle méthodologie en analyse musicale, dont les ramifications mathématiques sont loin d'être épuisées. L'analyse transformationnelle consiste à segmenter une partition de musique à travers un recouvrement de sous-ensembles qui sont liés par des opérations musicales de *transposition* et d'*inversion* [ANDREATTA et SCHAUB 2003]. Elle permet ainsi de créer un espace abstrait de relations de transpositions et d'inversion entre les accords qui peut décrire le déroulement temporel de la pièce (*progression transformationnelle*) ou bien une organisation « hors temps », pour reprendre la terminologie de Iannis Xenakis, des transformations algébriques/musicales (*réseau transformationnel*).

La figure suivante (Figure 3) montre un exemple d'une démarche transformationnelle dans le cas de l'analyse du *Klavierstück III* de K. Stockhausen par David Lewin [LEWIN 1993], une analyse que nous avons reprise en utilisant la représentation circulaire pour mettre en évidence les transformations musicales qui permettent de décrire la partition à partir d'une même structure de pentacorde. Ces transformations ne changent pas la nature « ensembliste » du pentacorde, car les cinq formes sont « équivalentes » à une transposition ou une inversion près (ou une combinaison des deux opérations).

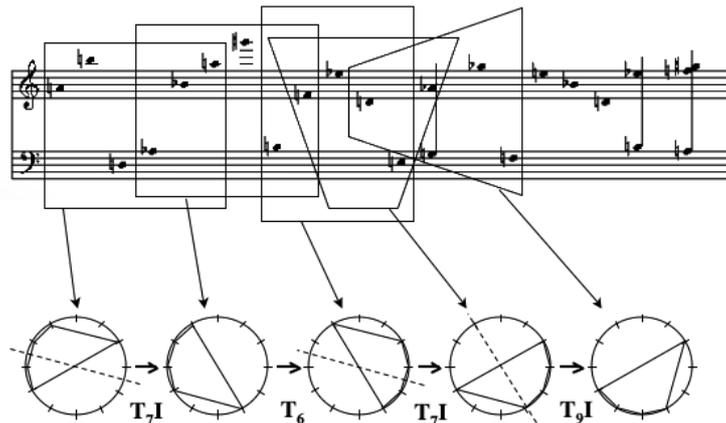


Figure 3 : Segmentation de la pièce par des transformations d'un même pentacorde

L'analyse transformationnelle ouvre également des perspectives mathématiques nouvelles lorsqu'elle est envisagée sous l'angle de la théorie des catégories. La thèse suggère comment procéder pour donner une formulation catégorielle à certains réseaux transformationnels particuliers en s'appuyant sur la théorie mathématique de la musique développée par Guerino Mazzola dans l'ouvrage *The Topos of Music* [MAZZOLA 2003]. Mais au-delà des aspects éminemment théoriques, la *Set Theory* et l'analyse transformationnelle ouvrent le problème de la place occupée par l'ordinateur dans la recherche musicologique contemporaine. Cet aspect a été développé en détail dans *Interludium* qui conclut la deuxième partie et qui présente notre formalisation algébrique des concepts de base de la *Set Theory* ainsi que l'implémentation que nous en avons réalisée en *OpenMusic*. L'implémentation a été conçue en collaboration avec Carlos Agon, informaticien et chercheur à l'IRCAM, et Killian Sprotte, compositeur, et a été intégrée dans la dernière version de ce logiciel (2003). Il s'agit d'une architecture « paradigmatique », dans le sens que l'implémentation permet à l'analyste de choisir son propre critère d'équivalence entre structures d'accords en utilisant comme « paradigmes » d'analyse les différents groupes que l'on peut choisir de faire opérer sur l'ensemble des notes.

En particulier, nous avons implémenté les relations d'équivalence (donc les catalogues d'accords) induites par l'action de quatre groupes sur l'ensemble des notes d'un tempérament musical choisi : le groupe *cyclique* (ou paradigme de l'équivalence à une *transposition* musicale près), le groupe *dihédral* (paradigme de la *Set Theory*, i.e. équivalence à une *transposition* et une *inversion* musicale près), le groupe *affine* (équivalence à une

multiplication près) et groupe *symétrique* (équivalence à une permutation près). L'architecture paradigmatique de cet environnement est décrite dans la figure suivante qui montre les représentations circulaires et les structures intervalliques associées aux différentes classes d'équivalence d'un même accord (figure 4) :

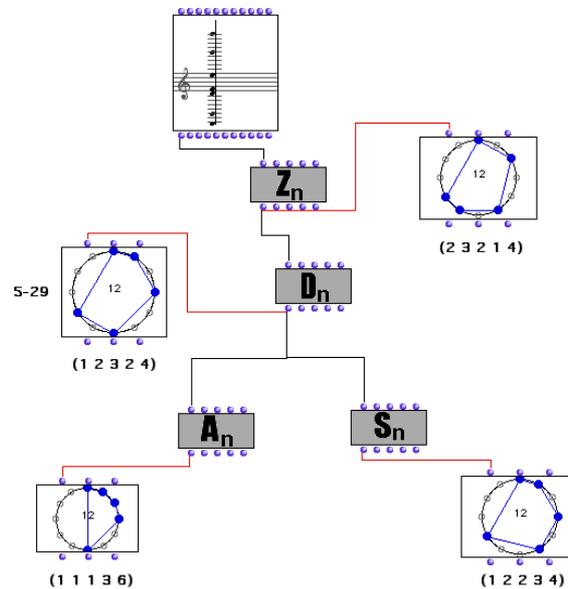


Figure 4 : Architecture « paradigmatique » de la librairie *Groups*. Un accord est réduit progressivement et visualisé selon des relations d'équivalence induites par quatre groupes différents.

La figure suivante (figure 5) montre la distribution symétrique du nombre de classes de transposition d'accords dans le système tempéré à 12 et 24 degrés :

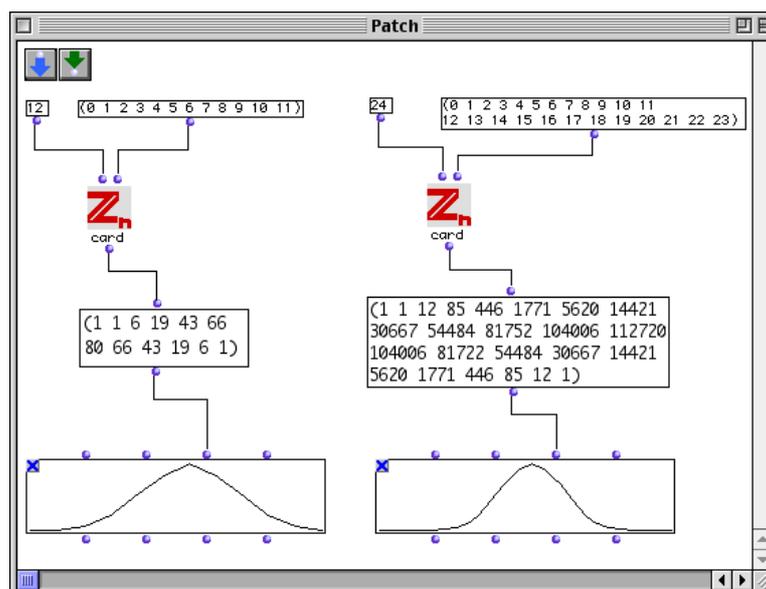


Figure 5 : Nombre de classes de transpositions d'accords dans le système tempéré à 12 et à 24 degrés.

Le catalogue des possibilités se réduit en considérant l'action du groupe diédral D_n sur Z/nZ , comme le montre la figure suivante (figure 6) :

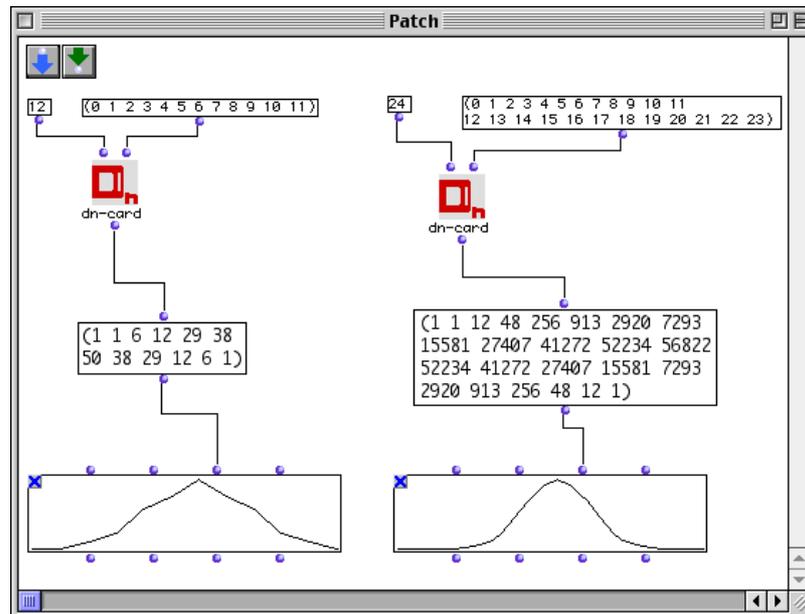


Figure 6 : Distribution du nombre d'orbites sous l'action de D_n dans le cas de la division de l'octave en 12 et en 24 parties égales.

Ces outils informatiques que nous avons développés dans notre travail de thèse ouvrent des questions nouvelles sur l'analyse assistée par ordinateur et, dans le même temps, offrent aux compositeurs la possibilité de mettre en relation les propriétés combinatoires d'un espace tempéré à n degrés (i.e. une division de l'octave musicale en n parties égales) avec l'étude des structures rythmiques périodiques. La théorie des canons rythmiques de pavage, que nous avons décrite en détail dans la troisième partie de la thèse, représente un aspect de cette analogie structurale.

1.1.3 Troisième partie

La troisième partie, intitulée « Aspects compositionnels : théorie des groupes et combinatoire musicale », examine quelques applications compositionnelles des méthodes algébriques. Cette partie offre donc l'occasion de reprendre, dans une nouvelle perspective, les démarches des trois compositeurs dont nous avons étudié quelques propositions théoriques au cours de la première partie. Dans le cas de Milton Babbitt, nous avons pu montrer comment la notion mathématique de « partition », en tant que recouvrement d'un ensemble avec des sous-ensembles disjoints, offre le cadre naturel pour étudier deux concepts théoriques sur lesquels nous avons beaucoup insisté dans la première partie : la *combinatorialité* (en particulier, au niveau des ensembles de trois, quatre et six notes) et le système des *time-points*. Nous avons analysé l'application compositionnelle de ce concept dans deux pièces pour piano qui appartiennent à deux périodes différentes de la production musicale de Milton Babbitt : *Partitions* (1957) et *Post-Partitions* (1966). Nous avons ainsi proposé au public

musicologique français quelques éléments pour comprendre l'importance, dans l'histoire de la musique du XX^e siècle, d'un compositeur qui reste, somme toute, assez méconnu en France.

Célestin Deliège semble hésiter sur la possibilité de parler, dans le cas du compositeur américain, des « combinatoires hauteurs-durées », le problème étant « *l'indépendance que [le compositeur] entend donner au processus des durées* » [DELIEGE 2003, 587]. Pourtant, comme nous avons pu le montrer dans la thèse, l'indépendance n'est qu'un épiphénomène par rapport à la nature algébrique qui sous-tend aussi bien l'univers des hauteurs que le domaine des rythmes. Ces idées avaient déjà trouvé une application dans la pratique compositionnelle de Babbitt dès la deuxième moitié des années quarante, en particulier dans les *Trois compositions pour piano* (1947-48). Il s'agit d'un moment important dans l'histoire de la musique du XX^e siècle car, dans la même période, Olivier Messiaen « crée l'événement », pour reprendre une expression de Célestin Deliège, avec la pièce *Mode de valeurs et d'intensités* (1949). Cette pièce a eu une influence considérable sur toute une génération de compositeurs auxquels on doit le début de la réflexion en Europe sur la série généralisée. Nous avons pu avancer une hypothèse sur une possible influence de Babbitt sur la conception même de cette troisième pièce des *Quatre études de rythme*, dont l'audace semble contredire le caractère pondéré du compositeur français [DELIEGE 2003, 101]. Cette hypothèse est corroborée par une conversation que nous avons eue avec Milton Babbitt qui nous a confirmé avoir participé aux cours de composition tenus par Olivier Messiaen à Tanglewood en 1948, donc avant la réalisation de la pièce *Mode de valeurs et d'intensités*. En effet, les deux premières études de rythmes ont été composées aux Etats-Unis, comme le frontispice de la partition l'indique. L'indication « Darmstadt - 1949 » sur la partition de *Mode de valeurs et d'intensités* confirme que la pièce a été effectivement composée après la rencontre entre Messiaen et Babbitt.

Nous avons analysé une deuxième application compositionnelle des théories algébriques, sans doute influencée par les idées de Messiaen (et également par la combinatoire de Babbitt, si nous acceptons l'hypothèse précédente) qui est proposée par Iannis Xenakis dans la pièce *Nomos Alpha* pour violoncelle solo (1966). Pour cela nous avons utilisé l'informatique qui nous a permis de mettre en évidence un aspect peu étudié dans la recherche musicale contemporaine, à savoir l'articulation entre théorie et analyse du processus compositionnel. L'implémentation des méthodes algébriques utilisées par Iannis Xenakis dans *Nomos Alpha* montre l'intérêt musicologique de la *modélisation* du processus compositionnel, une stratégie analytique qui permet d'étudier l'ensemble des potentialités d'une œuvre parmi les plus riches du répertoire contemporain (en ce qui concerne les aspects mathématiques). La modélisation informatique de *Nomos Alpha* a permis de mettre en évidence certaines propriétés du processus de Fibonacci que Xenakis utilise dans le groupe des rotations du cube, propriétés qui ne sont pas évidentes à démontrer d'un point de vue mathématique et qui ont des retombées musicologiques très significatives.

Les chaînes engendrées par un processus de Fibonacci appliqué aux 24 rotations du cube ont toujours un comportement cyclique duquel il n'est pas évident de donner a priori la période (*longueur*) ni le nombre d'éléments différents (*degré* ou « taux de recouvrement »). Pourtant, une implémentation montre que dans un espace de 576 possibilités, les boucles de

Fibonacci ayant une longueur maximale (égale à 18) et le plus grand taux de recouvrement (égal à 13) représentent un sous-ensemble suffisamment riche, car il contient 216 éléments (c'est-à-dire le 37,5% du total).

Xenakis a choisi ses boucles de Fibonacci à l'intérieur de ce sous-ensemble et c'est précisément ce choix qui détermine la forme globale de la pièce, divisée en 18 parties, chaque partie correspondant à un élément du groupe des rotations i.e. à une permutation des huit sommets du cube (donc à une suite bien définie d'objets musicaux que le compositeur appelle *complexes sonores*). La suite de Fibonacci de longueur et degré maximaux utilisée par le compositeur est représentée en figure 7 dans la modélisation réalisée en *OpenMusic* (et selon la notation adoptée par Xenakis).

Notons que la modélisation informatique permet d'obtenir d'autres variantes de la pièce simplement en utilisant des séries cycliques de Fibonacci différentes mais ayant les mêmes propriétés structurales. Cette démarche a également un intérêt d'un point de vue musicologique car le compositeur a souvent souligné la possibilité d'utiliser d'autres séries de Fibonacci. Une étude mathématique des séries de Fibonacci généralisées (i.e. à valeurs dans un groupe) reste un sujet ouvert de recherche musicale qui a, selon nous, un véritable intérêt d'un point de vue mathématique. Il pourrait également avoir des applications musicales tout à fait nouvelles notamment via l'informatique, d'où l'intérêt d'implémenter ce processus dans un environnement d'aide à l'analyse et à la composition assistées par ordinateur.

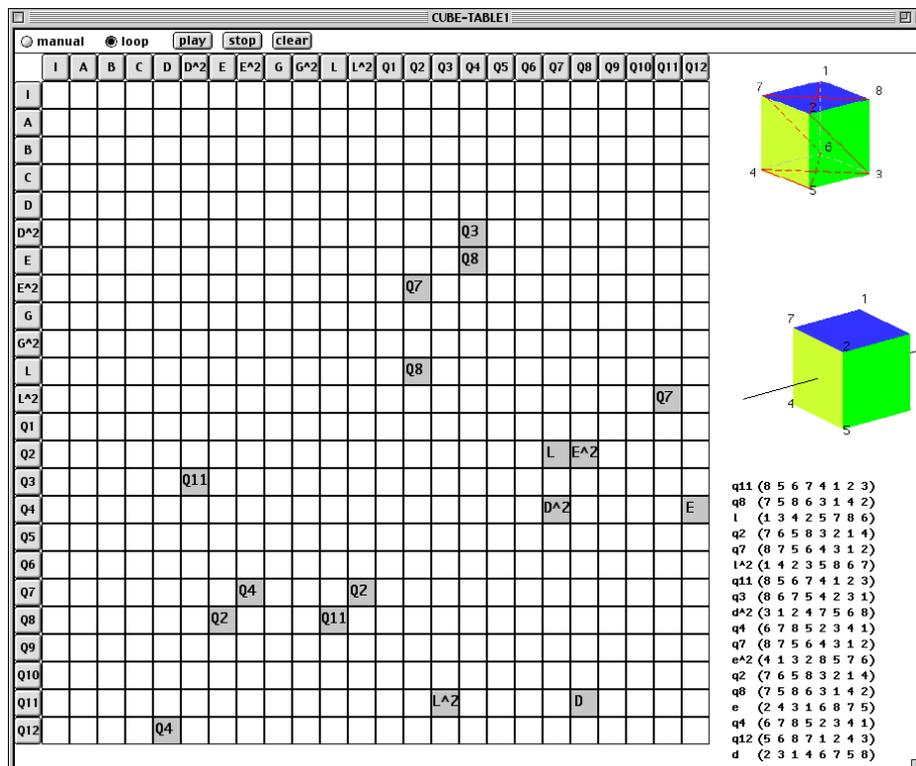


Figure 7 : Groupe de rotations du cube et processus de Fibonacci associé induisant une permutation des huit sommets du cube dans l'implémentation réalisée en *OpenMusic* (selon la notation de Xenakis). La série des 18 transformations doit être lue du bas vers le haut, donc à partir de deux transformations **d** et **q12**.

L'implémentation permet de créer des multiples variantes de la pièce, variantes qui dépendent des transformations initiales utilisées pour engendrer le processus de Fibonacci sur le groupe des rotations du cube. L'informatique devient ainsi un élément fondamental pour pouvoir étudier le degré de perceptibilité du processus compositionnel utilisé par le compositeur. C'est une question qui est tout à fait transposable à d'autres stratégies compositionnelles utilisées par plusieurs théoriciens dont nous avons commencé à analyser quelques aspects dans le travail de thèse. Cela nous a convaincu de la nécessité d'aborder ce type de questions en essayant d'établir une articulation permanente entre recherche mathématique et implémentation des résultats théoriques dans un environnement d'aide à l'analyse et à la composition assistée par ordinateur.

Dans le cas du compositeur roumain Anatol Vieru, nous avons analysé l'utilisation de la théorie des suites modales dans deux pièces : la *Symphonie n. 2* et *Zone d'oubli*. La thèse contient également les résultats théoriques des nos recherches sur les suites modales, une approche compositionnelle que Vieru n'avait pas pu formaliser intégralement. En travaillant avec le mathématicien Dan T. Vuza, nous avons donné une caractérisation algébrique du processus d'engendrement des suites périodiques par le calcul des différences finies. Ces recherches ont fait l'objet d'une publication avec Dan T. Vuza dans une revue de mathématique [ANDREATTA et VUZA, 2001] et d'une collection d'outils informatiques intégrés dans la librairie d'*OpenMusic* dont nous avons discuté l'architecture paradigmatique dans la partie précédente.

Nous avons également analysé une application compositionnelle récente de la théorie modale d'Anatol Vieru. Il s'agit du problème de la construction de canons rythmiques qui avait aussi intéressé Olivier Messiaen et qui a constitué le point de départ d'un travail de collaboration avec le compositeur George Bloch. Ce travail, mené dans le cadre d'une invitation comme « compositeur en recherche » auprès de l'Equipe Représentations Musicales de l'Ircam, a permis de suivre de près la « relation oblique » entre le travail de compositeur et la formalisation algébrique. En effet, la théorie de Vuza offre la possibilité de trouver explicitement des factorisations pour un groupe n'ayant pas la propriété de Hajós, mais elle ne s'intéresse pas à l'espace combinatoire des solutions. Nous avons donné une classification exhaustive des solutions dans le cas de la factorisation du groupe cyclique $\mathbf{Z}/72\mathbf{Z}$ en deux sous-ensembles non périodiques, cet ordre étant le plus petit pour un groupe n'ayant pas la propriété de Hajós². Cette classification a été faite par rapport à l'action de trois groupes différents sur le groupe cyclique d'ordre 72, considéré comme ensemble : le groupe cyclique, le groupe diédral et le groupe affine. Dans le premier cas, la famille des sous-ensembles R et S comprend respectivement 6 et 3 solutions, pour un total de 18 canons rythmiques différents. Le nombre de canons rythmiques de pavage se réduit à 9 si l'on considère l'action du groupe diédral sur $\mathbf{Z}/72\mathbf{Z}$, les familles des sous ensembles R et S ayant trois éléments chacune. Dans

² Un groupe (cyclique) possède la propriété de Hajós si pour toute factorisation en deux sous-ensembles R et S, au moins l'un des deux est périodique (où un ensemble R est périodique s'il existe un élément g du groupe, différent de l'élément neutre, tel que $g+S=S$).

le cas du groupe affine opérant sur $\mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$, l'espace des solutions pour R et S se réduit à un seul sous-ensemble.

On obtient ainsi le résultat surprenant qui affirme l'existence d'un seul canon rythmique de pavage (à une application affine près). La solution, ainsi que le canon rythmique correspondant, est donnée en figure 8 :

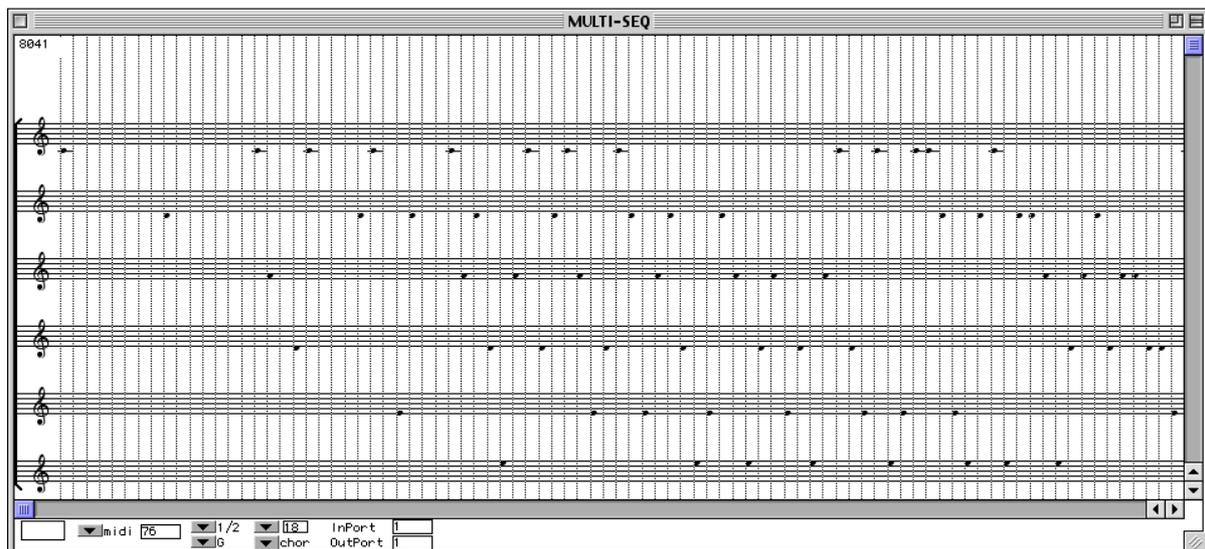
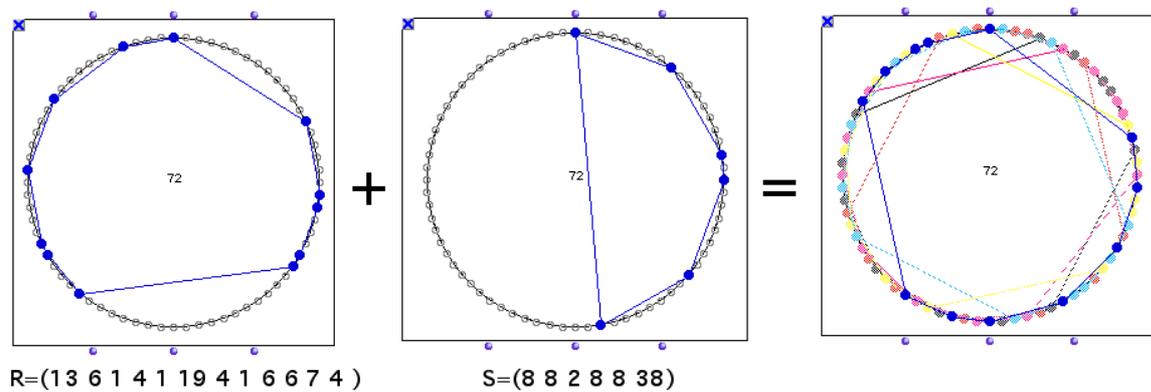


Figure 8 : Factorisation unique (à une transformation affine près) du groupe cyclique $\mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$ en somme de deux ensembles périodiques et représentation musicale sous la forme d'un canon rythmique de pavage (notons que R et S correspondent à la structure intervallique des deux sous-ensembles qui factorisent le groupe cyclique).

Comme nous l'avons déjà mentionné, le travail de recherche mené avec le compositeur George Bloch est emblématique en ce qui concerne les directions parfois très inattendues qu'une recherche théorique peut prendre lorsqu'elle est soumise à la primauté de la pensée compositionnelle. Dans la thèse, nous avons discuté trois problématiques que le compositeur a posées autour du modèle formel et qui sont à la base de trois projets compositionnels : le projet Beyeler (2001), le projet Hitchcock (2001) et le projet Reims (2002). Ces problématiques, étroitement liées, concernent l'organisation métrique d'un canon rythmique de pavage, la réduction d'un canon rythmique de pavage à une collection de sous-canon auto-similaires et la modulation (métrique) entre des canons rythmiques de pavages

différents. Nous avons analysé ces trois problèmes théoriques par rapport au travail compositionnel fait par George Bloch dans son *Projet Beyeler*. Il s'agit d'une commande de la Fondation Beyeler de Bâle pour une visite guidée musicale de la collection permanente et d'une exposition particulière intitulée *Ornament and Abstraction*. La pièce de George Bloch, créée en juillet 2001 dans le cadre du Festival *Europäische Musikmonat*, est intitulée *Fondation Beyeler : une empreinte sonore*.

D'un point de vue musical, le *Projet Beyeler* consistait en cinq visites guidées indépendantes, chaque visite étant conçue autour d'un musicien. La formation comprenait un violon, une clarinette, un saxophone ténor, une contrebasse et une percussion. Les parties du *Projet Beyeler* qui concernent le plus directement le problème de pavage en musique sont trois canons rythmiques qui interviennent à des moments où les musiciens se rencontrent (au premier tiers de la durée de la durée de la visite, au deuxième tiers et à la fin de la visite).

Le premier canon, *Canon 1*, est un canon pour clarinette, saxophone et contrebasse. Le deuxième canon, *Canon 2*, est écrit pour violon et berimbau. Le troisième, *Canon Final*, reprend le *Canon 1* dans la même formation, développe une version différente du *Canon 2* pour violon, contrebasse et vibraphone et termine avec un troisième canon rythmique dans lequel tous les musiciens jouent. La figure suivante (figure 9) montre le processus de modulation canonique entre le *Canon 1* et le *Canon 2* tel qu'il a été utilisé dans le *Canon Final*.

Figure 9 : Processus de modulation entre canons

Le *Canon1*, ayant pour période 144, déploie une période de 16 mesures à 9/16 (l'unité étant la double-croche). En gardant la même unité, mais en interprétant le pattern rythmique dans un mètre de 3/4, les 16 mesures se réduisent à 12, ce qui est exactement le nombre de mesures de la période du *Canon2*. Cependant, puisque le *Canon2* n'a que 108 notes à l'intérieur de sa période, l'unité devient le triolet de croche et le tempo est légèrement plus lent. À la fin du *Canon final*, la structure de *Canon 2* cède la place à celle d'un canon RCCM de période 216 par un procédé semblable de modulation. Le tempo est donc deux fois plus rapide et les points d'attaques deviennent tellement rapprochés qu'on n'a plus l'impression d'un rythme isochrone mais d'une texture dense à évolution lente.

La démarche compositionnelle de George Bloch vis-à-vis du modèle algébrique des canons rythmiques est emblématique du rapport entre théorie de la musique et composition. Le modèle offre un catalogue des solutions possibles pour la construction de toutes formes musicales canoniques ayant des propriétés formelles apparemment très contraignantes, comme l'absence de régularités locales à l'intérieur des patterns rythmiques de base, ou bien l'irrégularité dans les entrées de voix, ce qui le distingue des modèles traditionnels de canons musicaux. Cependant, à partir d'une étude du catalogue, le compositeur peut envisager des stratégies pour recréer tout d'abord une organisation métrique reconnaissable à l'intérieur d'une structure musicale dans laquelle il n'y a qu'un train de pulsations régulières. Une telle exploration permet d'envisager des solutions pour un autre problème posé par le modèle formel, celui des nombres élevés de voix. La nécessité de devoir respecter à la fois la propriété géométrique du pavage de l'axe temporel et les caractéristiques canoniques d'une telle forme musicale pousse le compositeur à chercher des stratégies pour réduire le nombre des voix sans renoncer à la puissance du modèle formel. C'est ainsi que la technique de construction des *métavoix* trouve une justification à la fois théorique et compositionnelle, tout en donnant la clef pour définir un concept nouveau dans la théorie des canons de pavage : celui de modulation canonique.

Le travail de recherche avec George Bloch nous a également permis de mettre en évidence une différence fondamentale entre la formalisation théorique et les stratégies compositionnelles. Aucune des trois problématiques soulevées par le compositeur n'est une conséquence directe du modèle formel. La théorie algébrique des canons rythmiques de pavage offre d'abord un catalogue des solutions qui sert essentiellement pour stimuler l'imaginaire du compositeur. À partir du catalogue, le travail compositionnel consiste à essayer de dégager des stratégies pour adapter le modèle formel, parfois très contraignant, à une exigence précise, par exemple la limitation du nombre d'instrumentistes par rapport aux résultats prévus par le modèle.

C'est ainsi que le travail de composition s'éloigne de celui de l'*ingénieur* et s'approche de l'attitude du *bricoleur*, pour reprendre une célèbre expression de Lévy-Strauss que nous avons souvent citée dans la thèse pour le travail théorique et compositionnel de Iannis Xenakis. Cependant, l'attitude du bricoleur face à un modèle formel peut garder, comme dans le cas de la démarche de Georges Bloch, une orientation théorique très claire, conséquence directe du fait d'avoir essayé de préserver les propriétés structurales du modèle.

La troisième partie de la thèse s'achève avec un *Interludium* sur l'histoire d'une célèbre conjecture en théorie des nombres de la fin du XIX^e siècle (Conjecture de Minkowski) et de sa résolution algébrique par le mathématicien hongrois G. Hajós. La conjecture a été proposée par Hermann Minkowski, l'inventeur de la vision de la théorie des nombres au sens moderne, dans *Geometrie der Zahlen* [MINKOWSKI 1896] sous la forme d'un problème d'approximation simultanée de plusieurs nombres réels par des nombres rationnels. Minkowski a exprimé la conjecture sous une forme géométrique une dizaine d'années plus tard dans l'ouvrage *Diophantische Approximationen* [MINKOWSKI 1907]. Dans cette deuxième forme, la conjecture suggère que dans un pavage simple [simple lattice tiling]³ d'un espace à n dimensions par des cubes unités, il y a au moins un couple de cubes qui ont en commun une face entière de dimension $n-1$.

Dans le cas particulier de l'espace à trois dimensions, la conjecture exprime le fait que dans un pavage avec des cubes unités, on trouvera toujours un couple de cubes ayant en commun une de leurs faces. La figure suivante (figure 10) montre ce cas, que Minkowski pensait pouvoir généraliser facilement à toute dimension n .

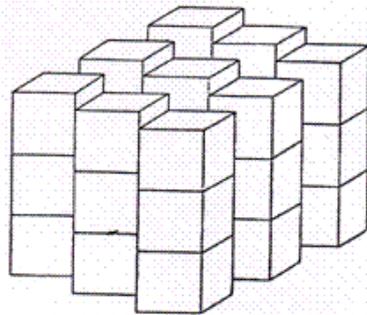


Figure 10 : Pavage de l'espace tridimensionnel par des cubes unité (figure tirée de l'ouvrage *Diophantische Approximationen*, p. 74)

À la différence des présentations traditionnelles des canons rythmiques [VUZA 1991], la thèse présente le problème de la construction de ces structures compositionnelles, comme une véritable métamorphose musicale d'un problème mathématique dont certaines généralisations constituent un domaine de recherche susceptible d'intéresser à la fois le mathématicien et le théoricien de la musique.

De plus, un tel exemple ouvre des questions philosophiques profondes sur les rapports entre l'activité du mathématicien et du théoricien de la musique. Dans la partie conclusive de la thèse, nous avons commencé à réfléchir sur quelques questions plus générales autour de la portée philosophique et des enjeux épistémologiques d'une approche algébrique en musique et musicologie. En effet, dans une perspective traditionnelle, l'approche algébrique en sciences humaines renvoie à un paradigme structuraliste dont on connaît désormais assez bien les aspects les plus problématiques [PETITOT 1985, 23-91], et cela en dépit du fait qu'il soit

³ Par un pavage simple d'un espace à n dimensions, nous entendons une collection de cubes congruents qui recouvrent l'espace de telle façon que ces cubes n'ont pas d'intersection (autre que la frontière) et que leurs centres forment un treillis. Ce treillis est appelé « simple » pour le distinguer du cas (multiple) dans lequel les cubes ont plusieurs points d'intersections (autres que les frontières).

parfois proposé à nouveau comme le paradigme dominant de tout discours philosophique [CAWS 1988].

Cependant, la musique représente un terrain sur lequel on pourrait arriver à concilier certaines instances structuralistes avec les principes de base de la phénoménologie husserlienne. C'est une hypothèse que nous avons avancée en conclusion du travail de thèse à partir des écrits de Cassirer dont certaines considérations algébriques sur la mélodie musicale semblent bien s'inscrire dans une démarche qui reste ancrée sur le terrain de la phénoménologie [CASSIRER 1944]. En outre, l'articulation entre l'*objectal* et l'opérateur, que l'épistémologue Gilles-Gaston Granger avait suggérée à partir de la fin des années quarante comme étant le fondement de la notion du *concept philosophique* [GRANGER 1994], semble toucher un aspect qui, selon les trois compositeurs/théoriciens analysés dans la thèse (Milton Babbitt, Iannis Xenakis et Anatol Vieru), peut être considéré comme *la dualité à la base de la théorie musicale : l'articulation entre le son et l'intervalle*.

Cette considération ouvre également à des questions qui touchent plus précisément les rapports entre méthodes algébriques, perception et cognition musicale auxquels le travail de thèse n'a pas su donner une réponse exhaustive et qui seront donc intégrées dans nos recherches futures. Nous voudrions prolonger dans notre futur travail de recherche ce type de problématiques qui demandent une remise en question des ramifications philosophiques de certaines théories algébriques, en particulier la théorie des catégories et des topoi, appliquées à la musique. À partir de réflexions des mathématiciens sur la portée phénoménologique de l'activité mathématique contemporaine [PATRAS 2004], et en croisant ces auteurs avec d'autres orientations plus épistémologiques sur la portée cognitive de la réflexion phénoménologique [PETITOT et al., 2002], nous pourrions peut-être arriver à constituer un cadre conceptuel nouveau à l'intérieur duquel certains problèmes mathématiques posés par la musique ont des implications importantes pour la perception et soulèvent des questions philosophiques auxquelles la philosophie toute seule n'aurait jamais pensé.

2. Bibliographie :

- [ADLER 1885] G. Adler : « Umfang, Methode und Ziel der Musikwissenschaft », *Vierteljahresschrift für Musikwissenschaft*, 1, pp. 5-20, 1885.
- [AGON 1998] C. Agon : *OpenMusic : Un langage visuel pour la composition musicale assistée par ordinateur*, Thèse, Paris VIII, 1998.
- [AMIOT 2004] E. Amiot : « Why rhythmic Canons are interesting », *Perspectives in Mathematical Music Theory*, (G. Mazzola, E. Puebla et T. Noll éd.), EpOs, Université d'Osnabrück.
- [ANDREATTA 1996] M. Andreatta : *Gruppi di Hajós, Canoni e Composizioni*, Tesi di Laurea, Facoltà di Matematica dell'Università degli Studi di Pavia, 1996.
- [ANDREATTA 1999] M. Andreatta : *La Théorie mathématique de la musique de Guerino Mazzola et les canons rythmiques*, Mémoire de D.E.A. pour le doctorat en musique et musicologie du XX^e siècle, E.H.E.S.S./Ircam, 1999.
- [ANDREATTA et VUZA 2001] M. Andreatta, D.T. Vuza : « On Some properties of periodic sequences in Anatol Vieru's Modal Theory », *Tatra Mt. Math. Publ.* 23, 2001, pp.1-15.
- [ANDREATTA et SCHAUB 2003] M. Andreatta, S. Schaub : « Une introduction à la Set Theory: les concepts à la base des théories d'Allen Forte et de David Lewin », *Musurgia*, Vol.X/1, 2003, pp.73-92
- [ASSAYAG *et al.* 1999] G. Assayag, C. Agon, M. Laurson, C. Rueda : « Computer Assisted Composition at Ircam: Patchwork and OpenMusic », *Computer Music Journal*, 23(3), 1999.
- [CASSIRER 1944] E. Cassirer : « The concept of group and the theory of perception », *Philosophy and Phenomenological Research*, Vol. V, N. 1, pp. 1-36, 1944.
- [CAWS 1988] P. Caws : *Structuralism. A Philosophy for the Human Sciences*, Contemporary Studies in Philosophy and the Human Sciences, Humanities Press, New Jersey, 1988.
- [CHEMILLIER 1990] M. Chemillier : *Structure et Méthode algébriques en informatique musicale (thèse)*, L.I.T.P., Institut Blaise Pascal, 1990.
- [DELIÈGE 2003] C. Deliège : *Cinquante ans de modernité musicale : de Darmstadt à l'Ircam. Contribution historiographique à une musicologie critique*, Mardaga, Bruxelles, 2003.
- [EIMERT 1964] H. Eimert : *Grundlagen der musikalischen Reihentechnik, die Reihe*, Universal éd., 1964.
- [FORTE 1973] A. Forte : *The Structure of Atonal Music*, New Haven, Yale University Press, 1973.

- [GRANGER 1994] G.-G. Granger : *Formes, opérations, objets*, Librairie Philosophique J. Vrin, Paris, 1994.
- [HAJÓS 1942] G. Hajos : « Über einfache und mehrfache Bedeckung des n-dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter », *Math. Zeit.*, 47, pp. 427–467, 1942
- [LEWIN 1993] D. Lewin : *Musical Form and Transformation: 4 Analytic Essays*, New Haven, Yale University Press, 1993.
- [MacLANE 1997] S. MacLane : *Categories for the Working Mathematician*, Second Edition, Springer-Verlag, 1998.
- [MAZZOLA 1985] G. Mazzola : *Gruppen und Kategorien in der Musik*, Helderman, Berlin, 1985.
- [MAZZOLA 2003] G. Mazzola (et al.) : *Topos of Music*, Birkhäuser Verlag, 2003.
- [MINKOWSKI 1896] H. Minkowski : *Geometrie der Zahlen*, Leipzig, 1896.
- [MINKOWSKI 1907] H. Minkowski : *Diophantische Approximationen. Eine Einführung in die Zahlentheorie*, Chelsea Publishing Company, New York, 1907.
- [OTTERSTRÖM 1935] T. Otterström : *A Theory of modulation*, The University of Chicago, 1935.
- [PATRAS 2004] F. Patras : « Phénoménologie et théorie des catégories » (dans L. Boi (éd.) : *New Interactions of Mathematics with Natural Sciences and the Humanities*, Springer (à paraître)).
- [PETITOT *et al.* 2002] J. Petitot, F. J. Varela, B. Pachoud, J.-M. Roy : *Naturaliser la phénoménologie. Essais sur la phénoménologie contemporaine et les sciences cognitives*, CNRS Editions, Paris, 2002.
- [SANDS 1957] A. Sands : « On the factorization of finite abelian groupes », *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 8, pp. 65-86, 1957.
- [SEEGER 1977] C. Seeger : *Studies in Musicology (1935-1975)*, University of California Press, 1977.
- [VIERU 1980] A. Vieru : *Cartea modurilor, 1 (Le livre des modes, 1)*, Ed. muzicala, Bucarest, 1980.
- [VUZA 1991] D.T. Vuza : « Supplementary Sets and Regular Complementary Unending Canons I », *Perspectives of New Music*, 29(2), pp. 22-49, 1991.
- [XENAKIS 1992] I. Xenakis : *Formalized Music*, (Revised Edition), Pendragon Press, Stuyvesant NY, 1992.