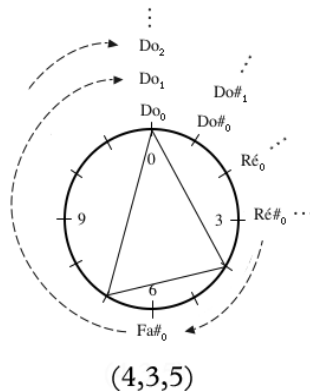


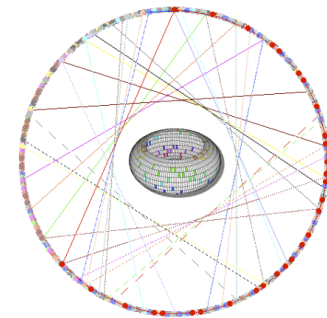
UNIVERSITE DE STRASBOURG
Institut de Recherche Mathématique Avancée



Mathematica est exercitium musicae :
la recherche mathémusicale et ses interactions avec
les autres disciplines



22 octobre 2010

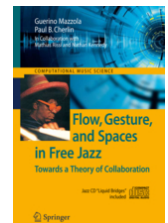
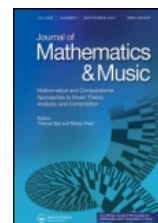
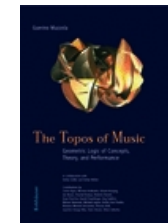
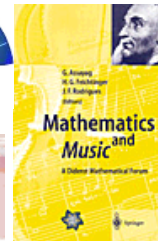


Moreno Andreatta
Equipe Représentations Musicales
IRCAM/CNRS UMR 9912

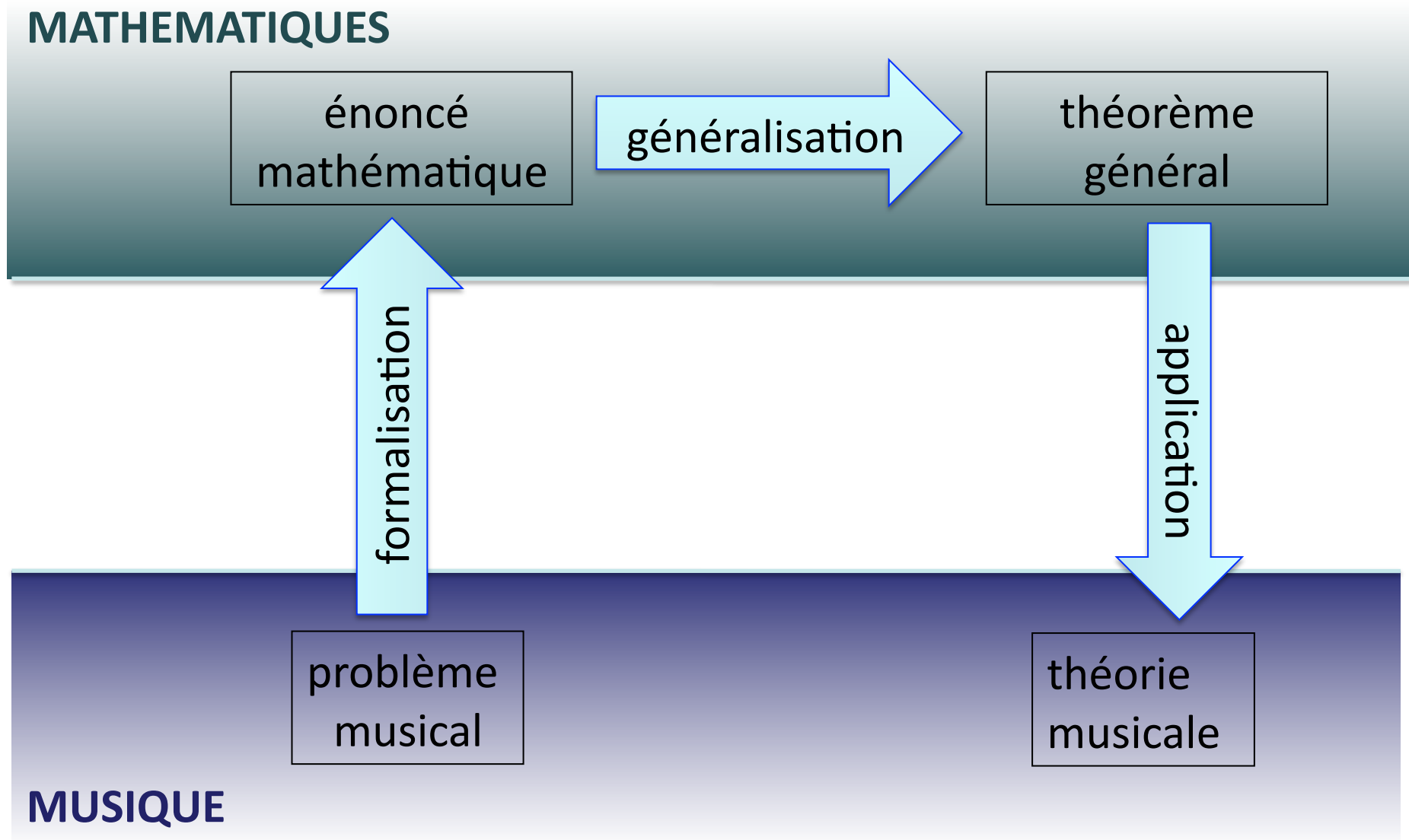


Mathématiques/Musique...une histoire récente!

- 1999 : 4^e Forum Diderot (Paris, Vienne, Lisbonne), *Mathematics and Music* (G. Assayag, H.G. Feichtinger, J.F. Rodrigues, Springer, 2001)
- 2000-2001 : Séminaire *MaMuPhi*, *Penser la musique avec les mathématiques ?* (Assayag, Mazzola, Nicolas eds., Coll. « Musique/Sciences », Ircam/Delatour, 2006)
- 2000-2003 : International Seminar on *MaMuTh* (*Perspectives in Mathematical and Computational Music Theory* (Mazzola, Noll, Luis-Puebla eds, epOs, 2004)
- 2003 : *The Topos of Music* (G. Mazzola et al.)
- 2001 - 2011 : Séminaire *MaMuX* de l'Ircam
<http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/>
- 2004 - 2011 : Séminaire *mamuphi* (Ens/Ircam)
<http://www.entrettemps.asso.fr/maths>
- 2004 - ... : Rencontres Mathématiques/Musique (IRMA, Papadopoulos & Hascher)
- 2006 : *Mathematical Theory of Music* (F. Jędrzejewski), Coll. « Musique/Sciences »
- 2007 : *La vérité du beau dans la musique* (G. Mazzola), Coll. « Musique/Sciences »
- 2007 : Journal of Mathematics and Music (Taylor & Francis) et MCM 2007
- 2009 : *Computational Music Science Series* (Springer)
- 2009 : MCM 2009 (Yale) et Proceedings chez Springer
- 2010 : Mathematics Subject Classification : 00A65 Mathematics and music
- 2011 : Conférence de la SMCM (Ircam, 15-17 juin)

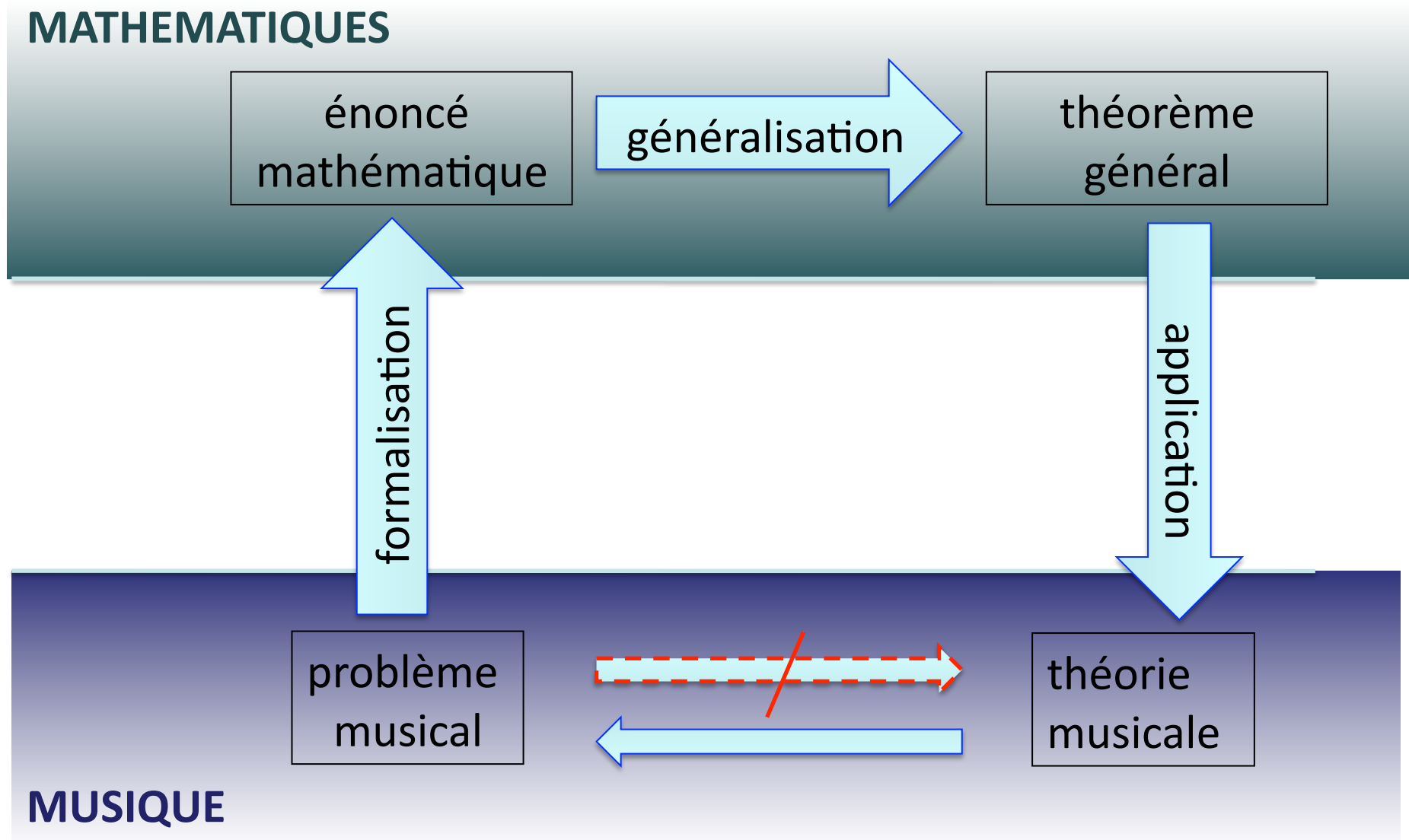


Double mouvement d'une dynamique mathémusicale



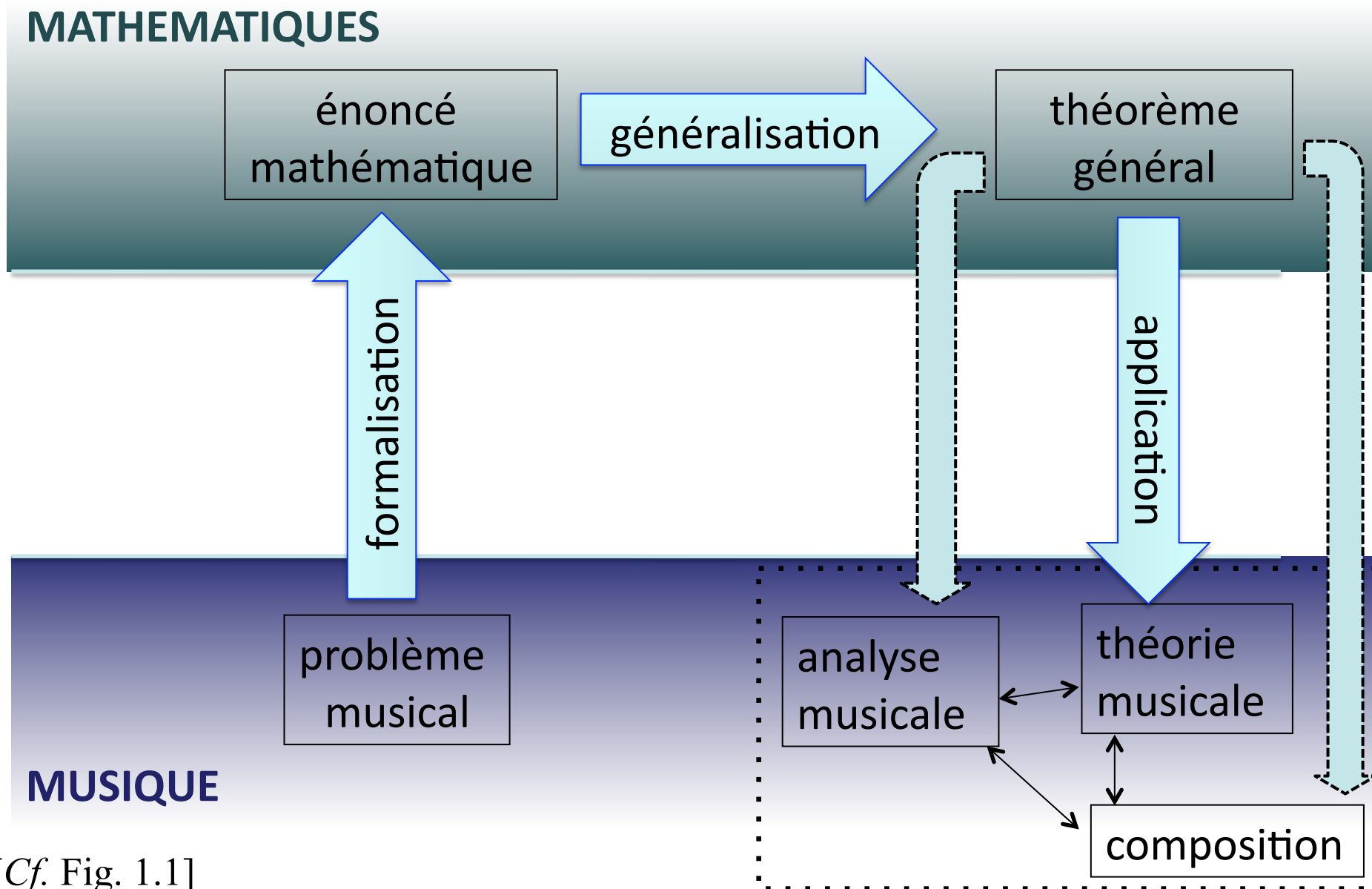
[Cf. Fig. 1.1]

Double mouvement d'une dynamique mathémusicale



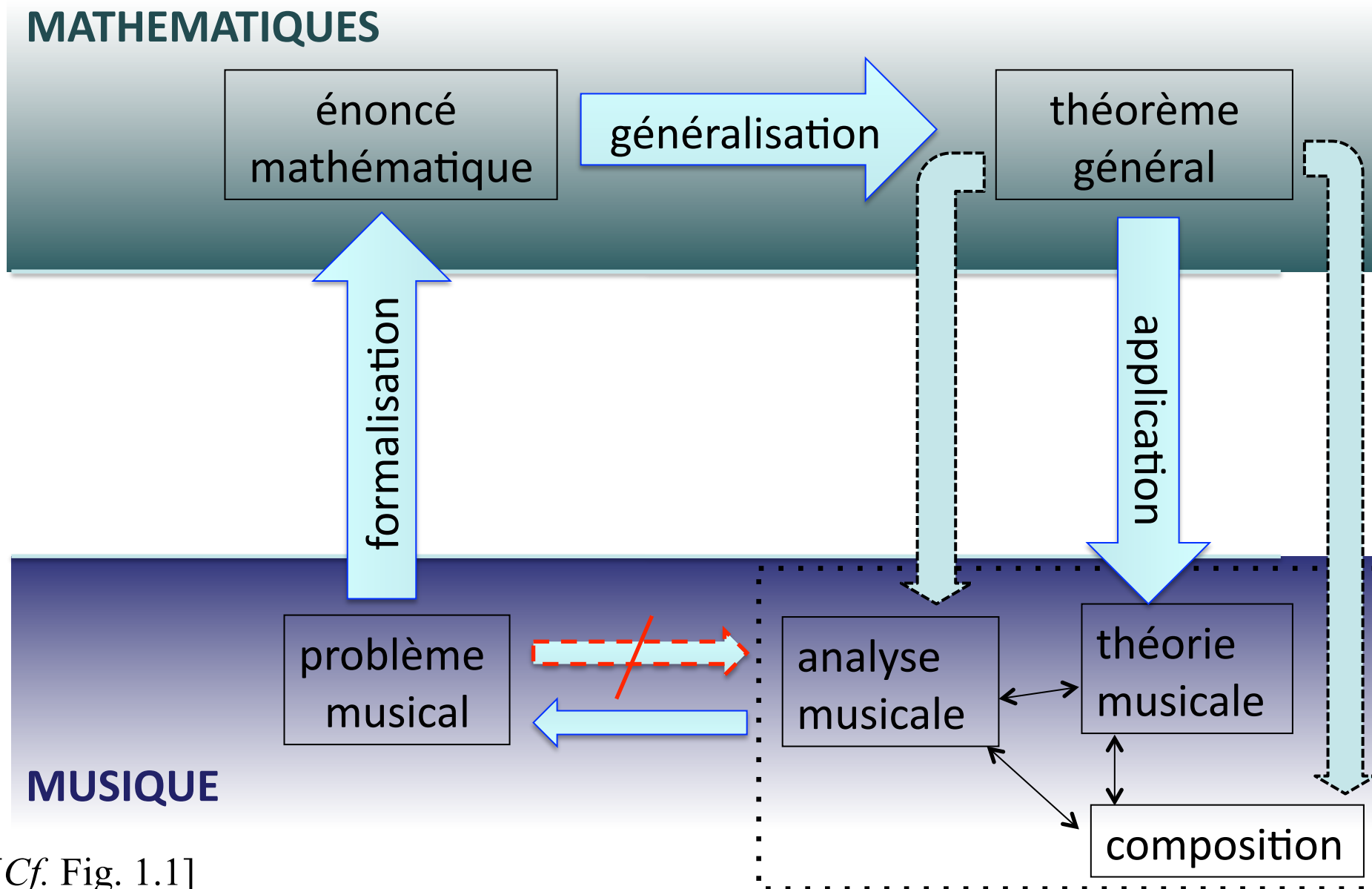
[Cf. Fig. 1.1]

Double mouvement d'une dynamique mathémusicale



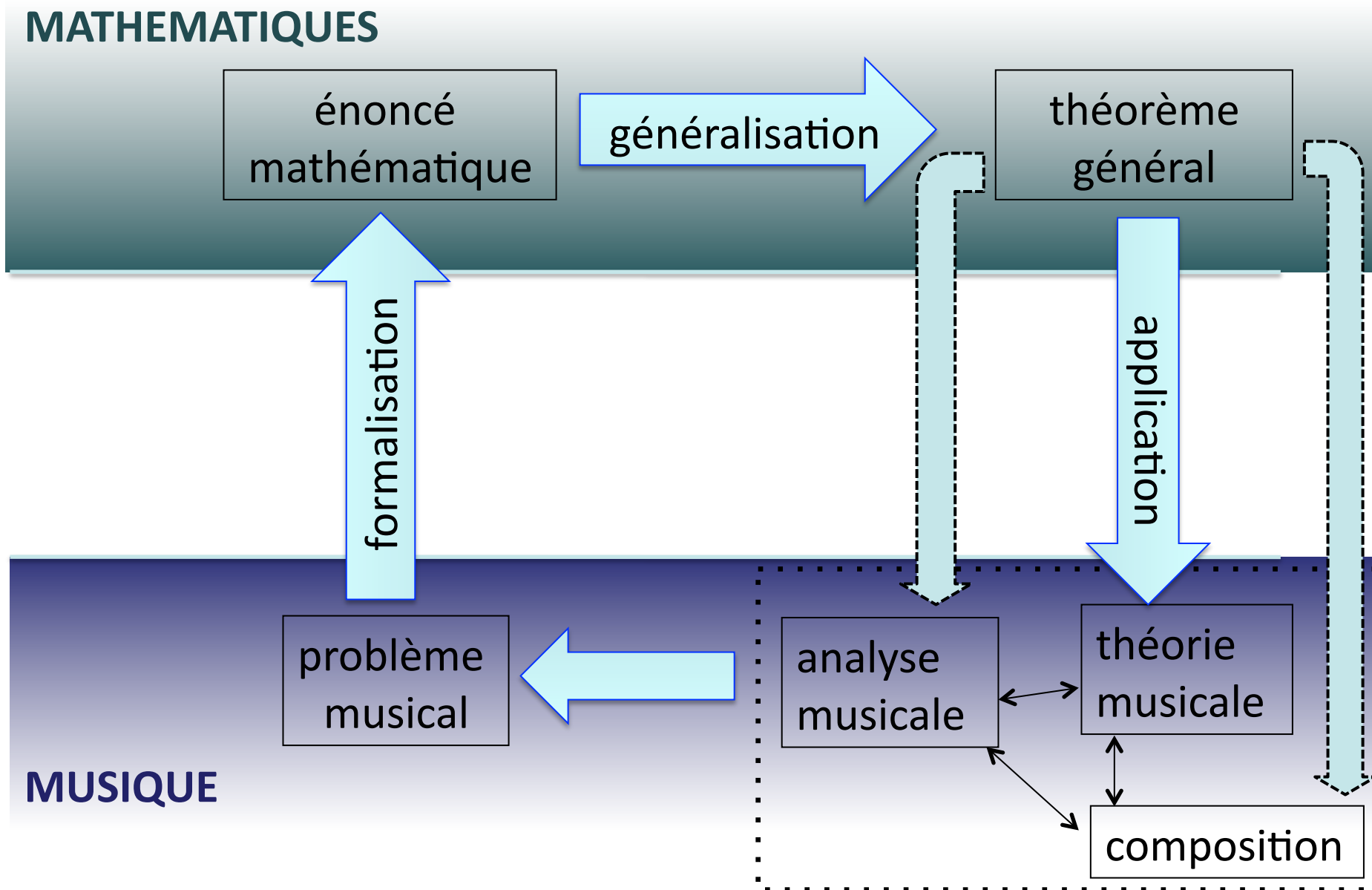
[Cf. Fig. 1.1]

Double mouvement d'une dynamique mathémusicale



[Cf. Fig. 1.1]

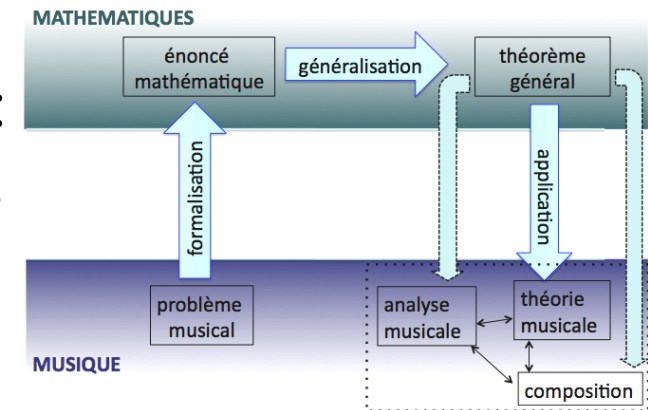
Double mouvement d'une dynamique mathémusicale



Plan de la présentation

I. Un survol sur six problèmes principaux :

1. La construction des canons rythmiques mosaïques
2. Suites périodiques et calcul de différences finies
3. La *Set Theory* et la théorie transformationnelle
4. Les théories diatoniques et les *ME-sets*
5. La théorie des block-designs en composition algorithmique
6. La relation Z et la théorie des ensembles homométriques



II. Le problème du pavage en musique

1. La construction des canons rythmiques mosaïques : de Minkowski à Fuglede

III. Interactions avec les autres disciplines

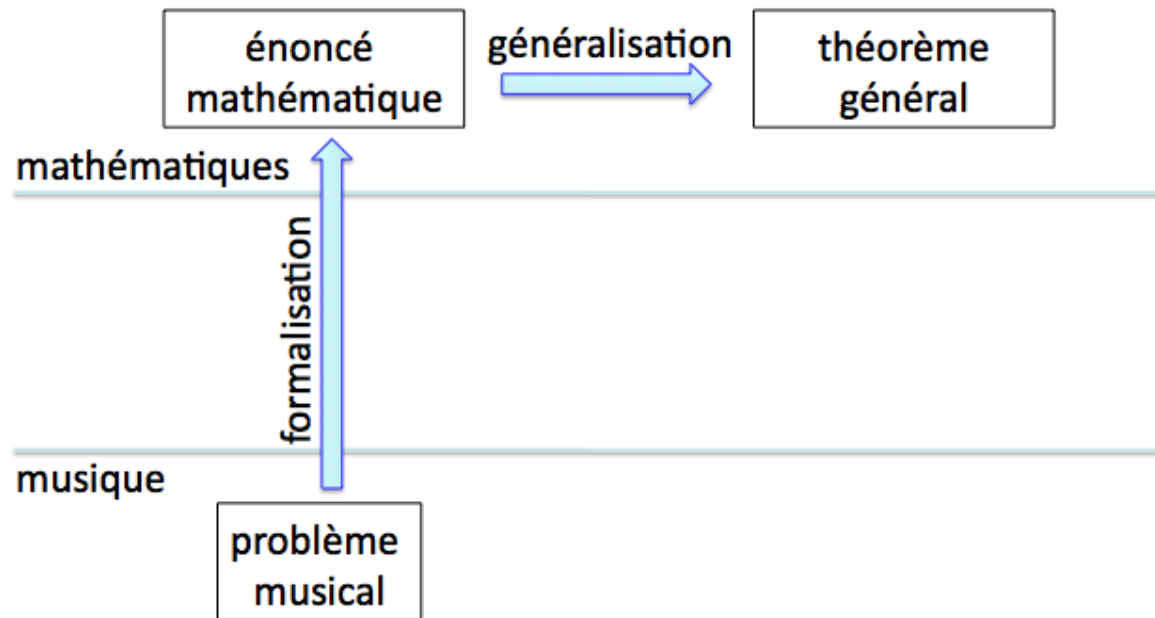
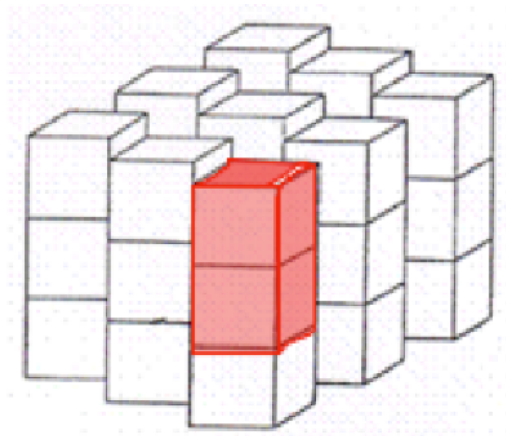
- Retombées cognitives et ramifications philosophiques

I. Un survol chronologique...

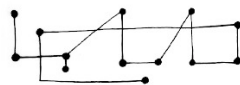
1. La construction des canons rythmiques mosaïques



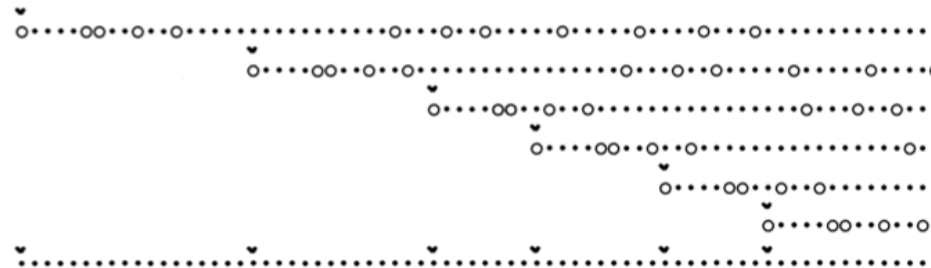
- Conjecture de Minkowski
- Solution de Hajos



1996

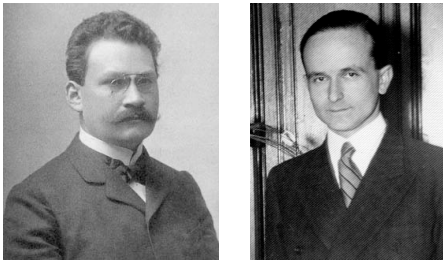


*Perspectives of
New Music*

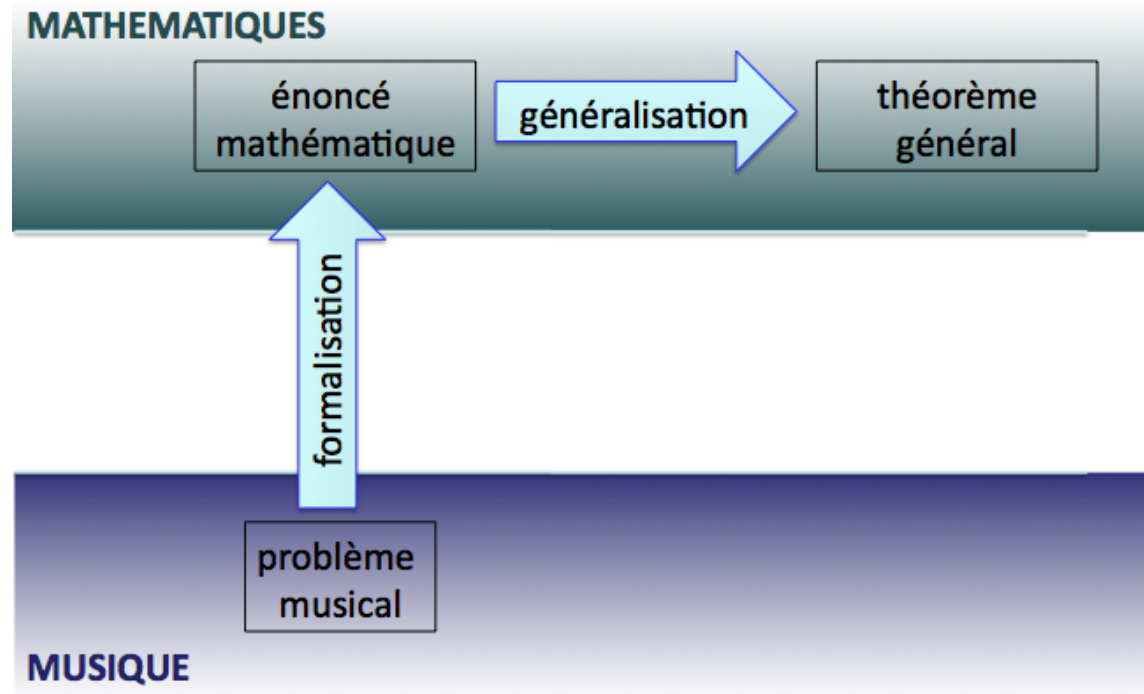
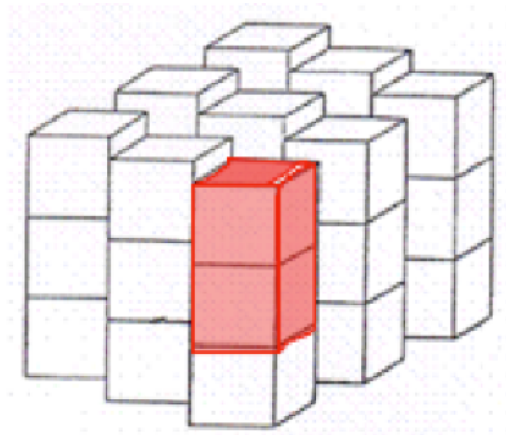


temps

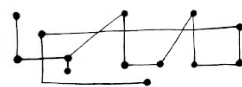
1. La construction des canons rythmiques mosaïques



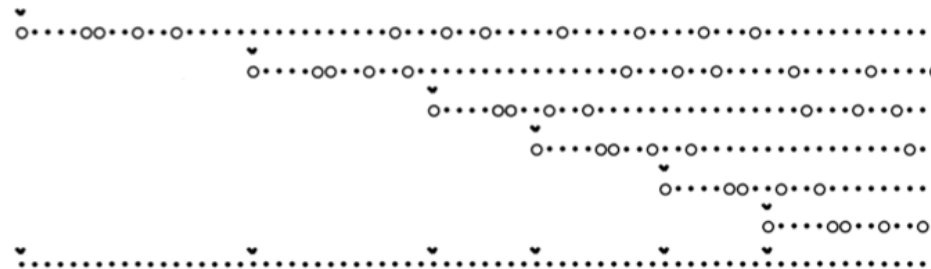
- Conjecture de Minkowski
- Solution de Hajos



1996



*Perspectives of
New Music*



temps

1. La construction des canons rythmiques mosaïques

R (1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)
(20 3 1 5 6 9 4 11 6 3 3 1)
(1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6)
(6 13 4 7 6 6 1 4 19 1 4 1)
(1 5 15 4 5 6 6 3 4 17 3 3)
(3 3 17 4 3 6 6 5 4 15 5 1)

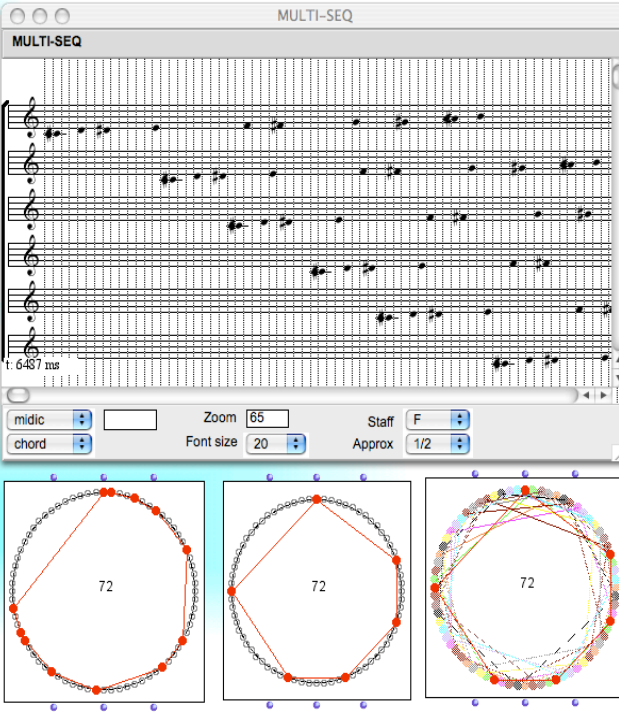
S (8 8 2 8 8 38)
(16 2 14 2 16 22)
(14 8 10 8 14 18)

R (1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)
(1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6)
(1 5 15 4 5 6 6 3 4 17 3 3)

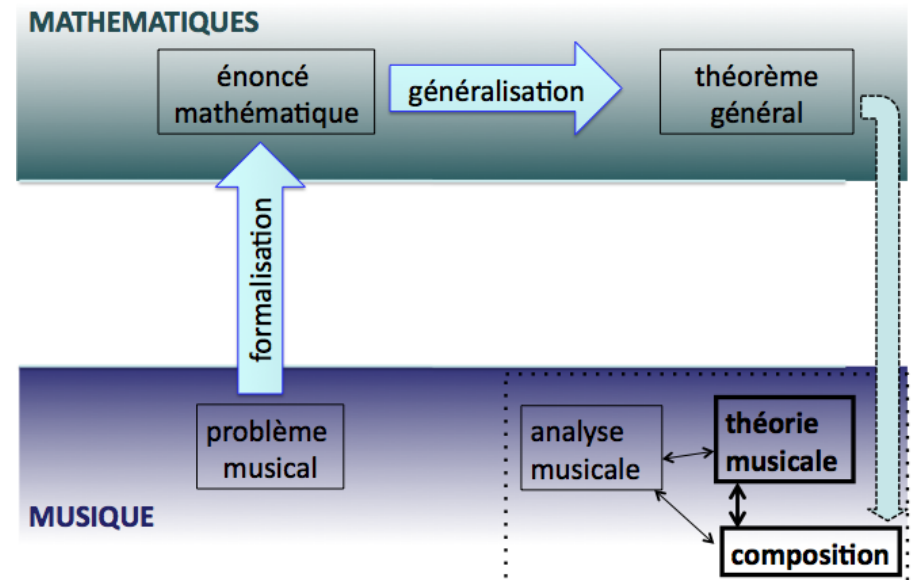
S (8 8 2 8 8 38)
(16 2 14 2 16 22)
(14 8 10 8 14 18)

R (1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)
(1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6)

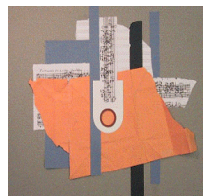
S (14 8 10 8 14 18)



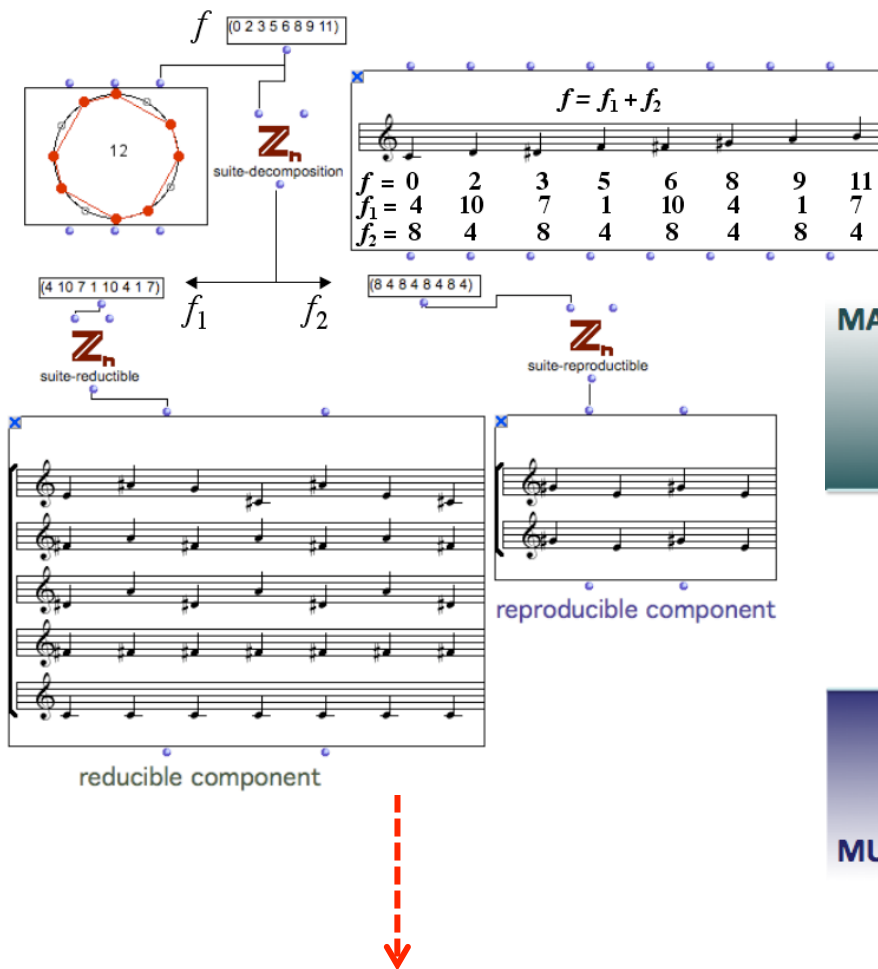
- Modèle computationnel
- Applications compositionnelles



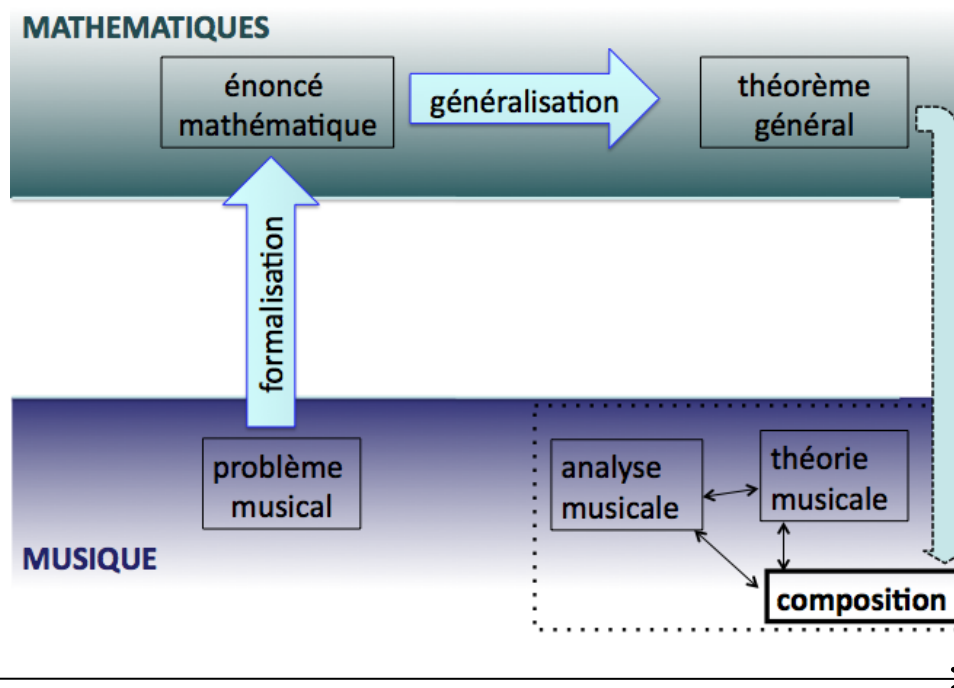
1999



2. Suites périodiques et calcul de différences finies

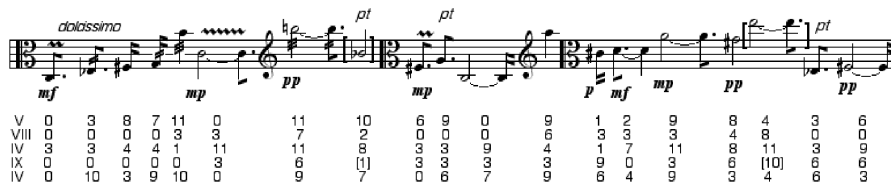


- Théorème de décomposition
- Lemme de Fitting



2001

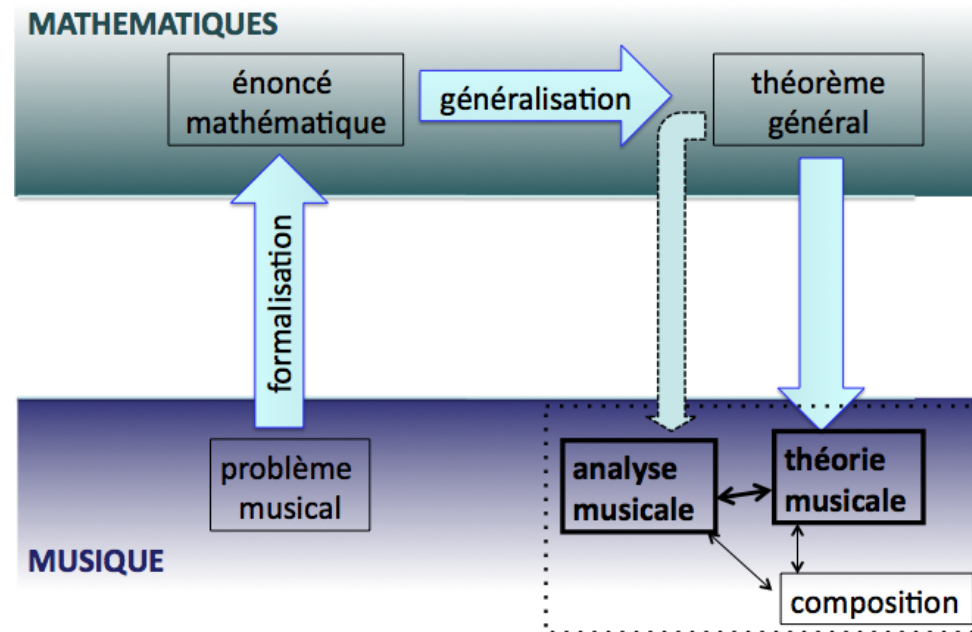
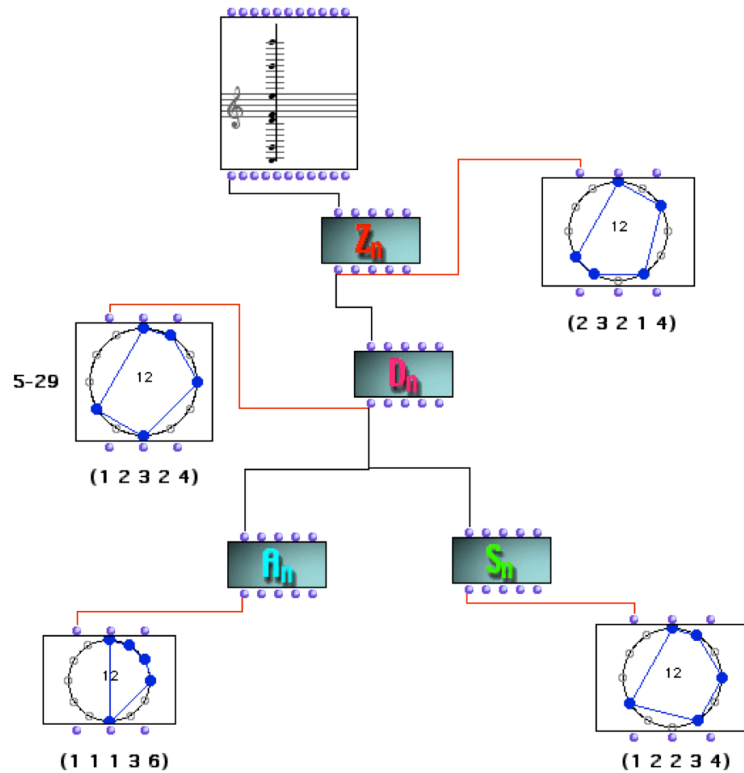
$$Df(x) = f(x) - f(x-1).$$

[illegible]

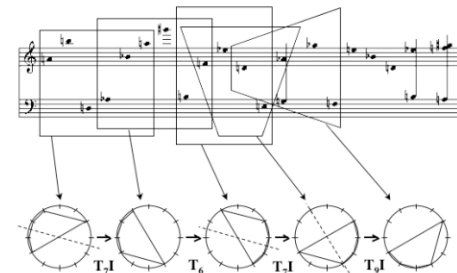
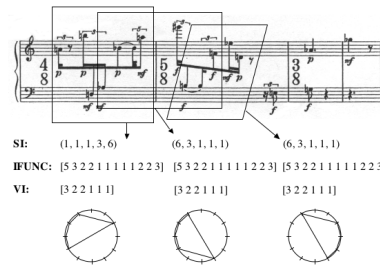
• • • • •

3. La *Set Theory* et la théorie transformationnelle

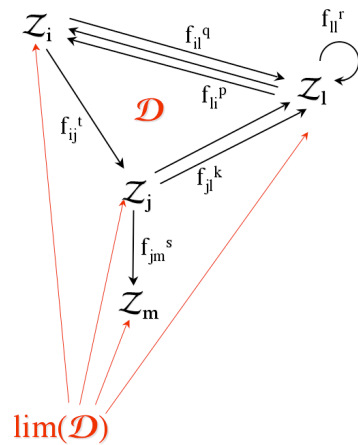
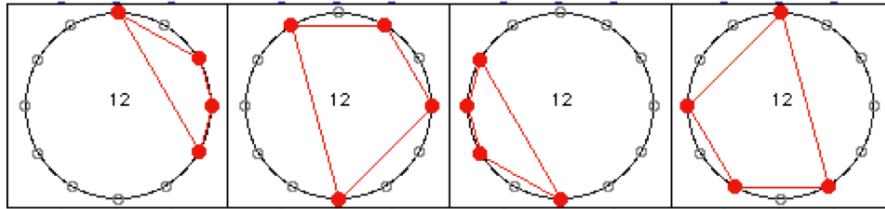
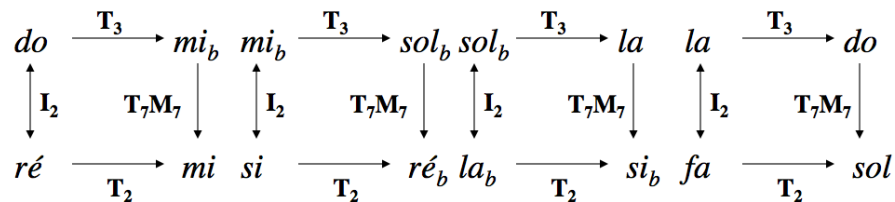
- Classification paradigmatique
- Analyse computationnelle
- Projet MISA



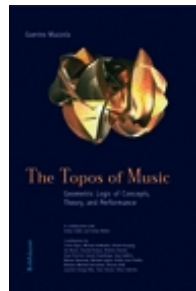
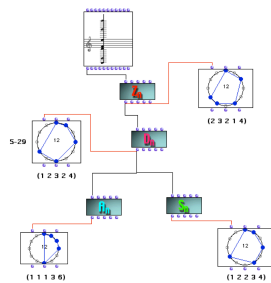
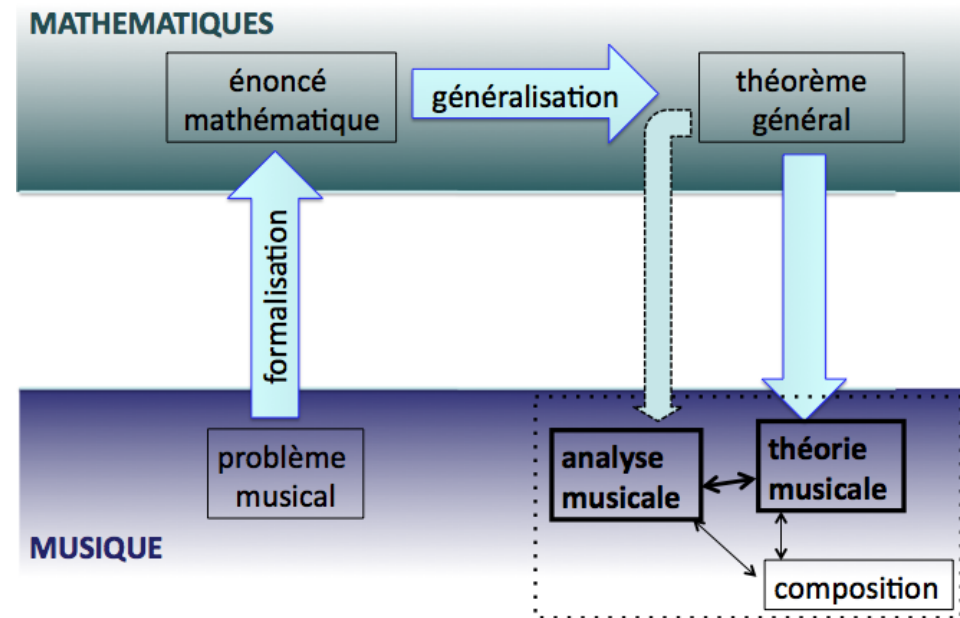
2003



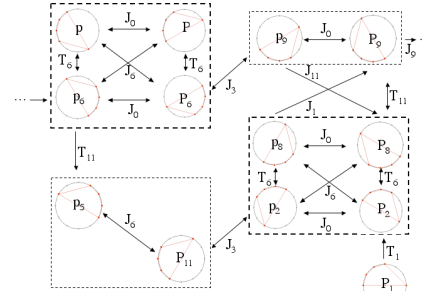
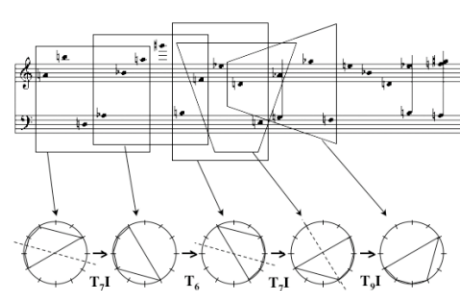
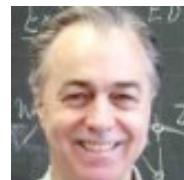
3. La *Set Theory* et la théorie transformationnelle



- Formalisation catégorielle
- Isographies fortes dans un K -net

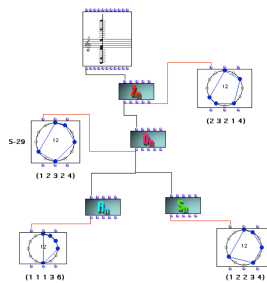
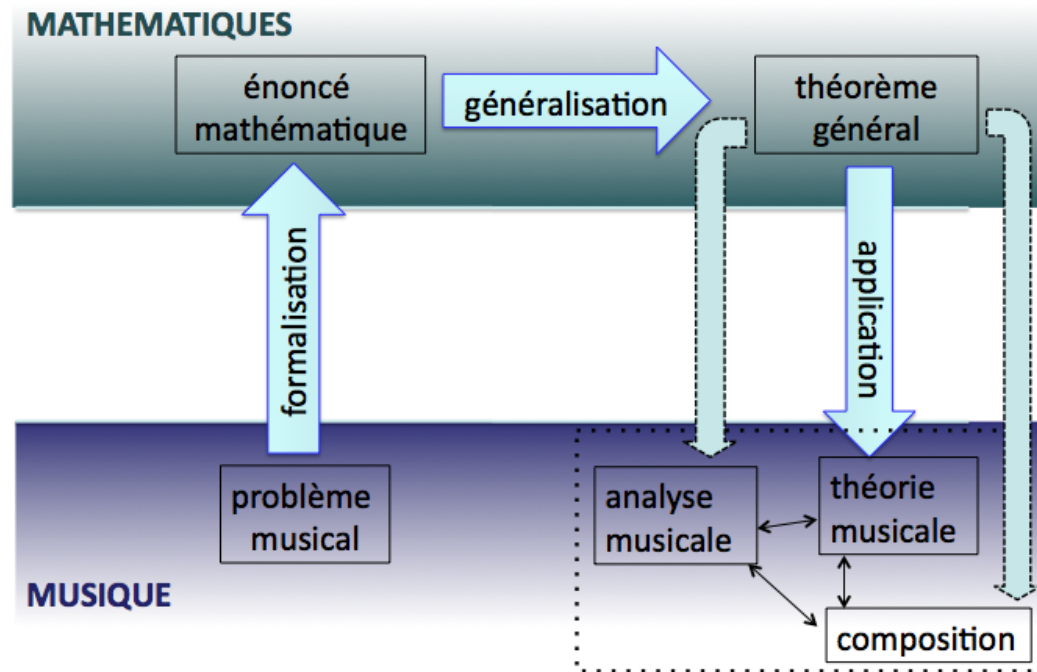
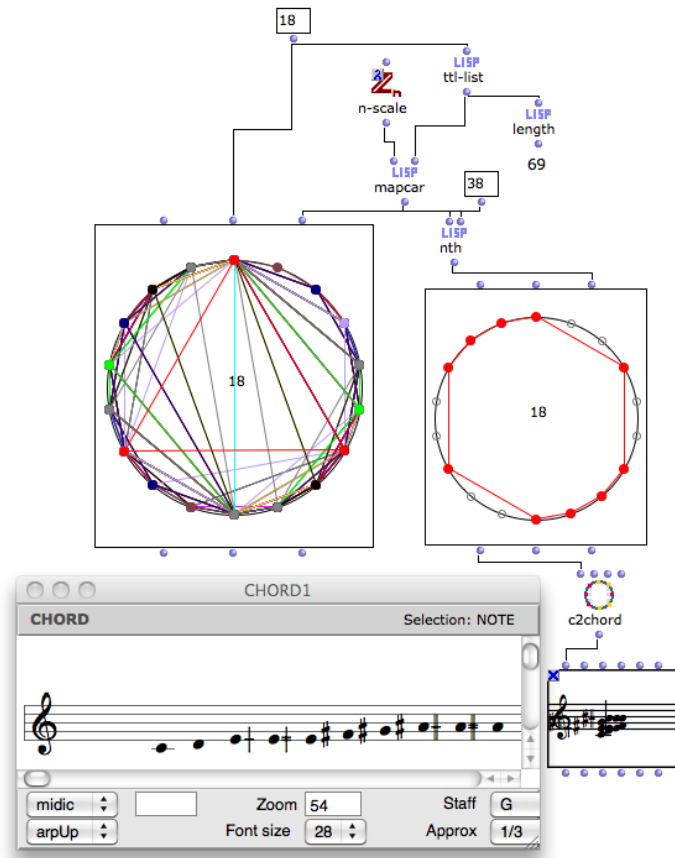


2006

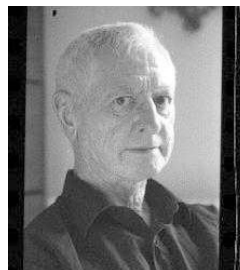
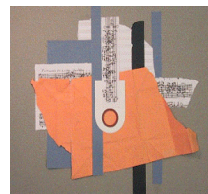


3. La *Set Theory* et la théorie transformationnelle

- Classification paradigmatique des structures microtonales
- Calcul des modes de Messiaen



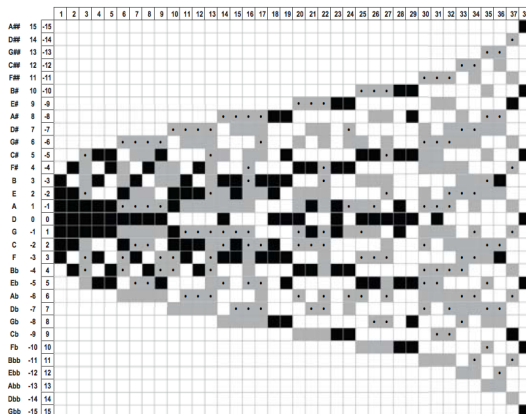
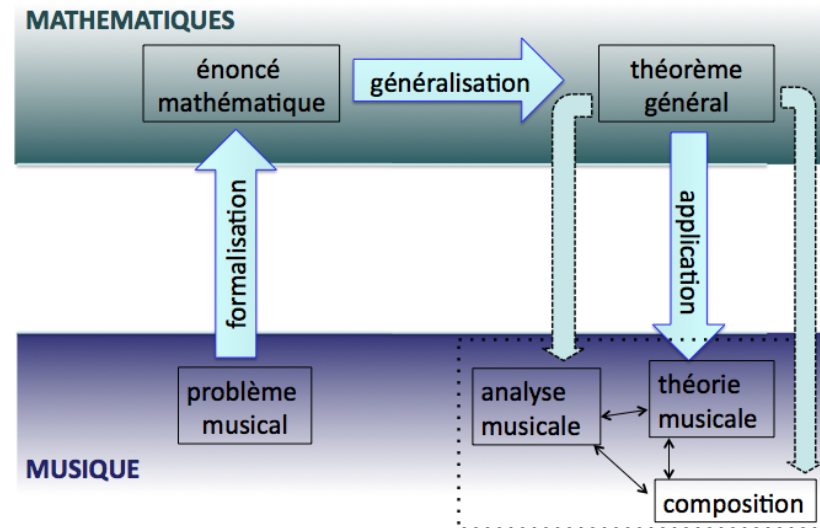
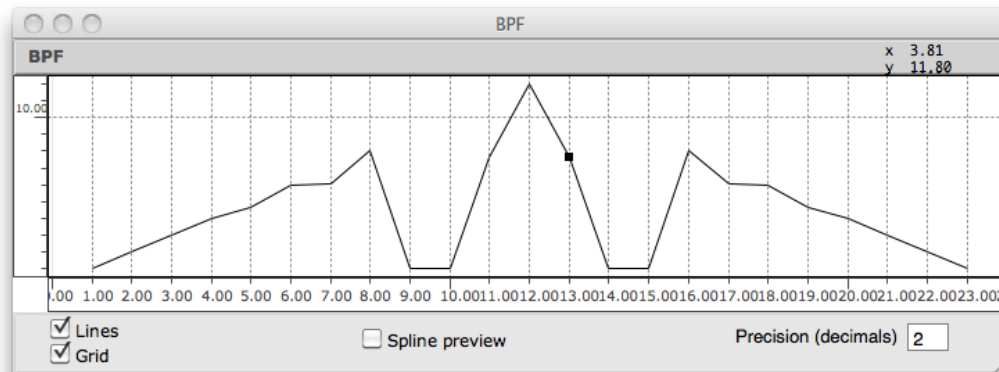
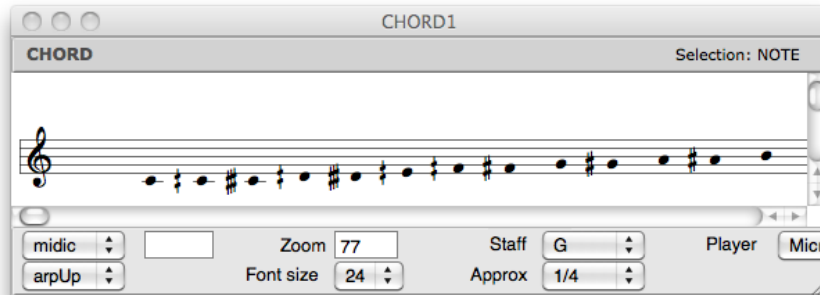
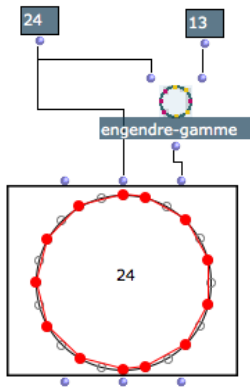
2006



4. Les théories diatoniques et les *ME-sets*

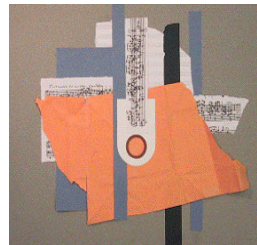
$$\mathcal{F}_A : t \mapsto \sum_{k \in A} e^{-2i\pi kt/c}$$

- DFT
- Cloche diatonique
- Classification non-paradigmatique

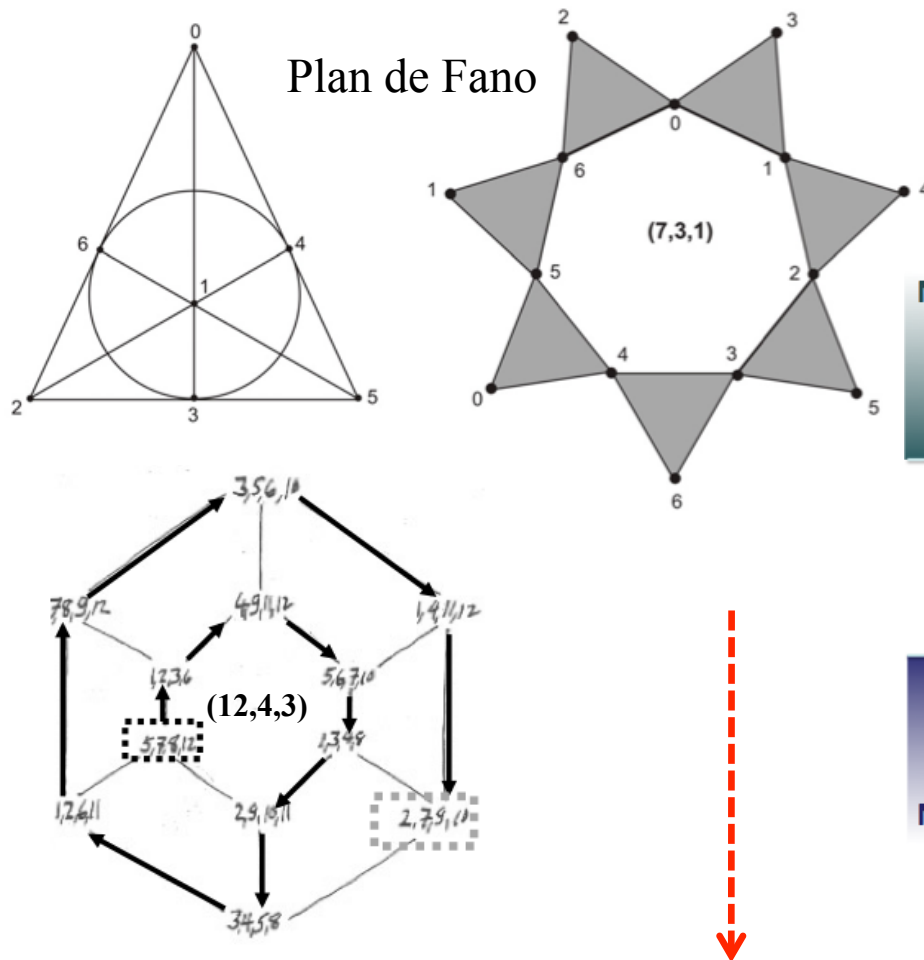


2008

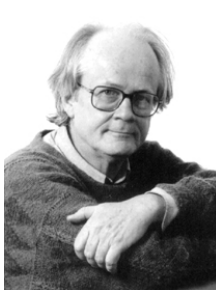
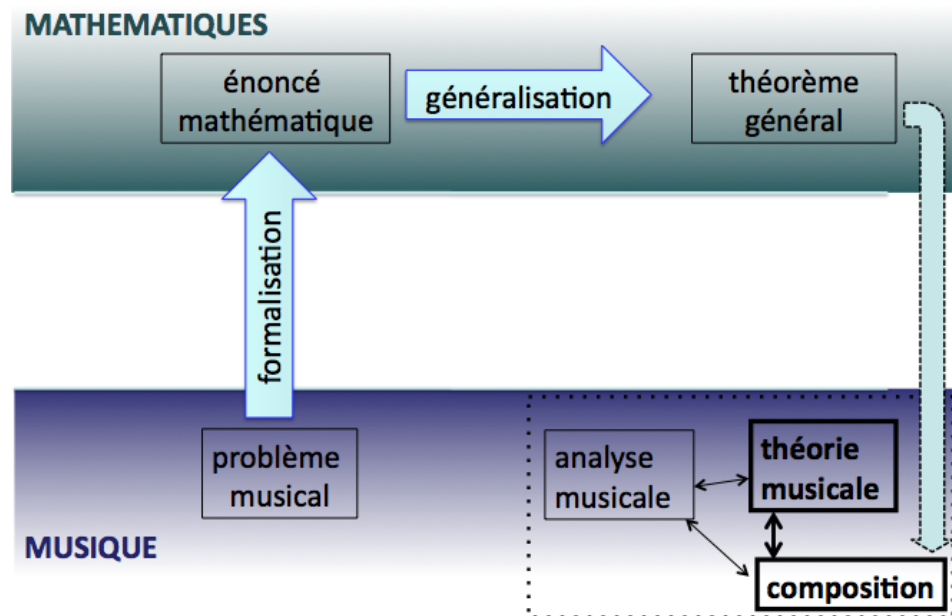
C:
conservatoire
de lausanne



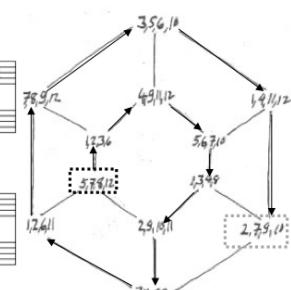
5. Block-designs et composition algorithmique



- Représentations géométriques
- Chemins et cycles hamiltoniens

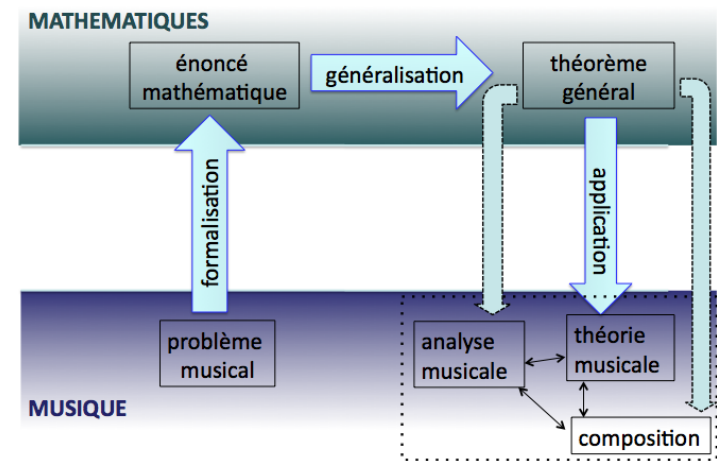
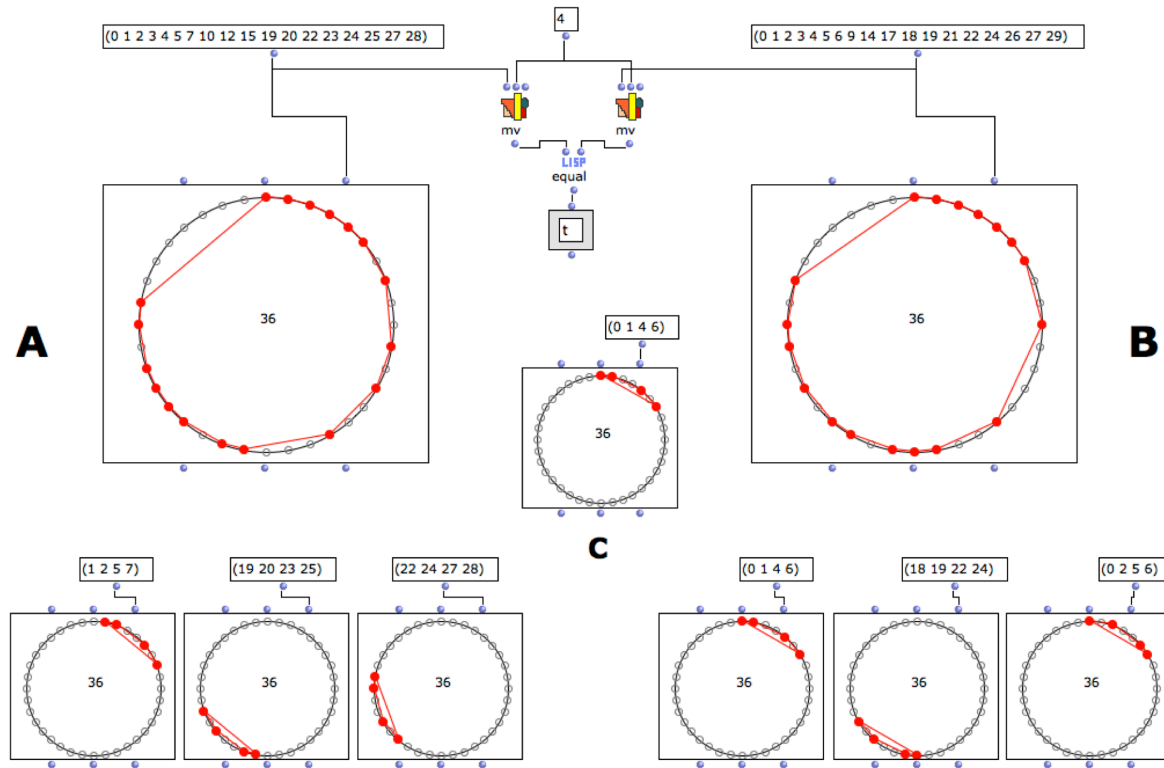


2009

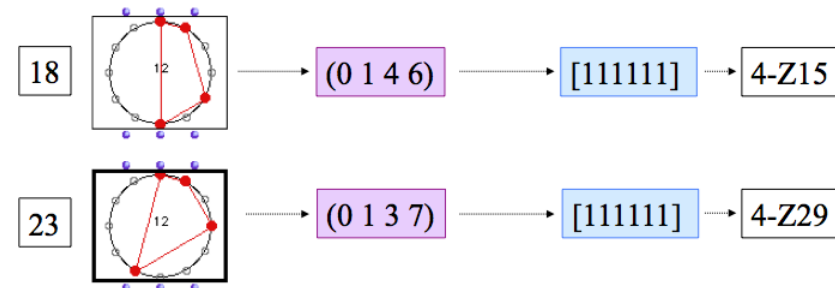


6. La relation Z et la théorie de l'homométrie

- Reconstruction de la phase
- Relation Z^k
- Modèle computationnel



2010



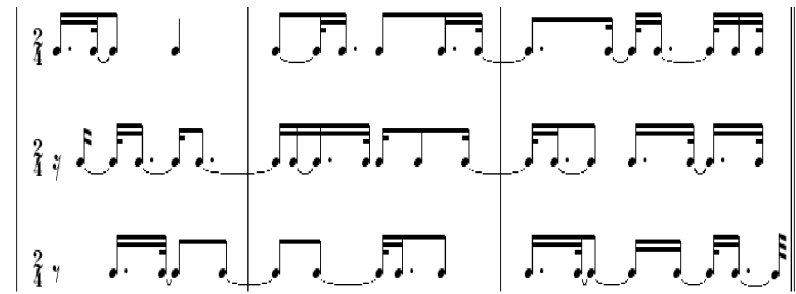
II. Le problème du pavage en musique

Les canons rythmiques mosaïques :
de Minkowski à Fuglede...
...en passant par Messiaen

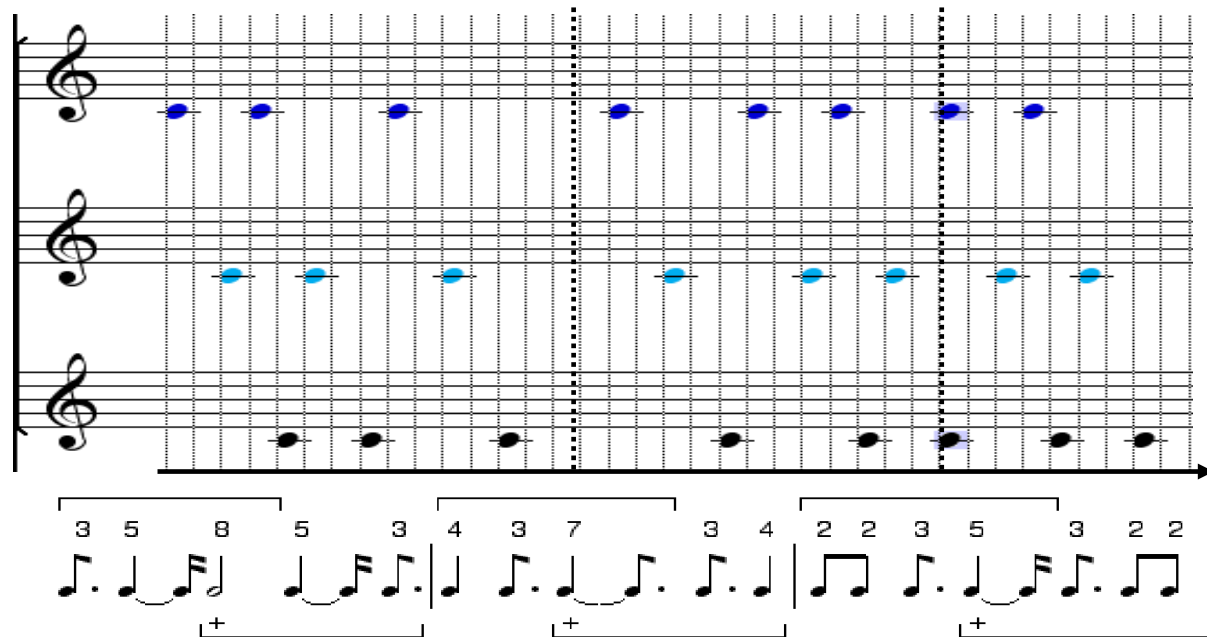
Canons rythmiques et pavage de l'espace



Harawi (1945)



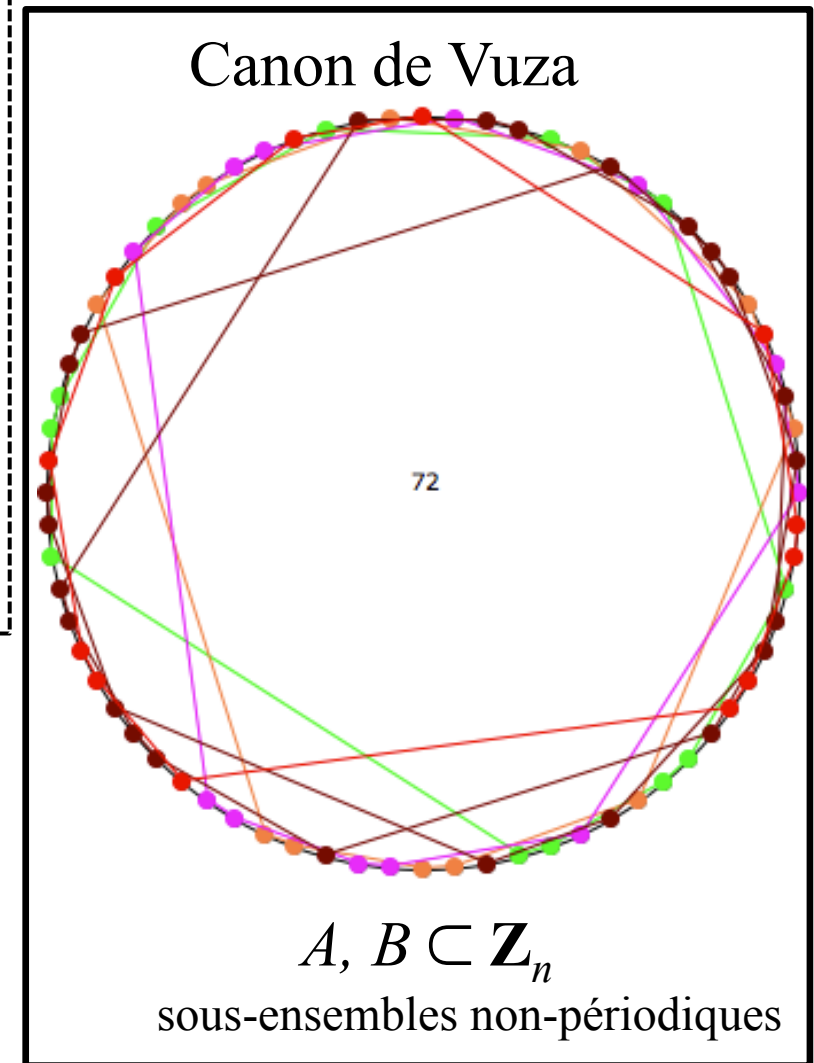
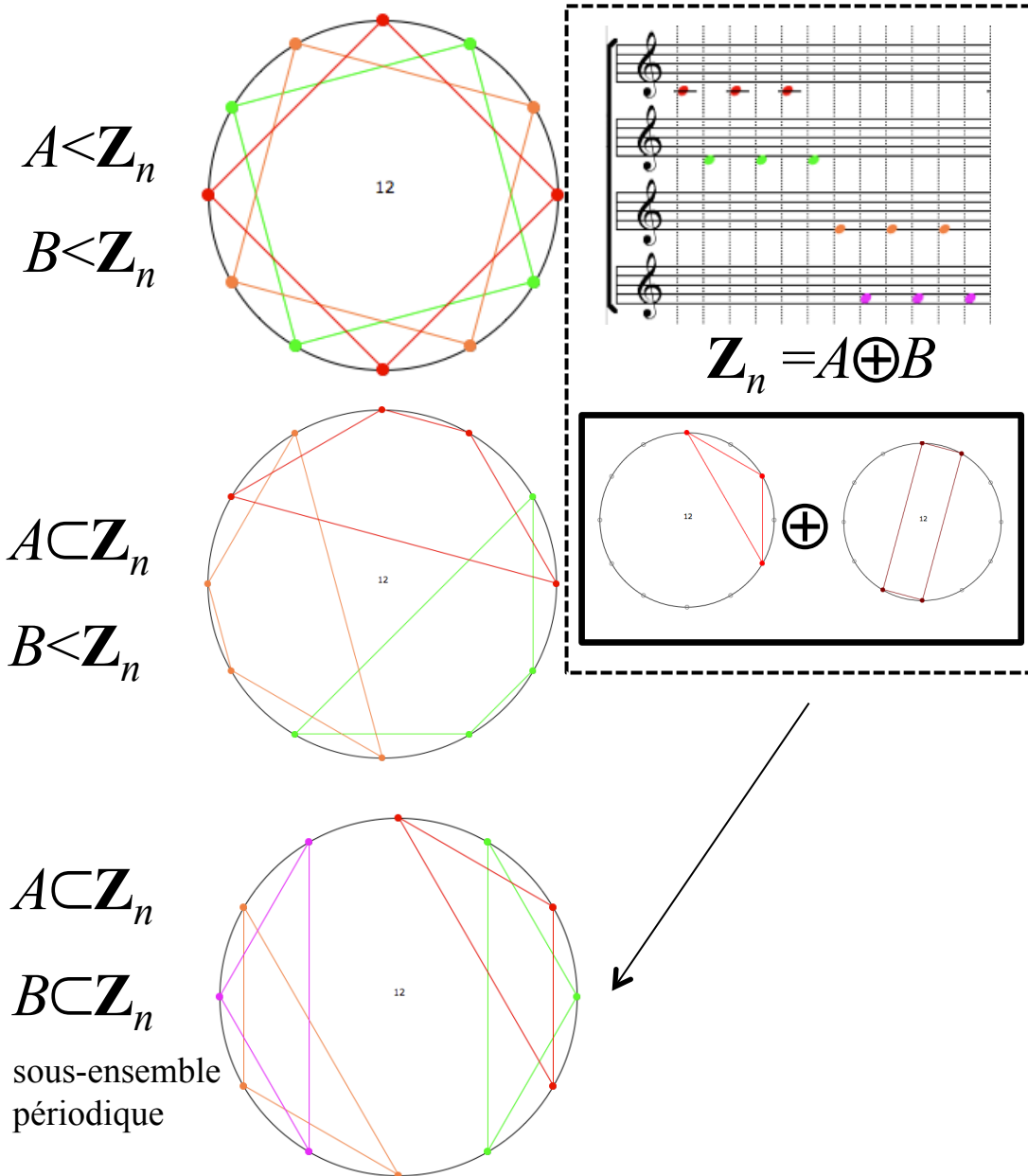
Visions de l'Amen (1943)



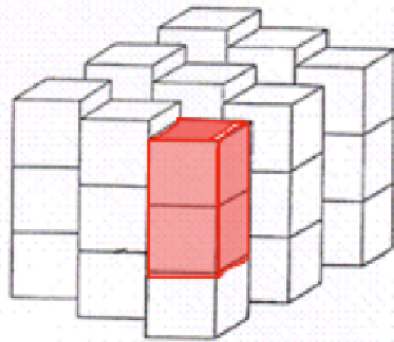
Modèle
rythmique

« ...il résulte de tout cela que les différentes sonorités se mélangent ou s'opposent de manières très diverses, **jamais au même moment ni au même endroit [...]. C'est du désordre organisé** »

Quatre types de canons rythmiques mosaïques

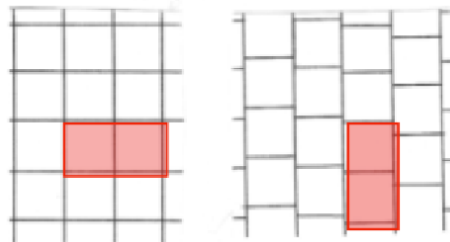


De la Conjecture de Minkowski aux groupes de Hajos



Conjecture de Minkowski (1896/1907)

Dans un pavage simple [simple lattice tiling] d'un espace à n dimensions par des cubes unités, il y a au moins un couple de cubes qui ont en commun une face entière de dimension $n-1$.



Théorème de Hajós (1942)

Soit G un groupe abélien fini et soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ n éléments de G . Si l'on suppose que le groupe admet comme factorisation la somme directe des sous-ensembles $A_1 \dots A_n$

$$A_1 = \{1, a_1, \dots, a_1^{m_1-1}\}, A_2 = \{1, a_2, \dots, a_2^{m_2-1}\}, \dots, A_n = \{1, a_n, \dots, a_n^{m_n-1}\}$$

avec $m_i > 0$ pour tout $i=1, 2, \dots, n$, alors un des A_i est un groupe

Groupes de Hajos (good groups)

Rédei 1947 (p, p)

Hajós 1950

$\mathbf{Z}$

$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ avec $n = p^\alpha$

De Bruijn 1953

(p^α, q)

(p, q, r)

Sands 1957

(p^2, q^2)

(p^2, q, r)

(p, q, r, s)

Sands 1959

$(2^2, 2^2)$

$(3^2, 3)$

$(2^n, 2)$

Sands 1962 $(p, 3, 3)$

$(p, 2^2, 2)$

$(p, 2, 2, 2, 2)$

$(p^2, 2, 2, 2)$

$(p^3, 2, 2)$

$(p, q, 2, 2)$

Sands 1964 $\mathbf{Q}$

$\mathbf{Z} + \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$

$\mathbf{Q} + \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$

Groupes non Hajos et Canons de Vuza

Groupes non-Hajós (bad groups)

72
 108 120 144 168 180
 200 216 240 252 264 270 280 288
 300 312 324 336 360 378 392 396
 400 408 432 440 450 456 468 480
 500 504 520 528 540 552 560 576 588 594
 600 612 616 624 648 672 675 680 684 696
 700 702 720 728 744 750 756 760 784 792
 800 810 816 828 864 880 882 888...

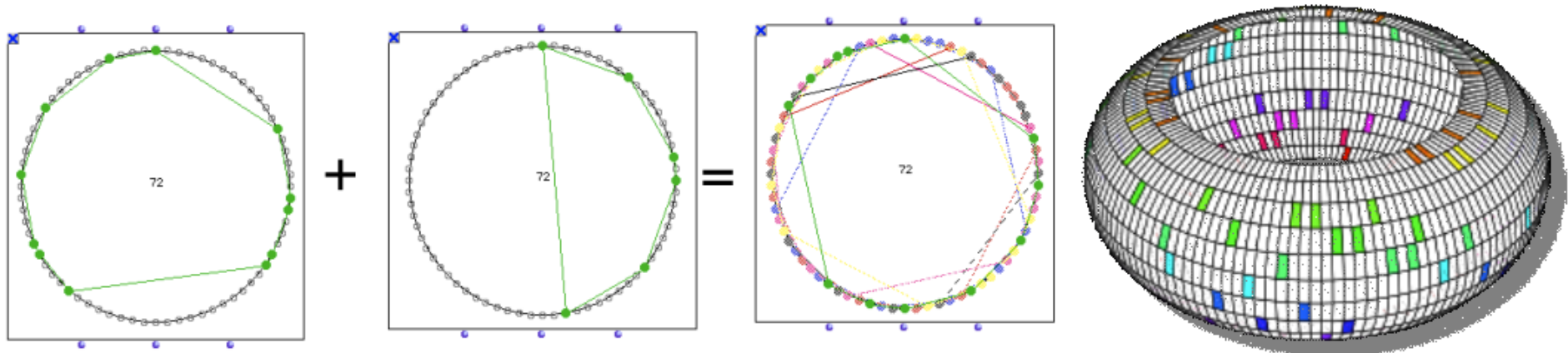
Groupes Hajós (good groups)

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec

$n \in \{p^\alpha, p^\alpha q, pqr, p^2q^2, p^2qr, pqrs\}$

où p, q, r, s , sont des nombres premiers distincts

Problème ouvert : Trouver un algorithme qui permet d'obtenir toutes les factorisations d'un groupe cyclique non-Hajos en somme directe de deux sous-ensembles non périodiques (i.e. classifier tous les Canons de Vuza, ou Canons sans périodicité interne)



Classification paradigmaticue des canons de Vuza ($n=72$)

Résultat :

uniquement
deux « types »
de canons
différents (à
une
*transformation
affine* près,
i.e.

$$f: \mathbb{Z}_{72} \rightarrow \mathbb{Z}_{72}$$

t.q.

$$f(x) = ax + b$$

avec $a \in (\mathbb{Z}_{72})^*$

et $b \in \mathbb{Z}_{72}$

$\{Z_n\}$
R
(1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)
(20 3 1 5 6 9 4 11 6 3 3 1)
(1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6)
(6 13 4 7 6 6 1 4 19 1 4 1)
(1 5 15 4 5 6 6 3 4 17 3 3)
(3 3 17 4 3 6 6 5 4 15 5 1)

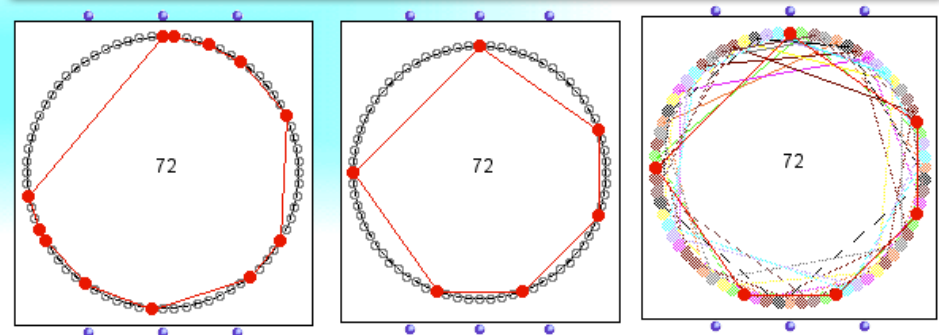
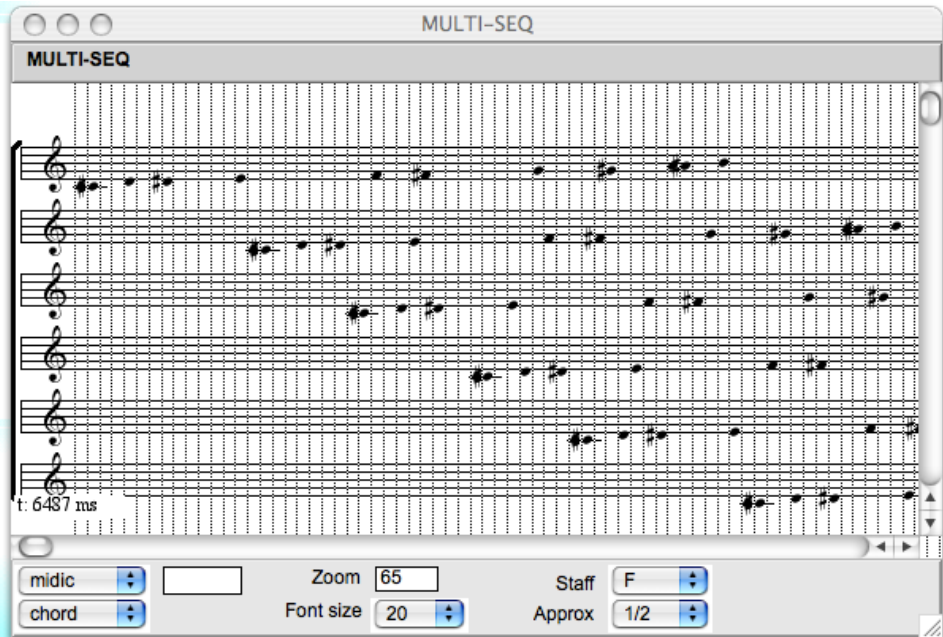
S
(8 8 2 8 8 38)
(16 2 14 2 16 22)
(14 8 10 8 14 18)

$\{D_n\}$
R
(1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)
(1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6)
(1 5 15 4 5 6 6 3 4 17 3 3)

S
(8 8 2 8 8 38)
(16 2 14 2 16 22)
(14 8 10 8 14 18)

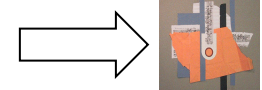
$\{Af_n\}$
R
(1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)
(1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6)

S (14 8 10 8 14 18)



- R. Tijdeman: “Decomposition of the Integers as a direct sum of two subsets”, *Number Theory*, Cambridge University Press, 1995.

The fundamental Lemma: $R \text{ pave } \mathbb{Z}_n \Rightarrow aR \text{ pave } \mathbb{Z}_n \langle a, n \rangle = 1$

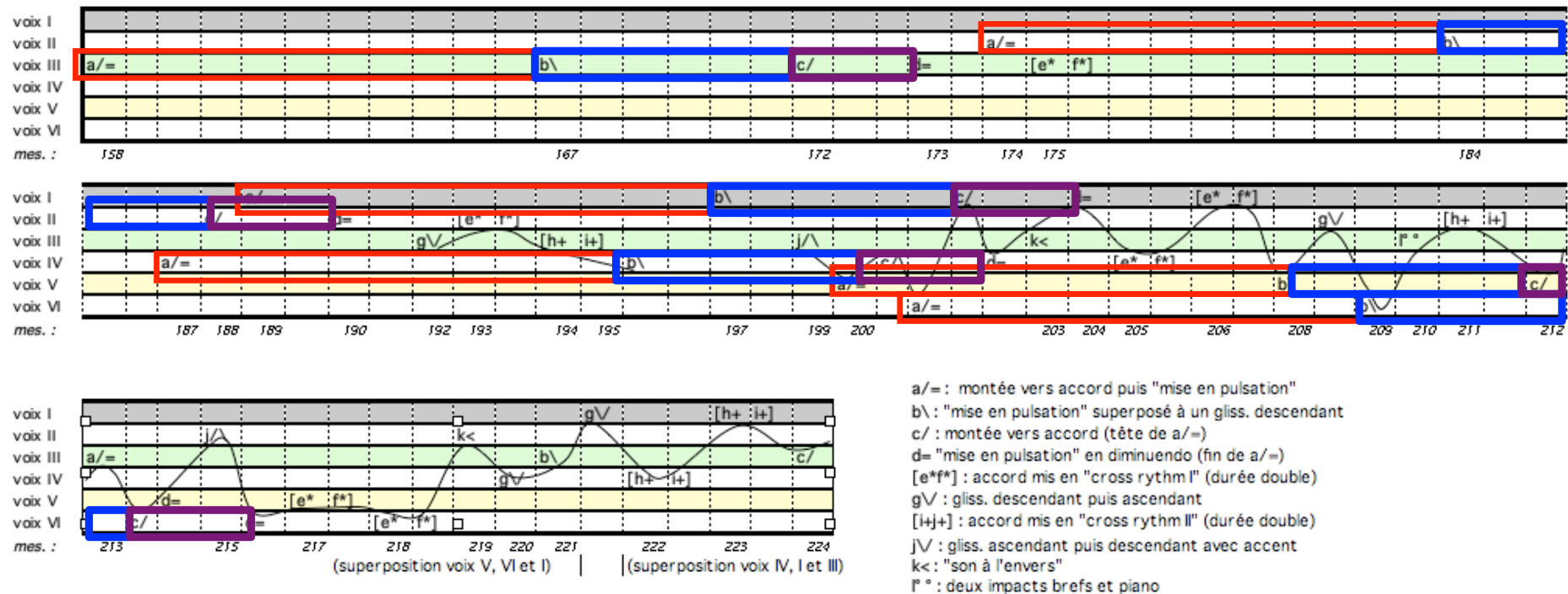


Fabien Lévy

Canons de Vuza pour une musique « morphologique »



- *Coïncidences* (pour 33 musiciens, 1999-2007)



Coïncidences - Fabien Lévy : déroulement du canon (mes. 158 à 226)
(chaque impact fait 3 temps)



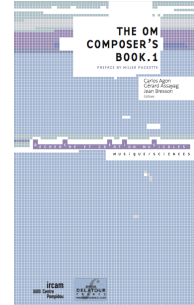
Interprètes : Tokyo Symphony Orchestra, Dir.: Kazuyoshi Akiyama, 05/09/2007, Suntory Hall, Tokyo, Japon

Georges Bloch

Stratégies compositionnelles à partir d'un modèle formel

- Réduction d'un canon par auto-similarité
- Modulations métriques entre canons
- Canons mosaïques et IAO (*OMax*)

- *Projet Beyeler* (2001) 
- *Projet Hitchcock*
- *Visite des tours de la cathédrale de Reims*
- *Noël des Chasseurs*
- *Canons à marcher*
- *Canon à eau*
- *Harawun* (2004)
- *L'Homme du champ* (2005)
- *A piece based on Monk* (2007)
- *Peking Duck Soup* (2008)



73
V1
73
V2
73
V3
73
V4
73
V5
73
V6

mp
mp
mp
pp
mf
pp
f
f

- *A piece based on Monk* (2007)
(« Well You Need'nt »)

Pavage de la ligne et conjecture spectrale

Conjecture de Fuglede (1974) :
« Commuting Self-Adjoint Partial Differential Operators and a Group Theoretic Problem », *J. Func. Anal.* **16**, 101-121, 1974.
SPECTRALITE $\Leftrightarrow$ PAVAGE

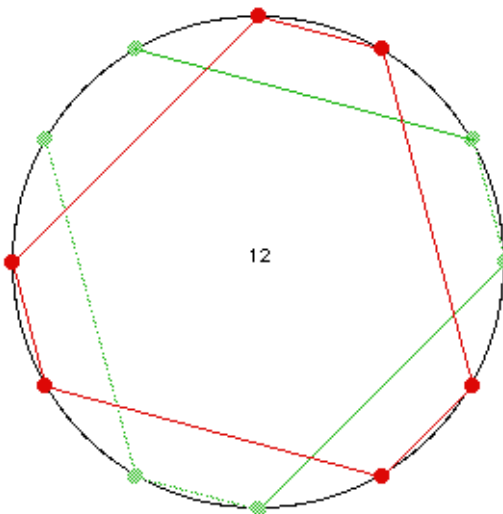


- E. Coven & A. Meyerowitz: “Tiling the integers with translates of one finite set”, *J. Algebra*, 212, pp.161-174, 1999

Deux conditions de C&M :

T1 + T2 $\Rightarrow$ pavage

pavage $\Rightarrow$ T1



$$A(X) = 1 + X + X^4 + X^5 + X^8 + X^9 = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_6 \times \Phi_{12}$$

$$\Phi_2(X) = 1 + X$$

$$\Phi_3(X) = 1 + X + X^2$$

$$(T1) A(1) = 6 = \Phi_2(1) \times \Phi_3(1) = 2 \times 3$$

$$(T2) \Phi_2 \mid A(X) \text{ et } \Phi_3 \mid A(X) \Rightarrow \Phi_{2 \times 3} \mid A(X)$$

Conjecture de Fuglede et canons rythmiques mosaïques

Canons de Vuza de période n

72

108 120 144 168 180

200 216 240 252 264 270 280 288

300 312 324 336 360 378 392 396

400 408 432 440 450 456 468 480

500 504 520 528 540 552 560 576 588 594

600 612 616 624 648 672 675 680 684 696

700 702 720 728 744 750 756 760 784 792

800 810 816 828 864 880 882 888...

Fuglede Conjecture (1974):
SPECTRAL $\Leftrightarrow$ TILING

(Conjecture fausse en dimension $n \geq 3$
ouverte en dimension 1 et 2)

DEFINITION 6 A subset A of some vector space (say $\mathbb{R}^n$) is spectral iff it admits a Hilbert base of exponentials, i.e. if any map $f \in L^2(A)$ can be written

$$f(x) = \sum f_k \exp(2i\pi \lambda_k \cdot x)$$

for some fixed family of vectors $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ where the maps $e_k : x \mapsto \exp(2i\pi \lambda_k \cdot x)$ are mutually orthogonal (i.e. $\int_A \bar{e}_k e_j = 0$ whenever $k \neq j$).



VOLUME 3	NUMBER 2	JULY 2009	ISSN 1745-9737
Journal of Mathematics & Music Mathematical and Computational Approaches to Music Theory, Analysis, Composition and Performance			
Special Issue on Tiling Problems in Music Guest Editors: Moreno Andreatta and Carlos Agon			
Guest Editors' Foreword Moreno Andreatta and Carlos Agon			63 – 70
New perspectives on rhythmic canons and the spectral conjecture Emmanuel Amiot			71 – 84
Algorithms for translational tiling Mihail N. Kolountzakis and Máté Matolcsi			85 – 97
Tiling the integers with aperiodic tiles Franck Jedrzejewski			99 – 115

Si A pave mais il n'est pas spectral $\Rightarrow A$ est le rythme d'un canon de Vuza

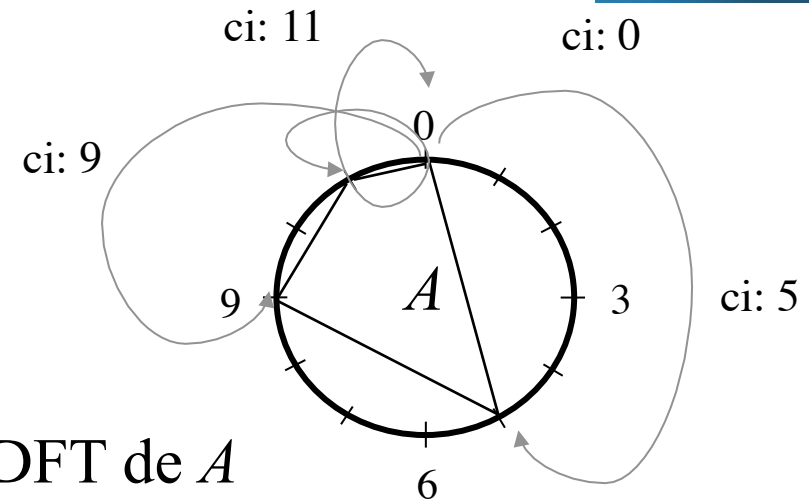
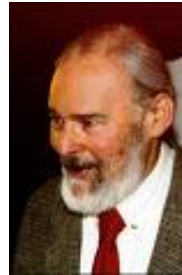
Pavages, DFT, théorie transformationnelle et homométrie

- Le *contenu intervallique* est le produit de convolution de fonctions caractéristiques d'ensembles (Lewin, *JMT*, 1958)

$$IC_A(k) = \text{Card}\{(x, y) \in A \times A \mid x + k = y\}$$

$$IC_A(k) = (1_A \star 1_{-A})(k)$$

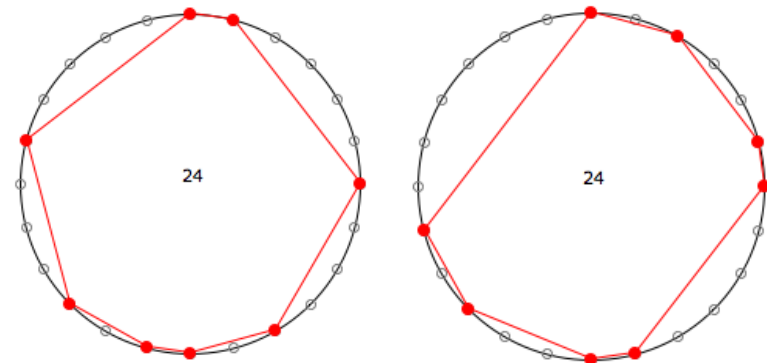
$$\mathcal{F}_A : t \mapsto \sum_{k \in A} e^{-2i\pi kt/c}$$



Soit Z_A est l'ensemble des zéros de la DFT de A

$$\mathbf{Z}_n = A \oplus B$$

- $1_A * 1_B = 1$
- $Z_A \cup Z_B = \{1, 2, \dots, n-1\}$ et $\#A \times \#B = n$
- $IC_A * IC_B = n$



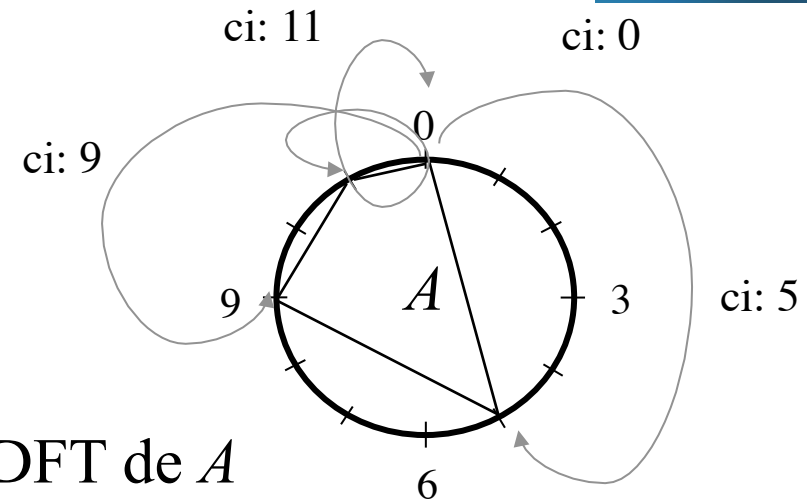
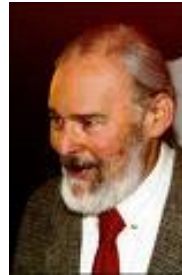
Pavages, DFT, théorie transformationnelle et homométrie

- Le *contenu intervallique* est le produit de convolution de fonctions caractéristiques d'ensembles (Lewin, *JMT*, 1958)

$$IC_A(k) = \text{Card}\{(x, y) \in A \times A \mid x + k = y\}$$

$$IC_A(k) = (1_A \star 1_{-A})(k)$$

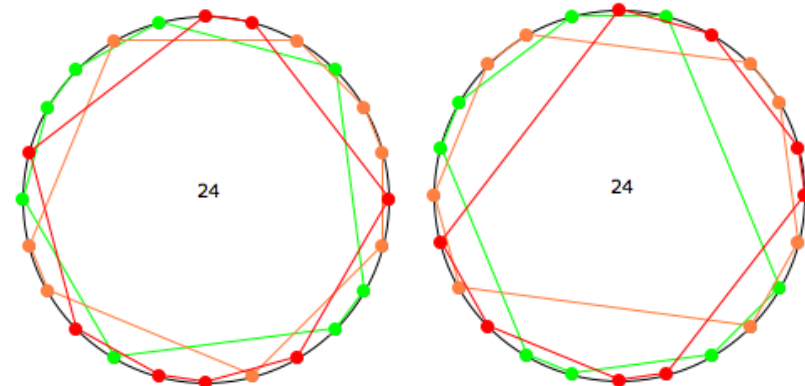
$$\mathcal{F}_A : t \mapsto \sum_{k \in A} e^{-2i\pi kt/c}$$



Soit Z_A est l'ensemble des zéros de la DFT de A

$$Z_n = A \oplus B$$

- $1_A * 1_B = 1$
- $Z_A \cup Z_B = \{1, 2, \dots, n-1\}$ et $\#A \times \#B = n$
- $IC_A * IC_B = n$

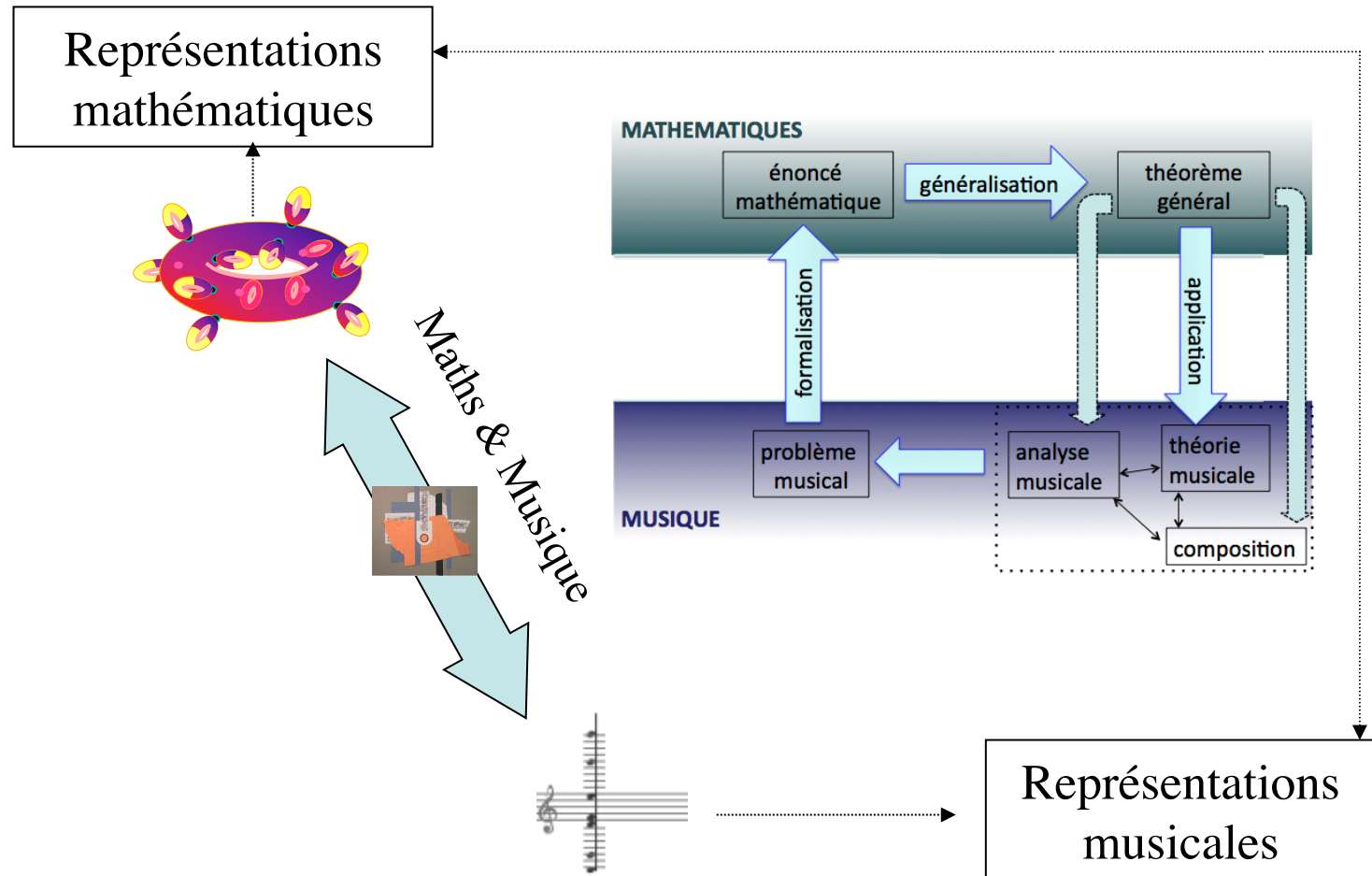


III. Interactions avec les autres disciplines

Retombées cognitives et ramifications philosophiques

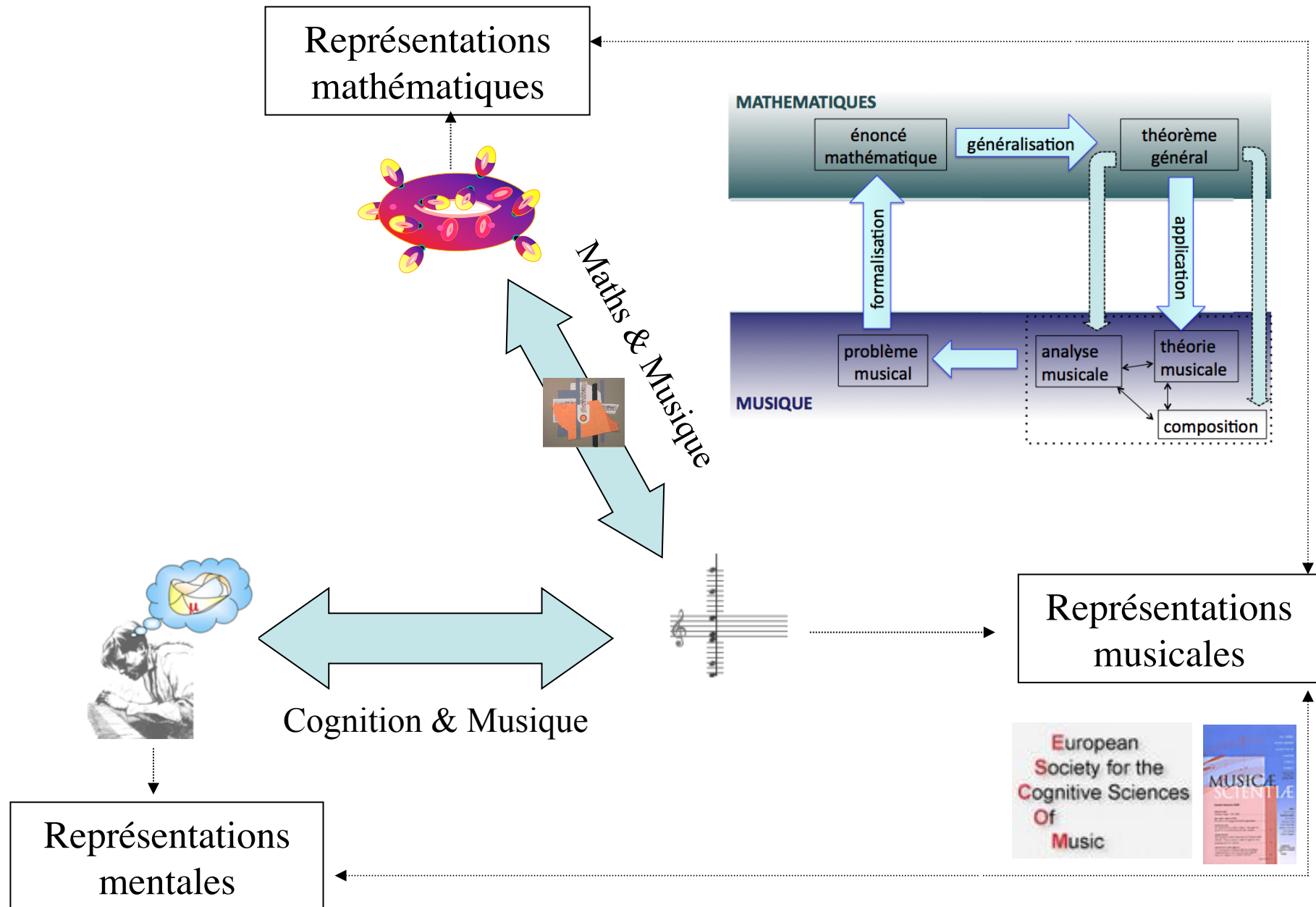
Quelle est la place de la cognition ?

<http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/Cognition.html>



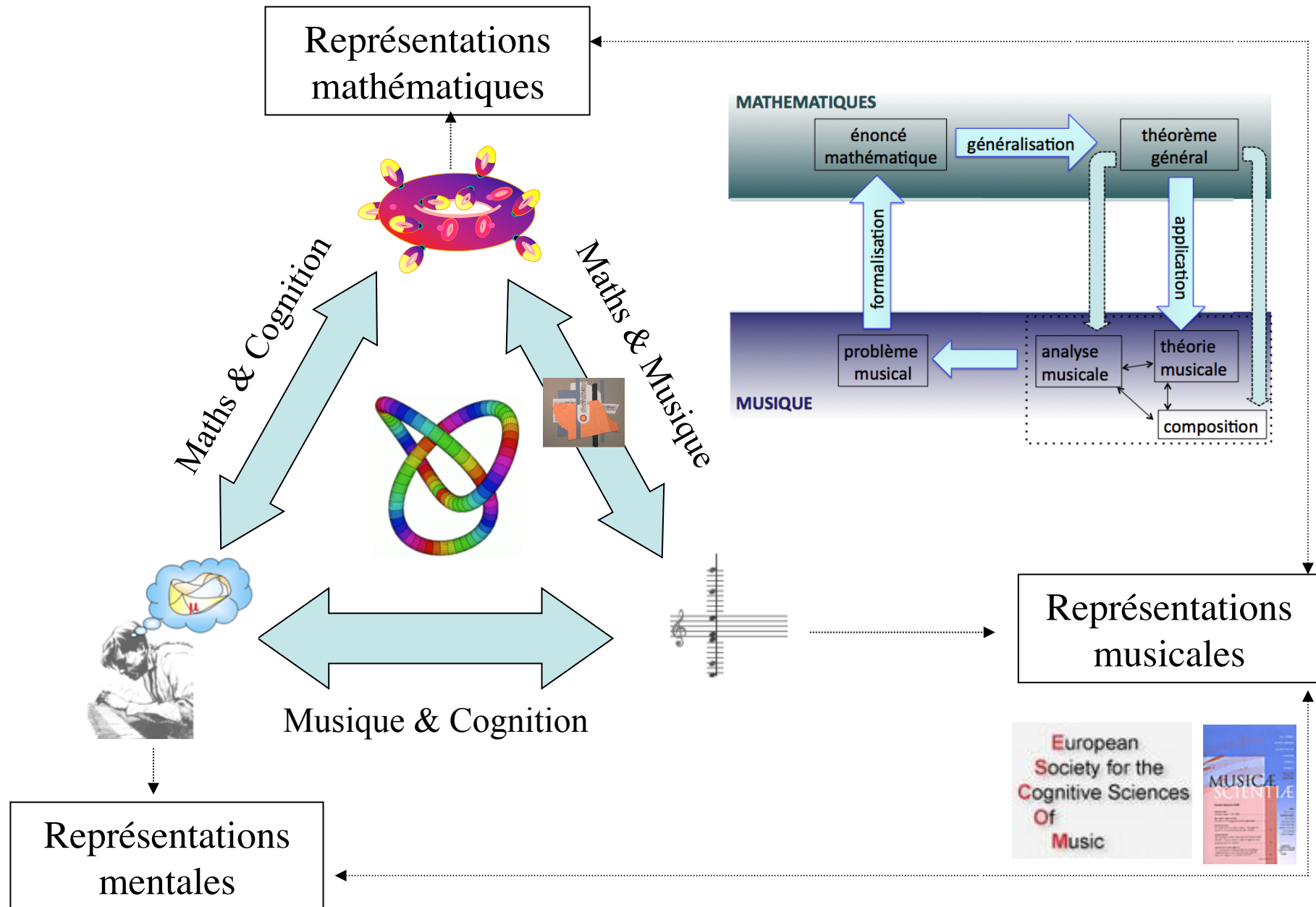
Quelle est la place de la cognition ?

<http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/Cognition.html>

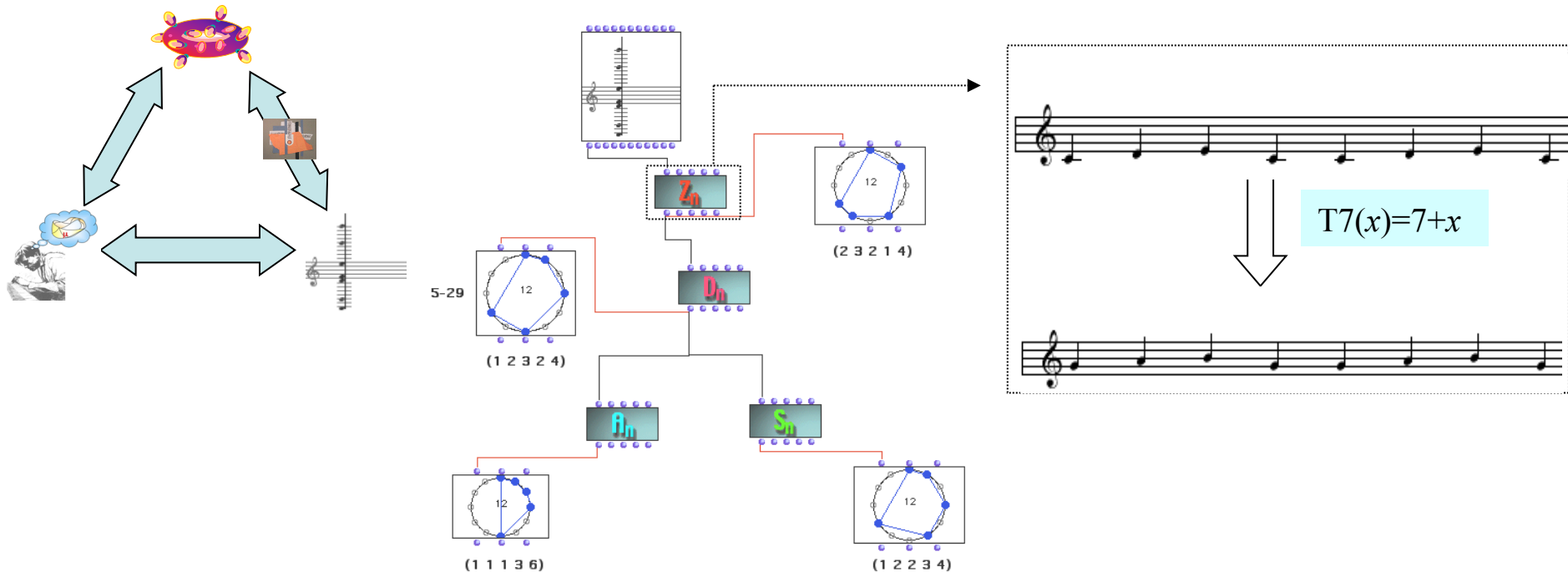


Quelle est la place de la cognition ?

<http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/Cognition.html>



Approche paradigmatique et perception



The nature of a given geometry is [...] defined by the *reference* to a determinate **group** and the way in which spatial forms are related within that type of geometry. [Cf. *Felix Klein Erlangen Program - 1872*][...] We may raise the question whether there are any concepts and principles that are, although in different ways and different degrees of distinctness, necessary conditions for both the *constitution* of the **perceptual world** and the construction of the universe of geometrical thought. It seems to me that the concept of **group** and the concept of **invariance** are such principles.



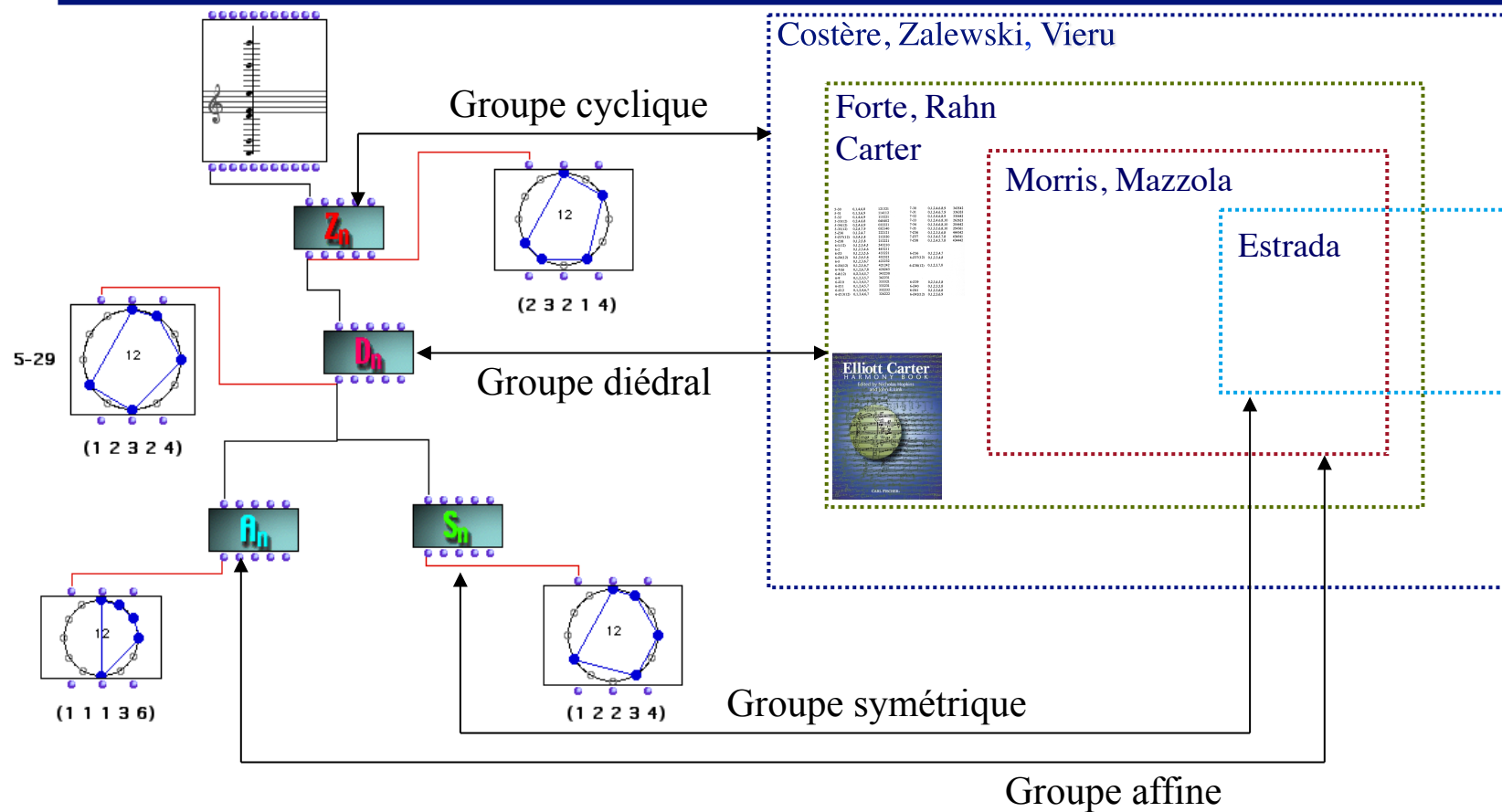
Felix Klein



Ernst Cassirer

E. Cassirer : « The concept of group and the theory of perception », 1944

Architecture paradigmatique et dualité objectale/opératoire



« [C'est la notion de groupe qui] donne un sens précis à l'idée de structure d'un ensemble [et] permet de déterminer les éléments efficaces des transformations en réduisant en quelque sorte à **son schéma opératoire** le domaine envisagé. [...] **L'objet véritable de la science est le système des relations et non pas les termes supposés qu'il relie.** [...] Intégrer les résultats - symbolisés - d'une expérience nouvelle revient [...] à créer un canevas nouveau, un groupe de transformations plus complexe et plus compréhensif »

G.-G. Granger : « Pygmalion. Réflexions sur la pensée formelle », 1947



G.-G. Granger

Approche catégorielle et cognition : de Piaget aux SEM

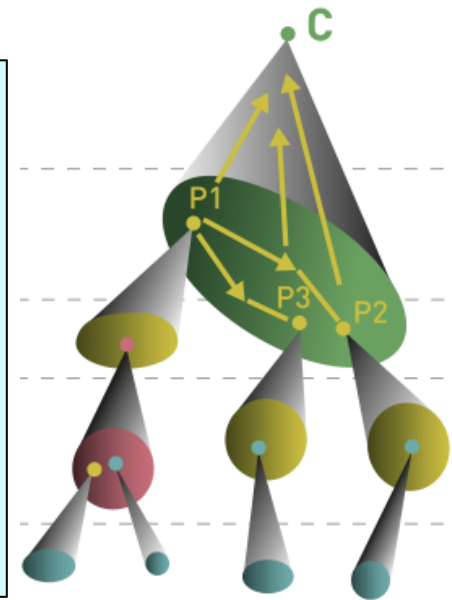
« La théorie des catégories est une théorie des constructions mathématiques, qui est macroscopique, et procède d'étage en étage. Elle est un bel exemple d'abstraction réfléchissante, cette dernière reprenant elle-même un principe constructeur présent dès le stade sensori-moteur. Le style catégoriel qui est ainsi à l'image d'un aspect important de la genèse des facultés cognitives, est un style adéquat à la description de cette genèse »



J. Piaget

Jean Piaget, Gil Henriques et Edgar Ascher, *Morphismes et Catégories. Comparer et transformer*, 1990

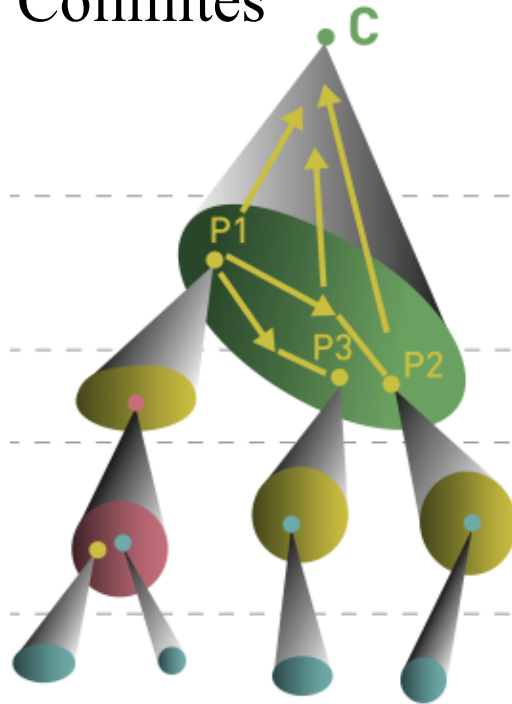
*« [...]L'émergence d'une œuvre d'art est l'expression d'une dynamique se développant dans un système hiérarchique de complexité croissante à multiples temporalités. Notamment, dans le cadre de notre modèle mathématique « les systèmes évolutifs à mémoire » (**SEM**), nous analysons l'existence d'objets multiformes émergeant dans le système sociétal d'un « monde artistique »; il pourrait s'agir de courants artistiques, issus de mouvements de pensée, de mouvements sociaux, culturels, scientifiques, technologiques. »*
(Colloque « Complexité dans les sciences et dans les arts », Ircam, 8-19 juin 2009)



A. Ehresmann et J.-P. Vanbremeersch, « Petite mathématique de la création », *L'étincelle*, n° 6, novembre 2009

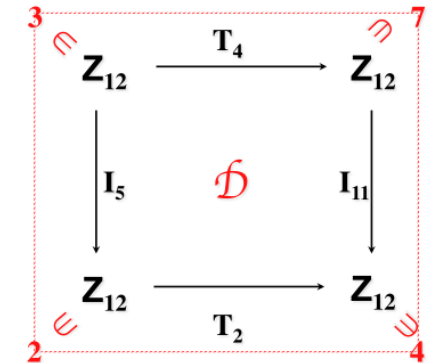
Systèmes évolutifs à mémoire et K -réseaux ?

Colimites

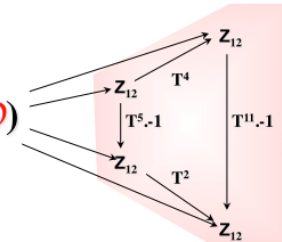


dualité

Limites

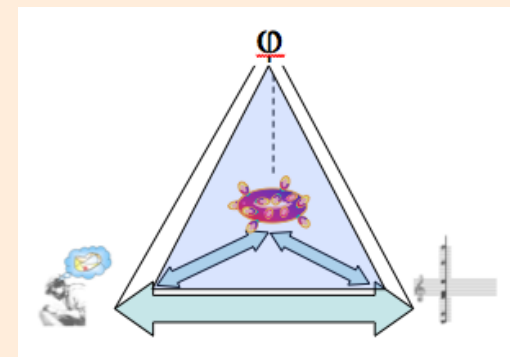


$(3, 7, 2, 4) \in \underline{\lim}(\mathcal{D})$



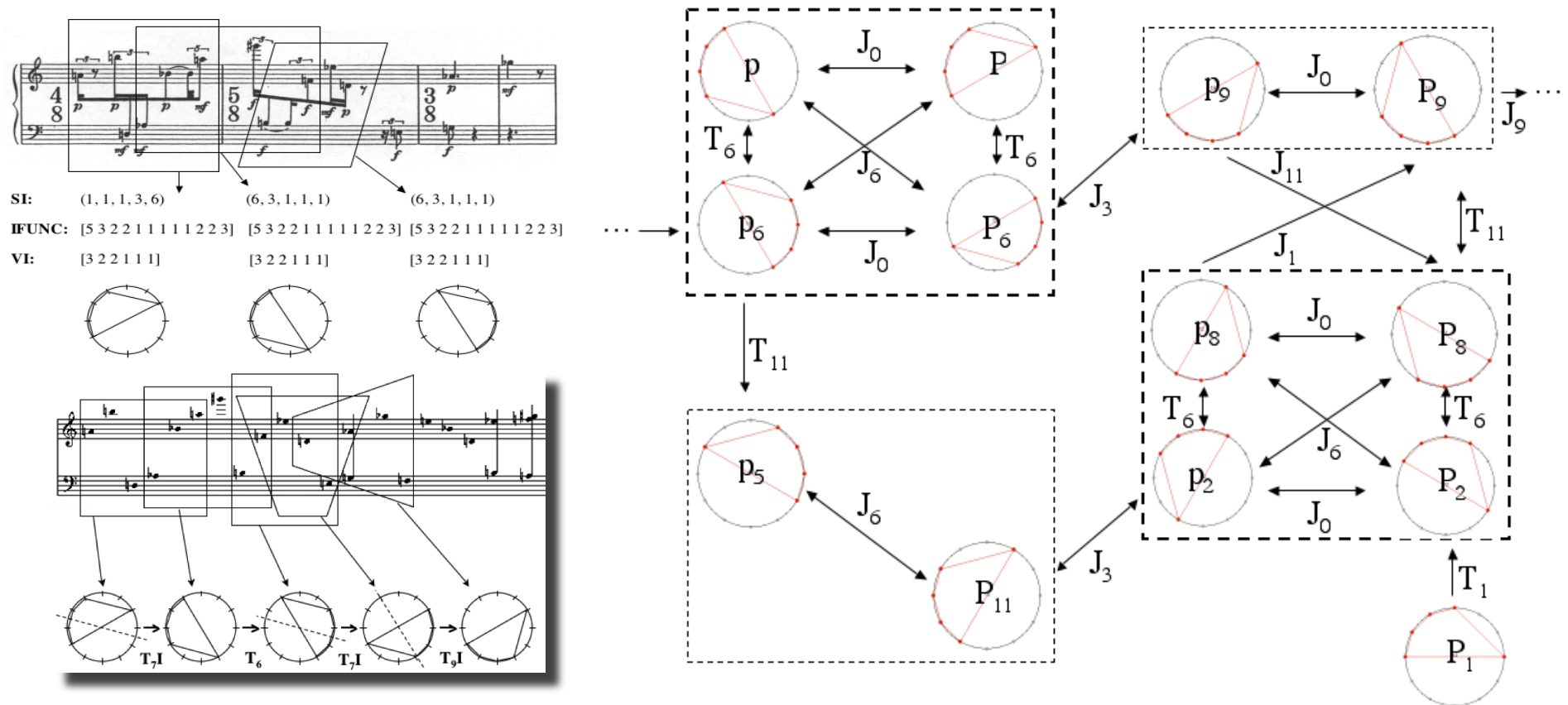
La représentation d'un état mental, tel un processus cognitif complexe, par un catneurone d'ordre supérieur conduit à une nouvelle approche du problème philosophique de l'identité entre états mentaux et états physiques du cerveau.

?



Quelle philosophie pour la recherche mathémusicale ?

Formalisation catégorielle de l'analyse transformationnelle

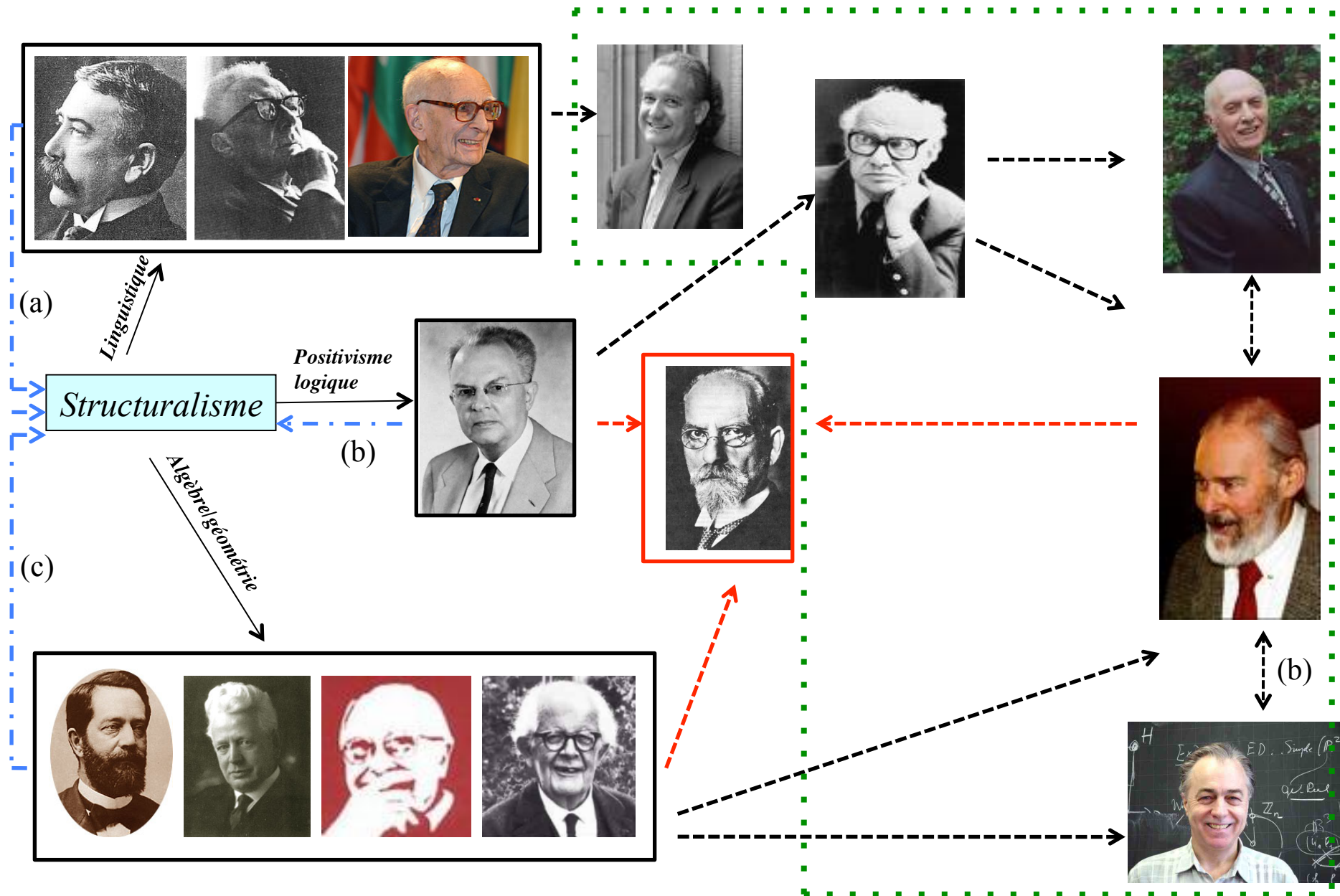


« A rational reconstruction of a work or works, which is a theory of the work or works, is an explanation not, assuredly, of the 'actual' process of construction, but of how the work or works may be construed by a hearer, how the 'given' may be 'taken' »

M. Babbitt : « Contemporary Music Composition and Music Theory as Contemporary Intellectual History », 1972

Vers un structuralisme-phénoménologique en musique ?

Repenser la généalogie du structuralisme et le rôle des structures



Vers un structuralisme-phénoménologique en musique ?

Mathématiques, perception esthétique et cognition/perception musicales

Modèles mathématiques

Perception esthétique

Cognition/perception musicales

